Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 8: Ще про системи лінійних рівнянь

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці A на вектор $\vec{x}$* (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці* A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці A на вектор $\vec{x}$* (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці* A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці* A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці* A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці A на вектор $\vec{x}$* (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Означення 1.2.73

Якщо A є $m \times n$-матрицею з вектор-стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то *добутком матриці* A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \qquad (2)$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Ще про системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Ще про системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Ще про системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Ще про системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна подати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{2}$$

Останню рівність називатимемо *векторною формою запису системи лінійних рівнянь* (1).

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \qquad (3)$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Ще про системи лінійних рівнянь

Якщо ж головну матрицю системи (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

позначити через A і ввести вектор невідомих

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то систему (1) можна подати у так званому *матрично-векторному вигляді*

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{3}$$

Однорідна система лінійних рівнянь у матрично-векторній формі, очевидно, набуває вигляд

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;

2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;

2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;

2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;

2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;

2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Властивості введеної операції множення матриці на вектор викладені в наступній теоремі, доведення якої ми пропонуємо читачам виконати самостійно.

Теорема 1.2.74

Нехай A — $m \times n$-матриця, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u}$.

Крім цього, зазначимо, що результатом добутку матриці A на вектор e_j (вектор, j-та координата якого дорівнює 1, а решта — 0) є j-ий стовпець матриці A.

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ■

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ■

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ■

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ■

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ◻

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною.

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд
$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$
Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що
$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$
тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.
Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що
$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$
а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною.

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною.

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною.

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ∎

Виявляється, що ранг матриці дозволяє перевірити на сумісніть довільну систему лінійних рівнянь.

Теорема 1.2.75 (теорема Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи збігався з рангом її розширеної матриці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь, векторна форма якої має вигляд

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Із її сумісності випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

тобто вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Отже, системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ еквівалентні, тобто їхні лінійні оболонки збігаються, а тому мають однаковий ранг.

Достатність. Оскільки (стовпцеві) ранги головної та розширеної матриць збігаються, то ранг системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ дорівнює рангу системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$. Це означає, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тому існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а це і означає, що $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком системи, тобто вона є сумісною. ■

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{0},$$
де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що
$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$
Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор
$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$
і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо
$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$
Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{0},$$
де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що
$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$
Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор
$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$
і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо
$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$
Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ■

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Підпростори, пов'язані з матрицями

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\operatorname{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\operatorname{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{0},$$
де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що
$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$
Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор
$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$
і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо
$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$
Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ∎

Означення 1.2.76

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Простором рядків* матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A; *простором стовпців* матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

де A — $m \times n$-матриця.

Теорема 1.2.77

Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — деякі два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$. Це означає, що

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Але тоді за теоремою 1.2.74 про властивості добутку матриць на вектор

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}$$

і для довільного $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0}.$$

Отже, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь замкнена відносно операції додавання та множення на число, а тому є підпростором простору $\mathbb{R}^n$. ■

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\mathrm{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\mathrm{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\mathrm{nullity}(A) = \dim(\mathrm{null}(A))$.

Означення 1.2.78

Нехай A — $m \times n$-матриця. *Нуль-простором* матриці A називається підпростір $\operatorname{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

З вище сказаного випливає, що рядковий ранг матриці A є розмірністю простору рядків цієї матриць $\dim(\operatorname{row}(A))$, а стовпцевий ранг — розмірністю простору стовпців $\dim(\operatorname{col}(A))$. Розмірність нуль-простору матриць називається *дефектом* матриці та позначається $\operatorname{nullity}(A) = \dim(\operatorname{null}(A))$.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ■

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} : \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} : \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ■

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4).

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді
$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$
тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):
$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$
Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$
і відповідну до неї однорідну систему
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то
$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$
— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ∎

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{4}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.79

Якщо $\vec{x}$ — деякий частковий (фіксований) розв'язок системи (4), Z — множина всіх розв'язків системи (5), то

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

— множина всіх розв'язків системи (4).

Доведення. Нехай $\vec{z}$ — деякий розв'язок системи (5). Тоді

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

тобто $\vec{z} + \vec{x}$ — деякий розв'язок системи (4). З іншого боку, різниця двох розв'язків системи (4) є розв'язком системи (5):

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Тобто для кожного розв'язку $\vec{x}_1$ системи (4) можна вказати такий розв'язок системи (5), що $\vec{x}_1 = \vec{z} + \vec{x}$. Отже, множина

$$\{\vec{z} + \vec{x} \colon \vec{z} \in Z\}$$

збігається з усією множиною розв'язків системи (4). ■

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Зв'язок між розв'язками неоднорідної та однорідної систем лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \qquad (4)$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \qquad (5)$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \, \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{4}$$
$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{5}$$

З останньої теореми випливає такий спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних рівнянь (4):

1) підібрати один з розв'язків цієї системи;
2) знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь;
3) до знайденого розв'язку системи (4) додати по черзі усі розв'язки системи (5), і в результаті отримаємо усі розв'язки системи (4).

Означення 1.2.80

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \vec{u} \in U\}$$

називається *лінійним многовидом* простору $\mathbb{R}^n$, який утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Отже, множина всіх розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є лінійний многовид $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частковий розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$x_1 = \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,$$
$$x_2 = \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_r = \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.$$

Ми показали, що множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Цей підпростір має свій базис. Ті розв'язки однорідної системи, які утворюють базис, називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1.2.81

Нехай A — $m \times n$-матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

містить рівно $n - r$ векторів.

Доведення. Якщо привести матрицю A до зведеної східчастої форми, то вона міститиме r ненульових рядків, а отже r основних змінних, які виражаються через $n - r$ вільних змінних. Не порушуючи загальності вважатимемо, що основними є змінні $x_1, \ldots, x_r$, а решта — вільні, тоді

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}x_n,\\
x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}x_n.
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\alpha_1 = \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n,$$
$$\alpha_2 = \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_r = \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$1, 0, 0, \ldots, 0;$$
$$0, 1, 0, \ldots, 0;$$
$$\ldots$$
$$0, 0, 0, \ldots, 1.$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\vec{s}_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{s}_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{s}_{n-r} = (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n,\\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{aligned}
&1, 0, 0, \ldots, 0;\\
&0, 1, 0, \ldots, 0;\\
&\ldots\\
&0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{aligned}$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\alpha_1 = \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n,$$
$$\alpha_2 = \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_r = \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$1, 0, 0, \ldots, 0;$$
$$0, 1, 0, \ldots, 0;$$
$$\cdots$$
$$0, 0, 0, \ldots, 1.$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\vec{s}_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{s}_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{s}_{n-r} = (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n, \\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{gathered}
1, 0, 0, \ldots, 0; \\
0, 1, 0, \ldots, 0; \\
\ldots \\
0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{gathered}$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n, \\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{aligned}
&1, 0, 0, \ldots, 0; \\
&0, 1, 0, \ldots, 0; \\
&\ldots \\
&0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{aligned}$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n, \\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{aligned}
&1, 0, 0, \ldots, 0; \\
&0, 1, 0, \ldots, 0; \\
&\ldots \\
&0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{aligned}$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n,\\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{aligned}
&1, 0, 0, \ldots, 0;\\
&0, 1, 0, \ldots, 0;\\
&\ldots\\
&0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{aligned}$$

Отримаємо $n-r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Якщо вільним змінним надати значень $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, то отримаємо деякий розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \gamma_{11}\alpha_{r+1} + \gamma_{12}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{1,n-r}\alpha_n,\\
\alpha_2 &= \gamma_{21}\alpha_{r+1} + \gamma_{22}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{2,n-r}\alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_r &= \gamma_{r1}\alpha_{r+1} + \gamma_{r2}\alpha_{r+2} + \cdots + \gamma_{r,n-r}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Надамо вільним змінним послідовно таких значень:

$$\begin{gathered}
1, 0, 0, \ldots, 0;\\
0, 1, 0, \ldots, 0;\\
\ldots\\
0, 0, 0, \ldots, 1.
\end{gathered}$$

Отримаємо $n - r$ розв'язків системи:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}
$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ■

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ∎

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$
\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}
$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ∎

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ∎

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ■

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$.

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ∎

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\vec{s}_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{s}_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{s}_{n-r} = (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ∎

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$.

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \dots, 0),\\ \vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \dots, 0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \dots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \dots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$.

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\vec{s}_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{s}_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{s}_{n-r} = (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$.

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$.

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ■

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\vec{s}_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{s}_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{s}_{n-r} = (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ■

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{s}_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{s}_{n-r} &= (\gamma_{1,n-r}, \gamma_{2,n-r}, \ldots, \gamma_{r,n-r}, 0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Цей набір розв'язків є лінійно незалежною системою векторів. Окрім цього, кожний інший розв'язок системи лінійно виражається через ці розв'язки. Справді, нехай

$$\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

— довільний розв'язок системи. Маємо:

$$\alpha_{r+1}\vec{s}_1 + \alpha_{r+2}\vec{s}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{s}_{n-r} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{s},$$

тобто вектор $\vec{s}$ лінійно виражається через вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$. Тому система векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-r}$ — базис підпростору розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$. ■

Наслідок 1.2.82

Якщо A — $m \times n$-матриця, то сума рангу та ядра цієї матриці дорівнює n.

Дякую за увагу!