Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 9: Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити “*детермінант матриці n-го порядку*”, ми вживатимемо термін “*детермінант n-го порядку*”.

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.
Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом (визначником)* $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A=[a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A=[a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n\times n$-матриці, $n>1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом (визначником)* $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n\times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити “*детермінант матриці n-го порядку*”, ми вживатимемо термін “*детермінант n-го порядку*”.

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.

Іноді, щоб не говорити “*детермінант матриці n-го порядку*”, ми вживатимемо термін “*детермінант n-го порядку*”.

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.
Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.
Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке певним чином буде характеризувати її властивості. Це число називатимемо детермінантом (визначником) матриці.

Існує декілька різних підходів до введення поняття визначника, зокрема комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи), індуктивний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриць $n-1$-го порядку), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Історично поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць. Ми зупинимось на індуктивному підході.

Означення 1.2.84

Детермінантом 1×1-матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}. *Детермінантом* (*визначником*) $n \times n$-матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$.
Іноді, щоб не говорити "*детермінант матриці n-го порядку*", ми вживатимемо термін "*детермінант n-го порядку*".

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Детермінанти (визначники) матриць і їх застосування

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Перед тим, як перейти до формул для обчислення визначника другого та третього порядків сформулюємо декілька допоміжних означень.

Означення 1.2.84

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Означення 1.2.85

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Позначається A_{ij}.

Відповідно до вказаних означень можна в такий спосіб переформулювати означення детермінанта матриці (означення 1.2.83)

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Формули обчислення визначників матриць другого та третього порядків

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Схематично обчислення визначника другого порядку можна зобразити в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Формули обчислення визначників матриць другого та третього порядків

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Обчислимо детермінант матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично запам'ятати формулу для обчислення детермінанту третього порядку допомагає наступна схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:
$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A = [a_{ij}]$ n-го порядку ($n > 1$) називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема Лапласа

Означення 1.2.86

Детермінантом матриці $A=[a_{ij}]$ n-го порядку $(n>1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Означення 1.2.86 детермінанта матриці, тобто подання його через суму добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення, ще називають розкладом визначника за першим рядком. Виявляється, що сума добутків елементів довільного іншого рядка (або навіть стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення також дорівнюють визначнику матриці. Цей фундаментальний факт теорії детермінантів має назву "теорема Лапласа", доведення якого ми наведемо пізніше.

Теорема 1.2.87 (теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A=[a_{ij}]$ дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}, \qquad i=1,\ldots,n,$$
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}, \qquad j=1,\ldots,n.$$

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 7 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta=3\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}+0\cdot A_{51}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 5 & 3\\ 0 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$
Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta=3\cdot 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}8 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$
Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta=2\cdot 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}8 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=12\cdot(-1)\cdot(-8)=96.$$
Відповідь. $\Delta=96$.

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96$.

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96$.

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} + 0\cdot A_{51} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta = 2\cdot 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-1)\cdot(-8) = 96.$$
Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta=\begin{vmatrix}3&7&1&-1&4\\0&2&-2&5&3\\0&0&8&1&0\\0&0&3&3&-1\\0&0&0&2&0\end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta=3\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}+0\cdot A_{51}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&5&3\\0&8&1&0\\0&3&3&-1\\0&0&2&0\end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta=3\cdot2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}8&1&0\\3&3&-1\\0&2&0\end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta=2\cdot6\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}8&0\\3&-1\end{vmatrix}=12\cdot(-1)\cdot(-8)=96.$$

Відповідь. $\Delta=96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} + 0\cdot A_{51} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2\cdot 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-1)\cdot(-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96$.

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} + 0\cdot A_{51} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta = 2\cdot 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-1)\cdot(-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:

$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$

Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$
Відповідь. $\Delta = 96.$

Приклад 1.2.88

Обчислити
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо цей визначник за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отже, обчислення визначника п'ятого порядку звелося до обчислення визначника четвертого порядку. Розкладемо і його за першим стовпцем:
$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$
Отриманий визначник третього порядку обчислимо, розклавши його за третім рядком. Врешті-решт отримуємо:
$$\Delta = 2 \cdot 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot (-8) = 96.$$
Відповідь. $\Delta = 96$.

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

∎

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема Лапласа

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1}\cdot(-1)^{2n+2}a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

Теорема 1.2.89

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Доведення. Розглянемо доведення цієї теореми для випадку верхньої трикутної матриці. Доведення проведемо індукцією по розміру матриці. База індукції

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

виконується. Припустимо, що детермінант кожної верхньої трикутної матриці n-го порядку дорівнює добутку діагональних елементів. Розглянемо трикутну матрицю D $(n+1)$-го порядку. Розклавши детермінант цієї матриці за останнім рядком отримуємо, що він дорівнює добутку елемента останнього рядка й останнього стовпчика на його алгебраїчне доповнення, яке за індуктивним припущенням дорівнює $a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}$. Отже,

$$\det D = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{2n+2} a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{n,n}a_{n+1,n+1}$$

■

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження.
Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.
У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді
$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Для доведення теореми Лапласа використаємо два допоміжні твердження. Перше з них полягає в тому, що сума добутків елементів першого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює сумі добутків елементів першого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Лема 1.2.90

Нехай A — $n \times n$-матриця. Тоді

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією по n. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується для всіх матриць $(n-1)$-го порядку (припущення індукції). Нехай A — довільна матриця n-го порядку. Зазначимо, що ліва та права частини рівності (1) містять доданок $a_{11}A_{11}$, а тому ним можна знехтувати.

У правій частині рівності (1) i-ий доданок $a_{i1}A_{i1}$ дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1}$, де

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ■

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ■

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ■

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ■

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ∎

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1},\quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \det A = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot a_{1j} \cdot (-1)^{1+j-1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1} \cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j} = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1} \cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)+1} M_{1i,ij} = (-1)^{i+j+1} a_{i1} \cdot a_{1j} M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові.

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ∎

Теорема Лапласа

Розкладемо цей визначник за першим рядком. j-ий доданок цього розкладу має вигляд $a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}$, де позначення $M_{kl,rs}$ означає детермінант матриці, що отримується з матриці A викресленням рядків k та l і стовпців r та s. Тоді доданок правої частини рівності (1)

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \quad (1)$$

що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ набуває вигляду

$$a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot a_{1j}\cdot(-1)^{1+j-1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij}.$$

Тепер знайдемо доданок, що містить $a_{i1}\cdot a_{1j}$ у лівій частині рівності (1). Множник a_{1j} з'являється лише в j-му доданку $a_{1j}A_{1j}=a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$, де

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За припущенням індукції ми можемо здійснити розклад визначника M_{1j} за першим стовпцем. i-ий доданок цього розкладу дорівнює $a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,1j}$, а тому доданок, що містить множник $a_{i1}\cdot a_{1j}$ лівої частини рівності (1) дорівнює

$$a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot a_{i1}\cdot(-1)^{(i-1)+1}M_{1i,ij}=(-1)^{i+j+1}a_{i1}\cdot a_{1j}M_{1i,ij},$$

звідки знаходимо, що ліва та права частини рівності (1) однакові. ■

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).

За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).

За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n\times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n=2$.
Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1)\times(n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1}b_{il}M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i\neq r$ та $i\neq r+1$, то $b_{i1}=a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B)=-M_{il}(A)$ при $i\neq r$ та $i\neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$.
Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B)$ (позначення $M_{i1}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{i1}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{i1}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{i1}(B) = -M_{i1}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$.
Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки). За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$.
Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$.
Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді

$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Лема 1.2.91

Нехай A — $n \times n$-матриця, а матриця B отримується шляхом перестановки двох рядків (стовпців) матриці A. Тоді
$$\det B = -\det A.$$

Доведення. Знову доведення проведемо методом математичної індукції за розміром матриці. Твердження леми легко перевіряється для $n = 2$. Припустимо, що твердження леми виконується для всіх матриць розмірів $(n-1) \times (n-1)$. Доведемо, що тоді і для матриць n-го порядку воно виконується. Спочатку доведемо це для випадку, коли переставляються два сусідні рядки матриці A (нехай це r-й та $(r+1)$-й рядки).
За лемою 1.2.90 детермінант матриці A можна обчислити через розклад за першим стовпцем. i-й доданок цього розкладу має вигляд $(-1)^{i+1} b_{il} M_{il}(B)$ (позначення $M_{il}(B)$ означає мінор елемента i-го рядка та j-го стовпця матриці B). Якщо $i \neq r$ та $i \neq r+1$, то $b_{i1} = a_{i1}$ і $M_{il}(B)$ є детермінантом $(n-1)$-го порядку, що збігається з мінором $M_{il}(A)$ за винятком двох сусідніх рядків, що переставлено. Але тоді за припущенням індукції $M_{il}(B) = -M_{il}(A)$ при $i \neq r$ та $i \neq r+1$.

Теорема Лапласа

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Теорема Лапласа

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r + 1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r + 1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r + 1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r + 1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Теорема Лапласа

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Теорема Лапласа

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Теорема Лапласа

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r + 1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r + 1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r + 1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r + 1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Якщо $i = r$, то $b_{i1} = a_{r+1,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r+1,1}(A)$. Тоді r-й доданок у розкладі $\det B$ має такий вигляд:

$$(-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) = (-1)^{r+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) = -(-1)^{(r+1)+1} a_{r+1,1} M_{r+1,1}(A).$$

Аналогічно, якщо $i = r+1$, то $b_{i1} = a_{r,1}$ і $M_{i1}(B) = M_{r,1}(A)$ та $r+1$-й доданок в розкладі $\det B$ дорівнює

$$(-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) = (-1)^{r} a_{r,1} M_{r,1}(A) = -(-1)^{r+1} a_{r1} M_{r1}(A).$$

Іншими словами, r-й та $(r+1)$-й доданки в розкладі $\det B$ за першим стовпцем протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, відповідно з $(r+1)$-им та r-им доданками розкладу $\det A$ за першим стовпцем.

Теорема Лапласа

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\
&\quad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\
&\quad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.
\end{aligned}$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A. ■

Теорема Лапласа

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\
&\quad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\
&\quad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.
\end{aligned}$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A. ∎

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\ &\quad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\ &\quad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.\end{aligned}$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s ($r < s$), можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) +$$

$$+ (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) -$$

$$-(-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s ($r < s$), можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Теорема Лапласа

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\
&\quad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\
&\quad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.
\end{aligned}$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$
\begin{aligned}
\det B = {} & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) = \\
& = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) + \\
& \qquad + (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) = \\
& = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) - \\
& \qquad - (-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) = \\
& = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.
\end{aligned}
$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Теорема Лапласа

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B) + (-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) +$$

$$+ (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} (-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) -$$

$$- (-1)^{r+1} b_{r1}(-M_{r1}(A)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(A) = -\det A.$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s - r) - 1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(B) + (-1)^{r+1}b_{r1}M_{r1}(B) +$$

$$+ (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1}b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1}b_{r+1,1}M_{r+1,1}(A) -$$

$$-(-1)^{r+1}b_{r1}(-M_{r1}(A)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}M_{i1}(A) = -\det A.$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s $(r < s)$, можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A.

Теорема Лапласа

Підставимо усі ці результати в $\det B$ і знову застосуємо лему 1.2.90:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B) + (-1)^{r+1} b_{r1} M_{r1}(B) +$$

$$+ (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(B) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r,r+1}}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1}(-M_{i1}(A)) - (-1)^{(r+1)+1} b_{r+1,1} M_{r+1,1}(A) -$$

$$- (-1)^{r+1} b_{r1}(-M_{r1}(A)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(A) = -\det A.$$

Отже, ми довели твердження леми для випадку, коли здійснюється перестановка двох сусідніх рядків. Для доведення того, що воно справджується для перестановки двох довільних рядків лише відзначимо, що перестановку двох рядків з номерами, скажемо, r та s ($r < s$), можна здійснити шляхом $2(s-r)-1$ перестановок сусідніх рядків. Оскільки ця кількість перестановок непарна та кожна з них змінює знак детермінанта на протилежний, то зрештою детермінант матриці B буде протилежним за знаком і з детермінантом матриці A. ■

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.
Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.
Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90. ■

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1}\det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{i-1}\det B &= \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{1j}M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1}\det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{i-1}\det B &= \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i-1} \det B = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90. ■

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i-1} \det B = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i-1} \det B = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A), \end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}
\det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),
\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.

Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}
\det A = (-1)^{i-1} \det B = \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),
\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.

Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Теорема Лапласа

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.
Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned} \det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A), \end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.
Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90.

Тепер можемо перейти до доведення теореми Лапласа.
Доведення теореми Лапласа. Нехай матриця B отримується з матриці A шляхом переміщення i-го рядка вгору на перше місце з допомогою $i-1$ перестановки сусідніх рядків матриці. За лемою 1.2.91

$$\det B = (-1)^{i-1} \det A.$$

Але $b_{ij} = a_{ij}$ і $M_{1j}(B) = M_{ij}(A)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{aligned}
\det A = (-1)^{i-1} \det B &= \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} M_{1j}(B) = \\
&= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij}(A) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A),
\end{aligned}$$

тобто ми одержали формулу розкладу детермінанта матриці A за i-м рядком.
Доведення розкладу детермінанта за стовпцем аналогічне з урахуванням леми 1.2.90. ■

Дякую за увагу!