

Львівський національний університет імені Івана
Франка

Збірник практичних завдань з інформатики

Упорядник: Бугрій О.М.

Львів – 2023

ЗМІСТ

Робота № 1: Інтерполяція кубічними сплайнами

Робота № 2: Розділені різниці. Інтерполяційні многочлени Ньютона

Робота № 3: Факторіальні многочлени

Робота № 4: Знаходження алгебраїчних многочленів найкращого квадратичного наближення методом найменших квадратів

Робота № 5: Точність формул для чисельного диференціювання. Метод Рунге-Ромберга. Метод Ейткена.

Робота № 6: Складова квадратурна формула Сімпсона. Методи підвищення точності. Адаптивний алгоритм.

Робота № 7: LU -розклад. Ітераційні методи уточнення розв'язку СЛАР.

Робота № 8: Ітераційні методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Робота № 9: Чисельні методи розв'язування нелінійних рівнянь з одним невідомим

Робота № 10: Метод Хука-Дживса багатовимірної оптимізації

Лабораторна робота №1 Інтерполяція кубічними сплайнами.

Мета: вивчити метод інтерполяції кубічними сплайнами.

Основні теоретичні відомості .

Кубічний сплайн – математична модель абсолютно гнучкого, пружного та тонкого стержня. Якщо стержень закріпити в двох його кінцях з заданими кутами нахилу α і β , то стержень прийме форму, що мінімізує його потенціальну енергію. Нехай рівняння стержня визначається функцією $S(x)$. Умова рівноваги сплайна визначається рівнянням:

$$S^{(IV)}(x) = 0.$$

Легко бачити, що цій умові задовольняє алгебраїчний многочлен третього степеня.

Нехай нам задана послідовність вузлів x_0, x_1, \dots, x_n і значення деякої функції $y(x)$ в цих вузлах y_0, y_1, \dots, y_n . Ми можемо записати рівняння кубічного сплайна на інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Так як для кожного інтервалу ми матимемо інше рівняння сплайну, то ми повинні знайти $4n$ значень коефіцієнтів сплайнів. Для їх знаходження ми повинні записати систему $4n$ рівнянь.

Першу групу рівнянь ми отримаємо з умови, що наші сплайни проходять через задану сукупність вузлів:

- з умови $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, знаходимо, що $a_i = y_{i-1}$ для $i = 1, n$.

- з умови $S_i(x_i) = y_i$, знаходимо, що

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \text{ для } i = 1, n, \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Наступну групу рівнянь отримаємо з умови гладкості наших сплайнів. Для цього задамо умову неперервності перших і других похідних у вузлах x_i . Виконавши диференціювання, отримаємо вирази для похідних на i -інтервалі :

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Прирівнявши в i -му вузлі вирази для похідних сплайнів записаних для інтервалів i та $i+1$,

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$$

отримаємо $2n - 2$ рівняння:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \text{ для } i = 1; n - 1,$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1} \text{ для } i = 1; n - 1.$$

Ми отримали систему $4n - 2$ рівнянь. Ще два рівняння ми отримаємо з умов, що накладаються у крайніх вузлах. Задамо кривизну сплайна в крайніх вузлах рівною нулю, що відповідає випадку вільного кубічного сплайну:

$$S_1'''(x_0) = 0, \quad S_n'''(x_n) = 0.$$

Отримаємо, що $2c_1 = 0$ та $2c_n + 6d_n h_n = 0$.

Перейдемо до розв'язку отриманої системи. Для цього перетворимо її до трьохдіагонального вигляду.

Послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1}, \quad i = 1, n; \\ d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, n-1; \\ d_n &= \frac{-c_n}{3h_n}. \end{aligned}$$

З рівняння

$$y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_i$$

отримаємо вирази для коефіцієнтів b_i

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1, n-1; \\ b_n &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n. \end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь відносно коефіцієнтів c_i . Підставимо вирази для b_i та d_i в рівняння умови неперервності перших похідних. Отримаємо рівняння:

$$h_i c_i + 2h_i c_{i+1} + 2h_{i+1} c_{i+1} + h_{i+1} c_{i+2} = 3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

Зменшимо на одиницю індекс i :

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2, n-1.$$

Використовуючи умови в 0-му та n -му вузлах, знаходимо

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ h_{n-1} c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n) c_n &= 3 \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Отже для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_n ми отримали систему n лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_1 = 0$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = 3 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right)$$

...

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$$

...

$$h_{n-1} c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n)c_n = 3 \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \right)$$

Система рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_i має так звану трьохдіагональну матрицю і для її розв'язку ми можемо використати метод прогонки.

Знаходження розв'язку методом прогонки вимагає $(n + 1)$ операцію.

Розглянемо систему рівнянь з трьохдіагональною матрицею:

$$\begin{cases} \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = \delta_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = \delta_2 \\ \dots \\ \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i \\ \dots \\ \alpha_n x_{n-1} + \beta_n x_n = \delta_n \end{cases}$$

Метод прогонки складається з двох етапів: прямої та зворотної прогонки.

Розглянемо пряму прогонку. З першого рівняння знаходимо

$$x_1 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1} x_2 + \frac{\delta_1}{\beta_1}$$

$$\text{Введемо позначення } A_1 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1}; \quad B_1 = \frac{\delta_1}{\beta_1}.$$

В цих позначеннях ми можемо записати

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1.$$

З другого рівняння знаходимо

$$\alpha_2 (A_1 x_2 + B_1) + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = \delta_2$$

$$x_2 = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 A_1 + \beta_2} x_3 + \frac{\delta_2 - \alpha_2 B_1}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}$$

Аналогічно до першого рівняння ми можемо записати:

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2, \text{ де } A_2 = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}; \quad B_2 = \frac{\delta_2 - \alpha_2 B_1}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}$$

Можна показати, що в загальному випадку

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \text{ де } A_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i A_{i-1} + \beta_i}; \quad B_i = \frac{\delta_i - \alpha_i B_{i-1}}{\alpha_i A_{i-1} + \beta_i}$$

Після того, як ми знайшли всі коефіцієнти A_i та B_i ($i=1..n-1$), можна перейти до етапу зворотної прогонки.

Розглянемо два останні рівняння

$$\begin{cases} x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1} \\ \alpha_n x_{n-1} + \beta_n x_n = \delta_n \end{cases}$$

Знаходимо:

$$x_n = \frac{\delta_n - \alpha_n B_{n-1}}{\alpha_n A_{n-1} + \beta_n}$$

Далі послідовно знаходимо:

$$x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1}$$

$$\dots$$

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1$$

Якщо виконується умова, що $|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i|$ і хоча би для одного i виконується строга рівність, то ділення на нуль не виникає, система має єдиний розв'язок і метод прогонки є стійким відносно похибки округлення (це достатня умова).

Для перевірки правильності знайденого розв'язку можна виконати наступну процедуру. Використовуючи отриманий розв'язок системи рівнянь, обчислимо вектор значень лівої сторони системи і порівняємо його зі значенням вектора вільних членів. Якщо різниця між цими двома векторами є в межах обчислювальної похибки, то ми можемо вважати, що розв'язок є точним.

Хід роботи

1. Скласти програму для табуляції заданої трансцендентної функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, де n - задане число вузлів ($n = 20..30$). Результати табуляції записати в текстовий файл. Отриману сукупність вузлів $\{x_i, y_i\}$ використати в подальшому як набір вхідних даних.
2. Записати програму знаходження кубічних сплайнів для заданої сукупності вузлів. В програмі знайти коефіцієнти $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_i кубічних сплайнів.
3. Записати функцію розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональної матрицею методом прогонки.
4. Обчислити коефіцієнти c_i кубічних сплайнів.
5. Обчислити коефіцієнти a_i, b_i, d_i кубічних сплайнів.

6. Протабулювати задану функцію $y = f(x)$, її наближене значення

$y_{набл} = \sum_{i=1}^n S_i(x)$ та похибку $\varepsilon = |y - y_{набл}|$ на відрізку $[x_0, x_n]$, де з кроком

$h = \frac{x_n - x_0}{N}$, де N – кількість кроків табуляції (вибрати значення порядку $20n$).

7. Побудувати графіки заданої функції $y = f(x)$, її наближеного значення

$y_{набл} = \sum_{i=1}^n S_i(x)$ та похибки $\varepsilon = |y - y_{набл}|$ на відрізку $[x_0, x_n]$.

8. Написати звіт про виконання даної лабораторної роботи.

Лабораторна робота №2

Розділені різниці. Інтерполяційні многочлени Ньютона.

Мета: вивчити методи обчислення розділених різниць довільного порядку і вивчити метод інтерполяції з використанням інтерполяційних многочленів Ньютона для довільної конфігурації вузлів.

Основні теоретичні відомості.

Введемо розділені різниці, які задовольняють наступним рекурентним співвідношенням. Розділена різниця нульового порядку співпадає зі значенням функції

$$f(x_i) = f(x_i).$$

Розділена різниця першого порядку

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Розділена різниця другого порядку

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

В загальному ми можемо записати рекурентну формулу для обчислення розділених різниць k -го порядку через розділені різниці $(k-1)$ порядку:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}.$$

Можна показати, що

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)}.$$

Доведення цього твердження зробимо методом математичної індукції. При $n=0$ отримаємо очевидну тотожність $f(x_0) = f(x_0)$. Покажемо, що зі справедливості нашого твердження при n випливає його справедливості при $n+1$. Враховуючи властивості скінченних різниць, запишемо вираз

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, \dots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}$$

Підставимо сюди вираз для розділеної різниці n -порядку:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=1, n+1}} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)} \right)$$

Знайдемо значення коефіцієнта при $f(x_i)$. Окремо розглянемо випадки $i = 1 \dots n$ та $i = 0, i = n + 1$.

У випадку $i = 1 \dots n$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=1, n+1}} (x_i - x_j)} - \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)} \right) = \\ & = \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_{n+1})}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n+1}} (x_i - x_j)} \right) = \\ & = \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n+1}} (x_i - x_j)} \end{aligned}$$

Аналогічно для випадку $i = 0$ отримаємо

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(- \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq 0 \\ j=0, n}} (x_0 - x_j)} \right) = \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq 0 \\ j=0, n+1}} (x_0 - x_j)}$$

Для випадку $i = n + 1$ знаходимо, що

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left(\frac{1}{\prod_{\substack{j \neq n+1 \\ j=1, n+1}} (x_{n+1} - x_j)} \right) = \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq n+1 \\ j=0, n+1}} (x_{n+1} - x_j)}$$

Якщо підсумувати отримані результати, ми отримаємо, що розділена різниця $(n + 1)$ – порядку визначається виразом

$$f(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n+1}} (x_i - x_j)}$$

який впливає з постульованого виразу для розділеної різниці n – порядку. Таким чином наше твердження доведено

Так як розділена різниця являє собою лінійну комбінацію значень функції у вузлах, тому значення розділеної різниці не змінюється при перестановці її аргументів.

Можна показати, що розділена різниця n – порядку по порядку величини визначається похідною від функції n – порядку (доведення цього твердження буде дане при розгляді чисельного диференціювання):

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

де $\xi \in [x_0, x_n]$

Розглянемо іншу форму запису інтерполяційного многочлена. Але спочатку виконаємо ряд проміжних перетворень. Знайдемо значення різниці

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \prod_{i=0}^n (x - x_i) \left(\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^n (x - x_i) \left(\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} + \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)} \right) = \\ &= f(x, x_0, \dots, x_n) w_n(x) \end{aligned}$$

Обчислимо тепер різницю двох інтерполяційних многочленів Лагранжа $L_n(x) - L_{n-1}(x)$. Це є алгебраїчний многочлен степені n , який перетворюється в нуль у вузлах $0, 1, \dots, n-1$. Тому ми його можемо записати у вигляді

$$L_n - L_{n-1} = A_{n-1} w_{n-1}(x),$$

де A_{n-1} – деяка стала.

Якщо $x = x_n$, то значення інтерполяційного многочлена Лагранжа співпадає зі значенням функції в цьому вузлі $L_n(x_n) = f(x_n)$. Тому

$$f(x_n) - L_{n-1}(x_n) = A_{n-1} w_{n-1}(x_n)$$

З іншого боку, якщо ми використаємо результати попереднього випадку, то при $x = x_n$ отримаємо

$$\begin{aligned} f(x_n) - L_{n-1}(x_n) &= f(x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) w_{n-1}(x_n) = \\ &= f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) w_{n-1}(x_n) \end{aligned}$$

Порівнявши ці два вирази, отримаємо значення константи
 $A_{n-1} = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Таким чином

$$L_n(x) - L_{n-1}(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) w_{n-1}(x).$$

Представимо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді тотожності:

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + (L_2(x) - L_1(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x))$$

Врахуємо, що

$$L_0(x) = f(x_0)$$

$$L_1(x) - L_0(x) = f(x_0, x_1) w_0(x) = (x - x_0) f(x_0, x_1)$$

$$L_2(x) - L_1(x) = f(x_0, x_1, x_2) w_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2)$$

$$L_n(x) - L_{n-1}(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) w_{n-1}(x) = \overset{\dots}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})} f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

В результаті отримаємо представлення інтерполяційного многочлена Лагранжа через розділені різниці. Отриманий таким чином многочлен називається інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Аналогічно ми можемо отримати вираз для інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції назад

$$N_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots \\ \dots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$$

В процесі проміжних перетворень ми отримали вираз, який дає нам змогу оцінити точність інтерполяції

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) w_n(x)$$

Врахувавши, що для розділених різниць справедливо співвідношення, що

$$f(x_0, \dots, x_n) \approx \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}$$

де $\xi \in [x_0, x_n]$, отримаємо граничну оцінку величини похибки

$$R_n = w_n(x) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\text{де } M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Як ми бачимо інтерполяційний многочлен Ньютона має $(n+1)$ порядок точності інтерполяції.

Поліном $w_n(x)$ рівномірно обмежений по x . Тому справедлива оцінка:

$$|w_n(x)| < (nh)^{n+1}$$

Це нам дає змогу для отримання заданої точності інтерполяції при фіксованому числі вузлів визначити крок сітки з умови

$$(nh)^{n+1} \leq \frac{\varepsilon(n+1)!}{M_{n+1}}$$

Використовувати формулу Стірлінга для оцінки значення $n!$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ми можемо оцінити число вузлів при відомому кроці сітки необхідне для отримання заданої точності

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot M_{n+1} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

При інтерполяції на рівномірній сітці потрібно вибирати з таблиці вузли так, щоб задане значення x потрапляло у центр конфігурації розміщення цих вузлів.

Якщо ми хочемо інтерполювати функцію $f(x) = \sin x$, то для досягнення точності $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$ у випадку $n=1$ крок має задовольнити умові $h \leq 0.002$. У випадку $n=2$ для досягнення цієї ж точності, отримаємо оцінку величини кроку $h \leq 0.02$

Хід роботи.

1. Скласти програму для табуляції заданої трансцендентної функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, де n - задане число вузлів. Результати табуляції записати в текстовий файл. Отриману сукупність вузлів $\{x_i, y_i\}$ використати в подальшому як набір вхідних даних.
2. Скласти програму знаходження довільного значення функції $f(x)$ за допомогою інтерполяційного многочлена Ньютона. В програмі записати наступні функції: зчитування вхідних даних з текстового файлу – масивів $x_i, f_i, i=0 \dots n$, знаходження значення функції

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i), \text{ знаходження значення розділеної різниці довільного порядку } k$$

$$f(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, k}} (x_i - x_j)}, \text{ знаходження значення інтерполяційного многочлена Ньютона}$$

$$N_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^n \omega_{k-1} f(x_0, \dots, x_k), \text{ обчислення похибки інтерполяції многочленами Ньютона}$$

$$\varepsilon(x) = |f(x) - N_n(x)|.$$

3. Протабулювати на відрізку $[a, b]$ з кроком $h = \frac{b-a}{20n}$ задану функцію $f(x)$, інтерполяційний многочлен Ньютона $N_n(x)$, похибку $\varepsilon(x)$ і функцію $w_n(x)$. Побудувати графіки цих функцій.
4. Дослідити точність інтерполяції в залежності від кроку h (різне число вузлів $n = 5, 10, 20$ при заданому інтервалі $[a, b]$) та від числа вузлів (постійний крок h , різний інтервал $[a, b]$, де $b = a + hn$, $n = 5, 10, 20$).
5. Результати виконання лабораторної роботи оформити у вигляді звіту.

Лабораторна робота №3

Факторіальні многочлени

Мета: вивчити методику розкладу функцій в ряд по факторіальних многочленах.

Основні теоретичні відомості.

У випадку рівновіддалених вузлів для задачі інтерполяції зручно використовувати скінченні різниці. Нехай ми маємо сукупність рівновіддалених вузлів $\{x_i, f_i\}$, $i = 0 \dots n$. Виконаємо заміну змінних $t = \frac{(x - x_0)}{h}$. Отримаємо, що в нових координатах координати вузлів сітки $t = 0, 1, \dots, n$. Крок сітки рівний одиниці.

Різницевий оператор.

Основним оператором, в обчисленні скінченних різниць, є різницевий оператор, який визначається рівністю:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

Розглянемо його основні властивості:

Різницевий оператор є лінійним, тобто

$$\Delta(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \Delta f(t) + \beta \Delta g(t)$$

Дія різницевого оператора на добуток функцій дає

$$\begin{aligned} \Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t) = \\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t) = \\ &= f(t+1)(g(t+1) - g(t)) + g(t)(f(t+1) - f(t)) = \\ &= f(t+1)\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t) \end{aligned}$$

Дія різницевого оператора на частку двох функцій дає:

$$\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t+1)g(t)}$$

Дія різницевого оператора на деякі стандартні функції визначається як

$$\Delta a^t = a^t(a-1)$$

$$\Delta 2^t = 2^t(2-1)$$

$$\Delta \ln(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$\Delta \sin(at+b) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(a\left(t + \frac{1}{2}\right) + b\right)$$

$$\Delta \cos(at+b) = -2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(a\left(t + \frac{1}{2}\right) + b\right)$$

Різницевий оператор можна підносити до степені $\Delta^2 f(t) = \Delta(\Delta f(t))$.

В загальному випадку можна записати: $\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t))$

Розглянемо основну теорему в обчисленні різниць:

Для алгебраїчного многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ різниця n -го порядку рівна $a_n n!$, а різниця $(n+1)$ порядку – рівна нулю.

Якщо $f(t)$ - алгебраїчний многочлен степені n , то $\Delta f(t)$ є алгебраїчний многочлен степені $n-1$.

Щоб довести це твердження, розглянемо випадок $f(t) = t^n$:

$$\begin{aligned}\Delta(t^n) &= (t+1)^n - t^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k - t^n = \\ &= t^n + n t^{n-1} + \dots + 1 - t^n = n t^{n-1} + \dots\end{aligned}$$

Подіявши різницеvim оператором на алгебраїчний многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ n раз, ми отримаємо необхідний результат $a_n n!$.

Оператор зсуву

Введемо оператор зсуву за допомогою співвідношення

$$E(f(t)) = f(t+1)$$

Розглянемо тепер його основні властивості:

Оператор зсуву є лінійним

$$E(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha E(f(t)) + \beta E(g(t))$$

Оператор зсуву можна підносити до степені $E^n(f(t)) = f(t+n)$

$$E^0(f(t)) = f(t)$$

$$E^{-n}(f(t)) = f(t-n)$$

Між різницеvim оператором і оператором зсуву є співвідношення $\Delta = E - 1$. Його правильність випливає з наступного:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) = E(f(t)) - f(t) = (E-1)(f(t))$$

Використовуючи оператор зсуву, доведемо правильність формули для обчислення скінченних різниць:

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k E^k$$

Отримаємо:

$$\Delta^n f(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k E^k(f(t)) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(t+k)$$

Факторіальні многочлени

В математичному аналізі важливу роль відіграє функція x^n . Це зумовлено тим, що довільна функція може бути розкладена в ряд по степенях x^n .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Можна показати, що ця властивість функцій x^n в першу чергу визначається тим, що перша похідна задовольняє співвідношення:

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

В чисельних методах важливу роль відіграють функції – факторіальні многочлени. Факторіальні многочлени вводять виходячи з умови

$$\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$$

Цій умові задовольняють наступні многочлени $t^{(n)} = t(t-1)\dots(t-n+1)$.

Факторіальні многочлени задовольняють наступним властивостям:

$t^{(0)} = 1$. Звідси випливає, що $0^{(0)} = 1$. Це відповідає такому формальному співвідношенню $0! = 1$.

Факторіальний многочлен $t^{(n)}$ має n множників.

Доведемо основну властивість факторіальних многочленів.

$$\begin{aligned} \Delta t^{(n)} &= (t+1)^{(n)} - t^{(n)} = \\ &= (t+1)t(t-1)\dots(t-(n-2)) - t(t-1)\dots(t-(n-1)) = \\ &= t(t-1)\dots(t-(n-2))(t+1-t+n-1) = \\ &= nt(t-1)\dots(t-(n-2)) = nt^{(n-1)} \end{aligned}$$

Доведемо, що довільну функцію можна розкласти в ряд по факторіальних многочленах.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{(k)}$$

При $t=0$ знаходимо, що $f(0) = b_0$. Подіємо різницеvim оператором на обидві сторони рівняння

$\Delta f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k t^{(k-1)}$. Аналогічно знаходимо, що при $t=0$ $\Delta f(0) = b_1$. Подіявши різницеvim

оператором n раз отримаємо: $\Delta^n f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} b_n k(k-1)\dots(k-(n-1)) t^{(k-n)}$ При $t=0$ $\Delta^n f(0) = n! b_n$.

Отже, ми отримали ряд по факторіальних многочленах:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} t^{(k)}$$

Очевидно, що у випадку скінченної кількості вузлів ми повинні обривати наш факторіальний ряд в залежності від числа вузлів.

Хід роботи.

1. Скласти програму для табуляції заданої трансцендентної функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, де n - задане число вузлів. Результати табуляції записати в текстовий файл.

Отриману сукупність вузлів $\{x_i, y_i\}$ використати в подальшому як набір вхідних даних.

2. Скласти програму знаходження довільного значення функції $f(t)$ за допомогою ряду по факторіальних многочленах. В програмі записати наступні функції: зчитування вхідних даних з текстового файлу – масиву $f_i, i = 0 \dots n$, знаходження значення факторіалу $k!$, знаходження значення числа перестановок $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, значення скінченної різниці $\Delta^k f(0)$, значення факторіального многочлена $t^{(k)}$, обчислення наближеного значення функції для довільного t з використанням ряду по факторіальним многочленам $f_{appr}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} t^{(k)}$, обчислення похибки наближення $\varepsilon(t) = |f(t) - f_{appr}(t)|$.

3. Протабулювати на відрізку $[0, n]$ задану функцію $f(t)$, наближене значення функції $f_{appr}(t)$ та похибку наближення $\varepsilon(t)$ з кроком $0,01$. Побудувати графіки цих залежностей.
4. Розглянути випадки $n = 5, 10, 20$.
5. Результати виконання лабораторної роботи оформити у вигляді звіту.

Лабораторна робота №4

Знаходження алгебраїчних многочленів найкращого квадратичного наближення методом найменших квадратів.

Мета: Вивчити метод найменших квадратів знаходження алгебраїчних многочленів найкращого квадратичного наближення.

Основні відомості:

Нехай нам задана сітка x_0, x_1, \dots, x_n в вузлах якої відомі значення деякої функції f_i . Розглянемо методику побудови квадратичного наближення алгебраїчним многочленом за методом найменших квадратів. Шукатимемо апроксимуючий многочлен у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j.$$

Степінь многочлена m вибираємо меншим від загального числа вузлів сітки n . Коефіцієнти a_i знаходимо з умови мінімуму суми квадратів відхилень апроксимуючого многочлена у вузлах:

$$S = \sum_{i=0}^n (\varphi(x_i) - f_i)^2$$

Якщо відома точність значень функції у вузлах ε_i , то використовуючи поняття ваги

$$\rho_i = \frac{1}{\varepsilon_i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n+1}}$$

можна отримати уточнену формулу:

$$S = \sum_{i=0}^n \rho_i (f_i - \varphi(x_i))^2$$

В цьому випадку апроксимуюча функція буде ближче проходити до вузлів, в яких значення функції отримано точніше.

Для знаходження коефіцієнтів a_i , обчислимо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь рівнянь:

$$\sum_{i=0}^n \rho_i (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - f_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^n \rho_i (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - f_i) x_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^n \rho_i (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m = 0$$

Запишемо систему в компактнішій формі

$$b_{00} a_0 + b_{01} a_1 + \dots + b_{0m} a_m = c_0$$

$$b_{10} a_0 + b_{11} a_1 + \dots + b_{1m} a_m = c_1$$

...

$$b_{m0} a_0 + b_{m1} a_1 + \dots + b_{mm} a_m = c_m$$

Ми ввели скорочені позначення

$$b_{kl} = \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{k+l}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^n \rho_i f_i x_i^k$$

В загальному виникає проблема оптимального вибору ступеня многочлена m . Як правило використовують наступну процедуру. Нехай величина ε визначає точність нашої апроксимації. Тоді для деякого значення m обчислюють дисперсію

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (\varphi(x_i) - f_i)^2}{n+1}}$$

Якщо $\delta \ll \varepsilon$, то збільшують m , якщо ж $\delta \gg \varepsilon$, то, навпаки, зменшують m . Якщо $\delta \approx \varepsilon$, то значення m є оптимальним. Якщо вийде, що $m_{opt} \approx n$, то необхідно використовувати інші методи для побудови апроксимаційного многочлена.

Для знаходження коефіцієнтів апроксимуючого алгебраїчного многочлена виникає задача розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Чисельні методи, які використовуються для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна розділити на прямі і ітераційні методи. Серед прямих методів найбільш широко використовується метод Гауса і його модифікації. Розглянемо метод Гауса з вибором головного елемента. Суть методу полягає в приведенні системи рівнянь до системи рівнянь з трикутною матрицею, з якої потім послідовно знаходять значення всіх невідомих. Таким чином метод Гауса складається з двох етапів: прямого ходу і зворотного ходу. Для знаходження розв'язку необхідно виконати $n^3/3$ операцій. Розглянемо його особливості на прикладі системи лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

...

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i,$$

...

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n.$$

яка може бути представлена у матричній формі $AX = B$.

Позначимо через U верхню трикутну матрицю, яку ми отримаємо після прямого ходу методу Гауса, а через f - перетворений вектор вільних членів.

Найпростіше програмно реалізувати вибір головного елемента в стовпчику. Вибір найбільшого по модулю головного елемента дає змогу мінімізувати похибку округлень.

Прийmemo, що всі елементи матриці U рівні нулю $u_{ij} = 0$.

Розглянемо перший стовпчик. Нехай a_{i1} - найбільший за модулем його елемент. Виконаємо перестановку 1 і i рядків місцями.

$$prom = a_{1j},$$

$$a_{1j} = a_{ij}, \quad (j = 1, n)$$

$$a_{ij} = prom$$

Далі з допомогою елемента a_{11} виключають решту елементів першого стовпчика починаючи з другого і до n :

$$u_{1j} = a_{1j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$f_1 = b_1$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j} \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \left(\begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ j = 2, \dots, n \end{array} \right)$$

$$b_i^{(1)} = b_i - b_1 \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i = 2, \dots, n)$$

де u_{ij}, f_i - елементи перетвореної до трикутного вигляду матриці. $a_{ij}^{(k)}$ - елементи вихідної матриці після k - перетворення.

Розглянемо далі другий стовпчик. Відкидаємо перший елемент u_{12} і серед усіх $a_{i2}^{(1)}$ ($i = 2 \dots n$) вибираємо найбільший за модулем. Перестановкою рядків розміщаємо його в другому рядку. З його допомогою виключаємо всі інші елементи другого стовпчика.

$$u_{2i} = a_{2i}^{(1)} \quad (i = 2 \dots n)$$

$$f_2 = b_2^{(1)}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad \left(\begin{array}{l} i = 3 \dots n \\ j = 3 \dots n \end{array} \right)$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_2^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i = 3 \dots n)$$

Розглянемо k -й крок. В k -му стовпчику серед усіх елементів $a_{ik}^{(k-1)}$ ($i = k \dots n$) вибираємо найбільший за модулем. Перестановкою рядків переміщаємо його в k -й рядок.

$$u_{ki} = a_{ki}^{(k-1)} \quad (i = k, n)$$

$$f_k = b_k^{(k-1)}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k-1)} \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (i, j = k + 1, n)$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)} \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (i = k + 1, n)$$

В результаті ми отримуємо систему рівнянь $U \cdot X = f$, де матриця U має трикутний вигляд. Описана процедура називається прямим ходом методу Гауса. На зворотному ході методу Гауса можна знайти значення невідомих x :

$$\begin{cases} x_n = \frac{f_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (f_{n-1} - u_{n-1,n} x_n) \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) \end{cases}$$

Хід роботи.

1. Скласти програму для табуляції заданої трансцендентної функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, де n - задане число вузлів ($n \approx 30$). Результати табуляції записати в текстовий файл *input.txt*. Отриману сукупність вузлів $\{x_i, y_i\}$ використати в подальшому як набір вхідних даних.
2. Скласти програму, яка для заданої табличної функції $\{x_i, f_i\}$ методом найменших квадратів знаходить апроксимуючий многочлен степені m . В програмі записати наступні функції: зчитування вхідних даних з текстового файлу – масивів $x_i, f_i, i = 0 \dots n$, функції формування масивів B та C , функцію розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з вибором головного елемента по стовпцях, функцію обчислення алгебраїчного многочлена найкращого квадратичного наближення по відомому масиву коефіцієнтів A , функцію обчислення похибки $\varepsilon(x) = |f(x) - \varphi(x)|$.
3. Знайти апроксимуючий многочлен і обчислити дисперсію для випадків $m = 1, \dots, 10$. Побудувати графік залежності величини дисперсії від степені апроксимуючого многочлена. Вибрати оптимальне значення степені m виходячи з умови мінімуму дисперсії.
4. Протабулювати на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h_1 = \frac{x_n - x_0}{20n}$ похибку для випадків $m = 1, \dots, 10$. Побудувати графіки цих функцій.
5. Результати виконання лабораторної роботи оформити у вигляді звіту.

Лабораторна робота №5

Точність формул для чисельного диференціювання. Метод Рунге-Ромберга. Метод Ейткена.

Мета: вивчити методи чисельного диференціювання з використанням апроксимаційних формул, методи оцінки точності та методи покращення точності апроксимаційних формул для чисельного диференціювання.

Основні теоретичні відомості.

Чисельне диференціювання застосовується у тих випадку, коли функцію $y = f(x)$ важко продиференціювати аналітично або коли вона задана таблично.

Побудова формул для чисельного диференціювання з використанням інтерполяційних многочленів Ньютона. Наближено приймається, що похідну n -порядку ми наближено можемо знайти використовуючи апроксимуючу функцію:

$$f^{(n)}(x_0) \approx \varphi^{(n)}(x_0)$$

де $y = \varphi(x)$ - апроксимуюча функція. Запишемо інтерполяційний многочлен Ньютона у вигляді

$$\varphi(x) = N_n(x) = f(x_0) + \xi_0 f(x_0, x_1) + \xi_0 \xi_1 f(x_0, x_1, x_2) + \xi_0 \xi_1 \xi_2 f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$$

де ми ввели позначення

$$\xi_i = x - x_i$$

Виконавши безпосереднє диференціювання інтерполяційного многочлена, отримаємо вирази для апроксимації першої та другої похідних

$$\varphi'(x) = f(x_0, x_1) + (\xi_0 + \xi_1) f(x_0, x_1, x_2) + (\xi_0 \xi_1 + \xi_0 \xi_2 + \xi_1 \xi_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) \dots$$

$$\varphi''(x) = 2f(x_0, x_1, x_2) + 2(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Аналогічно ми можемо отримати вирази для апроксимації похідних вищих порядків. В залежності від того на якому числі ми обриваємо ряд, отримаємо різного виду вирази для апроксимації похідної. Найпростіші вирази (відповідно найменш точні) мають вигляд:

$$\varphi'(x) = f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\varphi''(x) = 2f(x_0, x_1, x_2) = \frac{2}{x_2 - x_0} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)$$

В загальному випадку найпростіший вираз для апроксимації похідної довільного порядку має вигляд:

$$\varphi^{(n)}(x) = n! f(x_0, x_1, \dots, x_n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=0, n}} (x_i - x_j)}$$

Точність отриманих виразів визначається величиною першого відкинутого члена. Нехай для апроксимації похідної ми використовуємо вузли x_0, x_1, \dots, x_n . Тоді перший відкинутий член являє собою добуток розділеної різниці

$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ на суму C_{n+1}^k різних добутоків множників ξ_i , де кожний добуток містить $n+1-k$ множників. Величину залишкового члена, що визначає точність апроксимації, можна оцінити як

$$R_n^{(k)} = \frac{M_{n+1}}{(n+1-k)!} \max_i |\xi_i|^{n+1-k}.$$

Для рівномірної сітки

$$\max |\xi_i| < nh$$

Таким чином отримуємо оцінку точності

$$R_n^{(k)} < \theta(h^{n+1-k})$$

Ми бачимо, що порядок точності отриманої формули рівний числу вузлів мінус порядок похідної. Для обчислення k -ї похідної мінімально необхідно використати $k+1$ вузол. Можна показати, якщо x вибрано симетрично відносно вузлів сітки, то точність апроксимації підвищується.

Слід врахувати, що для побудови інтерполяційних многочленів недоцільно використовувати більше 4÷6 вузлів. Тому чисельним диференціювання практично можна визначити першу та другу похідну. Третю та четверту похідну можна визначити тільки задовільно.

Досить часто для апроксимації похідних використовують рівномірну сітку. Причому значення похідної, як правило, обчислюють у вузлах сітки. В цьому випадку із загальних формул для випадку рівномірної сітки з кроком h отримуємо формули

$$y'_1 = f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} + \theta(h)$$

де y'_1 - наближене значення першої похідної в першому вузлі, отримані з допомогою відповідних апроксимаційних формул, y_i - значення функції в i -му вузлі.

Так само можна записати більш точніші апроксимаційні формули для значення похідної

$$y'_1 = f(x_0, x_1) + (\xi_0 + \xi_1) f(x_0, x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_0}{2h} + \theta(h^2)$$

Приведемо найбільш поширені формули для апроксимації похідних. Формули для апроксимації першої похідної по трьох вузлах мають вигляд:

$$y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} y_*''',$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6} y_*'''$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) - \frac{h^2}{3} y_*'''$$

У випадку чотирьох вузлів отримуємо наступні формули для апроксимації першої похідної:

$$y'_0 = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}y_*^{IV},$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}y_*^{IV},$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}y_*^{IV},$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}y_*^{IV}.$$

У випадку п'яти вузлів отримаємо наступні вирази для апроксимації першої похідної:

$$y_0 = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5}y_*^V$$

$$y_1 = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20}y_*^V$$

$$y_2 = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30}y_*^V$$

$$y_3 = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{h^4}{20}y_*^V$$

$$y_4 = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{5}y_*^V$$

Як бачимо найменші коефіцієнти в залишкових членах отримуються для похідних в центральних вузлах.

Для апроксимації других похідних у випадку трьох вузлів отримаємо вираз:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h),$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2),$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h).$$

Точність формул для чисельного диференціювання. В загальному точність апроксимаційної формули для чисельного диференціювання визначається виразом:

$$R_n^{(k)} = f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^n c_i y_i$$

Розглянемо методику оцінки точності з використанням розкладу в ряд Тейлора. Як приклад, розглянемо формулу апроксимації першої похідної по трьох вузлах

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h};$$

$$R_2^{(1)} = f'(0) - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h};$$

Використаємо розклад в ряд Тейлора зі залишковим членом записаним в диференціальній формі

$$y_1 = f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_+)$$

$$y_{-1} = f(-h) = f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_-)$$

де $\xi_+ \in [0, h]$, $\xi_- \in [-h, 0]$

Знаходимо, що

$$R_2^{(1)} = f'(0) - \frac{1}{2h} \left\{ \left(f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_+) \right) - \left(f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_-) \right) \right\} = -\frac{h^2}{6} \left(\frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{2} \right)$$

Як відомо згідно теореми про середнє завжди існує таке число ξ , яке лежить між ξ_- і ξ_+ , що

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{2},$$

Отже:

$$R_2^{(1)} = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi), \text{ де } \xi \in [-h, h]$$

Для прикладу розглянемо іншу апроксимаційну формулу

$$y''_0 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}$$

Аналогічно знаходимо:

$$R_2^{(2)} = f''(0) - \frac{1}{2h} \left\{ f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) - \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_-) - \left(-2f(0) + f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_+) \right) \right\} = -\frac{h^2}{24} f^{(4)}(\xi)$$

де $\xi \in [-h, h]$.

Метод Рунге-Ромберга покращення точності формул для чисельного диференціювання. Точність формул визначається залишковим членом, який в загальному випадку можна записати як $\psi(x)h^p$, де p -порядок апроксимації. Нехай y' - точне значення похідної, а $y'(h)$ - вираз для апроксимації похідної, отриманий на рівномірній сітці з кроком h :

$$y' = y'(h) + \psi(x)h^p + \theta(h^{p+1})$$

Отримаємо по цій самій формулі вираз для апроксимації похідної на сітці з кроком qh :

$$y'(x) = y'(qh) + \psi(x)(qh)^p + \theta((qh)^{p+1})$$

Знайшовши з цих двох рівнянь вираз для невідомого залишкового члена, отримаємо уточнений вираз для апроксимації похідної, порядок якого складає $p+1$:

$$y' = y'(h) + \frac{y'(h) - y'(qh)}{q^p - 1} + \theta(h^{p+1})$$

Для прикладу розглянемо формулу другого порядку для апроксимації похідної першого порядку.

$$y'_{\frac{3}{2}}(h) = \frac{y_2 - y_1}{h}$$

Запишемо її для іншої кроку сітки і тієї ж самої конфігурації вузлів

$$y'_{\frac{3}{2}}(3h) = \frac{y_3 - y_0}{3h}$$

Використовуючи формулу Рунге-Ромберга, отримає уточнений вираз для апроксимації похідної

$$y'_{\frac{3}{2}}(h) = \frac{y_2 - y_1}{h} + \frac{1}{8} \left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_3 - y_0}{h} \right) = \frac{1}{24} (y_0 - 27y_1 + 27y_2 - y_3).$$

Отримана формула має вже третій порядок точності.

Метод Рунге-Ромберга практично можна використовувати, якщо для формул на сітці з кроком h і формул на сітці з кроком qh , використовується та сама конфігурація вузлів відносно заданої точки. Тому метод Рунге-Ромберга використовують для знаходження похідної в вузлах або серединах інтервалів сітки.

У тому випадку коли порядок квадратурної формули є невідомий для покращення точності формул для чисельного диференціювання зручно використовувати метод Ейткена, який крім того дає можливість оцінити порядок точності вихідної формули.

Обчислимо наближене значення похідної по деякій апроксимаційній формулі з трьома різними кроками h , qh , q^2h . Позначимо знайдені наближені значення похідної як $y'(h)$, $y'(qh)$, $y'(q^2h)$. Врахувавши отриманий вище вираз для залишкового члена апроксимаційних формул, запишемо наступні наближені рівності, порядок точності яких $O(h^{p+1})$:

$$y' - y'(h) = \psi(x)h^p = A,$$

$$y' - y'(qh) = \psi(x)(qh)^p = AB,$$

$$y' - y'(q^2h) = \psi(x)(q^2h)^p = AB^2.$$

Використовуючи наближену рівність
 $(y' - y'(h))(y' - y'(q^2h)) = (y' - y'(qh))^2$, отримаємо вираз для уточненого значення похідної:

$$y' = \frac{(y'(qh))^2 - y'(q^2h)y'(h)}{2y'(qh) - (y'(q^2h) + y'(h))}$$

та вираз для оцінки порядку точності вихідної складової квадратурної формули

$$p = \frac{1}{\ln(q)} \ln \left| \frac{y'(q^2h) - y'(qh)}{y'(qh) - y'(h)} \right|.$$

Процедуру вибору оптимального значення величини h називається регуляризацією. Необхідність регуляризації по кроку пов'язана з тим, що зменшення кроку сітки h приводить до відповідного зменшення апроксимаційної формули, але при цьому одночасно збільшується обчислювальна похибка.

Сумарну похибку деякої формули для обчислення похідної першого порядку можна представити у вигляді суми двох доданків перший-похибка чисельного методу, а другий – похибка округлення:

$$R = \psi h^p + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n c_i \Delta_i,$$

де Δ_i - похибка обчислення значення функції в i -му вузлі.

Запишемо в загальному випадку нашу формулу як

$$R = \psi h^p + \frac{1}{h} \Delta$$

Мінімальне значення похибки знайдемо з умови $R'(h) = 0$:

$$R' = p\psi h^{p-1} - \frac{1}{h^2} \Delta = 0$$

Отримаємо, що мінімальне значення похибки досягається при кроку сітки

$$h_0 = \sqrt[p+1]{\frac{\Delta}{\psi p}} \text{ і це значення рівне відповідно } R_{\min} = \frac{\Delta}{ph} (p+1)$$

Ця процедура дає можливість оцінити оптимальне значення кроку сітки для досягнення найкращої точності формули для чисельного диференціювання.

Метод невизначених коефіцієнтів побудови формул для чисельного диференціювання. Нехай нам задано значення функції в вузлах x_0, x_1, \dots, x_n . Шукаємо вираз для апроксимації похідної в вузлі q у вигляді лінійної комбінації значень функції в вузлах:

$$y_q^{(k)} = \sum_{i=0}^n c_i y_i$$

Коефіцієнти c_i вибираємо з умови, що формула є точною для многочленів максимально високої степені. Прийmemo

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Отримаємо рівняння

$$\sum_{j=0}^n a_j (x^j)^{(k)} \Big|_q = \sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=0}^n a_j x_i^j$$

Два ряди є рівними між собою, якщо рівними є їх складові. З цієї умови отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів

$$(x^j)^{(k)} \Big|_q = \sum_{i=0}^n c_i x_i^j \quad (j=0,1,\dots,n)$$

Відмітимо, що якщо x розміщено симетрично відносно вузлів сітки і якщо n і k мають однакову парність, то отримані формули будуть точними для многочленів на одиницю вищої степені.

Отримаємо методом невизначених коефіцієнтів формулу для апроксимації похідної y'_1 використовуючи три вузли $(0,1,2)$

$$y'_0 = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Знаходимо

$$\begin{cases} 0 = c_0 + c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 h + c_2 2h \\ 0 = c_1 h^2 + c_2 4h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = \frac{1}{h} \\ c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2h}; \quad c_1 = \frac{4}{2h}; \quad c_0 = -\frac{3}{2h};$$

Отже ми отримали формулу

$$y'_1 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2).$$

Хід роботи

1. Для заданої аналітичної функції $y = f(x)$, отримати явний вираз для її першої похідної і обчислити точне значення похідної в точці x_0 : $y'(x_0)$.
2. Використовуючи формулу для апроксимації похідної $y'_0(h) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h))$ дослідити залежність похибки

чисельного диференціювання $R = |y'_0(h) - y'(x_0)|$ від кроку h ($h = 10^{-20} \dots 10^3$). Вибрати значення h_0 (у форматі типу $be-7$) при якому досягається найкраща точність. Обчислити досягнуту точність $R_0 = |y'_0(h_0) - y'(x_0)|$ при знайденому оптимальному значенні кроку h_0 .

3. Прийняти, що значення кроку $h = 10^{-3}$.
4. Обчислити значення похідної, використовуючи два кроки сітки h та $2h$

$$y'_0(h) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h))$$

$$y'_0(2h) = \frac{1}{4h}(f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)).$$

5. Обчислити значення похибки при кроці сітки $R_1 = |y'_0(h) - y'(x_0)|$
6. За допомогою методу Рунге-Ромберга знайти уточнене значення похідної

$$y'_R = y'_0(h) + \frac{y'_0(h) - y'_0(2h)}{3}. \quad \text{Обчислити похибку апроксимації}$$

$$R_2 = |y'_R - y'(x_0)|. \quad \text{Встановити характер зміни похибки.}$$

7. Обчислити значення похідної, використовуючи три кроки сітки h , $2h$ та $4h$

$$y'_0(h) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h)),$$

$$y'_0(2h) = \frac{1}{4h}(f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)) \quad y'_0(4h) = \frac{1}{8h}(f(x_0 + 4h) - f(x_0 - 4h)).$$

За допомогою методу Ейткена знайти уточнене значення похідної та порядок точності використаної формули для чисельного диференціювання:

$$y'_E = \frac{(y'_0(2h))^2 - y'_0(4h)y'_0(h)}{2y'_0(2h) - (y'_0(4h) + y'_0(h))}$$

$$p = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left| \frac{y'_0(4h) - y'_0(2h)}{y'_0(2h) - y'_0(h)} \right|$$

Обчислити похибку апроксимації $R_3 = |y'_E - y'(x_0)|$. Встановити характер зміни похибки.

8. Результати виконання лабораторної роботи оформити у вигляді звіту.

Лабораторна робота №6

Складова квадратурна формула Сімпсона. Методи підвищення точності. Адаптивний алгоритм.

Мета: вивчити методи чисельного інтегрування з використанням складових квадратурних формул Ньютона-Котеса, методи підвищення точності квадратурних формул для чисельного інтегрування.

Основні відомості:

1. Квадратурні формули.

Задача чисельного інтегрування функцій полягає в обчисленні наближеного значення означеного інтегралу

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

використовуючи значення підінтегральної функції у вузлах $\{x_k, f(x_k)\}$.

Формули для наближеного обчислення однократних інтегралів називаються квадратурними формулами, для двократних і інтегралів вищої кратності - кубатурними.

Розглянемо методи побудови квадратурних формул. Замінімо підінтегральну функцію $f(x)$ на відрізьку інтегрування деякою апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ і за наближене значення інтегралу приймають значення наступного інтегралу

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Найчастіше функцію $\varphi(x)$ задають через інтерполяційний многочлен Ньютона. В цьому випадку функція $f(x)$ замінюється лінійним виразом, коефіцієнтами якого є значення функції в вузлах

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + R_{\text{int}}(x),$$

де $R_{\text{int}}(x)$ - залишковий член, яки визначає точність інтерполяції.

Виконавши інтегрування отримаємо квадратурну формулу, яка виражає наближене значення означеного інтегралу через лінійну комбінацію підінтегральної функції у вузлах.

$$I = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R, \quad (1)$$

$$\text{де } c_i = \int_a^b \varphi_i(x) dx, \quad R = \int_a^b R_{\text{int}}(x) dx$$

В формулі (1) величини x_i - вузли, c_i - ваги, R - похибка квадратурної формули. Для мінімізації похибки чисельного інтегрування, відрізок інтегрування розбивають на N елементарних відрізків. На кожному з відрізків отримують вираз для апроксимації інтегралу, які потім сумують по всьому інтервалу інтегрування.

Отримаємо вираз для квадратурної формули, використовуючи значення функції в двох вузлах. Побудуємо інтерполюючий многочлен по двох вузлах 0 і h

$$f(x) \approx f(0) + f(0,h)(x-0).$$

$$I = \int_0^h (f(0) + f(0,h)x) dx = hf(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}h(f(0) + f(h)).$$

Ми отримали формулу трапецій. Побудуємо більш складнішу формулу використовуючи значення функції в вузлах 0, h , $2h$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h}x + \frac{\frac{f(2h) - f(h)}{h} - \frac{f(h) - f(0)}{h}}{2h}x(x-h) =$$

$$= f(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h}x + \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2}x(x-h)$$

$$I = \int_0^{2h} f(x) dx = 2hf(0) + \frac{1}{h}(f(h) - f(0))2h^2 +$$

$$+ \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2} \left(\frac{8h^3}{3} - 2h^3 \right) =$$

$$= h \left(2f(0) + 2f(h) - 2f(0) + \frac{1}{3}f(2h) - \frac{2}{3}f(h) + \frac{1}{3}f(0) \right) =$$

$$= \frac{h}{3}(f(0) + 4f(h) + f(2h)).$$

Ми отримали формулу Сімпсона.

Іншим методом побудови квадратурних формул є метод невизначених коефіцієнтів. В залежності від того які ми накладаємо умови на величини x_i і c_i , можна побудувати різні типи квадратурних формул. Якщо ми накладаємо умову, що всі вузли є рівновіддаленими з кроком h , а значення ваг c_i шукатимемо з умови, що квадратурна формула була точною для алгебраїчних многочленів якомога вищої степені, то отримаємо квадратурні формули Ньютона-Котеса.

Розглянемо більш детальніше метод невизначених коефіцієнтів. В загальному випадку довільна квадратурна формула побудована на сукупності вузлів $(0, \dots, n)$ має вигляд:

$$I = \int_0^{nh} f(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

Шукаємо апроксимуючий многочлен у вигляді алгебраїчного многочлена степені n

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Підставимо цей вираз в квадратурну формулу:

$$\int_0^{nh} \sum_{j=0}^n a_j x^j dx = \sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=0}^n a_j x_i^j$$

Врахувавши властивості означених інтегралів та правил сумування, змінимо порядок сумування

$$\sum_{j=0}^n a_j \int_0^{nh} x^j dx = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{i=0}^n c_i x_i^j$$

Два ряди завжди рівні між собою, якщо рівними є їхні члени. Врахувавши цю властивість, отримаємо систему $(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів c_i

$$\frac{(nh)^{j+1}}{j+1} = \sum_{i=0}^n c_i x_i^j$$

де j приймає значення $(0, \dots, n)$

Розглянемо випадок трьох вузлів $0, h, 2h$. В цьому випадку $n = 2$. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_i :

$$\begin{cases} 2h = c_0 + c_1 + c_2, \\ \frac{4h^2}{2} = c_1 \cdot h + c_2 \cdot 2h, \\ \frac{8h^3}{2} = c_1 \cdot h^2 + c_2 \cdot 4h^2, \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 2h, \\ c_1 + c_2 \cdot 2 = 2h, \\ c_1 + 4 \cdot c_2 = \frac{8h}{3}. \end{cases}$$

Знаходимо, що $c_2 = \frac{1}{3}h$, $c_1 = \frac{4}{3}h$, $c_0 = \frac{1}{3}h$. Ми отримали формулу

Сімпсона:

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(0) + 4f(h) + f(2h))$$

Відмітимо деякі загальні властивості квадратурних формул Ньютона-Котеса. Для коефіцієнтів c_i справедливі наступні співвідношення

$$1. \sum_{i=0}^n c_i = n \cdot h.$$

$$2. c_i = c_{n-i}$$

3. Коефіцієнтами c_i не є знаковизначеними при рості n , що впливає на стійкість сумування при $n \rightarrow \infty$.

4. Формули Ньютона-Котеса для $n+1$ вузла (n -парне), що відповідає відрізку інтегрування $(0, nh)$ є точними для многочленів степені n . Квадратурні формули, що відповідають n і $n+1$ є точними для многочленів однакової степені.

Для оцінки точності квадратурних формул використаємо розклад функції в ряд Тейлора з залишковим членом в інтегральній формі.

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Також використаємо узагальнену теорему про середнє, яка стверджує, що існує така точка ξ для якої

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \text{ де } \xi \in [a, b]$$

Оцінимо для прикладу точність квадратурної формули Сімпсона.

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + f_1 + f_2)$$

Якщо функція F є первісною до функції f , то

$$\int_0^{2h} f(x) dx = F_2 - F_0$$

Знаходимо:

$$f_1 = f_0 + \frac{h}{1!} f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \frac{h^3}{3!} f'''_0 + \frac{1}{3!} \int_0^h (h-t)^3 f^{(4)}(t) dt$$

$$f_2 = f_0 + \frac{2h}{1!} f_0' + \frac{(2h)^2}{2!} f_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} f_0''' + \frac{1}{3!} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt$$

Отримаємо:

$$F_2 = F_0 + \frac{2h}{1!} F_0' + \frac{(2h)^2}{2!} F_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} F_0''' + \frac{(2h)^4}{4!} F_0^{(4)} + \frac{1}{4!} \int_0^{2h} (2h-t)^3 F_0^{(5)}(t) dt$$

Врахуємо, що

$$F^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x)$$

Знаходимо:

$$F_2 - F_0 = 2hf_0' + 2h^2 f_0'' + \frac{4}{3} h^3 f_0''' + \frac{2}{3} h^3 f_0''' + \frac{1}{24} \int_0^{2h} (2h-t)^4 f^{(4)}(t) dt$$

$$f_0 + 4f_1 + f_2 = 6f_0 + 6hf_0' + \left(\frac{4h^2}{2} + 2h^2 \right) f_0'' + \left(\frac{4h^3}{6} + \frac{8h^3}{6} \right) f_0''' +$$

$$+ \frac{4}{6} \int_0^h (h-t)^3 f^{(4)}(t) dt + \frac{1}{6} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt =$$

$$= 6f_0 + 6hf_0' + 4h^2 f_0'' + 2h^3 f_0''' +$$

$$+ \frac{4}{6} \int_0^h (h-t)^3 f^{(4)}(t) dt + \frac{1}{6} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt$$

Точність квадратурної формули визначається різницею:

$$R_2 = F_2 - F_0 - \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Обчислимо її значення:

$$\begin{aligned}
R_2 &= 2hf_0 + 2h^2 f_0' + \frac{4}{3}h^3 f_0'' + \frac{2}{3}h^4 f_0''' + \\
&+ \frac{1}{24} \int_0^{2h} (2h-t)^4 f^{(4)}(t) dt - 2hf_0 - 2h^2 f_0' - \frac{4}{3}h^3 f_0'' - \frac{2}{3}h^4 f_0''' - \\
&- \frac{4h}{3 \cdot 6} \int_0^h (h-t)^3 f^{(4)}(t) dt - \frac{h}{3 \cdot 6} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt = \\
&= \frac{1}{24} \int_0^{2h} (2h-t)^4 f^{(4)}(t) dt - \frac{2h}{9} \int_0^h (h-t)^3 f^{(4)}(t) dt - \\
&- \frac{h}{18} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt = \frac{1}{24} \int_0^{2h} (2h-t)^4 f^{(4)}(t) dt - \\
&- \frac{2h}{18} \int_0^{2h} \left(h - \frac{t}{2}\right)^3 f^{(4)}(t) dt - \frac{h}{18} \int_0^{2h} (2h-t)^3 f^{(4)}(t) dt = \\
&= f^{(4)}(\xi) \int_0^{2h} \left(\frac{1}{24} (2h-t)^4 - \frac{h}{18} (2h-t)^3 - \frac{h}{72} (2h-t)^3 \right) dt = \\
&= f^{(4)}(\xi) \int_0^{2h} \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{h}{18} z^3 - \frac{h}{72} z^3 \right) dt = \\
&= f^{(4)}(\xi) \int_0^{2h} \left(\frac{1}{24} \frac{1}{5} (2h)^5 - \frac{h}{18} \frac{(2h)^4}{4} - \frac{h}{72} \frac{(2h)^4}{4} \right) dt = \\
&= f^{(4)}(\xi) h^5 \left(\frac{12}{120} - \frac{16}{72} - \frac{4}{72} \right) = h^5 f^{(4)}(\xi) \left(\frac{32}{120} - \frac{20}{72} \right) = \\
&= h^5 f^{(4)}(\xi) \left(\frac{4}{15} - \frac{5}{18} \right) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).
\end{aligned}$$

2. Складові квадратурні формули.

Розглянемо метод побудови складової квадратурної формули на прикладі складової формули Сімпсона. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на N однакових відрізків ($N = 2m$ - парне). Довжина кожного відрізка $h = \frac{b-a}{N}$. Врахувавши властивості означених інтегралів, представимо вираз для обчислення інтегралу у вигляді суми

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^m I_k = \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx.$$

Для обчислення кожного інтегралу I_k застосуємо квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{2k-2} + f_{2k-1} + f_{2k}).$$

Виконавши сумування, отримуємо складову формулу Сімпсона

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + f_N),$$

де $f_i = f(a + ih)$.

Отримаємо вираз оцінки точності складової формули Сімпсона. Позначимо залишковий член в квадратурній формулі Сімпсона для обчислення інтегралу I_k як R_k . Очевидно, що залишковий член складової формули Сімпсона можна записати як

$$R = \sum_{k=1}^m R_k = \sum_{k=1}^m \left(-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_k) \right)$$

де $\xi_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$. Використавши теорему про середнє, отримуємо

$$\begin{aligned} R &= -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m (f^{(4)}(\xi_k)) = -\frac{h^5}{90} m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (f^{(4)}(\xi_k)) = \\ &= -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

де $\xi \in [a, b]$.

Як бачимо складова формула Сімпсона має 4 порядок точності.

3. Метод Рунге-Ромберга.

Точність квадратурної формули визначається залишковим членом, який в загальному випадку можна записати як $\psi(x)h^p$, де p -порядок квадратурної формули. Нехай I - точне значення інтегралу, а $I(h)$ - наближене значення інтегралу обчислене за допомогою деякої складової квадратурної формули з кроком h . В цьому випадку ми можемо записати:

$$I = I(h) + \psi(x)h^p + \theta(h^{p+1}).$$

Обчислимо по цій самій формулі наближене значення інтегралу з кроком qh . Для цього нам достатньо в складовій квадратурній формулі задати, що число частин розбиття відрізка інтегрування рівне N/q :

$$I = I(qh) + \psi(x)(qh)^p + \theta(h^{p+1}).$$

Знайшовши з цих двох рівнянь вираз для невідомого залишкового члена, отримаємо уточнене значення інтегралу, порядок точності якого складає $p+1$:

$$I = I(h) + \frac{I(h) - I(qh)}{q^p - 1} + \theta(h^{p+1}).$$

4. Метод Ейткена.

У тому випадку коли порядок квадратурної формули є невідомий для покращення точності квадратурної формули зручно використовувати метод Ейткена, який крім того дає можливість оцінити порядок точності вихідної квадратурної формули.

Обчислимо наближене значення інтегралу по деякій складовій квадратурній формулі з трьома різними кроками h, qh, q^2h . Позначимо знайдені наближені значення інтегралу як I_1, I_2, I_3 . Врахувавши отримані вище вирази для залишкового члена квадратурних формул, запишемо наступні наближені рівності, порядок точності яких $O(h^{p+1})$:

$$I - I_1 = \psi(x)h^p = A,$$

$$I - I_2 = \psi(x)(qh)^p = AB,$$

$$I - I_3 = \psi(x)(q^2h)^p = AB^2.$$

Використовуючи наближену рівність $(I - I_1)(I - I_3) = (I - I_2)^2$, отримаємо вираз для уточненого значення інтегралу:

$$I = \frac{I_2^2 - I_1 I_3}{2I_2 - (I_1 + I_3)}$$

та вираз для оцінки порядку точності вихідної складової квадратурної формули

$$p = \frac{1}{\ln(q)} \ln \left| \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} \right|.$$

5. Адаптивний алгоритм.

Адаптивний алгоритм – це метод чисельного інтегрування зі змінним кроком. Розглянемо його реалізацію на основі формули Сімпсона. Розбиваємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на два відрізки з кроком $\frac{h}{2}$ і обчислюємо інтеграл на цьому інтервалі по формулі Сімпсона:

$$I_i^{(1)} = \frac{h}{6} [y_0 + 4y_{1/2} + y_1]$$

$$\text{де } x_0 = a, x_{1/2} = \frac{a+b}{2}, x_1 = b$$

Після цього кожний з відрізків $[x_0, x_{1/2}]$ та $[x_{1/2}, x_1]$ ділимо пополам і знову обчислюємо інтеграл:

$$I_i^{(2)} = \frac{h}{12} [y_0 + 4y_{1/4} + y_{1/2}] + \frac{h}{12} [y_{1/2} + 4y_{3/4} + y_1]$$

Оцінюємо умову збіжності:

$$|I_i^{(1)} - I_i^{(2)}| \leq \delta_i, \quad (3)$$

де δ_i - деяке мале число, що залежить від кроку h і заданої точності обчислення інтегралу ε .

Якщо умова не виконується, то описану вище процедуру повторюємо ще раз для кожного з відрізків $[x_0, x_{1/2}]$ та $[x_{1/2}, x_1]$ зокрема. Ця процедура повторюється в подальшому поки умова збіжності не буде виконуватися на кожному новоутвореному відрізьку інтегрування.

Хід роботи

1. Для заданої аналітичної функції $y = f(x)$ знайти точне значення інтегралу

$$I_0 = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Скласти функцію, яка для заданої функції $y = f(x)$ знаходить наближене значення означеного інтегралу методом Сімпсона при заданому числі вузлів N

$$I(N) = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + f_N)$$

$$f_i = f(a + ih), \quad h = \frac{(b-a)}{N}$$

3. Дослідити залежність точності обчислення інтегралу за допомогою складової формули Сімпсона від числа розбиття відрізка інтегрування N . Для цього побудувати графік залежності $\varepsilon(N) = |I(N) - I_0|$ $N = 10 \dots 1000$. Встановити значення N_{opt} при якому досягається задана точність $\varepsilon = 1e - 12$. Обчислити отриману точність $eps_{opt} = |I(N_{opt}) - I_0|$.
4. Обчислити похибку чисельного інтегрування при числі розбиття відрізка інтегрування N_0 ($N_0 \sim \frac{N_{opt}}{10}$, N_0 вибирати кратним 8)

$$eps0 = |I(N_0) - I_0|$$
5. Уточнити значення інтегралу при N_0 використовуючи метод Рунге-Ромберга. Для цього обчислити значення інтегралу по складовій формулі Сімпсона для N_0 та $N_0/2$

$$I_R = I(N_0) + \frac{I(N_0) - I(N_0/2)}{15}$$
 Обчислити похибку по методу Рунге-Ромберга $epsR = |I_R - I_0|$
6. Уточнити значення інтегралу при N_0 використовуючи метод Ейткена. Обчислити порядок методу. Для цього обчислити значення інтегралу по складовій формулі Сімпсона для N_0 , $N_0/2$, $N_0/4$

$$I_E = \frac{\left(I(N_0/2) \right)^2 - I(N_0) I(N_0/4)}{2I(N_0/2) - \left(I(N_0) + I(N_0/4) \right)}$$

$$p = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left| \frac{I(N_0/4) - I(N_0/2)}{I(N_0/2) - I(N_0)} \right|$$
 Обчислити похибку по методу Ейткена $epsE = |I_E - I_0|$
7. Проаналізувати характер зміни похибки обчислення інтегралу при використанні різних методів.
8. Обчислити значення інтегралу, використовуючи адаптивний алгоритм. Дослідити залежність точності обчислення інтегралу адаптивним алгоритмом ε від значення параметру δ та необхідного при цьому числа обчислення значень підінтегральної функції.
9. Написати звіт про виконання даної лабораторної роботи.

Лабораторна робота №7

LU -розклад. Ітераційні методи уточнення розв'язку СЛАР.

Мета: вивчити метод розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою LU -розкладу та ітераційний метод уточнення розв'язку.

Основні теоретичні відомості .

LU -розклад полягає у представленні матриці A у вигляді добутку двох матриць $A = LU$, де L - нижня трикутна матриця, а U - верхня трикутна матриця з діагональними елементами рівними одиниці.

Для знаходження явного виду матриць L та U використаємо означення добутку двох матриць

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^n l_{ij} u_{jk}$$

Звідси випливає алгоритм знаходження LU -розкладу:

1. Створюємо дві матриці L та U . Задаємо значення всіх їх елементів рівними нулю $l_{ij} = u_{ji} = 0$.
2. Задаємо значення діагональних елементів матриці U $u_{ii} = 1$ ($i = 1 \dots n$)
3. Далі по чергово знаходимо значення елементів k стовпця матриці L та k рядка матриці U за формулами

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk}, \quad i \geq k$$

$$u_{ki} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ki} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} u_{ji} \right), \quad i > k$$

Тобто спочатку знаходимо елементи першого стовпчика матриці L , потім елементи першого рядка матриці U . Після цього елементи другого стовпця матриці L , потім елементи другого рядка матриці U і т.д. в циклі до тих пір поки не знайдемо всі стовпці і рядки.

Розглянемо методу розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь $AX = B$. Якщо ми знайшли LU -розклад матриці A , то розв'язок вихідної системи рівнянь ми можемо знайти послідовно розв'язавши дві системи рівнянь $LZ = B$ та $UX = Z$:

$$z_1 = \frac{b_1}{l_{11}},$$

$$z_k = \frac{1}{l_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} z_j \right), \quad k = 2, \dots, n,$$

$$x_n = z_n,$$

$$x_k = \left(z_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right), \quad k = n-1, \dots, 1.$$

Розглянемо ітераційний метод уточнення розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Нехай ми маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $AX = B$ для якої за допомогою методу Гауса ми знайшли деякий розв'язок $X^{(0)}$. Введемо наступні позначення:

$\Delta X = X - X^{(0)}$ - вектор похибки значень невідомих,

$R = B - B^{(0)}$ - вектор нев'язки, де $B^{(0)} = AX^{(0)}$ - знайдений за допомогою вектора $X^{(0)}$ вектор вільних членів.

Підставимо ці величини у вихідну систему рівнянь

$$A(X^{(0)} + \Delta X) = B^{(0)} + R$$

Отримаємо систему рівнянь для знаходження похибки:

$$A\Delta X = R$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо $\Delta X^{(0)}$. Обчислюємо уточнене значення розв'язку $X = X^{(0)} + \Delta X$. Перевіримо умови закінчення ітераційної процедури

$$\|\Delta X\| \leq eps$$

$$\|AX - B\| \leq eps$$

Якщо ці умови виконуються, то X є розв'язок системи рівнянь, знайдений із необхідною точністю. Якщо умови не виконуються, то приймаємо що $X^{(0)} = X$ і повторюємо ітераційну процедуру ще раз.

Перевагою розглянутого ітераційного методу уточнення розв'язку СЛАР є те, що всі на кожній ітерації нам необхідно розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які описуються тією самою матрицею A . Тому нам достатньо тільки один раз виконати LU розклад.

Хід роботи

1. Скласти програму, яка випадковим чином генерує елементи матриці A розмірності $n \times n$ ($n = 100$). Записати в текстовий файл отриману матрицю A . Задавши розв'язок системи рівнянь (наприклад, що всі $x_i = 2,5$), обчислити вектор вільних членів системи рівнянь $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Записати в текстовий файл отриманий вектор B
2. Скласти програму для розв'язку системи рівнянь з використанням LU -розкладу. В програмі описати наступні функції: зчитування матриці A з текстового файлу, зчитування вектора B з текстового файлу, знаходження LU -розкладу матриці A , запису LU -розкладу матриці A в текстовий файл, розв'язку системи рівнянь $AX = B$ з допомогою LU -розкладу, обчислення добутку матриці на вектор, обчислення норми вектора.
3. Використовуючи LU -розклад, розв'язати задану систему лінійних алгебраїчних рівнянь $AX = B$.
4. Оцінити точність знайденого розв'язку $eps = \max_{i=1..n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)$.
5. Використовуючи отриманий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь як початкове наближення, знайти уточнений розв'язок СЛАР. Встановити кількість ітерацій необхідну для знаходження розв'язку із заданою точністю ($eps_0 = 10^{-14}$).
6. Написати звіт про виконання даної лабораторної роботи.

Лабораторна робота № 8
Ітераційні методи розв'язку систем
лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета: ітераційні методи простої ітерації, Якобі та Зейделя розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Основні теоретичні відомості

Розглянемо ітераційні методи розв'язку СЛАР, яку запишемо в матричній формі:

$$AX = f$$

В канонічній формі запису двошаровий ітераційний метод можна записати у вигляді СЛАР:

$$B \frac{X^{(k+1)} - X^{(k)}}{\tau_{k+1}} + AX^{(k)} = f,$$

де B - деяка матриця розмірності $(n \times n)$, τ_{k+1} - деяка стала, $X^{(k)}$ - k наближення до точного розв'язку СЛАР. Для знаходження розв'язку СЛАР нам необхідно задати початкове наближення $X^{(0)}$

Якщо матриця $B = E$ є одинична матриця, то ми отримаємо явний ітераційний метод:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \tau_{k+1} (AX^{(k)} - f)$$

в якому на кожній ітерації ми можемо явно виразити $k + 1$ наближення через k наближення. В іншому випадку, якщо матриця $B \neq E$ не є одиничною матрицею, ми отримаємо неявний ітераційний метод

$$BX^{(k+1)} = BX^{(k)} - \tau_{k+1} (AX^{(k)} - f)$$

в якому на кожній ітерації для знаходження $k + 1$ наближення нам вже необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

В методі простої ітерації використовують наступну ітераційну процедуру

$$X^{(k+1)} = (E - \tau A) X^{(k)} + \tau f$$

Запишемо метод простої ітерації у розгорнутому вигляді

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \tau \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + \tau f_i$$

Запишемо отриману систему рівнянь у вигляді

$$X^{(k+1)} = CX^{(k)} + d$$

де $C = E - \tau A$ та $d = \tau f$.

Достатня умова збіжності методу простої ітерації накладає обмеження на норму матриці $\|C\| < 1$, які можна записати в одні з наступних форм:

$$\|C\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\|_3 = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\|_2 = \sum_{i,j=1}^n c_{ji}^2 < 1$$

З достатньої умови збіжності методу простої ітерації випливає, що нам достатньо вибрати значення параметра τ в межах $0 < \tau < \frac{2}{\|A\|}$.

У методі Якобі запишемо матрицю A у вигляді суми трьох матриць $A = A^+ + D + A^-$, де A^+ - нижня трикутна матриця з нульовими елементами на головній діагоналі, D - діагональна матриця, A^- - верхня трикутна матриця з нульовими елементами на головній діагоналі. Представимо вихідну систему рівнянь у вигляді:

$$DX = -(A^+ + A^-)X + f$$

$$X = -D^{-1}(A^+ + A^-)X + D^{-1}f$$

Отримаємо наступний ітераційний метод

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(A^+ + A^-)X^{(k)} + D^{-1}f$$

Для отримання достатньої умови збіжності методу Якобі, запишемо його в канонічній формі методу простої ітерації

$$X^{(k+1)} = CX^{(k)} + d$$

де $C = -D^{-1}(A^+ + A^-)$. Як бачимо ми можемо використати раніше записані умови збіжності методу простої ітерації. Можна показати, що достатньою умовою збіжності методу Якобі є умова діагонального переважання елементів матриці A . Запишемо метод Якобі в розгорнутому вигляді:

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{f_i}{a_{ii}}$$

В методі Зейделя аналогічно запишемо матрицю A у вигляді суми трьох матриць $A = A^+ + D + A^-$, де A^+ - нижня трикутна матриця з нульовими елементами на головній діагоналі, D - діагональна матриця, A^- - верхня трикутна матриця з нульовими елементами на головній діагоналі. Представимо вихідну систему рівнянь у вигляді:

$$(A^+ + D)X = -A^-X + f$$

Отримаємо наступний ітераційний метод:

$$(A^+ + D)X^{(k+1)} = -A^-X^{(k)} + f$$

Для отримання достатньої умови збіжності методу Гауса-Зейделя, запишемо його в канонічній формі методу простої ітерації

$$X^{(k+1)} = -(A^+ + D)^{-1} A^- X^{(k)} + (A^+ + D)^{-1} f$$

Як бачимо ми можемо використати раніше записані умови збіжності методу простої ітерації, прийнявши що

$$C = -A^{-1}(A^+ + D)^{-1}$$

Можна записати метод Гауса-Зейделя в розгорнутій формі

$$x_i^{(k+1)} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

В усіх ітераційних методах закінчення ітерацій визначається або заданням максимальної кількості ітерацій або умовами

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon,$$

$$\|AX^{(k+1)} - f\| \leq \varepsilon$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність знаходження розв'язку. $[k, k+20]$

Ітераційні методи є стійкими відносно похибки округлення



Хід роботи.

1. Скласти програму, яка випадковим чином генерує елементи матриці A з діагональним переважанням розмірності $n \times n$ ($n = 100$). Записати в текстовий файл отриману матрицю A . Задавши розв'язок системи рівнянь (наприклад, що всі $x_i = 2.5$), обчислити вектор вільних членів системи рівнянь $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.

Записати в текстовий файл отриманий вектор B

2. Скласти програму для розв'язку системи рівнянь з використанням ітераційних методів. В програмі описати наступні функції: зчитування матриці A з текстового файлу, зчитування вектора B з текстового файлу, обчислення добутку матриці на вектор, обчислення норми вектора, обчислення норми матриці, розв'язку заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простої ітерації, розв'язку заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Якобі, розв'язку заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя.

3. Задати початкове наближення для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь $x_i^{(0)} = 1.0$ ($i = 1 \dots n$).
4. Використовуючи початкове наближення, знайти уточнений розв'язок СЛАР методами простої ітерації, Якобі, Зейделя. Встановити кількість ітерацій необхідну для знаходження розв'язку із заданою точністю ($eps_0 = 10^{-14}$) кожним із цих методів.
5. Написати звіт про виконання даної лабораторної роботи.

Лабораторна робота №9

Чисельні методи розв'язування нелінійних рівнянь з одним невідомим

Мета: вивчити однокрокові та багатокрокові ітераційні методи розв'язку нелінійних рівнянь з одним невідомим. Вивчити чисельні методи розв'язку алгебраїчних рівнянь по методу Ньютона з використанням схеми Горнера та знаходження комплексних коренів по методу Ліна.

Основні теоретичні відомості

Нехай нам задано нелінійне рівняння:

$$F(x) = 0,$$

де $F(x)$ – неперервна і достатньо гладка функція дійсної змінної. Для його чисельного розв'язку рівняння (1) виділяють 2 етапи: виділення коренів та уточнення коренів за допомогою ітераційної процедури.

Етап виділення коренів полягає у встановленні числа, характеру і початкового наближення коренів рівняння. Це можна зробити наступним чином:

- Побудова наближеного графіку функції (з достатньо великим кроком табуляції)
- Використання відомостей про властивості математичних функцій, які входять в рівняння.
- Спочатку будь-яким методом знаходять наближене значення одного з коренів рівняння x_1 (до цього значення збіжиться ітераційний процес для довільного початкового наближення). Тоді наближене значення другого кореня ми знаходимо як

розв'язок нелінійного рівняння $F_2(x) = \frac{F(x)}{x - x_1}$. Відповідно

наближене значення третього кореня ми знаходимо як розв'язок нелінійного рівняння $F_3(x) = \frac{F_2(x)}{x - x_2}$. Цю процедуру

ми повторюємо до тих пір поки не знайдемо наближені значення всіх коренів. Отримані значення коренів рівняння в подальшому використовуємо як початкове наближення для знаходження коренів із заданою точністю. (Описана процедура нагромаджує похибку і дає тільки наближені

значення).

Основними методами чисельного розв'язку нелінійних рівнянь є ітераційні методи, які в свою чергу поділяються на однокрокові методи та багатокрокові методи. В подальшому ми будемо говорити про процедуру ітераційного уточнення деякого кореня. Значення x_0, x_1, x_2, \dots ми розглядатимемо як послідовні наближення до точного значення цього кореня x^* .

Однокрокові методи.

В основі однокрокових методів лежить метод простої ітерації. Метод простої ітерації використовує представлення вихідного рівняння у вигляді

$$x = f(x)$$

Суть методу полягає в тому, що ми спочатку вибираємо деяке нульове наближення значення кореня рівняння x_0 і всі послідовні наближення до точного значення кореня x^* обчислюємо, використовуючи однокрокову ітераційну послідовність:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Ітераційна послідовність наближених значень деякого кореня $\{x_n\}$ має збіжність p -го порядку до точного значення кореня x^* , якщо похибка наступної ітерації задовольняє умові

$$|x_{n+1} - x^*| = q |x_n - x^*|^p,$$

де $q > 0$ - деяка стала.

Дослідимо умову збіжності методу простої ітерації. Виконаємо розклад в ряд із залишковим членом в диференціальній формі

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = (x_n - x^*) f'(\xi), \quad \text{де } \xi \in [x_n, x^*].$$

Отже, якщо $|f'(x)| < 1$ для всіх (x_n) , то метод простої ітерації має збіжність першого порядку і ітераційна послідовність є збіжною при довільному початковому наближенні x_0 .

Для отримання вихідної формули найчастіше використовують перетворення, яке покращує збіжність:

$$x = x + \tau F(x)$$

Метод простої релаксації для якого приймається, що $\tau(x_n) = \tau = const$. Відповідно отримаємо ітераційну процедуру:

$$x_{n+1} = x_n + \tau F(x_n)$$

Як ми вже показали для методу простої ітерації $x_{n+1} = f(x_n)$

достатньою умовою збіжності є $|f'(x)| < 1$ для всіх $\{x_n\}$. Для методу релаксації ця умова досягається шляхом вибору належного значення τ : $-2 < \tau F'(x) < 0$ для всіх $\{x_n\}$.

Ітерації припиняють, коли виконуються умови

$$\begin{aligned} |F(x_{n+1})| &< \varepsilon \\ |x_{n+1} - x_n| &< \varepsilon \\ \left| \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}} \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Метод Ньютона. Для підвищення швидкості збіжності можна використати метод Ньютона. Для отримання формули Ньютона розкладемо функцію $F(x)$ в ряд Тейлора в околі $n+1$ наближення деякого кореня, яке ми вважатимемо достатньо добрим наближенням:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \dots = 0.$$

Якщо ми обмежимося першими двома членами розкладу, то отримаємо наступну ітераційну послідовність:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

Знайдемо порядок методу Ньютона. Для цього представимо формулу Ньютона у вигляді

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Виконаємо розклад в ряд Тейлора із залишковим членом в диференціальній формі

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = (x_n - x^*)f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi),$$

де $\xi \in [x_n, x^*]$

З формули (7) знаходимо, що

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

Знайдемо вираз для першої похідної:

$$f'(x) = 1 - \frac{(F')^2 - FF''}{(F')^2} = \frac{FF''}{(F')^2}.$$

В околі деякого кореня вихідне рівняння можна представити як $F(x) \approx a(x - x^*)^p$. Знаходимо похідну:

$$f' = \frac{a(x-x^*)^p p(p-1)a(x-x^*)^{p-2}}{p^2 a^2 (x-x^*)^{2p-2}} = \frac{p-1}{p}$$

Для простого кореня $p=1$ і тому $f'(x^*)=0$. Обмежившись першим ненульовим доданком, отримаємо:

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi)$$

Отже метод Ньютона є методом другого порядку.

На практиці для збіжності методу Ньютона початкове наближення x_0 вибирають з умови, щоб $F(x_0)F''(x_0) \geq 0$.

В модифікованому методі Ньютона використовується наступна ітераційна послідовність:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_p)}$$

В цьому методі значення похідної обчислюється не на кожному ітераційному кроці, а тільки на кроках оновлення x_p .

Метод Чебишева. Аналогічно методу Ньютона розкладемо функцію $F(x)$ в ряд в околі $n+1$ наближення деякого кореня, тільки на відміну від методу Ньютона залишимо вже три члени розкладу:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 = 0$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння відносно x_{n+1} :

$$(x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2)F'' + 2(x_{n+1} - x_n)F'(x_n) + 2F(x_n) = 0,$$

$$F'_n x_{n+1}^2 + (2F'_n - 2x_n F''_n)x_{n+1} + (x_n^2 F''_n - 2x_n F'_n + 2F_n) = 0,$$

$$x_{n+1} = \frac{-(F'_n - x_n F''_n) \pm \sqrt{(F'_n - x_n F''_n)^2 - F''_n(x_n^2 F''_n - 2x_n F'_n + 2F_n)}}{F''_n} =$$

$$= \frac{-(F'_n - x_n F''_n) \pm \sqrt{F'_n - 2F_n F''_n}}{F''_n} = \frac{-(F'_n - x_n F''_n) \pm F'_n \left(1 - \frac{2F_n F''_n}{F_n'^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{F''_n} =$$

$$= \frac{-(F'_n - x_n F''_n) + F'_n \left(1 - \frac{2F_n F''_n}{F_n'^2} - \frac{4}{8} \left(\frac{F_n F''_n}{F_n'^2}\right)^2\right)}{F''_n} = x_n - \frac{F_n}{F'_n} - \frac{1}{2} \frac{F_n^2 F''_n}{F_n'^3}$$

Отримаємо наступну уточнену ітераційну процедуру:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{F^2(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^3}.$$

Багатокрокові методи.

Для побудови багатокрокових ітераційних методів функцію $F(x)$ заміняють інтерполяційним многочленом, побудованим на вузлах x_n, x_{n-1}, \dots . Нове наближення x_{n+1} знаходять як нуль побудованої інтерполяційної функції. У загальному ми можемо записати:

$$F(x) = F(x_n) + (x - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots$$

Залежно від того, на якому члені ми обриваємо ряд, ми можемо отримати різні типи багатокрокових ітераційних формул. У найпростішому випадку, коли обмежитись двома доданками:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + (x_{n+1} - x_n)F(x_n, x_{n-1}) = 0,$$

ми отримуємо формулу методу хорд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n, x_{n-1})} = x_n - F(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Швидкість збіжності методу хорд визначається співвідношення:

$$|x_{n+1} - x^*| \approx \left| \frac{F''(x^*)}{2F'(x^*)} \right|^{1/1.618} |x_n - x^*|^{1.618}.$$

Якщо залишити наступний доданок, то ми отримуємо метод парабол:

$$F(x) = F(x_n) + (x - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots \\ F(x_n) + (x_{n+1} - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = 0$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння відносно $\Delta = x_{n+1} - x_n$:

$$(\Delta + x_n - x_{n-1})\Delta \cdot F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \Delta \cdot F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n) = 0.$$

$$\Delta = \frac{1}{2F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})} \left(-((x_n - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + F(x_n, x_{n-1})) \pm \sqrt{\left((x_n - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + F(x_n, x_{n-1}) \right)^2 - 4F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})F(x_n)} \right)$$

З двох коренів цього рівняння вибираємо найменший за модулем. Ми отримуємо ітераційну послідовність:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta$$

Швидкість збіжності методу парабол $p = 1,84$:

$$|x_{n+1} - x^*| \approx \left| \frac{F'''(x^*)}{6F'(x^*)} \right|^{0,42} |x_n - x^*|^{1,84}$$

Відмітимо, що метод парабол дозволяє знайти комплексні корені.

В методі зворотної інтерполяції використовують інтерполяційний многочлен Лагранжа. Нехай нам задана послідовність наближених значень коренів рівняння: $x_n, x_{n-1}, x_{n-2} \dots$. Використовуючи ці значення, побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа $x = L(y)$. У найпростішому випадку

$$x = L_1(y) = \frac{y - y_n}{y_{n-1} - y_n} x_{n-1} + \frac{y - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} x_n.$$

Отримаємо ітераційну послідовність:

$$x_{n+1} = L_1(0) = -\frac{y_n}{y_{n-1} - y_n} x_{n-1} - \frac{y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} x_n.$$

Можна записати більш точнішу формулу для випадку трьох вузлів

$$x = L_2(y) = \frac{(y - y_{n-1})(y - y_n)}{(y_{n-2} - y_{n-1})(y_{n-2} - y_n)} x_{n-2} + \frac{(y - y_{n-2})(y - y_n)}{(y_{n-1} - y_{n-2})(y_{n-1} - y_n)} x_{n-1} + \frac{(y - y_{n-2})(y - y_{n-1})}{(y_n - y_{n-2})(y_n - y_{n-1})} x_n$$

Знаходимо ітераційну послідовність

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}y_n}{(y_{n-2} - y_{n-1})(y_{n-2} - y_n)} x_{n-2} + \frac{y_{n-2}y_n}{(y_{n-1} - y_{n-2})(y_{n-1} - y_n)} x_{n-1} + \frac{y_{n-2}y_{n-1}}{(y_n - y_{n-2})(y_n - y_{n-1})} x_n$$

Методи покращення швидкості збіжності.

Для покращення швидкості збіжності ітераційних методів можна використати метод Ейткена:

Нехай ми маємо метод простої ітерації з лінійною збіжністю. Для трьох послідовних наближень значень коренів можемо записати, що

$$x_n - x^* = q^n (x_0 - x^*)$$

$$x_{n-1} - x^* = q^{n-1} (x_0 - x^*)$$

$$x_{n-2} - x^* = q^{n-2} (x_0 - x^*)$$

Використовуючи ці рівняння, отримаємо квадратне рівняння відносно уточненого значення кореня

$$\begin{aligned}(x_{n-1} - x^*)^2 &= (x_n - x^*)(x_{n-2} - x^*), \\ x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}x^* &= x_n x_{n-2} - x^* x_{n-2} - x^* x_n, \\ x^* &= \frac{x_{n-1}^2 - x_n x_{n-2}}{2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n} = \frac{(x_n - x_{n-1})^2 - x_n^2 + 2x_n x_{n-1} - x_n x_{n-2}}{2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n}.\end{aligned}$$

Отримаємо ітераційну послідовність з n на порядок швидшою збіжністю:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n} + \theta(q^{n+1}).$$

Одним з варіантів реалізації цього методу на практиці є наступний. Спочатку знаходимо за методом простої ітерації два послідовні наближення:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1).$$

Наступне наближення знаходимо по методу Ейткена:

$$x_3 = x_2 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2x_1 - x_2 - x_0};$$

Далі ітераційний процес повторюється знову до досягнення заданої точності:

$$x_4 = f(x_3), \quad x_5 = f(x_4),$$

$$x_6 = x_5 + \frac{(x_5 - x_4)^2}{2x_4 - x_5 - x_3}.$$

Оцінка швидкості збіжності методів

Розглянемо процедуру знаходження швидкості збіжності ітераційного методу. Як приклад, знайдемо швидкість збіжності методу хорд. Для цього перепишемо вихідне рівняння у вигляді

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{((x_n - x^*) - (x_{n-1} - x^*))F(x^* + (x_n - x^*))}{F(x^* + (x_n - x^*)) - F(x^* + (x_{n-1} - x^*))}$$

Виконаємо розклад в околі точного значення кореня x^* по малій величині $(x_n - x^*)$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* -$$

$$\frac{\left((x_n - x^*) - (x_{n-1} - x^*) \right) \left(F(x^*) + (x_n - x^*) F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*)^2 F''(x^*) \right)}{\left(F(x^*) + (x_n - x^*) F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*)^2 F''(x^*) \right) - \left(F(x^*) + (x_{n-1} - x^*) F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_{n-1} - x^*)^2 F''(x^*) \right)}$$

Отримаємо далі після нескладних перетворень

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{\left((x_n - x^*) - (x_{n-1} - x^*) \right) \left((x_n - x^*) F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*)^2 F''(x^*) \right)}{\left((x_n - x^*) - (x_{n-1} - x^*) \right) F'(x^*) + \frac{1}{2} \left((x_n - x^*)^2 - (x_{n-1} - x^*)^2 \right) F''(x^*)} = \\ &= x_n - x^* - \frac{\left((x_n - x^*) F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*)^2 F''(x^*) \right)}{F'(x^*) + \frac{1}{2} \left((x_n - x^*) + (x_{n-1} - x^*) \right) F''(x^*)} = \\ &= (x_n - x^*) - (x_n - x^*) \frac{\left(F'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*) F''(x^*) \right)}{F'(x^*) + \frac{1}{2} \left((x_n - x^*) + (x_{n-1} - x^*) \right) F''(x^*)} = \\ &= (x_n - x^*) \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{2} (x_n - x^*) \frac{F''(x^*)}{F'(x^*)} \right)}{1 + \frac{1}{2} \left((x_n - x^*) + (x_{n-1} - x^*) \right) \frac{F''(x^*)}{F'(x^*)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{F''(x^*)}{F'(x^*)} (x_n - x^*) (x_{n-1} - x^*) \end{aligned}$$

Ми отримали різницеве рівняння для похибки $\varepsilon_n = x_n - x^*$

$$\varepsilon_{n+1} = C \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}, \text{ де } C = \frac{1}{2} \left| \frac{F''(x^*)}{F'(x^*)} \right|$$

Нехай швидкість збіжності методу рівна $\varepsilon_{n+1} = A \varepsilon_n^p$. Тоді

$\varepsilon_{n-1} = A^{-1/p} \varepsilon_n^{1/p}$. Підставимо цей вираз у рівняння для похибки

$A \varepsilon_n^p = C \varepsilon_n A^{-1/p} \varepsilon_n^{1/p}$. З цього рівняння знаходимо, що $p = 1,618$ і

$$A = \left(\frac{1}{2} \left| \frac{F''(x^*)}{F'(x^*)} \right| \right)^{1/1.618}$$

Чисельні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Нехай нам задано деяке алгебраїчне рівняння

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

Для виділення коренів алгебраїчних рівнянь можна використати наступні їх властивості:

- якщо $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = 0$ – алгебраїчний многочлен степеня m , то рівняння має m коренів (як дійсних, так і комплексних);
- всі комплексні корені є комплексно спряженими;
- число додатних дійсних коренів менше або рівне числа зміни знаків в послідовності коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_m .
- якщо замінити в рівнянні x на $-x$, то число дійсних від'ємних коренів рівняння менше або рівне числа зміни знаків в послідовності коефіцієнтів a'_0, a'_1, \dots, a'_n в отриманому в результаті заміни рівняння;
- корені алгебраїчного рівняння задовольняють рівнянням Вієта:

$$\sum_{k=1}^m x_k = -\frac{a_{m-1}}{a_m},$$

$$\sum_{k>l}^m x_k x_l = \frac{a_{m-2}}{a_m},$$

$$\sum_{k>l>n}^m x_k x_l x_n = -\frac{a_{m-3}}{a_m}$$

Якщо корені рівняння задовольняють умові $|x_1| \gg |x_2| \gg |x_3| \gg \dots \gg |x_m|$, то для оцінки наближених значень коренів рівняння можна використати вирази

$$x_1 \approx -\frac{a_{m-1}}{a_m}; \quad x_2 \approx -\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}}; \quad \dots \quad x_m \approx -\frac{a_0}{a_1};$$

- всі корені алгебраїчного рівняння лежать всередині круга радіусом

$$|x_p| \leq 1 + \frac{1}{|a_m|} \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{m-1}|)$$

Для знаходження дійсних коренів рівняння можна використати метод Ньютона по схемі Горнера. Запишемо вихідну формулу методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

Для обчислення значення многочлена $F(x_n)$ в точці x_n використаємо схему Горнера. Для цього представимо вихідне рівняння у вигляді розкладу

$$F(x) = (x - x_n)(b_1 + b_2x + \dots + b_mx^{m-1}) + b_0$$

З рівняння (3) випливає, що $F(x_n) = b_0$

Для знаходження коефіцієнта b_0 з рівнянь отримаємо послідовність рівнянь:

$$b_m = a_m,$$

$$b_{m-1} = a_{m-1} + x_nb_m,$$

...

$$b_i = a_i + x_nb_{i+1},$$

$$b_0 = a_0 + x_nb_1.$$

Обчислимо похідну $F'(x)$. Для цього запишемо рівняння у вигляді:

$$F(x) = (x - x_n)G(x) + b_0.$$

Як ми бачимо:

$$F'(x) = (x - x_n)G'(x) + G(x)$$

Отже значення похідної в точці x_n рівне

$$F'(x_n) = G(x_n)$$

Для обчислення значення многочлена $G(x_n)$ використаємо схему Горнера. Для цього представимо многочлен $G(x)$ у вигляді розкладу:

$$G(x) = (x - x_n)(c_2 + c_3x + \dots + c_mx^{m-2}) + c_1$$

Легко бачити, що $G(x_n) = c_1$. Для обчислення коефіцієнта c_1 отримаємо наступну послідовність рівнянь:

$$c_m = b_m,$$

$$c_{m-1} = b_{m-1} + x_nc_m,$$

...

$$c_i = b_i + x_nc_{i+1},$$

...

$$c_1 = b_1 + x_nc_2.$$

Отже якщо нам відомо початкове наближення x_0 деякого дійсного кореня, уточнене значення цього кореня можна знайти по

ітераційній процедурі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_0(x_n)}{c_1(x_n)},$$

де значення коефіцієнтів b_0, c_1 для заданого x_n знайдемо з записаних вище систем рівнянь.

Для знаходження комплексних коренів алгебраїчних рівнянь можна використовувати метод Ліна.

Враховуючи, що комплексні корені многочленів є комплексно-спряженими, запишемо вихідне рівняння у вигляді розкладу:

$$F(x) = (x^2 + px + q)(b_2 + b_3x + \dots + b_mx^{m-2}) + b_1x + b_0.$$

Нехай $\alpha \pm i\beta$ є комплексно-спряженими коренями рівняння. Лінійний залишок $b_1x + b_0$ в цьому виразі рівний нулю, якщо:

$$p = -2\alpha,$$
$$q = \alpha^2 + \beta^2.$$

Звідси випливає наступний алгоритм знаходження комплексних коренів алгебраїчного рівняння. Задамо початкове наближення значення кореня $\alpha_0 \pm i\beta_0$. Обчислимо відповідно значення коефіцієнтів p_0, q_0

$$p_0 = -2\alpha_0,$$
$$q_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Отримаємо наступні рівняння для знаходження коефіцієнтів b_i $i = m-2, \dots, 2$:

$$a_m = b_m,$$
$$a_{m-1} = b_{m-1} + p_0 b_m,$$
$$\dots$$
$$a_i = b_i + p_0 b_{i+1} + q_0 b_{i+2},$$
$$\dots$$
$$a_2 = b_2 + p_0 b_3 + q_0 b_4$$

З останніх двох рівнянь

$$a_1 = pb_2 + qb_3,$$
$$a_0 = qb_2.$$

знаходимо:

$$q_1 = \frac{a_0}{b_2};$$

$$p_1 = \frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2};$$

З рівняння (13) знаходимо уточнені значення коефіцієнтів p_1, q_1 та відповідно уточнене значення коренів $\alpha_1 \pm i\beta_1$

$$\alpha_1 = -\frac{p_1}{2},$$

$$\beta_1 = \sqrt{q_1 - \alpha_1^2}.$$

Обчислюємо похибку

$$|\alpha_1 - \alpha_0| \leq \varepsilon$$

$$|\beta_1 - \beta_0| \leq \varepsilon$$

Якщо ці умови не виконуються тоді приймаємо, що $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$ і повторюємо весь процес ще раз. Ітераційну процедуру повторюємо, до тих пір поки ми не отримаємо значення α та β з заданою точністю.

Хід роботи.

1. Скласти програму табуляції заданої трансцендентної функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$ з кроком $h = 0.1$. Результати табуляції записати в текстовий файл. З отриманої сукупності вузлів $\{x_i, y_i\}$ наближено знайти абсциси точок перетину функції з віссю x . Вибрати дві точки перетину з різною поведінкою функції в їх околі: перша точка перетину відповідає зростанню функції, друга точка відповідає спаданню функції. Отримані наближені значення двох абсцис точок перетину в подальшому використати як початкове наближення для ітераційних процедур уточнення значень коренів.
2. Скласти програму розв'язку нелінійного рівняння $F(x) = 0$ із заданою точністю. В програмі записати наступні функції: розв'язку нелінійного рівняння $F(x) = 0$ методом простої ітерації, методом Ньютона, методом Чебишева, методом хорд, методом парабол та методом зворотної інтерполяції.
3. Як критерій знаходження значення кореня із заданою точністю використати одночасне виконання двох умов $|F(x_{n+1})| < \varepsilon$ та $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
4. Встановити число ітерацій необхідних для кожного із методів для знаходження уточненого значення кожного із двох досліджуваних коренів рівняння з точністю 10^{-10} .
5. Задати алгебраїчне рівняння третього порядку. Побудувати графік функції і підібрати значення коефіцієнтів таким чином, щоб рівняння мало один дійсний корінь і два комплексно-спряжені корені.
6. Задати в текстовому файлі коефіцієнти вхідного алгебраїчного рівняння.

7. Скласти функцію, яка зчитує коефіцієнти довільного алгебраїчного многочлена з текстового файлу і формує масив коефіцієнтів. Скласти функцію, яка з допомогою отриманого масиву коефіцієнтів довільного алгебраїчного рівняння повертає для деякого x значення цього алгебраїчного многочлена.
8. Скласти програму для знаходження дійсних коренів цього рівняння по методу Ньютона з використанням схеми Горнера. Встановити число ітерацій необхідних для знаходження дійсного кореня алгебраїчного рівняння із заданою точністю.
9. Скласти програму для знаходження комплексних коренів по методу Ліна. Встановити число ітерацій необхідних для знаходження комплексних коренів алгебраїчного рівняння із заданою точністю..
10. Оформити звіт про виконання даної лабораторної роботи.

Лабораторна робота №10

Метод Хука-Дживса багатовимірної оптимізації.

Мета: вивчити використання методу нульового порядку Хука-Дживса для розв'язку системи нелінійних рівнянь.

Основні відомості

Розглянемо деяку систему нелінійних рівнянь

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,$$

.....

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

де f_i – функція дійсних змінних x_1, x_2, \dots, x_m . Позначимо

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Побудуємо допоміжну функцію

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Яку в подальшому будемо називати цільовою функцією. Очевидно, що в точці $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$, яка є розв'язком заданої системи, функція $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ стає рівною нулю. Таким чином, враховуючи, що функція $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є невід'ємною, наша задача розв'язку системи нелінійних рівнянь зводиться до пошуку точок мінімуму цільової функції $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Це можна зробити використовуючи методи багатовимірної безумовної оптимізації.

Розглянемо задачу багатовимірної оптимізації, яка полягає в знаходженні мінімуму цільової функції $\Phi(\vec{X})$, де $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Існуючі методи можна поділити на методи нульового, першого та другого порядків. В методах нульового порядку для знаходження мінімуму використовують тільки інформацію про значення функції.

Розглянемо алгоритм методу Хука-Дживса. Він складається з двох етапів: досліджуючого пошуку та пошуку по зразку.

Досліджуючий пошук.

1. Задаємо коефіцієнти зміни кроку q та p , критерії закінчення пошуку ε_1 та ε_2 .
2. Задаємо початкове наближення (базисну точку) $\vec{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, початкову величину кроку $\Delta\vec{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$. Можна прийняти початкову величину кроку однаковою для всіх змінних.

3. Задаємо $X^{(1)} = X^{(0)}$.

4. В циклі для $i = 1..n$ послідовно обчислюємо $x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \Delta x_i$.

Порівнюємо значення функції $\Phi(\vec{X}^{(1)}) < \Phi(\vec{X}^{(0)})$. Якщо умова виконується, то переходимо до наступного i . Якщо умова не виконується, тоді обчислюємо $x_i^{(1)} = x_i^{(0)} - \Delta x_i$ і порівнюємо значення функції $\Phi(\vec{X}^{(1)}) < \Phi(\vec{X}^{(0)})$. Якщо умова виконується, то переходимо наступного i . Якщо умова не виконується, то зменшуємо величину кроку по змінній x_i $\Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{q}$ і повторюємо пошук по i координаті ще раз. Якщо величина кроку по цій змінній стане менше ε_1 , то приймаємо $x_i^{(1)} = x_i^{(0)}$ переходимо наступного i .

5. Якщо $X^{(1)} \neq X^{(0)}$, то ми отримали нову точку $X^{(1)}$ (поточна базисна точка). Перевіряємо умови закінчення пошуку:

$$\|\Delta X\| < \varepsilon_1 \text{ та } \left| \Phi(\vec{X}^{(1)}) - \Phi(\vec{X}^{(0)}) \right| < \varepsilon_2$$

Якщо умови не виконуються, то переходимо до п. 6. Якщо умови виконуються, то ми знайшли точку мінімуму. Припиняємо пошук мінімуму.

Якщо $X^{(1)} = X^{(0)}$, то поточна базисна точка може вважатися точкою мінімуму $\vec{X}^* = \vec{X}^{(0)}$. Припиняємо пошук мінімуму.

6. Переходимо по пошуку по зразку напрям якого задається базисною точкою $X^{(0)}$ та поточною базисною точкою $X^{(1)}$.

Пошук по зразку

7. Знаходимо наступну точку $X_p^{(2)} = X^{(1)} + p(X^{(1)} - X^{(0)})$. Звичайно $p = 2$

8. З точки $X_p^{(2)}$ проводимо досліджуючий пошук з початковою величиною кроку аналогічно пунктам 2-5, вважаючи, що $X_p^{(2)}$ є базисною точкою. Однак в цьому випадку ми не зменшуємо величини кроку. Отриману нову поточну базисну точку позначимо $X^{(2)}$.

9. Виконаємо перевірку $\Phi(\vec{X}^{(2)}) < \Phi(\vec{X}^{(1)})$. Якщо умова виконується, тоді приймаємо поточну базисну точку за базисну точку $X^{(0)} = X^{(1)}$, нову точку $X^{(2)}$ за поточну базисну точку $X^{(1)} = X^{(2)}$. Переходимо до

п.6. Якщо умова не виконується, тоді приймаємо $X^{(0)} = X^{(1)}$ і повторюємо досліджуючий пошук. Переходимо до п. 2.

Цільові функції

1. Функція Розенброка

$$f(X) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2, \quad X^{(0)} = (-1, 2; 0, 0);$$

2. Степенева функція

$$f(X) = (10(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2)^4, \quad X^{(0)} = (-1, 2; 0, 0);$$

3. Коренева функція

$$f(X) = (10(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2)^{1/4}, \quad X^{(0)} = (-1, 2; 0, 0);$$

4. Функція Вуда

$$f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + \\ + (1 - x_3)^2 + 10,1((x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2) + 19,8(x_2 - 1)(x_4 - 1), \\ X^{(0)} = (-3; -1; -3; -1);$$

5. Функція Пауелла

$$f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + 10(x_1 - x_4)^4 + \\ + (x_2 - 2x_3)^4, \quad X^{(0)} = (-3; -1; 0; 1);$$

6. Функція Мієле

$$f(X) = (\exp(x_1) - x_2)^4 + 100(x_2 - x_3)^6 + tg^4(x_3 - x_4) + \\ + x_1^8 + (x_4 - 1)^2, \quad X^{(0)} = (1; 2; 2; 2);$$

Хід роботи

1. Задати систему нелінійних рівнянь ($m = 2$). Побудувати графіки рівнянь. Встановити початкове наближення для знаходження уточненого розв'язку заданої системи нелінійних рівнянь.
2. Написати програму знаходження мінімуму цільової функції методом Хука-Дживса.
3. Протестувати програму. Для цього знайти мінімум однієї з цільових функцій.
4. Знайти розв'язок заданої системи нелінійних рівнянь. Побудувати цільову функцію $\Phi(\vec{X})$. Задати коефіцієнти зміни кроку q та p , критерії закінчення пошуку ε_1 та ε_2 , задати початкове наближення

(базисну точку) $\vec{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, початкову величину кроку

$$\Delta\vec{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

5. Вивести в файл координати точок траєкторії спуску. Знайти число кроків на траєкторії спуску, необхідних для знаходження розв'язку із заданою точністю.
6. Оформити звіт про виконання роботи.