

# Обчислювальна геометрія і алгебра

Олег Гутік



Лекція 2: Комплексні числа

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики.

Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .



В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

В цій лекції ми просто визначимо поле комплексних чисел. Комплексні числа відіграють важливу роль в багатьох областях математики. Ототожнимо точку  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  з формальним записом  $a + ib$ , причому для спрощення викладень формальний запис  $0 + ib$  будемо ототожнювати з  $ib$ , а запис  $i1$  — з  $i$ . Використовуючи це поняття визначимо арифметичні операції додавання “+” і множення “·” на  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Доведення теореми 1.2.8 очевидне.

### Теорема 1.2.8

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  є полем, яке позначається через  $\mathbb{C}$ , що містить множину  $\mathbb{R}$  як підполе стосовно відображення ототожнення елемента  $a$  з точкою з координатами  $(a, 0)$ .

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються **комплексними числами**. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати **уявною одиницею**.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається **дійсною частиною** комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається **уявною частиною** комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

**Комплексно спряжене** (або просто **спряжене**) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і **модуль** числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

### Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

### Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається дійсною частиною комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається уявною частиною комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Комплексно спряжене (або просто спряжене) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і модуль числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



## Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

### Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) число до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

### Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

## Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## Комплексні числа

Розглядаючи як елементи поля, елементи поля  $\mathbb{C}$  називаються *комплексними числами*. З означення операції множення комплексних чисел випливає добре відома рівність

$$i^2 = -1,$$

іншими словами, корінь квадратний з мінус одиниці  $-1$  дорівнює  $i$ . Тому надалі символ  $i$  будемо називати *уявною одиницею*.

### Означення 1.2.9

Нехай  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тоді число  $a$  називається *дійсною частиною* комплексного числа  $z$ , а дійсне число  $b$  називається *уявною частиною* комплексного числа  $z$ . Означимо функції  $\operatorname{Re}(z)$  і  $\operatorname{Im}(z)$  за формулами

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{і} \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

*Комплексно спряжене* (або просто *спряжене*) *число* до комплексного числа  $z$ , позначається  $\bar{z}$ , і *модуль* числа  $z$ , позначається  $|z|$ , визначаються за формулами

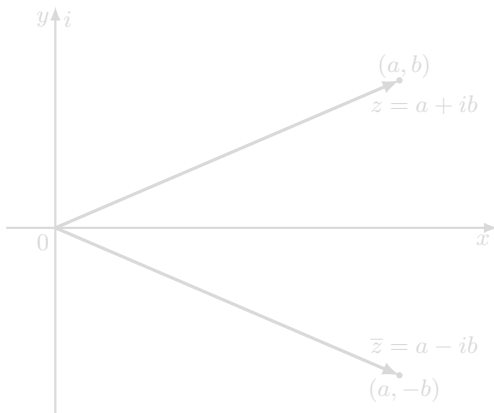
$$\bar{z} = a - ib \quad \text{і} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.



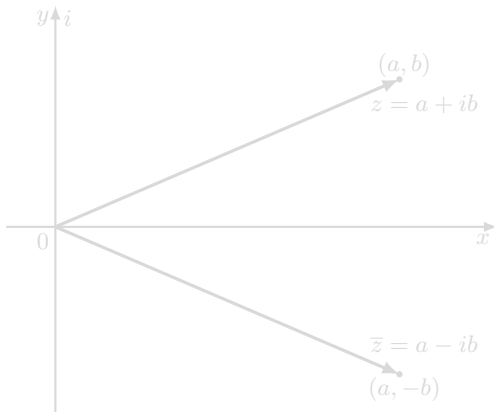


# Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.

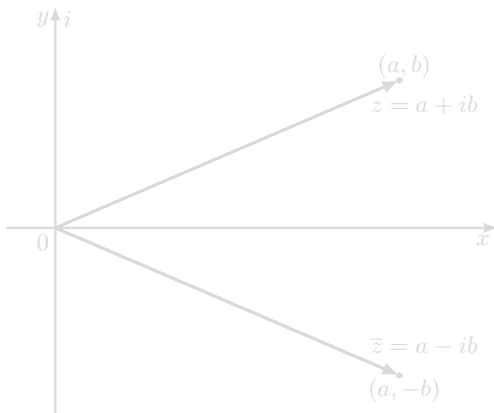


# Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.

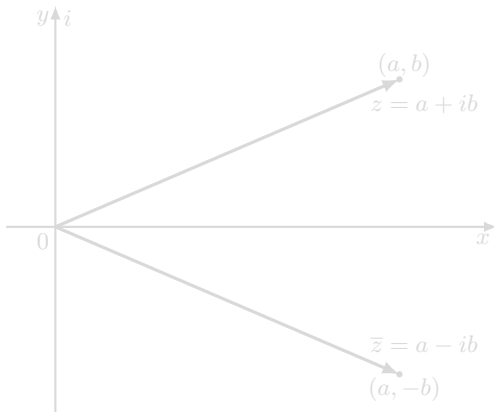


# Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.

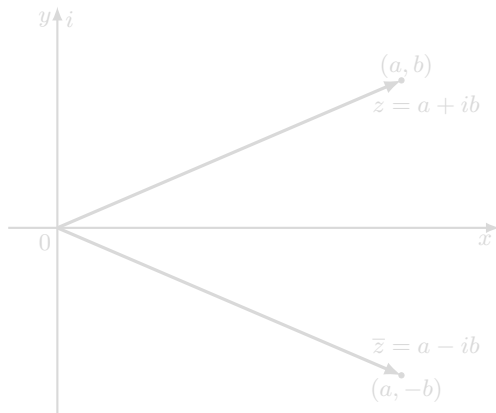


# Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.

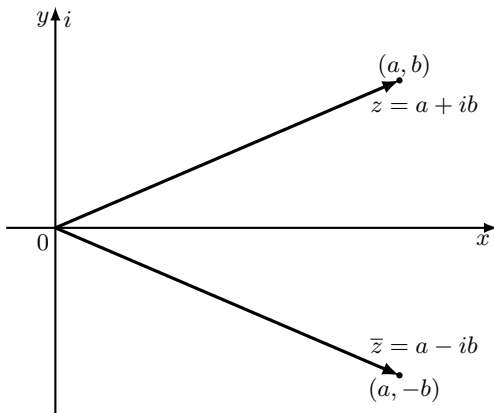


## Комплексні числа

З означення поля комплексних чисел  $\mathbb{C}$  випливає, що його можна ототожнити з точками декартової площини  $\mathbb{R}^2$  наступним чином:

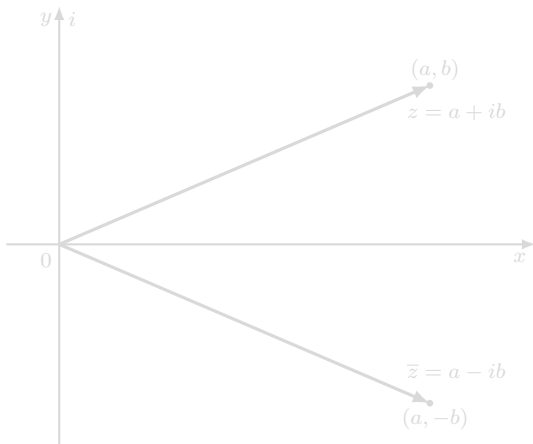
*комплексному числу  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ставимо у відповідність точку з координатами  $(a, b)$  на декартовій площині  $\mathbb{R}^2$ .*

Таке ототожнення надалі будемо називати *геометричною інтерпретацією* комплексних чисел, і вона зображена на рис.



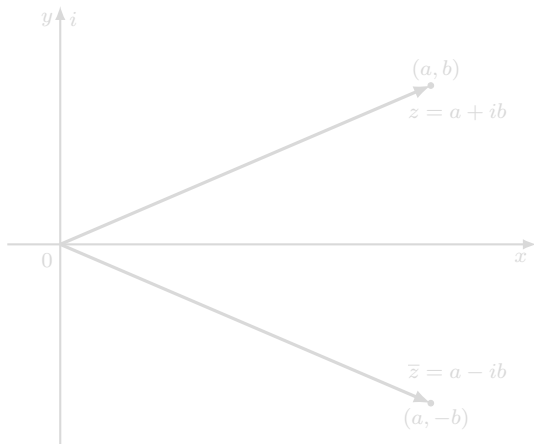
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



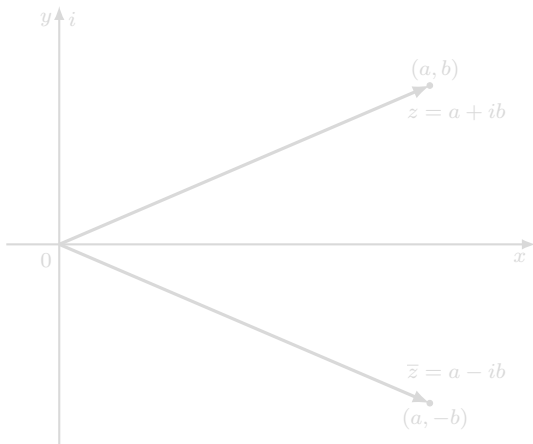
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



## Комплексні числа

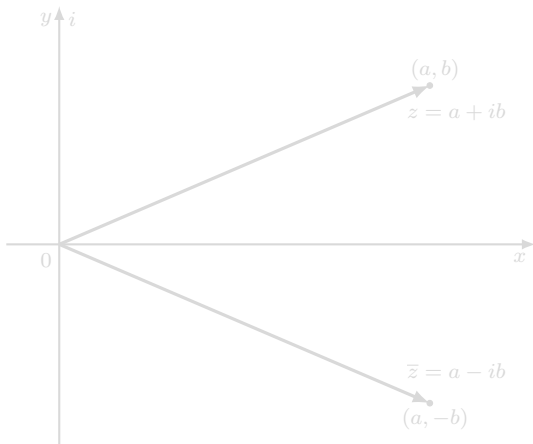
Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).





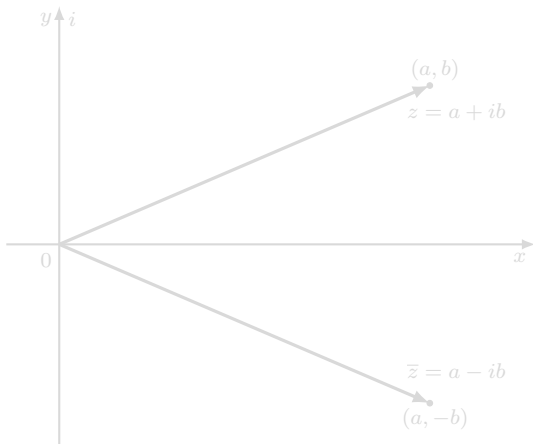
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



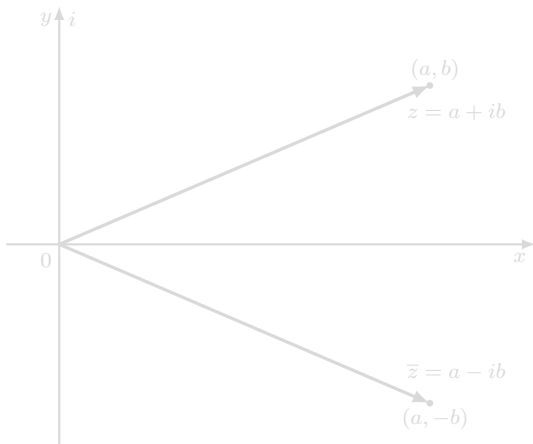
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



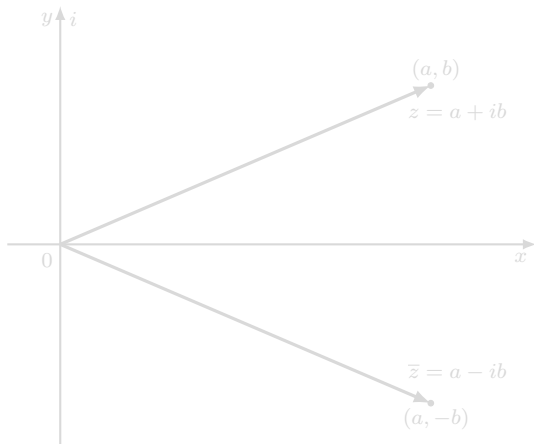
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



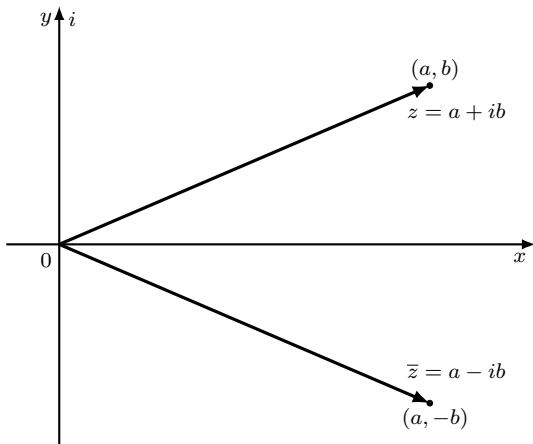
## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



## Комплексні числа

Також, в такій інтерпретації ми комплексне число  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ототожнюємо з вектором з координатами  $(a, b)$ , і неважко довести, що суму двох комплексних чисел ми можемо інтерпретувати з сумою векторів, які їм відповідають, і це ми пропонуємо довести читачеві самостійно. Також, у такому зображенні комплексних чисел вісь  $Ox$  будемо називати *дійсною* віссю, а вісь  $Oy$  — *уявною*. Легко бачити, що модуль комплексного числа  $z = a + ib$  дорівнює довжині вектора з координатами  $(a, b)$  декартової площини (див. рис.).



# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:  
 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:  
 $z \bar{z} = |z|^2$
- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:  
 $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:  
 $|z| = |\bar{z}|$
- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:  
 $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:  
 $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:
- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:
- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:
- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:
- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел випливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.



# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел випливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел випливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d).$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d).$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.



# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел випливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа

Ось три прості факти, які легко перевірити:

- (1) модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (2) добуток комплексного числа на його спряжене дорівнює квадрату його модуля:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

- (3) обернене до комплексного числа  $z = a + ib$  обчислюється за формулою:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

З цих та вище сформульованих властивостей додавання та множення комплексних чисел впливають такі їхні властивості:

- (4) модуль комплексного числа дорівнює модулю його комплексно спряженого:

$$|z| = |\bar{z}|;$$

- (5) різниця комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

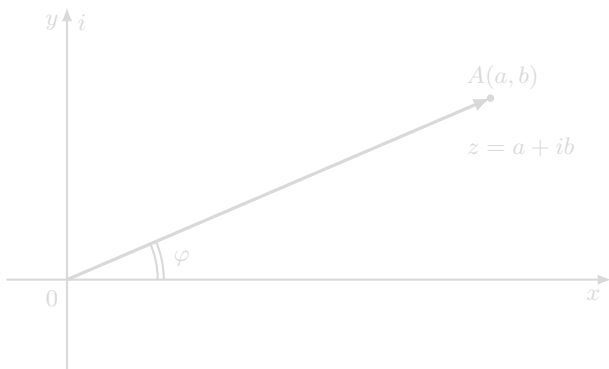
- (6) частка комплексних чисел  $z_1 = a + ib$  і  $z_2 = c + id$  обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ми пропонуємо читачеві довести твердження (1) – (6) самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).

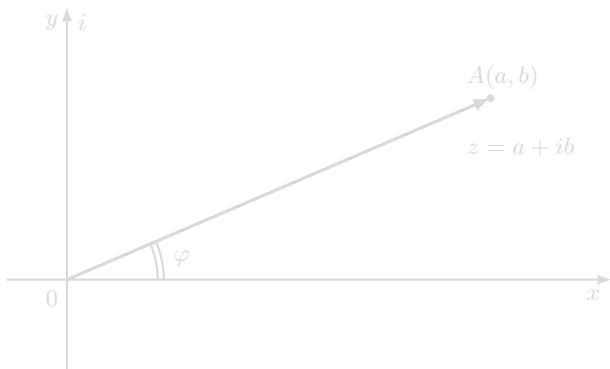


Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

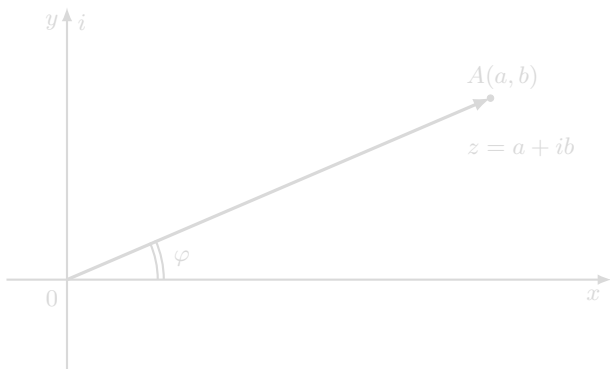
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

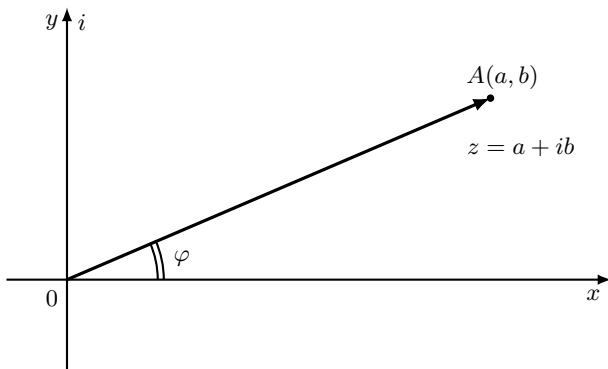
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

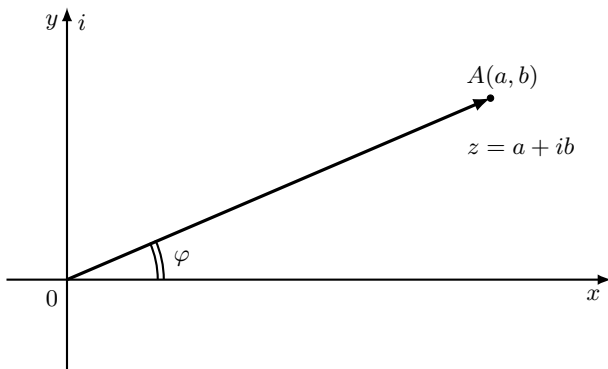
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

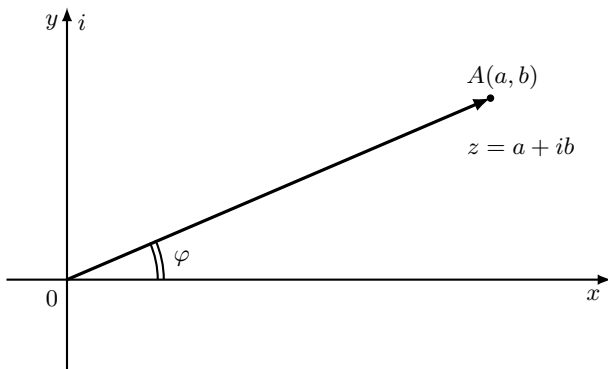
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

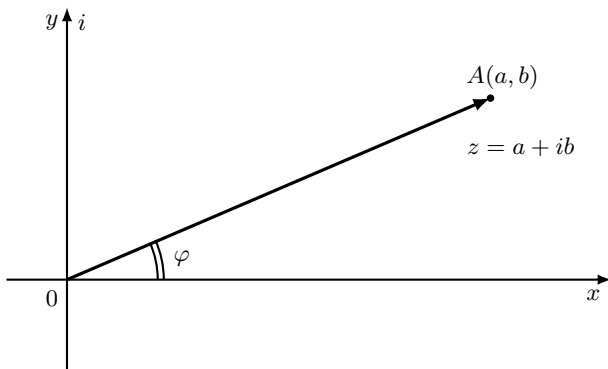
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

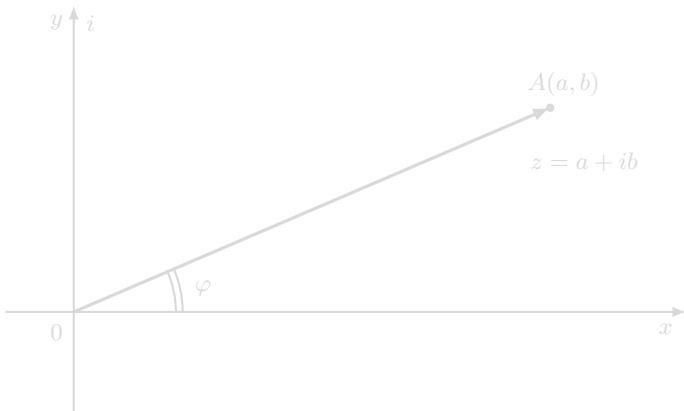
Кожному комплексному числу  $z = a + ib$  відповідає деякий вектор на площині, а саме радіус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  точки  $A(a, b)$  (див. рис.).



Очевидно, що довільний вектор (на площині, чи в просторі) визначається довжиною та напрямком. Так, зокрема, вектор на площині можна визначити однозначно його довжиною та кутом, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі  $Ox$ . Домовимося, що надалі всі кути відраховуються від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

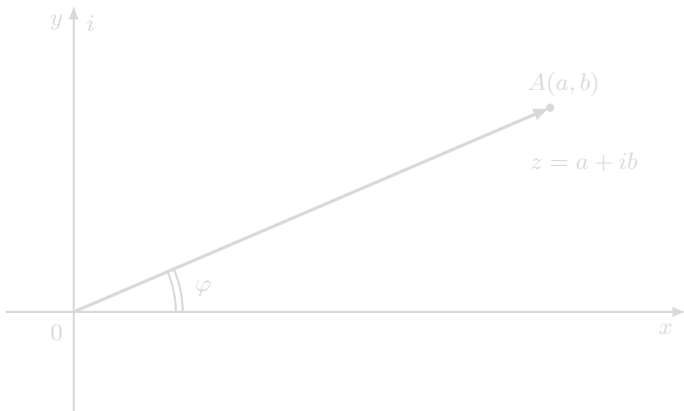
## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Якщо вектор  $\overrightarrow{OA}$  відповідає комплексному числу  $z = a + ib$ , то через  $r$  позначимо довжину вектора  $\overrightarrow{OA}$  (тобто модуль комплексного числа  $z = a + ib$ ), а через  $\varphi$  кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі  $Ox$ .



## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

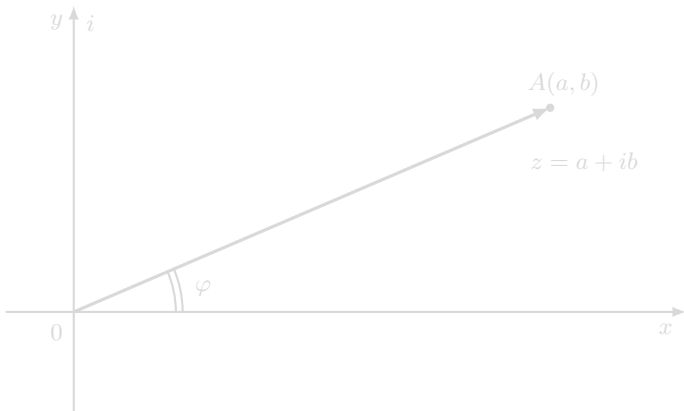
Якщо вектор  $\vec{OA}$  відповідає комплексному числу  $z = a + ib$ , то через  $r$  позначимо довжину вектора  $\vec{OA}$  (тобто модуль комплексного числа  $z = a + ib$ ), а через  $\varphi$  кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі  $Ox$ .





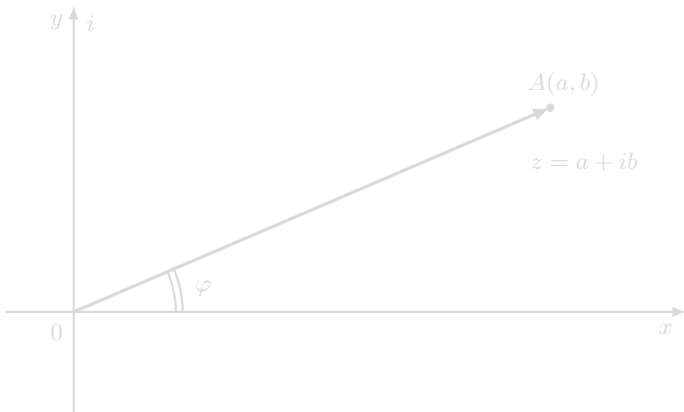
## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Якщо вектор  $\vec{OA}$  відповідає комплексному числу  $z = a + ib$ , то через  $r$  позначимо довжину вектора  $\vec{OA}$  (тобто модуль комплексного числа  $z = a + ib$ ), а через  $\varphi$  кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі  $Ox$ .



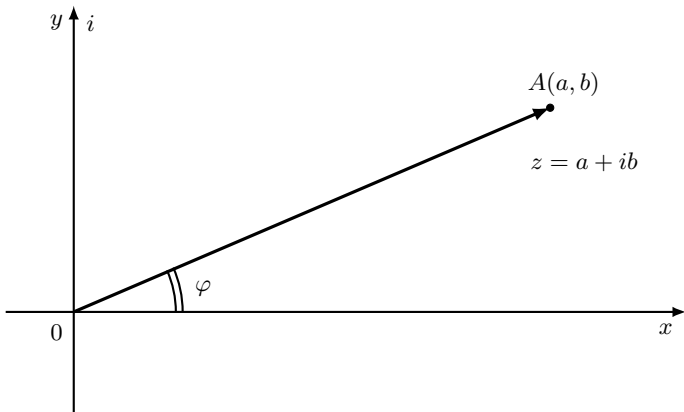
## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Якщо вектор  $\vec{OA}$  відповідає комплексному числу  $z = a + ib$ , то через  $r$  позначимо довжину вектора  $\vec{OA}$  (тобто модуль комплексного числа  $z = a + ib$ ), а через  $\varphi$  кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі  $Ox$ .



## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Якщо вектор  $\vec{OA}$  відповідає комплексному числу  $z = a + ib$ , то через  $r$  позначимо довжину вектора  $\vec{OA}$  (тобто модуль комплексного числа  $z = a + ib$ ), а через  $\varphi$  кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі  $Ox$ .



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати *аргументом* комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа*.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати *аргументом* комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа*.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати *аргументом* комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа*.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати *аргументом* комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{2}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа*.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати *аргументом* комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається *тригонометричною формою комплексного числа*.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \varphi,$$

$$b = r \sin \varphi,$$

а отже

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

У цьому випадку кут  $\varphi$  будемо називати **аргументом** комплексного числа  $z = a + ib$ . Надалі аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  будемо позначати через  $\arg z$ . Якщо  $|z| = 0$ , то аргумент  $\arg z$  числа  $z$  невизначений. Також аргумент кожного ненульового комплексного числа визначається з точністю до  $2\pi$ . Очевидно, що аргумент комплексного числа  $z = a + ib$  визначається з системи рівнянь

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Запис комплексного числа  $z = a + ib$  у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\tag{2}$$

називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .



## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, **тобто**

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Зауважимо, що число  $\varphi$  є аргументом комплексного числа  $z = a + ib$  тоді і тільки тоді, коли виконуються обидві рівності

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, для знаходження аргументу комплексного числа  $z = a + ib$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi_0$  — один з розв'язків системи (1). Таким чином, аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\tag{3}$$

Тому ми надалі вважаємо, що  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів, модуль частки — частці модулів, а аргумент — аргументу суми (різниці) комплексних чисел, тобто

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2.\end{aligned}$$

Тобто, якщо комплексні числа задано у тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Ці формули ми пропонуємо довести читачеві самостійно.

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

## Приклад 1.2.10

Комплексні числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  записати в тригонометричній формі і знайти  $z_1 \cdot z_2$  і  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Розв'язок.** Знаходимо  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ . З системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

маємо  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Отже,

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином,

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$



Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

## Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$



## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$



## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

## Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Безпосередньо з властивостей операції множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, отримуємо *формулу Муавра*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

### Приклад 1.2.11

Обчислити  $(-1 + i)^{20}$ .

**Розв'язок.** Запишемо комплексне число  $(-1 + i)$  у тригонометричній формі

$$(-1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Тоді за формулою Муавра отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left( \cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4} \right) = \\ &= 1024(\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = \\ &= 1024(-1 + 0i) = \\ &= -1024. \end{aligned}$$

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.



# Комплексні числа. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо операцію добування кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа записаного в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Припустимо, що  $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тоді за формулою Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

маємо, що

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси отримуємо  $\rho^n = r$  і  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{і} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким чином, корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ ) має  $n$  різних значень.

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$



## Приклад 1.2.12

Знайдіть  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

**Розв'язок.** Оскільки  $(-1+i) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ , то

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Дякую за увагу!