

Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік



Лекція 7: Матриці. Поняття оберненої матриці

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається **одиничною**. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається **одиничною**. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається **одиничною**. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається *одиничною*. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць n -го порядку, заданих над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Матриця n -го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n],$$

де

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

— одиничні вектори (орти), називається **одиничною**. Вона позначається через I (або I_n , щоб підкреслити розмірність). Назва цієї матриці зумовлена тим, що для довільної квадратної матриці A виконується тотожність

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Означення 1.2.56

Матриця A' називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема 1.2.57

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише єдина.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A'' . Тоді

$$A' = A' \cdot I = A' \cdot (A \cdot A'') = (A' \cdot A) \cdot A'' = I \cdot A'' = A'',$$

що суперечить припущенню. ■

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Приклад 1.2.58

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до матриці A . Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Запишемо останню рівність у вигляді системи

$$\begin{cases} a+c=1; \\ 2(a+c)=0; \\ b+d=0; \\ 2(b+d)=1. \end{cases}$$

Ця система є несумісною. Таким чином, матриця A оберненої не має.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} . Матриця, до якої існує обернена, називається *оборотною*.

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Теорема 1.2.59 (обернена матриця до матриці другого порядку)

Якщо $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ і $ad - bc \neq 0$, то матриця A є оборотною, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо ж $ad = bc$, то до матриці A не існує оберненої.

Доведення. Розглянемо першу частину теореми. Безпосередньо обчислимо

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Аналогічно маємо, що

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ac + ca & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Доведення другої частини теореми наводити не будемо, оскільки це твердження згодом (теорема 1.2.66) буде доведено в більш загальному вигляді. ■

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1. Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна.
- 2. Якщо A — оборотна матриця, то A^{-1} та матриця A мають однаковий детермінант.
- 3. Якщо матриці A та B мають однаковий детермінант, то матриця $A^{-1}B$ є оборотною.
- 4. Якщо A та B — оборотні матриці, то $(A^{-1})^{-1} = A$.

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

Зазначимо, що вираз $ad - bc$ називається *детермінантом* (або *визначником*) матриці

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2.60 (властивості оборотних матриць)

- 1 Якщо A — оборотна матриця, то матриця A^{-1} також оборотна, причому $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Якщо A — оборотна матриця, $c \neq 0$, то матриця cA також оборотна, причому $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- 3 Якщо квадратні матриці однакового порядку A та B є оборотними, то матриця AB також оборотна, причому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доведення. 1. Щоб знайти обернену матрицю до матриці A^{-1} , потрібно знайти таку матрицю X , що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Але якщо $X = A$, то ці рівності виконуються, а оскільки обернена матриця лише єдина, то це і є матриця A .

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Поняття оберненої матриці

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

2. Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = c \cdot \frac{1}{c}A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

і

$$\frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = \frac{1}{c} \cdot c \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I.$$

3. Щоб знайти обернену матрицю до матриці AB потрібно знайти таку матрицю X , що $(AB)X = X(AB) = I$. Але якщо підставити $X = B^{-1}A^{-1}$, то враховуючи асоціативність множення матриць отримуємо:

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Теорему доведено. ■

Означення 1.2.61

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчатій формі.

Ми позначатимемо ранг матриці A через $r(A)$ або $\text{rank}(A)$.

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до східчатої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Приклад 1.2.62

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Зведемо дану матрицю до сідчастої форми:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до другого та третього рядків перший рядок помножений на -2 , а до четвертого — перший рядок помножений на 2 :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється.

Такий ранг ми називатимемо **рядковим рангом матриці**. Аналогічно можемо ввести **стовпцевий ранг матриці** — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо **рядковим рангом матриці**. Аналогічно можемо ввести **стовпцевий ранг матриці** — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Поняття оберненої матриці

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

додамо до третього рядка другий рядок помножений на -1 , а до четвертого — третій рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

вилучимо четвертий рядок:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A) = 3$.

З означення рангу матриці $\text{rank}(A)$ випливає, що він дорівнює кількості лінійно незалежних рядків матриці, оскільки при елементарних перетвореннях кількість лінійно незалежних рядків матриці не змінюється. Такий ранг ми називатимемо *рядковим рангом матриці*. Аналогічно можемо ввести *стовпцевий ранг матриці* — це кількість лінійно незалежних стовпців цієї матриці.

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожний з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Лема 1.2.63

Якщо рядковий ранг матриці A порівнює p , то існує система з p лінійно незалежних векторів-стовпців, через які лінійно виражається кожен вектор-стовпець цієї матриці.

Доведення. Нехай ранг системи векторів-рядків $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнює p . Це означає, що базис цієї системи містить p векторів. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що базис утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Кожен з решти векторів рядків лінійно виражається через них:

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Поняття оберненої матриці

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Поняття оберненої матриці

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Поняття оберненої матриці

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Поняття оберненої матриці

$$\vec{v}_{p+1} = c_{p+1,1}\vec{v}_1 + c_{p+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+1,p}\vec{v}_p,$$

$$\vec{v}_{p+2} = c_{p+2,1}\vec{v}_1 + c_{p+2,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{p+2,p}\vec{v}_p,$$

.....

$$\vec{v}_m = c_{m,1}\vec{v}_1 + c_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + c_{m,p}\vec{v}_p.$$

Запишемо ці рівності в координатах:

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^p, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1}),$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2}),$$

.....

$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p}).$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = \left(\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^p, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1} \right),$$

$$\vec{u}_2 = \left(0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2} \right),$$

.....

$$\vec{u}_p = \left(0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p} \right).$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = (\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^p, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1}),$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2}),$$

.....

$$\vec{u}_p = (0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p}).$$

Поняття оберненої матриці

$$a_{p+1,1} = c_{p+1,1}a_{11} + c_{p+1,2}a_{21} + \cdots + c_{p+1,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+1,n} = c_{p+1,1}a_{1n} + c_{p+1,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+1,p}a_{pn},$$

$$a_{p+2,1} = c_{p+2,1}a_{11} + c_{p+2,2}a_{21} + \cdots + c_{p+2,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{p+2,n} = c_{p+2,1}a_{1n} + c_{p+2,2}a_{2n} + \cdots + c_{p+2,p}a_{pn},$$

.....

$$a_{m,1} = c_{m,1}a_{11} + c_{m,2}a_{21} + \cdots + c_{m,p}a_{p1},$$

.....

$$a_{m,n} = c_{m,1}a_{1n} + c_{m,2}a_{2n} + \cdots + c_{m,p}a_{pn}.$$

Розглянемо вектори

$$\vec{u}_1 = \left(\overbrace{1, 0, 0, \dots, 0}^p, c_{p+1,1}, c_{p+1,1}, \dots, c_{m,1} \right),$$

$$\vec{u}_2 = \left(0, 1, 0, \dots, 0, c_{p+1,2}, c_{p+1,2}, \dots, c_{m,2} \right),$$

.....

$$\vec{u}_p = \left(0, 0, 0, \dots, 1, c_{p+1,p}, c_{p+1,p}, \dots, c_{m,p} \right).$$

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану *транспоновану матрицю*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r .

Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r .

Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Теорема 1.2.64

Рядковий і стовпцевий ранги матриці збігаються.

Доведення. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, рядковий ранг якої дорівнює p , а стовпцевий — s . Нехай базис системи векторів-рядків утворюють вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, а векторів-стовпців — вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. За доведеною вище лемою кожний з векторів системи $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно виражається через вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ (такі вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ існують і вони лінійно незалежні). Тоді $s \leq p$ (в іншому випадку система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ була б лінійно залежною, що неможливо, оскільки вона є базисом).

Розглянемо так звану **транспоновану матрицю**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

до матриці A . Її рядковий ранг дорівнює s , а стовпцевий — r . Повторивши попередні маркування стосовно матриць A^T отримуємо, що $p \leq s$. Таким чином, $p = s$. ■

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :
$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :
$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :
$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, нами доведено такий факт:

Наслідок 1.2.65

Ранг довільної матриці A дорівнює рангу транспонованої матриці A^T :

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T.$$

А отже, ми тепер просто можемо говорити про ранг матриці, розглядаючи його як рядковий або стовпцевий ранг.

Теорема 1.2.66

Для того, щоб до матриці n -го порядку існувала обернена, необхідно та достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n .

Доведення. Необхідність. Нехай маємо оборотну матрицю

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

Це означає, що існує така матриця

$$X = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n],$$

що $AX = XA = I$. Маємо:

$$AX = A \cdot [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = [A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad \cdots \quad A\vec{x}_n],$$

звідки

$$A\vec{x}_1 = x_{11}a_1 + \cdots + x_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{x}_n = x_{1n}a_1 + \cdots + x_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n .

Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n .

Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n .

Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою

Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Таким чином, усі вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ лінійно виражаються через вектори-стовпці матриці A . Якщо припустити, що система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежною, то лінійно залежною мала б бути й система векторів $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, що невірно. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а це означає, що ранг матриці A дорівнює n .

Достатність. Нехай дано матрицю n -го порядку A , ранг якої дорівнює n . Шукатимемо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

таку, що $AB = I$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \end{bmatrix} = I,$$

звідки

$$A\vec{b}_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{n1}a_n = \vec{e}_1;$$

.....

$$A\vec{b}_n = b_{1n}a_1 + \dots + b_{nn}a_n = \vec{e}_n.$$

Це є n систем, які записані в матрично-векторній формі. Оскільки ранг основної матриці цих систем дорівнює n , а ранг розширеної матриці більше за n бути не може (і менше теж), то за теоремою Кронекера–Капеллі (теорема 1.2.75) усі вони сумісні, а отже існує матриця B .

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Поняття оберненої матриці

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Розглянемо систему

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

як матричну рівність. Помножимо її зліва на A :

$$AB\vec{x} = A\vec{0}.$$

Маємо:

$$(AB)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}, \quad A\vec{0} = \vec{0}.$$

Тобто $\vec{x} = \vec{0}$ і система $B\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок. Це означає, що ранг матриці B дорівнює n . Тоді за доведеним вище існує така матриця C , що $BC = I$.

Нарешті розглянемо добутки:

$$ABC = A(BC) = AI = A$$

$$ABC = (AB)C = IC = C,$$

звідки $C = A$. Отже, $AB = BA = I$, а це й означає, що матриця B є оберненою до матриці A .

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A оборотна;
- 2) ряд матриці A лінійно незалежні;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $AX = \vec{b}$ розв'язувана для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $AX = \vec{0}$ має лише тривіальний розв'язок;
- 6) рядки матриці A утворюють базис у \mathbb{R}^n .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Теорема 1.2.67 (основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) матриця A — оборотна;
- 2) ранг матриці A дорівнює n ;
- 3) стовпці матриці A лінійно незалежні;
- 4) система $A\vec{x} = \vec{b}$ є визначеною для кожного $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$;
- 5) однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має лише нульовий розв'язок;
- 6) зведена східчаста форма матриці A дорівнює одиничній матриці I .

Зауважимо, що множина $M_n(\mathbb{R})$ квадратних матриць n -го порядку разом з операціями додавання та множення матриць утворює кільце. Воно некомутативне (оскільки множення матриць некомутативне), але є кільцем з одиницею (роль одиничного елемента виконує одинична матриця I).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.10);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.10);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.6);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елементу A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.6);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це випливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (загальна теорема 1.2.6);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елементу A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Множина оборотних матриць порядку n над полем \mathbb{R} з операцією множення матриць утворює групу, яка називається *загальною лінійною групою*, (або *повною лінійною групою*) і позначається $GL_n(\mathbb{R})$. Це впливає з того, що:

- добуток двох оборотних матриць є оборотною матрицею (третя частина теореми 1.2.60);
- множення матриць асоціативне;
- одиничним елементом групи є одинична матриця I ;
- до кожної елемента A з цієї множини існує обернений A^{-1} (обернена матриця).

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається елементарною, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Означення 1.2.68

Матриця n -го порядку називається *елементарною*, якщо вона отримана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Оскільки є три типи елементарних перетворень рядків матриці, то відповідно існує три типи елементарних матриць. Розглянемо їх на прикладі.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g - 2a & h - 2b & i - 2c \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.69

Встановити, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислити добутки E_1A , E_2A , E_3A , де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Матриці E_1 , E_2 , E_3 є елементарними, оскільки матриця E_1 отримується з одиничної перестановкою першого та третього рядків, E_2 — множенням другого рядка на 3, а E_3 — додаванням до третього рядка першого, помноженого на -2 . Далі знаходимо:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g - 2a & h - 2b & i - 2c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Останній приклад наводить на думку, що множення матриці зліва на елементарну матрицю, яку отримано з одиничної матриці шляхом деякого елементарного перетворення її рядків, здійснює з вихідною матрицею таке ж саме елементарне перетворення її рядків. Виявляється, що це не випадково та виконується загальне твердження, доведення якого ми опускаємо.

Теорема 1.2.70

Нехай E — елементарна матриця n -го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n за допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A , то результатом буде матриця EA .

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожен оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, якій полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожна оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

За основною теоремою оборотних матриць (теорема 1.2.67) кожную оборотну матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної. З теореми 1.2.70 випливає, що тоді виконується рівність

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$. Помноживши останню рівність справа на A^{-1} , отримуємо:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A A^{-1} = A^{-1}.$$

Отримане співвідношення приводить до способу відшукування оберненої матриці, який полягає в наступному. Випишемо поруч задану матрицю A , її одиничну матрицю I та отримаємо розширену матрицю $[A|I]$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо цю матрицю до вигляду $[I|B]$. Тоді матриця B і є оберненою матрицею до матриці A :

$$[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}].$$

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається *методом Йордана-Гаусса* знаходження оберненої матриці.

Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці

Приклад 1.2.71

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок. Запишемо матрицю $[A|I]$ і з допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $[I|A^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запропонований метод називається **методом Йордана-Гаусса** знаходження оберненої матриці.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n -го порядку. Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею \vec{x} розміром $n \times 1$. Припустимо, що A — оборотна матриця. Тоді виконується рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Але звідси знаходимо:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x},$$

а тому

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Такий метод відшукування розв'язку системи лінійних рівнянь називається *матричним*.

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & & -3 \\ -\frac{7}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & & -3 \\ -\frac{2}{2} & 7 & -\frac{2}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & & -3 \\ -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2.72

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок. Дана система може бути записана в матрично-векторному вигляді так:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися в тому, що матриця A має обернену (зробіть перевірку самостійно), причому:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Тоді

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь. $\{(1, 0, -2)\}$.

Дякую за увагу!