Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік

Лекція 7: Матриці. Поняття оберненої матриці

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n-го порядку, заданих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix},$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n, щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Поняття оберненої матриці

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише едина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Поняття оберненої матриці

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Поняття оберненої матриці

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність
$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді
$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$
що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Поняття оберненої матриці

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність
$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді
$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$
що суперечить припущенню. ∎

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ∎

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різна обернені матриці A' і A''. Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Поняття оберненої матриці

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Поняття оберненої матриці

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Поняття оберненої матриці

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Поняття оберненої матриці

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1}. Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді.

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ca & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ∎

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна.

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна.

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
3. Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1}, потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ∎

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ∎

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ∎

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ∎

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ∎

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X, що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $\mathrm{r}(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&3&1\\2&1&1&2&-1\\-2&-1&-1&-2&1\end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&3&1\\2&1&1&2&-1\\-2&-1&-1&-2&1\end{bmatrix}\sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&-3&-3&-5&-9\\0&-3&-5&-6&-11\\0&3&5&6&11\end{bmatrix}\sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2, а до четвертого — перший рядок помножений на 2:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\mathrm{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\mathrm{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\operatorname{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1, а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\mathrm{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\mathrm{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$
$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$
$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{gathered} \vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{gathered}$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Поняття оберненої матриці

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Поняття оберненої матриці

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p, то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожний вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p. Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p, \\ \vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p. \end{aligned}$$

Поняття оберненої матриці

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$
$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$
$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,\\
\vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.
\end{aligned}
$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$
\begin{aligned}
a_{p+1,1} &= c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{p+1,n} &= c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},\\
a_{p+2,1} &= c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{p+2,n} &= c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m,1} &= c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m,n} &= c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.
\end{aligned}
$$

Поняття оберненої матриці

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,\\
\vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.
\end{aligned}
$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$
\begin{aligned}
a_{p+1,1} &= c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{p+1,n} &= c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},\\
a_{p+2,1} &= c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{p+2,n} &= c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m,1} &= c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m,n} &= c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.
\end{aligned}
$$

Поняття оберненої матриці

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{p+1} &= c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,\\
\vec{v}_{p+2} &= c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{v}_m &= c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.
\end{aligned}$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$\begin{aligned}
a_{p+1,1} &= c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{p+1,n} &= c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},\\
a_{p+2,1} &= c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{p+2,n} &= c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m,1} &= c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m,n} &= c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.
\end{aligned}$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$
$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$
$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).$$

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$
$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).$$

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,n}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$
$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,n}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,n}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).$$

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. $\blacksquare$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).
\end{aligned}
$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

Поняття оберненої матриці

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),\\ \vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).\end{aligned}$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

Поняття оберненої матриці

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).
\end{aligned}
$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

Поняття оберненої матриці

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).
\end{aligned}$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

Поняття оберненої матриці

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}), \\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).
\end{aligned}
$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \ldots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \ldots, c_{m,2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \ldots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \ldots, c_{m,p}).
\end{aligned}$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p}).
\end{aligned}
$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \dots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ∎

Поняття оберненої матриці

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= (\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^{p}, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1}),\\
\vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\vec{u}_p &= (0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p}).
\end{aligned}
$$

Ця система векторів лінійно незалежна (подумайте чому). З іншого боку, j-й стовпець матриці A можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації:

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2 + \dots + a_{pj}\vec{u}_p,$$

що і треба було довести. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).
Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r.
Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ∎

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).
Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r.

Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).
Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r.
Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$.

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p, а стовпцевий — s. Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leqslant p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).
Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A. Її рядковий ранг дорівнює s, а стовпцевий — r. Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leqslant s$. Таким чином, $p = s$. ■

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$
Це означає, що існує така матриця
$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix},$$
що $AX = XA = I$. Маємо:
$$AX = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$
звідки
$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A. Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n.

Достатність. Нехай дано матрицю n-го порядку A, ранг якої дорівнює n. Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \cdots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \cdots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n, а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему
$$B\vec{x} = \vec{0}$$
як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:
$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$
Маємо:
$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$
Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:
$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$
звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A:

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \qquad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n. Тоді за доведеним вище існує така матриця C, що $BC = I$.
Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$
$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A.

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

1) матриця A — оборотна;
2) ранг матриці A дорівнює n;
3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I.

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n-го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.6(i));
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (друга частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (перша частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Поняття оберненої матриці

Множина оборотних матриць порядку n над полем $\mathbb{R}$ з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці
$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці
$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A, E_2A, E_3A, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1, E_2, E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2. Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \ldots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \ldots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \ldots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_kE_{k-1}\dots E_2E_1A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_kE_{k-1}\dots E_2E_1 = E_kE_{k-1}\dots E_2E_1I = E_kE_{k-1}\dots E_2E_1AA^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожну оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_kE_{k-1}\dots E_2E_1A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, отримуємо:

$$E_kE_{k-1}\dots E_2E_1 = E_kE_{k-1}\dots E_2E_1I = E_kE_{k-1}\dots E_2E_1AA^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукання оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A, її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A:

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\6&2&1\\5&1&3\end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\6&2&1&0&1&0\\5&1&3&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&-5&-6&1&0\\0&1&-2&-5&0&1\end{array}\right]\sim$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&2&-5&-6&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&1&-4&-1&2\end{array}\right].$$
Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}5&1&-2\\-13&-2&5\\-4&-1&2\end{bmatrix}.$$
Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\6&2&1\\5&1&3\end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\6&2&1&0&1&0\\5&1&3&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&-5&-6&1&0\\0&1&-2&-5&0&1\end{array}\right]\sim$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&2&-5&-6&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&1&-4&-1&2\end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}5&1&-2\\-13&-2&5\\-4&-1&2\end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$
Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\6&2&1\\5&1&3\end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\6&2&1&0&1&0\\5&1&3&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&-5&-6&1&0\\0&1&-2&-5&0&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&2&-5&-6&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-5&0&1\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&-1&4&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&1&-2\\0&1&0&-13&-2&5\\0&0&1&-4&-1&2\end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}5&1&-2\\-13&-2&5\\-4&-1&2\end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$
Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким чином, отримуємо, що
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гуасса* знаходження оберненої матриці.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x}=\vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n\times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x})=(A^{-1}A)\vec{x}=I\vec{x}=\vec{x},$$

а тому

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad\ \ x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad\ + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \phantom{{}-3x_2} + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} \qquad x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{9}{2} & 7 & -\dfrac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \dfrac{3}{2} & -2 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{9}{2} & 7 & -\dfrac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \dfrac{3}{2} & -2 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Дякую за увагу!