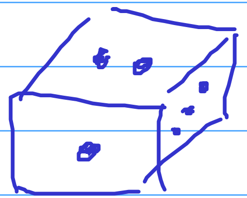
Лекція 1

Баєсів аналіз

Нехай S – непорожня множина – простір елементарних подій. Елементи S позначаються $\omega_1, \omega_2, \ldots$ і називаються елементарними подіями. Ці події є неподільними наслідками „експерименту"

Пр 6d дайс (= кубик)



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Озн. Подія – це підмножина S.

Якщо $\omega \in S$ та $\omega \in A \subset S$, то кажуть, що що сприяє появі події А.

<u>Пр</u> S_1 – випало парне число

" $\{2, 4, 6\}$

S_2 – випаде не одиниця

" $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_1 \subset S_2$ Поява S_1 сприяє появі S_2

<u>Озн.</u> (класичне означення ймовірності)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{к-ть елем. подій, що сприяють появ } A}{\text{к-ть всіх елем. подій}} \quad (1)$$

Озн. Частотою появи події A в низці з n однакових експериментів назив

$$z(A) = \frac{m}{n}$$ (2)

m – к-ть появи події A

n – к-ть експер.

Озн. $$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} z(A)$$ (3) Статистичне означення ймовірності

Озн. Подія, яка точно станеться при проведенні експерименту називається вірогідною подією і познач S (весь простір ел. подій)

$$\mathbb{P}(S) = 1$$ (4)

В загальному випадку ймовірність — це ф-ція $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ від підмножин з S, яка задов. певну систему аксіом.

<u>Правило 1</u> $\forall$ події A: $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$ (5)

$A \cup B$ — подія, яка полягає в тому, що сталася подія A або сталася подія B (об'єднання множин)

$A \cap B$ — подія — | — подія A і сталася подія B (перетин множин)

$A \setminus B$ — подія — | — сталася подія A і не відбулася подія B

Озн. Події A та B назив. несумісними, якщо вони не можуть траплятися одночасно тобто $A \cap B = \phi$

Озн. Подія ϕ назив. неможливою подією і вона не може відбутися при експерименті

Об'єднання несумісних подій A та B позначається $A \sqcup B$

Правило 2 Якщо A та B несумісні, то

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B) \qquad (6)$$

Лема-1 $P(\phi) = 0 \qquad (7)$

■ $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Тому $\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset$

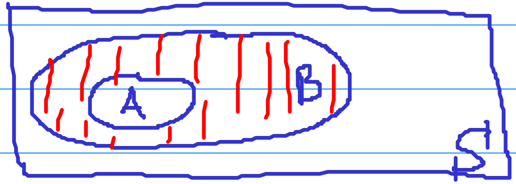
$$\cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} = \mathbb{P}(\emptyset \sqcup \emptyset) = \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} + \mathbb{P}(\emptyset)$$

0 $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(\emptyset)$ ■

<u>Лема-2</u> Якщо $A \subset B$, то

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \qquad (8)$$

■



$$B = A \sqcup (B \setminus A)$$

Тому з (6) $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$ ■

$A|B$ подія A відбулася якщо відомо, що подія B відбулася

$P(A|B)$

Пр 1 6d дайс кидають двічі. Нехай

A - сума очок, що випали при цьому < 11

B - перший раз випало число > 4

$P(A|B)$ - імов того, що перший раз випало 5 або 6, а в сумі < 11

$(5,1)$; $(5,2)$; $(5;3)$; $(5,4)$; $(5,5)$; $\cancel{(5,6)}$;

$(6,1)$; $(6,2)$; $(6,3)$; $(6,4)$; $\cancel{(6,5)}$; $\cancel{(6,6)}$

це простір S' для другого завдання

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{12}$ $\mathbb{P}(B|A) = \frac{9}{33}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{33}{36}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{12}{36}$

В цьому прикладі – це все різні числа.

Оскільки $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A)$, то „інформація" В виявилася корисною при перевідінці ймовірності події А $\equiv$ подія В інформативна по відношенню до А.

Пр 2 З колоди карт витягується 1 карта

A - витягли туз ; B - витягли хресту

Колода карт

♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 В Д К Т (13шт)

♦

♣

♠

В колоді 52 карти.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{13}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{4}$$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$

B - не інформативна подія по віднош. до A

Озн. Події A та B назив. незалежними, якщо $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ та $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Лема →

A та B незалежні $\iff$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ (9)

$\boxed{\Sigma}$ без. дов. $\boxed{\Sigma}$

Третій закон

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad (10)$$

(це ніби означення умовної ймовірності)

Т-ма (Баєса)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} \qquad (11)$$

$\boxed{\Sigma}$ (10) $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$

$$A \cap B = B \cap A \underset{(1.0)}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

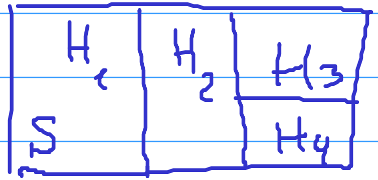
Лекція 2

S - простір елементарних подій $\mathbb{P}$ - ймов.

Озн. Набір підмножин $H_1, \dots, H_n$ множини S назив. повною групою подій, якщо

1) $H_i \cap H_j = \emptyset \quad i \neq j$

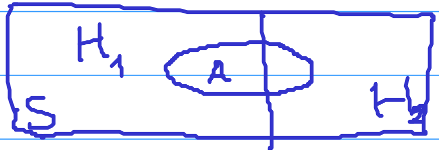
2) $S = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$



Лема 4 Якщо $H_1, \dots, H_n$ - повна група подій, $A \subset S$ - подія, то викон. формула повної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \dots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n) \qquad (12)$$

□ (для $n = 2$)



$$A = [H_1 \cap A] \sqcup [H_2 \cap A]$$

Тому з (6) $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1 \cap A) + \mathbb{P}(H_2 \cap A)$ (13)

За означенням (10): $\mathbb{P}(A | H_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap H_i)}{\mathbb{P}(H_i)}$

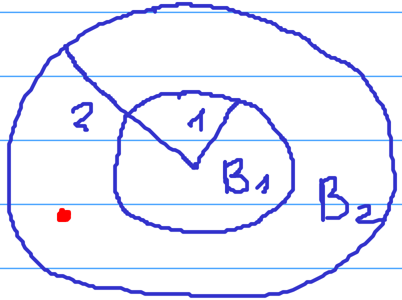
$$\mathbb{P}(A \cap H_i) = \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A | H_i) \quad (14)$$

Підставивши (14) в (13), отримаємо (12) $\blacksquare$

<u>Задача</u> Стрілець стріляє в мішень, що склад з двох конц. кіл, радіуса 1 та 2.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\qquad B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$

Яка ймовірність того, що він попаде в B_1



<u>Озн.</u> Подія A_1 віро-гідніша за подію A_2, якщо

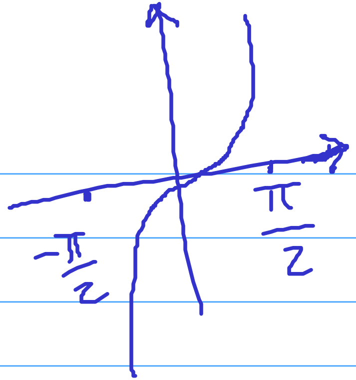
$$P(A_1) \geq P(A_2)$$

(записуємо $A_1 \succeq A_2$)

Зрозуміло, що якщо кількість елементів A_1 більша за к-ть елем. A_2, то згідно класич. озн. ймов

$$A_1 \succeq A_2$$

В задачі $P(B_2) \geq P(B_1)$: $B_2 \succeq B_1$



Замінимо в означенні „к-ть" ⟶ „площа"

$$P(A) = \frac{\text{площа } A}{\text{площа } S} \qquad (15)$$

і якщо $S = B_2$

$$P(B_1) = \frac{\text{площа } B_1}{\text{площа } B_2} = \frac{\pi 1^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B_2) = 1$$

В загальному випадку говоримо про міру об'єкту (події)

Щоб оперувати поняттям ймовірності треба таке:

1) S - простір елементарних подій

2) $\mathbb{P}$ - міру множини $A \subset S$ - ймовірність

3) $\mathcal{F}$ - сім'я множин, кожна з якої має міру $\mathbb{P}$

<u>Озн.</u> Трійка $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ назив. ймовірнісним простором (див. теорію міри)

2. Випадкові величини.

Нехай $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - ймов. простір

Озн. Випадковою величиною (в.в.) називається ф-ція $X: S \to \mathbb{R}$, яка є вимірною стосовно $\mathcal{F}$, тобто
$\forall c \in \mathbb{R}$ прообраз промена $(-\infty, c)$ належить до $\mathcal{F}$.

В.в. можна описати так: $X(\omega) = \omega^2$

Озн. Кумулятивною ф-цією розподілу (cumulative distribution function CDF) в.в. X назив. функція $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(\omega \in S \mid X(\omega) < x)$ (1)

Лема 1 Виконуються таке

1) $F_X(-\infty)=0$; 2) $F_X(+\infty)=1$;

3) ф-ція $x \longmapsto F_X(x)$ є монотонно неспадною на $\mathbb{R}$

□ $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ за означенням

1) $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X<x) = 0$

2) $\ldots = 1$

3) $\{X<x_1\} \subset \{X<x_2\}$ при $x_1<x_2$

З леми 2 попер. підрозділу

$$\mathbb{P}\Big[\underbrace{\{X < x_2\} \setminus \{X < x_1\}}_{\{x_1 \le X < x_2\}}\Big] = \underbrace{\mathbb{P}\{X < x_2\}}_{F_X(x_2)} - \underbrace{\mathbb{P}\{X < x_1\}}_{F_X(x_1)}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(x_1 \le X < x_2)}_{\geq 0} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \qquad (2)$$

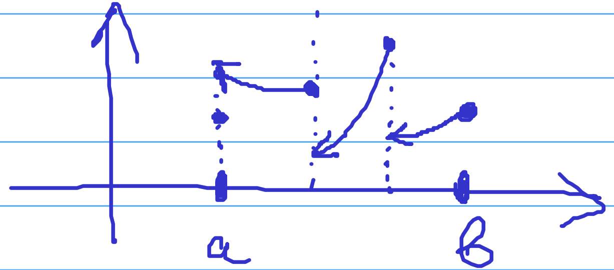
$$F_X(x_2) - F_X(x_1) \ge 0$$

$$F_X(x_2) \ge F_X(x_1) \qquad \blacksquare$$

<u>Озн.</u> Відображення $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ маємо кантор-функцією, якщо в кожній точці $x \in (a, b)$ ф-ція F є неперервною зліва і

має скінченну границю зправа, при $x=a$ F має праву границю при $x=b$ F - неперервна зліва

$C_{ag}[a,b]$



Лема 2

$F_X \in C_{ag}(\mathbb{R})$

$\boxtimes$ без дов. $\boxtimes$

<u>Озн.</u> В.в. назив. дискретною в.в., якщо вона приймає не більше як злічену кількість значень (в нас — скінченна к-ть значень)

Нехай $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – скінченна к-ть значень дискретної в. в. X

нехай $p_i = \mathbb{P}\{X = x_i\}$

Тоді таблична форма опису в. в. X виглядає так.

X	x_1	x_2	....	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	---	p_n

(3)

Озн. Функція розподілу мас в. в. X назив. (probability mass function, PMF)

$$g_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

для в. в. з (3)

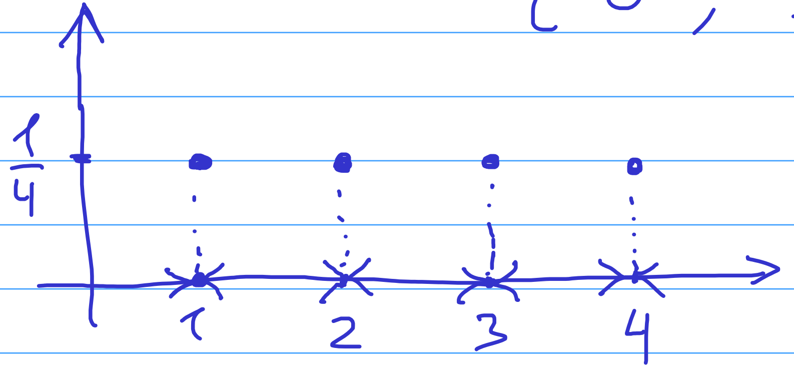
$$g_X(x) = \begin{cases} p_i, & \text{при } x = x_i \\ 0, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$$

Лекція 3 Пр 1 Нехай X_1 – в.в. яка дорівнює числу, що випадає при киданні пірамідки (4d дайс)

Значення X_1

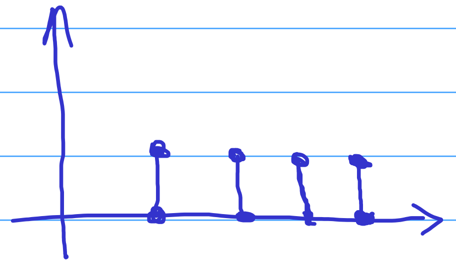
x	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$g_X(x) \equiv g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1,2,3,4 \\ 0, & x \neq 1,2,3,4 \end{cases}$$ PMF



← Графік правильний

Не прав →



Тепер CDF для X_1 $\quad F_X(x) \equiv F(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$

Нехай $x \le 1$: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) \le \mathbb{P}(X < 1) = 0$

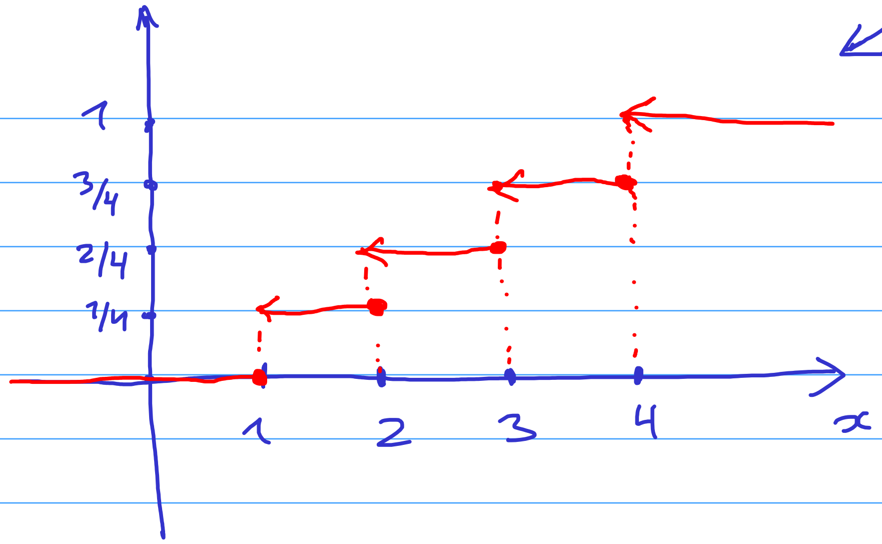
Нехай $1 < x \le 2$: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{4}$

$2 < x \le 3$ $\quad F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$3 < x \le 4$ $\quad F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \frac{3}{4}$

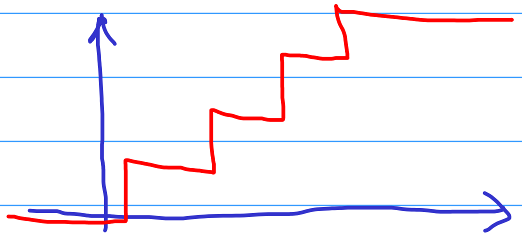
$4 < x$ $\quad F(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1/4, & 1 < x \le 2 \\ 2/4, & 2 < x \le 3 \\ 3/4, & 3 < x \le 4 \\ 1 & 4 < x \end{cases}$$



Графік CDF
правильний

не прав.



У випадку, якщо в.в. приймає злічену к-ть значень ми теж її назив. дискретною

x	x_1	x_2	......
P	p_1	p_2	......

Якщо x_i - значення дискр. в.в. X

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \text{ , то}$$

S - всі значення в.в.

$$S = \{X = x_1\} \sqcup \{X = x_2\} \sqcup \ldots\ldots$$

повна група подій

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\ldots\ldots\ldots)$$

$$1 = \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \ldots$$

Отже, виконується умова нормування $\boxed{\sum_i p_i = 1 \quad (4)}$

Озн. В.в. назив. непереровною, якщо її CDF є неперервною ф-цією

Озн. В.в. назив. абсолютно-неперервною, якщо існує ф-ція $f_X(x) \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

Ф-ція f_X назив функцією щільності розподілу ймовірностей в.в. X (probability density function, PDF)

але переважно абс.неп. в.в. назив. просто неперервними в.в.

Властивості PDF $f_X(x) = f(x)$

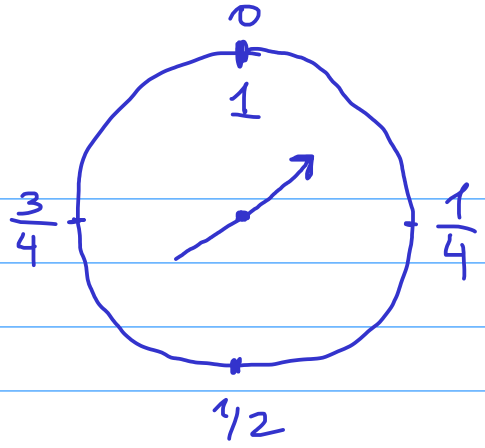
1) $f(x) \geq 0$ (за означенням)

2) f - інтегровна (за означенням)

3) Оскільки $F(+\infty) = 1$, то кожна PDF задовольняє умову нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1 \qquad (6)$$

Пр2 (рулетка). Рулеткою назвемо генератор випадкових чисел такий, що:
маємо круг з закріпленою в центрі стрілкою, яка вільно обертається, вказуючи на якусь



точку на межі круга (коло) цей душинці

Виберемо круг, коло якого має довжину $= 1$

Результат роботи рулетки — число з відрізка $[0, 1]$.

Знайдемо CDF в.в. X_2 - число, що випало на рулетці.

Нехай $x \leq 0$: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) \leq \mathbb{P}(X < 0) = 0$

$x = \frac{1}{2}$ $F(x) = \mathbb{P}(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{4}$ $\quad F(x) = \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$x = \frac{3}{4}$ $\quad F(x) = \mathbb{P}\left(X < \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$F(x) = x$

при

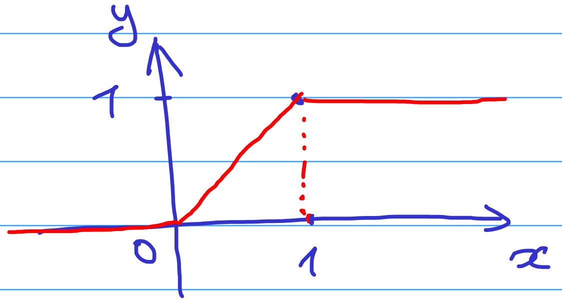
$0 < x \leq 1$

$1 < x$ $\quad F(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

– неперр. ф-ція (7)



Візьмемо

(5): $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

і продиференціюємо

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \right)$$

$$F'(x) = f(x) \qquad (8)$$

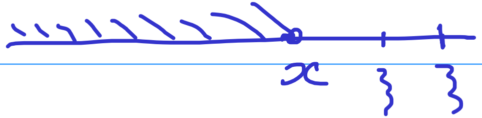
(7) іноді може бути „означенням" PDF

Пр. Знайдемо PDF для X_2 - рулетки, продифе-ренціювавши CDF (7)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Загальні міркування:

X - в.в. для неї є поняття CDF $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$



X — дискретна в.в.

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\{X \leq x\} \setminus \{X < x\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x) - \underbrace{\mathbb{P}(X < x)}_{= F(x)} =$$

$$= \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} \underbrace{\mathbb{P}(X < \xi)}_{= F(\xi)} - F(x) = \lim_{\xi \downarrow x} F(\xi) - F(x) =$$

$$= \lim_{\xi \downarrow x} \left(F(\xi) - F(x)\right) = \text{PMF}$$

Якщо X - неперр. в.в., то F - неперервна

$\mathbb{P}(X = x) = 0$ (імовірність того, що неперервна в.в. прийме конкретне значення $= 0$)

Тому, можна не зважати на "скінченну" к-ть точок з області визначення PDF

Отже, PDF для рулетки можна записати так

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Лекція 4 Якщо F - CDF в.в., f - PDF в.в.

$$\mathbb{P}(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx -$$

$$- \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_2} + \int_{x_1}^{-\infty} = \int_{x_1}^{x_2}$$

тобто

$$\mathbb{P}(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Іноді знати про в.в. все „важко" і непотрібно тому замість CDF, PMF чи PDF досить знати узагальнюючі характеристики в.в.

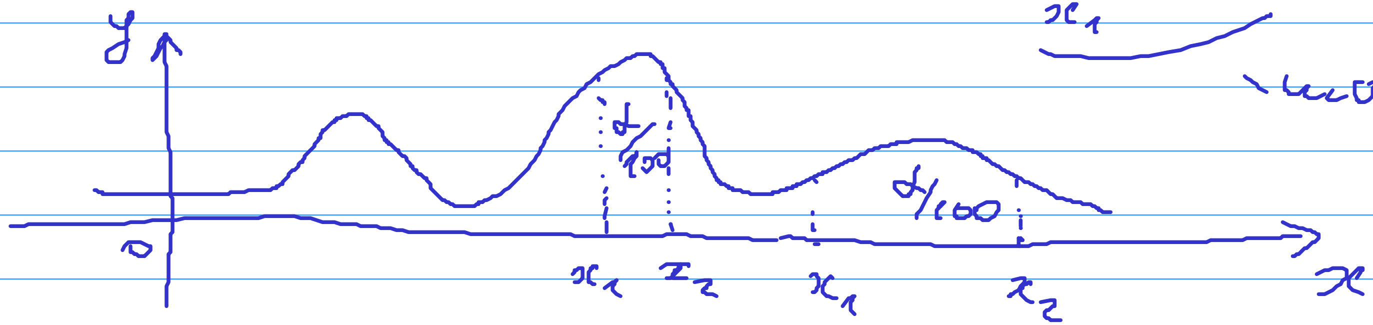
α-процентний імовірністний інтервал – це деякий проміжок $[x_1, x_2)$ для якого

$$P(x_1 \le X < x_2) = \frac{\alpha}{100} \qquad (2)$$

тобто є $\alpha\%$ шансів, що в.в. X прийме значення в $[x_1, x_2)$

Порівнявши (1) та (2) $\quad \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}_{} = \frac{\alpha}{100}$

– площа під графіком f від x_1 до x_2



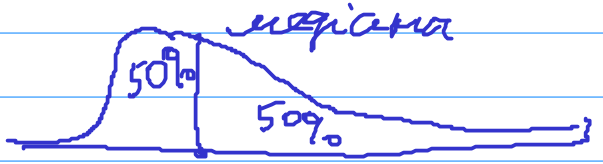
α-квант. інт. може бути багато. Якщо графік є симетричний стосовно деякої осі, то часто до розгляду беруть інтервал, середина якого і дає вісь симетрії.
Іноді беруть інтервал найменшої довжини і т.д.

Мода дискретної в.в. – те x_i, якому відповідає найбільше $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$

неперервної в.в. – т. максимуму PDF

Медіана в.в. – це точка m така, що $F(m) = \frac{1}{2}$

CDF



Математичне сподівання — дискретної в. в., (expected value) яка задана

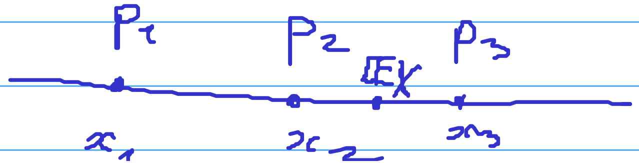
X	x_1	x_2	....
P	p_1	p_2	.....

$$\mathbb{E}X = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots\ldots = \sum_i x_i p_i \quad (3)$$

— неперервної в. в. з PDF $f(x)$:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \quad (4)$$

$$\sum p_i = 1$$



Пр 1 Розглянемо в. в.

X	5	7	9	11	12	14
p	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

мода

$$5 \quad \boxed{7 \quad 7} \quad \boxed{9} \quad 11 \quad 12 \quad 14$$

медіана

Медіана $= 9$

Мода $= 7$

$$EX = 5 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{1}{7} + 11 \cdot \frac{1}{7} + 12 \cdot \frac{1}{7} + 14 \frac{1}{7} =$$

$$= 9\frac{2}{7}$$ такого значення переважно НЕМА

Ці характеристики дають точку, яка характеризує дані.

Крім точки є ще „міра розкиду" даних навколо цієї точки.

Розмах (range) = $\max X - \min X$

Пр 2

X_1	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2	-100	100
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\mathbb{E}X_1 = 0$

$\mathbb{E}X_2 = 0$

range $= 2$

range $= 200$

Дисперсія (variance)

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \quad (5)$$

Середньоквадратичне відхилення (standard deviation)

$$\sigma(X) = sd(X) = \sqrt{\mathrm{Var}\,X} \quad (6)$$

∅) Для прикладу 1 знайти $\mathrm{Var}\,X$, $sd\,X$

<u>Зауваження</u>

$$\mathrm{Var}\,X = \sum x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2$$

взяти з (3)

$$\mathrm{Var}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (\mathbb{E}X)^2$$

взяти з (4)

Класичні приклади випадкових величин.

В.в. X має рівномірний дискретний розподіл з параметром N, якщо

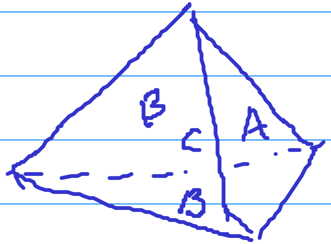
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{N}, \quad k=\overline{1,N} \qquad (1)$$

кожне значення приймається з однаковою ймовірністю

$$\mathbb{E}X = 1\cdot\frac{1}{N} + 2\cdot\frac{1}{N} + \ldots + N\cdot\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1+N}{2}\cdot N = \frac{N+1}{2}$$

$$\operatorname{Var}X = \ldots = \frac{N^2-1}{12} \qquad \operatorname{sd}X = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$$

Пр Розглянемо „неправильний" 4-дайс : пірамідка, грані якої маркована так A; B; B; C



Підкидаємо 3 рази

в.в. X – кількість появи грані A в результаті підкидань

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{27}{64}=1\cdot1\cdot\frac{27}{64}=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{3-0}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{27}{64}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{9}{64}=3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{64}=1\cdot\frac{1}{64}\cdot1=C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{3-3}$$

В.в. X має біноміальний розподіл з параметрами $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$, якщо

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = \overline{0,n} \qquad (2)$$

Можна довести, що

$$\mathbb{E}X = np, \qquad \operatorname{Var} X = np(1-p)$$

В.в. X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (3)$$

Можна показати, що $\mathbb{E}X = \lambda$, $\operatorname{Var} X = \lambda$

Лекція 5 (edit) Минулого разу ми розглянули приклади дискретних вип. величин (в.в.). Тепер - неперервні.

Озн. Неперервна в.в. називається рівномірно розподіленою на скінченному відрізку $[a,b]$, (пишемо $X \sim U[a,b]$) якщо її PDF

uniformly

має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \quad (1)$$

Ми з Вами говорили, що кожна PDF має задовольняти умову нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (2)

Ф-ція з (1) її задовольняє:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b]} 0\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\, x\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

В записі (1) вираз $\frac{1}{b-a}$ є числовим множником, який не має „ніякого" смислового навантаження.

Можна замість (1) писати

$$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \qquad (3)$$

і вважати, що сталу C ми „шукаємо" з умови нормування (2). Запис (3) простіший за (1)

Досконалість не має меж))))

тому давайте це спростимо (3):

$$f(x) \propto \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \quad (4)$$

символ $\propto$ означає „пропорційність" і його вживають, щоб не писати числові множники.

Для детальних обчислень треба писати „$=$", для розуміння – писати „$\propto$"

Пр Знайдемо $\mathbb{E}X$ та $\operatorname{Var}X$, якщо $X \sim U[a,b]$.

За означенням $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=\!=} \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx =$

PDF

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

середина відрізка $[a, b]$

Графік PDF

Тепер - дисперсія

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx}_{\text{див. Теор. ймов.}} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(b^3 - a^3\right) - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}\left(b^2+ab+a^2\right)}{3\cancel{(b-a)}} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-\right.$$

$$\left.-6ab-3b^2\right) = \frac{1}{12}\left(b^2-2ab+a^2\right) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Середньоквадратичне відхилення

$$\operatorname{sd} X = \sqrt{\operatorname{Var} X} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$ – залежить від довжини $(b-a)$ проміжка

Озн. В.в. X має бета-розподіл з параметрами $a \geq 1$ та $b \geq 1$, якщо

$$f(x) \propto \begin{cases} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \qquad (5)$$

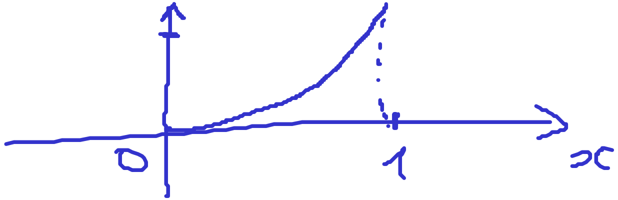
пишемо $X \sim B(a,b)$

Частковим випадком цього розподілу є рівномірний розподіл на $[0,1]$ (при $a=1$ та $b=1$)

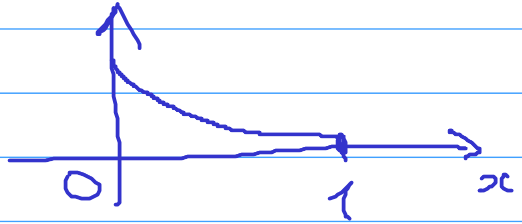
Тобто $X \sim B(1,1) \Longleftrightarrow X \sim U[0,1]$.

Графіки PDF:

$a > 1, \quad b = 1$

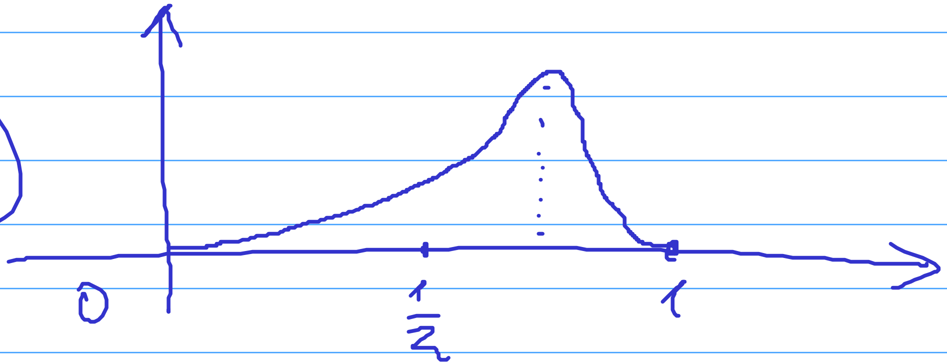


$a = 1, \quad b > 1$



$a > b > 1$

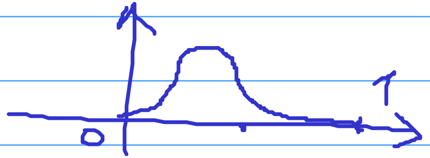
(зміщений вправо)



Тут багато варіантів можна згенерувати

$1 < a < b$

зміщений вліво



Маючи якісь конкретні дані з проміжка $[0,1]$, можна спробувати їх описати бета-розподілом

описати = знайти такі a та b, щоб графік відповідного бета-розподілу „наближав" дані. Про це – потім.

Обчислювати числові характеристики НЕ будемо — бо складно. Лише наведемо їх

$$\mathbb{E}X = \frac{a}{a+b}, \quad \operatorname{Var} X = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \qquad (6)$$

Найпопулярнішим є нормальний розподіл:

Озн. В. в. Z називається стандартно нормально розподіленою, якщо її PDF:

$$f_Z(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (7)$$

Пишемо

$$Z \sim N(0,1)$$

Озн. В. в. Y має нормальний розподіл з параметрами μ та σ^2 якщо

$$f_Y(x) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8)$$

Пишемо $\quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

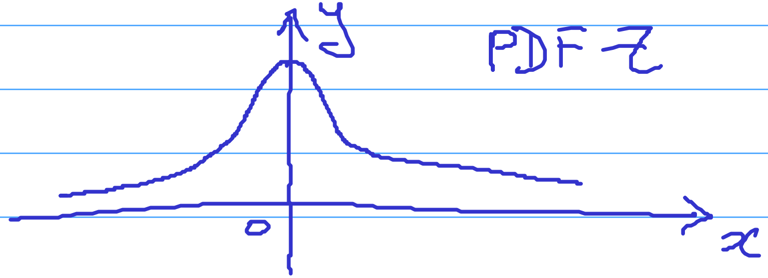
З умови нормування можна знайти явний вигляд цих PDF. Ми його одразу запишемо

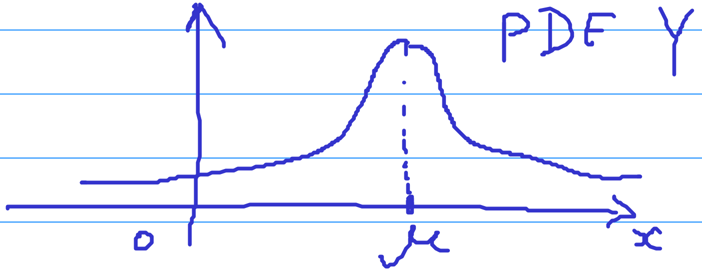
$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (9)$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (10)$$

Зрозуміло, що Z - це Y при $\mu=0$, $\sigma=1$.

Графіки - „дзвоноподібні" чи „шапкоподібні"





Пр. $Z \sim N(0,1)$. Знайдемо $\mathbb{E}Z$ та $\operatorname{Var} Z$

$$\mathbb{E}Z = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\, dx = 0$$

як інтеграл від непарної ф-ції по симетричному проміжку.

$$\operatorname{Var} Z = \mathbb{E}(Z^2) - (\underbrace{\mathbb{E}Z}_{=0})^2 = \mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{робимо заміну,} & x = \sqrt{2}\, y \\ \text{щоб показник} & \\ \text{експоненти} = -y^2 & dx = \sqrt{2}\, dy \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2y^2 e^{-y^2}}{\sqrt{\cancel{2}\pi}} \cancel{\sqrt{2}}\, dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\,d\left(e^{-y^2}\right) \underset{\text{частинами}}{=}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\underbrace{y e^{-y^2} \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty}}_{\substack{\| \\ 0}} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy}_{\substack{\| \\ \sqrt{\pi}}} = 1$$

0 бо експонента росте швидше за довільний многочлен

(на мат. аналізі було) ■

В загальному випадку

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow EY = \mu, \quad \mathrm{Var}\,Y = \sigma^2, \quad \mathrm{sd}\,Y = \sigma$$

Тобто коли ми говоримо про нормальний розподіл $N(\mu, \sigma^2)$, то його параметри мають сенс:

μ – математичне сподівання

σ^2 – дисперсія.

Правило трьох сигм:

$$\mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}Y| \le 3\sigma\} \approx 0{,}9973$$

тобто майже всі значення зосереджені у відрізку $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Тепер розглянемо CDF нормальних величин

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt \qquad F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\,dt$$

Доведіть розподілення F_Y:

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{робимо заміну змінних} \\ \boxed{t = \mu + \xi\cdot\sigma} \\ dt = \sigma\,d\xi \\ \frac{t-\mu}{\sigma} = \xi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\cancel{\sigma}\,d\xi =$$

$$= F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Отже,

$$F_Y(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (11)$$

Нехай

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \quad (12)$$

Коли подивитися на графік PDF в.в. Z, то матимемо таке

$\Phi(x)$ - це площа ділянки

і на цю ф-цію є таблиці її значень.

Їх розглянемо наступного разу.

БАЄСОВІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДАНИХ

Лекція №6

Системи випадкових величин. Незалежність випадкових величин.

Олег БУГРІЙ

Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь,
Львівський національний університет імені Івана Франка

29 вересня 2022 року

Випадкові вектори

Часто результат експерименту описується не однією випадковою величиною X, а декількома випадковими величинами.

Приклад

Оператор "Старої пошти" обробляє замовлення. Якщо контрольованими розмірами відправлення є довжина X та ширина Y листа, то маємо двовимірну випадкову величину, якщо контролюється ще і висота Z посилки, то маємо тривимірну випадкову величину (X, Y, Z).

Дамо строге означення. Нехай $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір.

Означення

Вимірна стосовно Σ числова функція $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ називається (одномірною) випадковою величиною. Вектор-функцію $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$, в якій $\xi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, ..., $\xi_m : \Omega \to \mathbb{R}$ є випадковими величинами, заданими на одному ймовірнісному просторі, називають m-мірною випадковою величиною (або випадковим вектором).

Розрізнятимемо дискретні (складові цих величин дискретні) і неперервні (всі складові – неперервні) багатовимірні випадкові величини.

CDF двовимірної випадкової величини

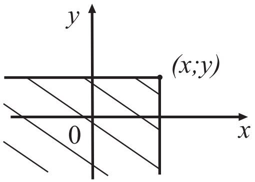
Зосередимося на двовимірних випадкових векторах.

Означення

Комулятивною функцією сумісного розподілу ймовірностей (cumulative distribution function, CDF) (дискретної або неперервної) двовимірної випадкової величини називається функція

$$F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}\{X < x,\ Y < y\}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Геометрично рівність (1) можна тлумачити так: $F(x, y)$ є ймовірністю того, що випадкова точка (X, Y) попаде в нескінченний квадрат з вершиною в точці (x, y), розташований лівіше і нижче цієї вершини (Рис. 1)



Наведемо основні властивості CDF (писатимемо просто F замість F_{XY}).

Властивість 1. Значення CDF задовольняють нерівність

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

Властивість 2. F є неспадною функція за кожним аргументом, тобто

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \quad \text{при} \quad x_1 < x_2,$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \quad \text{при} \quad y_1 < y_2.$$

Д о в е д е н н я. Доведемо, що $F = F(x, y)$ – неспадна функція за x.

Нехай $x_1 < x_2$. Подію, яка полягає в тому, що складова X прийме значення менше x_2, і при цьому $Y < y$, можна розділити на наступні дві несумісні події:

1) X приймає значення, менше x_1 і при цьому $Y < y$ (з ймовірністю $\mathbb{P}\{X < x_1, Y < y\}$);
2) X приймає значення, що задовольняє $x_1 \leq X < x_2$, і при цьому $Y < y$ (з ймовірністю $\mathbb{P}\{x_1 \leq X < x_2, Y < y\}$).

За теоремою додавання

$$\mathbb{P}\{X < x_2, Y < y\} = \mathbb{P}\{X < x_1, Y < y\} + \mathbb{P}\{x_1 \le X < x_2, Y < y\}.$$

Звідси

$$\mathbb{P}\{X < x_2, Y < y\} - \mathbb{P}\{X < x_1, Y < y\} = \mathbb{P}\{x_1 \le X < x_2, Y < y\}$$

або

$$F(x_2, y) - F(x_1, y) = \mathbb{P}\{x_1 \le X < x_2, Y < y\} \ge 0,$$

звідки матимемо

$$F(x_2, y) - F(x_1, y) \ge 0 \quad \text{або} \quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y).$$

Аналогічно доводиться, що F є неспадна функція за аргументом y. □

Властивість 3. Виконуються такі граничні співвідношення:

а) $F(-\infty, y) = 0$;

б) $F(x, -\infty) = 0$;

в) $F(-\infty, -\infty) = 0$;

г) $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Д о в е д е н н я. а) $F(-\infty, y)$ є ймовірністю події $X < -\infty$ і $Y < y$, але така подія неможлива (оскільки неможлива подія $X < -\infty$), отже, ймовірність такої події дорівнює 0.

б) Подія $Y < -\infty$ неможлива, тому $F(x, -\infty) = 0$

в) Подія $X < -\infty$ і $Y < -\infty$ неможлива, тому $F(-\infty, -\infty) = 0$

г) Подія $X < \infty$ і $Y < \infty$ вірогідна, отже, ймовірність цієї події $F(\infty, \infty) = 1$. □

Властивість 4. а) При $y = +\infty$ CDF системи (X, Y) стає CDF складової X:

$$F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x);$$

б) При $x = +\infty$ CDF системи (X, Y) стає CDF складової Y:

$$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y).$$

Д о в е д е н н я. а) Так як подія $Y < \infty$ вірогідна,то $F_{XY}(x, \infty)$ визначає ймовірність події $X < x$ тобто є функцією розподілу складової X.

б) Доводиться аналогічно. $\square$

Ймовірність попадання точки у півполоси

Використовуючи функцію розподілу системи випадкових величин X та Y, легко знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова точка попадає у півполосу $x_1 \le X < x_2$ та $Y < y$ (див. Рис. 2).

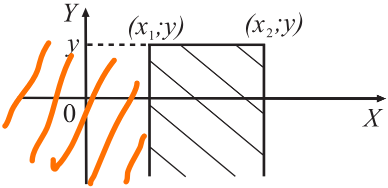


Рис.2

Віднімаючи від ймовірності попадання точки в квадрант з вершиною $(x_2; y)$ ймовірність попадання точки в квадрант з вершиною $(x_1; y)$ (Рис. 2), отримаємо

$$\mathbb{P}\{x_1 \le X < x_2, \quad Y < y\} = F(x_2, y) - F(x_1, y). \tag{2}$$

Аналогічно маємо ймовірність того, що в результаті випробування випадкова точка попадає у півполосу $X < x$ та $y_1 \leq Y < y_2$ (див. Рис. 3).

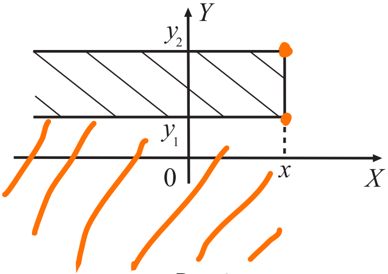


Рис.3

Ця ймовірність дорівнює

$$\mathbb{P}\{X < x, \ \ y_1 \leq Y < y_2\} = F(x, y_2) - F(x, y_1). \tag{3}$$

Таким чином, ймовірність попадання випадкової точки у півполосу дорівнює приросту функції розподілу за одним з аргументів.

Ймовірність попадання точки у прямокутник

Знайдемо ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник ABCD (Рис. 4).

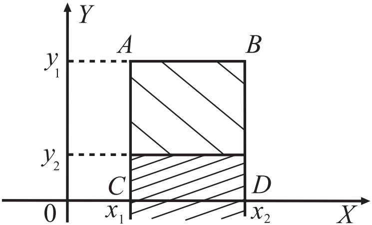


Рис.4

Це можна зробити, наприклад, так: від ймовірності попадання випадкової точки у вертикальну півполосу AB (ця ймовірність дорівнює $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$) відняти ймовірність попадання точки у вертикальну півполосу CD (ця ймовірність дорівнює $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$). Отримаємо, що

$$\mathbb{P}\{x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\} =$$

$$= [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]. \tag{4}$$

Неперервні випадкові вектори

Двовимірна випадкова величина називається абсолютно неперервною (ми казатимемо просто неперервною), якщо існує щільністю сумісного розподілу ймовірностей (або просто PDF) – така функція $f_{XY}(x, y)$, що

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Альтернативними в певному сенсі означеннями PDF є рівності:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

або

$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x, y)\, dxdy. \tag{7}$$

Графік функції f_{XY} є поверхнею в просторі $\mathbb{R}^3$, яку прийнято називати поверхнею розподілу випадкового вектора (X, Y).

Розглянемо деякі властивості двовимірної щільності ймовірностей.

Властивість 1.

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)\geq 0. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Ймовірність попадання випадкової точки у прямокутник зі сторонами Δx і Δy є невід'ємне число; площа цього прямокутника – додатне число. Отже, відношення цих двох чисел, а значить, і їх границя (при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$), яка дорівнює $f(x,y)$, є невід'ємне число, тобто виконується (8). $\square$

Ця властивість безпосередньо випливає з того, що F – неспадна функція своїх аргументів.

Властивість 2. Виконується умова нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Нескінчені межі інтегрування вказують, що областю інтегрування є вся площина xOy; оскільки подія, яка полягає в тому, що випадкова точка попаде при випробуванні на площину xOy, достовірна, то ймовірність цієї події (вона і визначається подвійним невласним інтегралом від двовимірної щільності) дорівнює 1, тобто виконується (9). $\square$

Приклад

Задана щільність сумісного розподілу неперервної випадкової величини (X, Y)*:* $f(x, y) = C \cos x \cos y$ *в квадраті* $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$*; поза цим квадратом* $f(x, y) = 0$*. Знайти сталу* C*.*

Р о з в' я з у в а н н я. Згідно з (9)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = C \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y\, dxdy.$$

Тому

$$C = \frac{1}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y\, dxdy} = 1. \quad \square$$

Нехай відома PDF сумісного розподілу системи випадкових величин (X, Y). Знайдемо маргінальні (або граничні) PDF її складових. Нехай $F_X(x)$ та $f_X(x)$ – CDF та PDF складової X відповідно. Беручи до уваги (5) і рівність $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$, отримаємо

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\xi, y)\, dy \Big) d\xi,$$

а тому за означенням маргінальна PDF складової X має вигляд

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dy. \tag{10}$$

Аналогічно знаходимо маргінальну PDF складової Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dx. \tag{11}$$

Умовні закони розподілу складових неперервних випадкових векторів

Відомо, що якщо події A та B залежні, то умовна ймовірність події B відрізняється від її безумовної ймовірності. В цьому випадку

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{12}$$

Аналогічне твердження має місце і для випадкових величин.

Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю сумісного розподілу $f_{XY}(x, y)$ та маргінальними щільностями $f_X(x)$ та $f_Y(y)$.

Означення

Функція $\varphi(x|y)$ називається умовною щільністю (або умовною PDF) розподілу складової X за даного значення $Y = y$, якщо

$$\varphi(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{13}$$

Функція $\psi(y|x)$ називається умовною щільністю (або умовною PDF) розподілу складової Y за даного значення $X = x$, якщо

$$\psi(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}. \tag{14}$$

Підкреслимо, що відмінність, наприклад, умовної щільності $\varphi(x|y)$ від безумовної щільності $f_X(x)$ полягає в тому, що функція $\varphi(x|y)$ дає розподіл X при умові, що складова Y прийняла значення $Y = y$. Функція ж $f_X(x)$ дає розподіл X незалежно від того, які з можливих значень прийняла складова Y.

Враховуючи (10)-(11) та (13)-(14), для умовних щільностей складових отримаємо такі формули:

$$\varphi(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx}, \tag{15}$$

$$\psi(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}. \tag{16}$$

Як і кожна щільність розподілу, умовні щільності володіють такими властивостями:

$$\varphi(x|y) \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x|y)\,dx = 1; \tag{17}$$

$$\psi(y|x) \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(y|x)\,dy = 1. \tag{18}$$

Приклад

Щільність двовимірної випадкової величини (X, Y) *дорівнює*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де область D *обмежена лініями* $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - x$ *(див. Рис. 5). Знайти умовні закони розподілу ймовірностей складових цієї випадкової величини.*

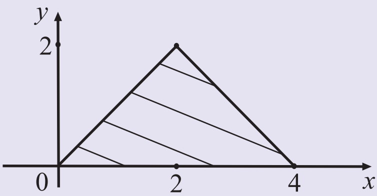


Рис.5

Р о з в' я з у в а н н я. Спочатку знаходимо розподіл складових:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \notin [0;4], \\ \int_0^x \frac{1}{4}\,dy, & x \in [0;2], \\ \int_0^{4-x} \frac{1}{4}\,dy, & x \in (2;4], \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \notin [0;4], \\ \frac{1}{4}x, & x \in [0;2], \\ \frac{1}{4}(4-x), & x \in (2;4]. \end{cases}$$

$$\psi(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & (x,y) \in D, \quad x \in [0;2], \\ \frac{1}{4-x}, & (x,y) \in D, \quad x \in (2;4]. \end{cases}$$

Перевірка:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(y|x)\, dy = \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{x}\, dy + \int\limits_{0}^{4-x} \frac{1}{4-x}\, dy = 1.$$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \begin{cases} 0, & y \notin [0;2], \\ \int\limits_{y}^{4-y} \frac{1}{4}\, dx, & y \in [0;2], \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \notin [0;2], \\ \dfrac{4-2y}{4}, & y \in [0;2]. \end{cases}$$

$$\varphi(x|y) = \frac{1}{4-2y}, \quad (x,y) \in D.$$

Перевірка:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x|y)\, dx = \ldots \quad \square$$

Формула Баєса для щільностей

Теорема (Баєса)

Щільності умовного розподілу зв'язані співвідношенням

$$\varphi(x|y) = \frac{\psi(y|x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx}. \tag{19}$$

Доведення. Запишемо формули (13), (14) у вигляді

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y)\varphi(x|y) = f_X(x)\psi(y|x).$$

Тоді

$$\varphi(x|y) = \frac{f_X(x)\psi(y|x)}{f_Y(y)}. \tag{20}$$

Використавши рівності (10) та (11), з (20) отримаємо (19). □

Дискретні випадкові вектори

Розглянемо табличний спосіб задання дискретного вектора (X, Y):

$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{i1}	$\ldots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{i2}	$\ldots$	p_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{nj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{im}	$\ldots$	p_{nm}

(21)

Перший рядок таблиці містить усі можливі значення складової X, а перший стовпець – складової Y. На перетині стовпця x_i та рядка y_j вказано ймовірність p_{ij} того, що двовимірна випадкова величина прийме значення (x_i, y_j), тобто $p_{ij} \equiv p(x_i, y_j) := \mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$ – ймовірність події, яка полягає в одночасному виконанні рівностей $X = x_i$ та $Y = y_j$ для $i = \overline{1, n}$ та $j = \overline{1, m}$. При цьому сума ймовірностей, які містяться у всіх клітинках задовольняє умову нормування:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \tag{22}$$

Таким чином функція розподілу мас (probability mass function, PMF) випадкової величини (X, Y) матиме вигляд

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} p_{ij}, & x = x_i, \quad y = y_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{23}$$

За розподілом двовимірної дискретної випадкової величини можна знайти закони розподілу (казатимемо маргінальні або граничні розподіли) кожної із її складових. Наприклад, слідуючі події є несумісними

$$\{X = x_i, Y = y_1\}, \quad \{X = x_i, Y = y_2\}, \quad \ldots, \quad \{X = x_i, Y = y_m\},$$

а тому, згідно з теоремою додавання, ймовірність того, що X прийме значення x_i дорівнює сумі ймовірностей стовпчика x_i:

$$p(x_i) := \mathbb{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}. \tag{24}$$

Аналогічно, щоб отримати $\mathbb{P}\{Y = y_j\}$, треба взяти суму ймовірностей j-го рядка:

$$p(y_j) := \mathbb{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}. \tag{25}$$

Умовні закони розподілу складових дискретних випадкових векторів

Розглянемо дискретний випадковий вектор (X, Y) з таблиці (21). Припустимо, що в результаті випробування величина Y прийняла значення $Y = y_1$; при цьому X прийме одне із своїх можливих значень: x_1, або x_2, $\ldots$, або x_n. Позначимо через

$$p(x_i|y_j), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

ймовірність того, що X прийме значення x_i за умови, що $Y = y_j$. Ця ймовірність, взагалі кажучи, не буде дорівнювати безумовній ймовірності $\mathbb{P}\{X = x_i\}$.

Означення

Умовним розподілом складової X при $Y = y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $p(x_1|y_j)$, $p(x_2|y_j)$, $\ldots$, $p(x_n|y_j)$, обчислених в припущенні, що подія $Y = y_j$ (j має одне і теж значення при всіх значеннях X) вже відбулась.

Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y.

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна, користуючись формулою (12), обчислити умовні закони розподілу складових. Наприклад, умовний закон розподілу X в припущенні, що подія $Y = y_j$ уже відбулась, можна знайти (див. також (25)) за формулою

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Аналогічно знаходять умовні закони розподілу складової Y:

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum\limits_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{27}$$

Зауважимо, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює 1 як і звичайного. Справді, оскільки при фіксованому y_j виконується формула (25), то

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1.$$

Аналогічно доводиться, що при фіксованому x_i

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) = 1.$$

Ці властивість умовних розподілів використовують для перевірки обчислень.

Залежні і незалежні випадкові величини

Випадкові величини X та Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша величина. Точніше, якщо їхні сумісна та маргінальні CDF задовольняють рівність

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{28}$$

У випадку неперервних випадкових величин X та Y замість (28) можна взяти рівність відповідних PDF.

Теорема

Неперервні випадкові величини X та Y є незалежними тоді і тільки тоді, коли

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{29}$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X та Y – незалежні, тобто виконується (28). Щоб отримати (29), продиференціюємо (28) за x та за y: $\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x}\frac{\partial F_2(y)}{\partial y}$.

($\Longleftarrow$) Зінтегрувавши рівність (29) за x та y, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(\eta)\, d\eta,$$

що і означає (28). □

Приклад

Двовимірна випадкова величина (X, Y) *задана щільністю сумісного розподілу*

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin x \sin y, & 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi; \\ 0, & \textit{інакше.} \end{cases}$$

Чи складові X *та* Y *залежні?*

Р о з в' я з у в а н н я. Знайдемо щільності розподілу складових

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \sin x \sin y \, dy = \frac{1}{4} \sin x \int_0^{\pi} \sin y \, dy = -\frac{1}{4} \sin x \cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2} \sin x.$$

Аналогічно

$$f_Y(y) = ... = \frac{1}{2} \sin y.$$

Оскільки виконується рівність (29), то з теореми випливає незалежність X та Y. $\square$

Щоб сформулювати зручний критерій незалежності дискретних випадкових величин наведемо таке твердження.

Теорема

Необхідною і достатньою умовою незалежності випадкових величин X та Y є виконання для будь-яких $a < b$ та $c < d$ рівності

$$\mathbb{P}\left(a \le X < b,\ c \le Y < d\right) = \mathbb{P}\left(a \le X < b\right) \cdot \mathbb{P}\left(c \le Y < d\right). \tag{30}$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Згідно з (4), ймовірність попадання точки в прямокутник $a \le x < b,\ c \le y < d$ дорівнює

$$\mathbb{P}\left(a \le X < b, c \le Y < d\right) = F(a, c) + F(b, d) - F(a, d) - F(b, c). \tag{31}$$

В формулі (31) замінимо $F(a, c) = F_X(a)F_Y(c)$ і т.д. Тоді сумісна імовірність зведеться до вигляду

$$\mathbb{P}\left(a \le X < b,\ c \le Y < d\right) = (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c))$$

звідки і випливає (30).

($\Longleftarrow$) Візьмемо довільні числа a, c, x, y так, щоб $a < x$ та $c < y$. У ліву частину рівності (30) підставимо формулу (31), а ймовірності зправа замінимо виразом типу $\mathbb{P}\left(a \le X < b\right) = F(b) - F(a)$, а потім спрямуємо $a \to -\infty$ та $c \to -\infty$. З урахуванням граничних значень одновимірних і сумісної функцій розподілу і з довільності x та y ми отримуємо (29). $\square$

Теорема

Нехай X та Y є дискретними випадковими величинами, $\sum_{i,j} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = 1$, *послідовності* $\{x_i\}$ *та* $\{y_j\}$ *не мають граничних точок. Тоді X та Y є незалежними тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall\, i, j : \quad \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j). \tag{32}$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X та Y незалежні. Тоді виконується умова (30). Візьмемо значення a, b, c, d так, щоб в прямокутник $\{a \le x < b,\ c \le y < d\}$ попала тільки одна точка (x_i, y_j). Тоді формула (32) зразу випливає з (30), оскільки

$$\mathbb{P}(a \le X < b,\ c \le Y < d) = \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j),$$

$$\mathbb{P}(a \le X < b) = P(X = x_i), \quad \mathbb{P}(c \le Y < d) = \mathbb{P}(Y = y_j).$$

($\Longleftarrow$) Нехай виконується умова (32). Для довільних a, b, c, d в півінтервалах $[a, b)$ та $[c, d)$ будуть деякі з точок послідовності $\{x_i\}$ та $\{y_j\}$. Крім того,

$$\mathbb{P}(a \le X < b,\ c \le Y < d) = \sum_{x_i \in [a,b),\ y_j \in [c,d)} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) =$$

$$= \sum_{x_i \in [a,b),\ y_j \in [c,d)} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{x_i \in [a,b)} \mathbb{P}(X = x_i) \sum_{y_j \in [c,d)} \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Ці суми дорівнюють $\mathbb{P}(a \le X < b)$ та $\mathbb{P}(c \le Y < d)$ відповідно, що дає (30). $\square$

Приклад

Двовимірна випадкова величина (X, Y) *задана таблицею (законом розподілу)*

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
Y \setminus X & 3 & 4 \\
\hline
-3 & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\
\hline
-1 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\
\hline
1 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\
\hline
2 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\
\hline
\end{array}
\tag{33}
$$

Чи складові X *та* Y *залежні?*

Р о з в' я з у в а н н я. 1) Знайдемо розподіл складової X. Для цього підсумуємо значення в таблиці по стовпчиках:

$Y \setminus X$	3	4
-3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\boxed{\frac{8}{16}}$	$\boxed{\frac{8}{16}}$

Р о з в' я з у в а н н я. 1) Знайдемо розподіл складової X. Для цього підсумуємо значення в таблиці по стовпчиках:

$Y \setminus X$	3	4
-3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\boxed{\frac{8}{16}}$	$\boxed{\frac{8}{16}}$

$\Longrightarrow$

X	3	4
$\mathbb{P}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$

(35)

Отже, ми знайшли закон розподілу складової X.

2) Знайдемо розподіл складової Y. Для цього підсумуємо значення в таблиці по рядках:

$Y \setminus X$	3	4	
-3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\boxed{\frac{6}{16}}$
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\boxed{\frac{4}{16}}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\boxed{\frac{4}{16}}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\boxed{\frac{2}{16}}$

2) Знайдемо розподіл складової Y. Для цього підсумуємо значення в таблиці по рядках:

$$\begin{array}{|c|c|c||c|}
\hline
Y \setminus X & 3 & 4 & \\
\hline
-3 & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \boxed{\frac{6}{16}} \\
\hline
-1 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \boxed{\frac{4}{16}} \\
\hline
1 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \boxed{\frac{4}{16}} \\
\hline
2 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \boxed{\frac{2}{16}} \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{|c|c|}
\hline
Y & \mathbb{P} \\
\hline
-3 & \frac{6}{16} \\
\hline
-1 & \frac{4}{16} \\
\hline
1 & \frac{4}{16} \\
\hline
2 & \frac{2}{16} \\
\hline
\end{array} \qquad (37)$$

Отже, ми знайшли закон розподілу складової Y.

3) Об'єднаємо ці записи в одній таблиці:

$Y \setminus X$	3	4	$\mathbb{P}(Y)$
-3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	

(38)

4) Знайдемо якісь умовні розподіли, наприклад, умовний розподіл Y за умови, що $X = 3$ (для цього "червоні" числа ділимо на "синє" число) та умовний розподіл Y за умови, що $X = 4$ (для цього "зелені" числа ділимо на "жовте" число):

$Y \setminus X$	3	4	$\mathbb{P}(Y)$	$\mathbb{P}(Y \mid X = 3)$	$\mathbb{P}(Y \mid X = 4)$
-3	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\times$	$\times$	$\times$

(39)

5) Оскільки ймовірності в трьох останніх позиціях кожного рядка відрізняються, то випадкові величини X та Y є залежними. $\square$

Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції

Для опису системи двох випадкових величин, крім математичних сподівань і дисперсій складових, використовують і інші характеристики.

Означення

Кореляційним моментом випадкових величин X та Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин:

$$\mu_{XY} = \mathbb{E}\left\{[X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\right\}. \tag{40}$$

Легко переконатися, що кореляційний момент можна записати у вигляді

$$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \tag{41}$$

де у випадку дискретних випадкових величин X та Y

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}, \tag{42}$$

а для неперервних випадкових величин

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x, y)\, dxdy. \tag{43}$$

Зауважимо таке: якщо, наприклад, X та Y виміряні в сантиметрах і $\mu_{XY} = 2\text{см}^2$. Якщо виміряти X та Y в міліметрах, то $\mu_{XY} = 200\text{мм}^2$. Така особливість кореляційного моменту є недоліком цієї числової характеристики, бо порівнювати кореляційні моменти різних систем випадкових величин стає важким. Щоб усунути цей недолік, вводять нову числову характеристику.

Означення

Коефіцієнтом кореляції випадкових величин X та Y називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\operatorname{sd}(X)\operatorname{sd}(Y)}. \tag{44}$$

Тут r_{XY} – безрозмірна величина.

Теорема

Виконується нерівність

$$|\mu_{XY}| \le \sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}. \tag{45}$$

Д о в е д е н н я. Введемо випадкову величину

$$Z_1 = \mathrm{sd}(Y)X - \mathrm{sd}(X)Y.$$

Тоді

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Z_1) = \mathbb{E}\left\{[Z_1 - \mathbb{E}\,(Z_1)]^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left[\mathrm{sd}(Y)X - \mathrm{sd}(X)Y - \mathbb{E}\,(\mathrm{sd}(Y)X - \mathrm{sd}(X)Y)\right]^2\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left[\mathrm{sd}(Y)X - \mathrm{sd}(X)Y - \mathrm{sd}(Y)\mathbb{E}\,(X) + \mathrm{sd}(X)\mathbb{E}\,(Y)\right]^2\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{[\mathrm{sd}(Y)(X - \mathbb{E}\,(X)) - \mathrm{sd}(X)(Y - \mathbb{E}\,(Y))]^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathrm{sd}^2(Y)(X - \mathbb{E}\,(X))^2 - \right.$$

$$\left. -2\,\mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y)(X - \mathbb{E}\,(X))(Y - \mathbb{E}\,(Y)) + \mathrm{sd}^2(X)(Y - \mathbb{E}\,(Y))^2\right\} =$$

$$= \mathrm{sd}^2(Y)\mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}\,(X))^2\right\} - 2\,\mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y)\mathbb{E}\left\{[X - \mathbb{E}\,(X)][Y - \mathbb{E}\,(Y)]\right\} +$$

$$+ \mathrm{sd}^2(X)\mathbb{E}\left\{(Y - \mathbb{E}\,(Y))^2\right\} = 2\,\mathrm{sd}^2(Y)\,\mathrm{sd}^2(X) - 2\,\mathrm{sd}(Y)\,\mathrm{sd}(X)\mu_{XY}.$$

Оскільки $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Z_1) \geq 0$, то

$$2\,\mathrm{sd}(Y)^2\,\mathrm{sd}(X)^2 - 2\,\mathrm{sd}(Y)\,\mathrm{sd}(X)\mu_{XY} \geq 0.$$

Звідси $\mu_{XY} \leq \mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y)$.

Ввівши випадкову величину

$$Z_2 = \mathrm{sd}(Y)X + \mathrm{sd}(X)Y,$$

аналогічно знайдемо оцінку $\mu_{XY} \geq -\,\mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y)$. Отже,

$$-\,\mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y) \leq \mu_{XY} \leq \mathrm{sd}(X)\,\mathrm{sd}(Y), \tag{46}$$

що і означає (45). □

З (44) та (45) зразу випливає таке твердження.

Наслідок

Абсолютна величина коефіцієнту кореляції не перевищує одиниці, тобто

$$|r_{XY}| \leq 1. \tag{47}$$

Корельованість і залежність випадкових величин

Означення

Дві випадкові величини X та Y називаються корельваними, якщо їх кореляційний момент (або, що те саме, коефіцієнт кореляції) відмінний від нуля. Величини X та Y називають некорельованими, якщо $\mu_{XY} = 0$.

Кореляційний момент характеризує зв'язок між X та Y.

Теорема

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то $\mu_{XY} = r_{XY} = 0$.

Д о в е д е н н я. Оскільки X і Y – незалежні випадкові величини, то їх відхилення $X - \mathbb{E}(X)$ і $Y - \mathbb{E}(Y)$ також незалежні. Користуючись властивостями математичного сподівання, одержимо

$$\mu_{XY} = \mathbb{E}\Big\{[X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\Big\} = \mathbb{E}\{X - \mathbb{E}(X)\}\,\mathbb{E}\{Y - \mathbb{E}(Y)\} = 0. \quad \square$$

Переконаємось на прикладі, що дві залежні величини можуть бути некорельованими.

Приклад

Двовимірна випадкова величина (X, Y) задана щільністю розподілу

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1, \\ 0, & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

Переконатися, що X та Y – залежні некорельовані величини.

Р о з в' я з у в а н н я. Можна легко обчислити PDF складових X та Y:

$$f_X(x) = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9 - x^2}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2}$$

всередені заданого еліпса і $f_X(x) = f_Y(y) = 0$ зовні нього.

Оскільки

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y),$$

то X та Y – залежні.

Знайдемо

$$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mathbb{E}(X)][y - \mathbb{E}(Y)] f_{XY}(x, y)\, dxdy.$$

Оскільки f_X парна функція, то $\mathbb{E}(X) = 0$. Аналогічно $\mathbb{E}(Y) = 0$, бо f_Y парна. Отже,

$$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{XY}(x, y)\, dx\Big)\, dy.$$

Внутрішній інтеграл дорівнює 0 (підінтегральна функція непарна, межі інтегрування симетричні відносно початку координат), отже, $\mu_{XY} = 0$, тобто залежні випадкові величини X і Y некорельовані. $\square$

Загальні випадкові вектори та їх числові характеристики

Нехай $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір. Узагальнемо введені нами поняття.

Означення

Вектор-функцію $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$, в якій $\xi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, ..., $\xi_m : \Omega \to \mathbb{R}$ є випадковими величинами, заданими на одному ймовірнісному просторі, називають m-мірною випадковою величиною (або випадковим вектором).

Домовимося далі, що якщо $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, то

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1, \quad \ldots, \quad x_m < y_m.$$

Означення

Функцію $F_\xi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ таку, що

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi(\omega) < x\} := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_1(\omega) < x_1, \quad \ldots, \quad \xi_m(\omega) < x_m\}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

називають функцією розподілу m-мірної випадкової величини $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

Означення

Випадковий вектор $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ називається неперервною випадковою величиною (має неперервний розподіл), якщо існує щільність ймовірності (щільність розподілу, PDF) – така невід'ємна функція $q_\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, що

$$\forall\, A \subset \mathbb{R}^m : \quad \mathbb{P}\left\{\xi \in A\right\} = \int\limits_A q_\xi(x)\, dx. \tag{48}$$

Можна показати, що в точках неперервності q_ξ виконується формула

$$q_\xi(x) = \frac{\partial^m F_\xi(x)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m}. \tag{49}$$

Твердження

Нехай $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ – випадковий вектор, $f \in C(\mathbb{R}^m)$ – деяка функція. Тоді
1) $f(\xi) : \Omega \to \mathbb{R}^1$ – одномірна випадкова величина;
2) якщо, додатково, ξ – неперервний випадковий вектор зі щільністю q_ξ, то

$$\mathbb{E}\left[f(\xi)\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) q_\xi(x)\, dx. \tag{50}$$

Нехай $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – випадковий вектор. Тоді за означенням маємо таке.

Означення

Математичним сподіванням вектора ξ називатимемо вектор

$$\mathbb{E}\,\xi := (\mathbb{E}\,\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\,\xi_m), \tag{51}$$

якщо $\mathbb{E}\,\xi_1$, ..., $\mathbb{E}\,\xi_m$ існують.

Означення

Дисперсією вектора ξ називатимемо вектор

$$\mathbb{V}ar\xi := (\mathbb{V}ar\xi_1, \ldots, \mathbb{V}ar\xi_n), \tag{52}$$

якщо $\mathbb{V}ar\xi_1$, ..., $\mathbb{V}ar\xi_m$ існують.

Означення

Середньоквадратичним відхиленням сподіванням вектора ξ називатимемо вектор

$$\mathrm{sd}(\xi) := (\mathrm{sd}(\xi_1), \ldots, \mathrm{sd}(\xi_n)), \tag{53}$$

якщо $\mathrm{sd}\,\xi_1$, ..., $\mathrm{sd}\,\xi_m$ існують.

Лекція 7 Продовжимо розглядати нормальні розподіли.

Нехай

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1) \text{ – PDF ст. норм.}$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2) \text{ – PDF норм.}$$

Зв'язок між CDF

$$F_Y(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (3)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4)$$

Значення ф-ції (4) є в таблиці

$$\mathbb{P}(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx \qquad (5)$$

Пр

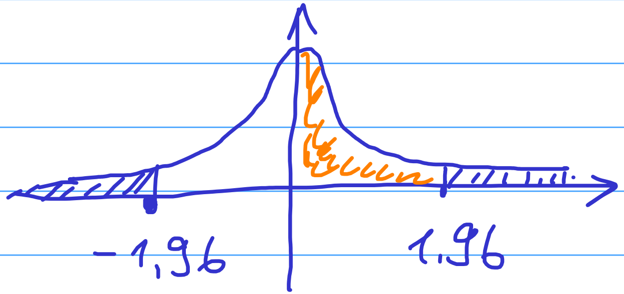
$$\mathbb{P}(0 \le Z < 1{,}96) \underset{(4),(5)}{=} \int_0^{1{,}96} f_Z(x)\,dx = \Phi(1{,}96) =$$

Z – станд. норм. распред. в.в.

$$= \boxed{0{,}4750}$$

$$\mathbb{P}(0 \le Z < 0{,}62) = 0{,}2324$$

$$\mathbb{P}(Z < -1.96) =$$



$$= \mathbb{P}(Z > 1{,}96) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}(0 \le Z < 1{,}96) = \frac{1}{2} - 0{,}4750 =$$

$$= 0{,}0250$$

Розглянемо $Z \sim N(0,1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{P}(Y < \mu + z\sigma) = \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} f_Y(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ x-\mu = y\cdot\sigma \\ x = \mu + y\sigma \\ dx = \sigma\,dy \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{\sigma}\,dy =$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} = \{x = \mu + z\sigma\} = \underbrace{\frac{\mu + z\sigma - \mu}{\sigma}}_{=z} =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \underset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{z} f_Z(y)\,dy = \mathbb{P}\{Z < z\}$$

Отже, $\mathbb{P}(Y < \underbrace{\mu + x\sigma}_{=y}) = \mathbb{P}(Z < x) \quad (6)$

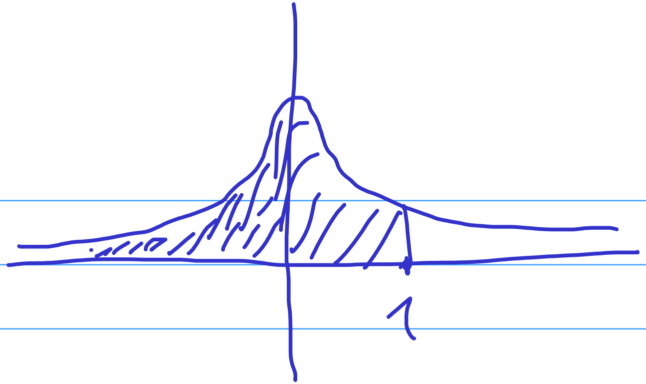
$\mu + x\sigma = y$

$x = \dfrac{y-\mu}{\sigma}$

Отже, $\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}\left(Z < \dfrac{y-\mu}{\sigma}\right) \quad (7)$

<u>Пр.</u> Нехай $Y \sim N(4, 9) = N(4, 3^2)$

$\mathbb{P}(Y < 7) \underset{(7)}{=} \mathbb{P}\left(Z < \dfrac{7-4}{3}\right) = \mathbb{P}(Z < 1) =$



$$= \frac{1}{2} + P(0 \le Z < 1) =$$

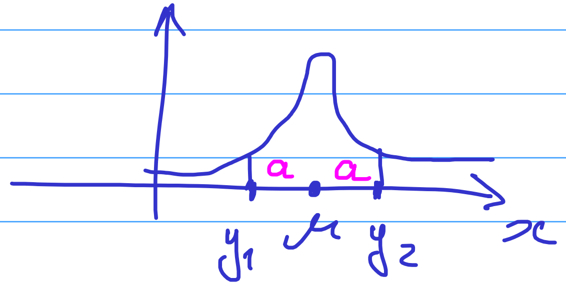
$$= 0,5 + \Phi(1) = 0,5 + 0,3413 =$$

$$= 0,8413$$

Знайдемо α% довірчий інтервал для в.в. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

Це буде інтервал $[y_1, y_2)$, симетричний

стосовно $x = \mu$. Тому



$y_1 = \mu - a$, $y_2 = \mu + a$

За означенням $\mathbb{P}(y_1 \le Y < y_2) = \frac{\alpha}{100}$ (8)

$$\mathbb{P}(y_1 \le Y < y_2) = \mathbb{P}(Y < y_2) - \mathbb{P}(Y < y_1) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z < \frac{y_2 - \mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{y_1 - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z < \frac{a}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < -\frac{a}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{a}{\sigma} \le Z < \frac{a}{\sigma}\right) =$$

$$\underset{\text{симетрія}}{=} 2\,\mathbb{P}\left(0 \le Z < \frac{a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right).$$

Отже, a шукаємо з р-ня $2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{\alpha}{100}$ (9)

Пр. Знайти 4% довірчий інтервал для в.в. $Y \sim N(3, 25) = N(3, 5^2)$

Це інтервал $[y_1, y_2)$ такий, що

$$\mathbb{P}(y_1 \le Y < y_2) = \frac{4}{100}$$

$F(x) = \mathbb{P}(X < x)$

$y_1 = \mu - a = 3 - a$, $y_2 = \mu + a = 3 + a$

a шукаємо з (9): $2\Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{4}{100}$ $\Big|:2$

$\Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{2}{100} = 0{,}02$

$\frac{a}{5} \approx 0{,}05$ $a \approx 0{,}25$

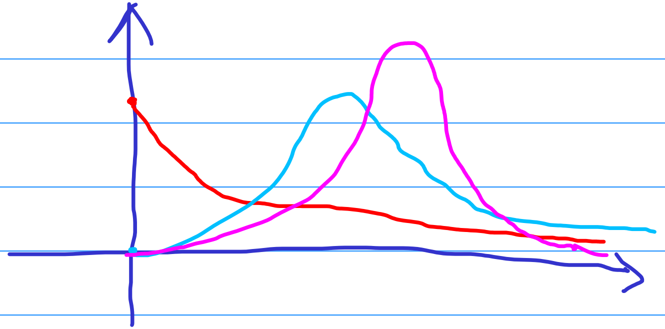
$y_1 = 3 - 0{,}25 = 2{,}75$

$y_2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$

В-дь: $[2{,}75,\ 3{,}25)$

Приклади неперервних в.в.

<u>Озн.</u> В.в. X має гамма-розподіл з параметрами a та b ($X \sim G(a, b)$), якщо її PDF має вигляд $f(x) \propto \begin{cases} x^{a-1} e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$a = 1, \; b > 0$

$a > 1, \; b > 0$

$$\mathbb{E}X = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{Var} X = \frac{a}{b^2}$$

<u>Озн.</u> Частковий випадок гамма розподілу при $a = \frac{k}{2}$ та $b = \frac{1}{2}$, де $k \in \mathbb{N}$

назив розподілом хі-квадрат з k ступенями свободи.

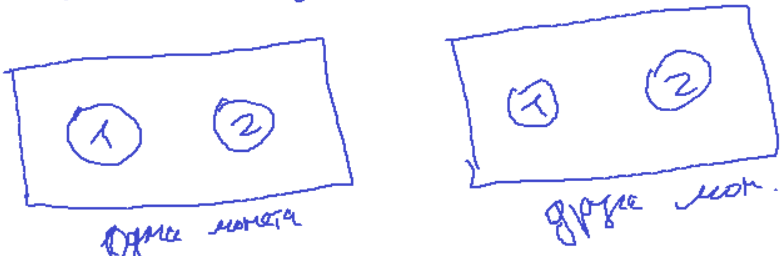
Якщо $X \sim \chi^2(k)$ $\qquad \mathbb{E}X = k$, $\mathrm{Var}\,X = 2k$

<u>Озн.</u> В.в. X має t-розподіл (розподіл Стьюдента) з k ступенями свободи якщо її PDF має вигляд

$$f(x) \propto \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{(k+1)}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Якщо $X \sim t(k)$, то $\mathbb{E}X = 0$, $\mathrm{Var}\,X = \frac{k}{k-2}$

Приклад Розглянемо одночасне кидання 1-х 2d-дайсів (монет)



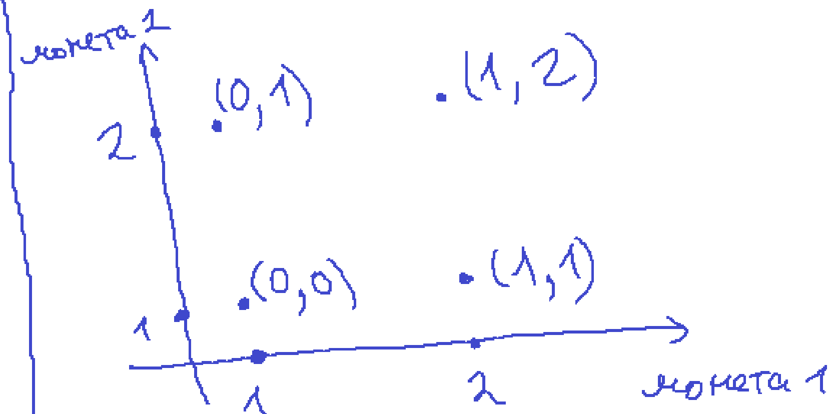
Нехай X – в.в., що дорівнює к-ть очок, що випало на 1-й монеті мінус 1

Y – в.в., що дорівнює сумі очок на двох монетах мінус 2.

Знайти, PMF, CDF, $Y|X$, $X|Y$, X та Y - залежні?

$((X,Y), X, Y)$

Які значення (X, Y)



Отже, (X,Y) приймає такі знач

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{1}{4}$

Y	$\mathbb{P}(Y)$
0	$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
2	$0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X	0	1
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$Y \backslash X$	0	1	$\mathbb{P}(Y)$	$P(Y \mid X=0)$	$\mathbb{P}(Y \mid X=1)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$0:\frac{1}{2}=0$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	$0:\frac{1}{2}=0$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0==\frac{1}{2}$	$0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}==\frac{1}{2}$			
$\mathbb{P}(X \mid Y=0)$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1$	$0:\frac{1}{4}=0$			
$\mathbb{P}(X \mid Y=1)$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$			
$\mathbb{P}(X \mid Y=2)$	$0:\frac{1}{4}=0$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1$			

Y	$\mathbb{P}(Y)$
0	$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
2	$0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X	0	1
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X \mid Y=0$	0	1
$\mathbb{P}$	1	1

Y	$P(Y \mid X=0)$
0	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
2	$0:\frac{1}{2}=0$

$Y \mid X=0$	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$X \mid Y=1$	0	1
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$Y \mid X=1$	0	1	2
$\mathbb{P}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X \mid Y=2$	0	1
$\mathbb{P}$	0	1

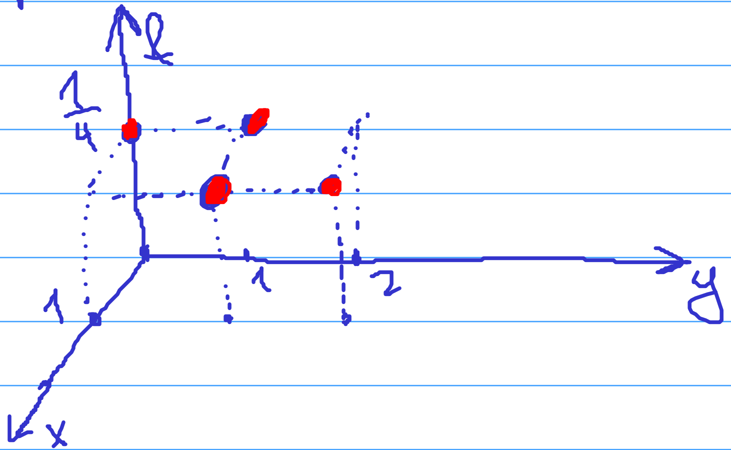
Лекція 8

Приклад Кидання 2-х монет (див вир-файл)

PMF сумісного розподілу X та Y - ф-ція двох змінних.

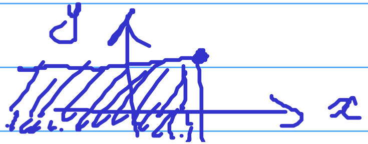
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) = (0,0), (0,1), (1,1), (1,2) \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

графік - в $\mathbb{R}^3$



CDF сумісного розподілу X та Y

$$F_{XY}(x,y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y)$$



$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ або } y<0 \\ \frac{1}{4}, & x\geq 0 \text{ та } 0\leq y<1 \\ \frac{1}{2} & 0\leq x<1,\ 1\leq y \\ \frac{3}{4} & 1\leq x,\ 1\leq y<2 \\ 1 & 1\leq x,\ 2\leq y \end{cases}$$

Д/з 1) p_X, F_X, p_Y, F_Y для

2) Кидаємо 2 монети X - кількість очок, що випало на першій монеті

Y - різниця = (к-ть очок на першій мон) − (к-ть очок на другій мон.)

Для (X,Y) PMF, CDF; $X|Y$; $Y|X$; X; Y.

Лекція 9 Розглянемо той самий приклад з киданням 2-х монет. X - що випало на 1-й мінус 1

Y - сума очок мінус 2.

Т-ма Баєса має вигляд

$$f_Y(y|x) \propto f_X(x|y) \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{\text{апріорна PDF або PMF}} \qquad (1)$$

Нехай X - інформація, Y - уявлення про подію.

Подивимося як результат X вплинув на перегляд уявлень про розподіл Y.

В нас була таблиця, з якої візьмемо дані

PMF для в.в. Y був такий

$$f_Y(y=0) = \frac{1}{4}, \quad f_Y(y=1) = \frac{1}{2}, \quad f_Y(2) = \frac{1}{4} \qquad (2)$$

Знайдемо $f_X(x|y)$:

$$f_X(x=0 \mid y=0) = 1; \quad f_X(0|1) = \frac{1}{2}; \quad f_X(0|2) = 0$$

$$f_X(x=1 \mid y=0) = 0; \quad f_X(1|1) = \frac{1}{2}; \quad f_X(1|2) = 1$$

На підставі (1) формуємо f_Y

$$f_Y(y=0 \mid x=0) \propto f_X(x=0 \mid y=0) \cdot f_Y(y=0) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f_Y(y=1 \mid x=0) \propto f_X(x=0 \mid y=1) \cdot f_Y(y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f_Y(y=2 \mid x=0) \propto f_X(x=0 \mid y=2) \cdot f_Y(y=2) = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Отримали „розподіл" Y за умови $X=0$

З умови нормування $\Rightarrow$ сума всіх ймовірностей має $=1$.

Знайдем норм. множник: „всі числа додати" $=$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$$

Тепер можна ділимо на норм. множник

$$f_Y(0 \mid 0) = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(1 \mid 0) = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(2 \mid 0) = 0 : \frac{1}{2} = 0$$

Результат

$Y \mid X=0$	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Д/з те самые при $X=1$

Лекція 10 Способи подання інформації

Нехай маємо набір даних ≡ чисел які щось характеризують (назив. „вибірка")
Нехай n – кількість цих чисел. (назив. „об'єм вибірки")

Можна вважати, що ці числа – значення якоїсь випадк. величини X.

1) впорядкуємо їх: $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ (1)
це різні значення.

2) нехай $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (2) – кількість повторів кожного значення з низки (1).

x_i – варіанта з номером, $i = \overline{1,k}$

n_i – частота варіанти x_i, $i=\overline{1,k}$.

Зрозуміло, що $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. (3)

<u>Озн.</u> Число $\omega_i=\frac{n_i}{n}$ (4) – відносна частота варіанти x_i

Статистичним розподілом назив. таблиця

x_i	x_1	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	$\ldots$	n_k

(5)

або

x_i	x_1	$\ldots$	x_k
ω_i	ω_1	$\ldots$	ω_k

(6)

Якщо даних „багато", то групувати треба не по кожному числу" – а по інтервалах:

Розбиваємо множину „приблизних" значень X на інтервали, що не перетин.

$$[a_0, a_1),\ [a_1, a_2),\ \ldots\ldots,\ [a_{s-1}, a_s) \qquad (7)$$

і рахуємо к-ть чисел, що попадає в кожен інтервал – $\tilde{n}_i$ - частота для інтервалу $[a_{i-1}, a_i)$

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\tilde{n}_i}{n}$$ - відносна частота

Тоді статистичний інтервальний розподіл – це таблиця

Δ_i	$[a_0, a_1)$	.....	$[a_{s-1}, a_s)$	
$\tilde{n}_i$	$\tilde{n}_1$	.....	$\tilde{n}_s$	(8)

або

Δ_i	$[a_0, a_1)$	.....	$[a_{s-1}, a_s)$	
$\tilde{\omega}_i$	$\tilde{\omega}_1$	.....	$\tilde{\omega}_s$	(9)

(5) – це, приблизно, „те саме", що (8)

інтервалу $[a_{i-1}, a_i)$ ставимо у відповідність його середину

$$\tilde{x}_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2} \qquad (10)$$

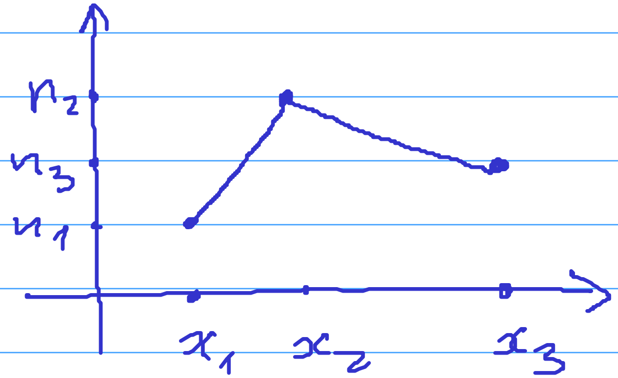
і замість (8) розглядатимо

$\hat{x}_i$	$\hat{x}_1$	....	$\hat{x}_s$
$\hat{n}_i$	$\hat{n}_1$	....	$\hat{n}_s$

(11)

<u>Озн.</u> Полігоном частот розподілу (5) назив. ламана, отримана послідовним сполученням точок площини

$$(x_1; n_1), \ldots, (x_k, n_k)$$



<u>Озн.</u> Полігоном відносних частот (5) назив. ламана для точок

$$(x_1, \omega_1), \ldots, (x_k, \omega_k)$$

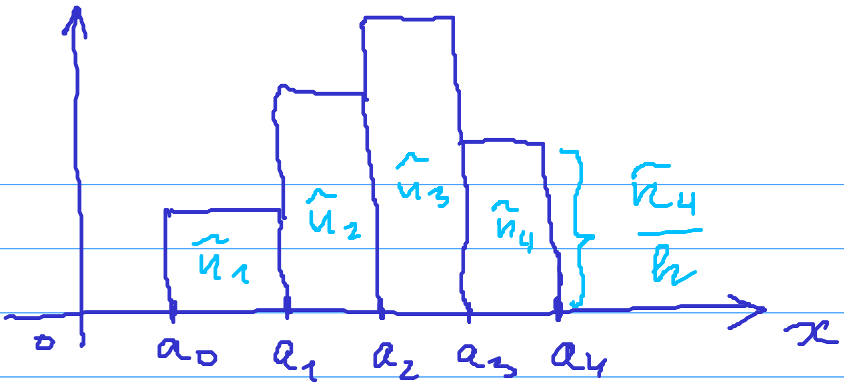
Частоти — „великі" натуральні числа

Відносні частоти — маленькі дійсні числа

$$\omega_1 + \ldots + \omega_k = \frac{n_1}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + \ldots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

<u>Озн.</u> Гістограма частот — це фігура, складена з прямокутників, основи яких — інтервали $[a_{i-1}, a_i)$ (однакової) довжини $h>0$, висотою $\frac{\hat{n}_i}{h}$ $\left(\text{площа } \frac{\hat{n}_i}{h} \cdot h = \hat{n}_i \text{ - частота}\right)$

Площа гістограми $= \hat{n}_1 + \ldots + \hat{n}_s = n$



$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 =$
$= a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = h$

Озн. Гістограма відносних частот — це ...

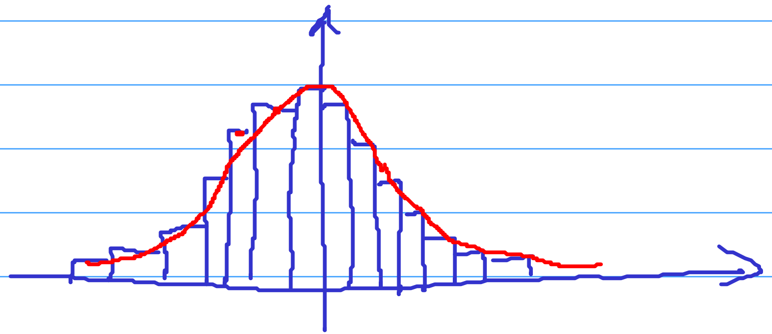
з висотою прямокутника $\frac{\hat{\omega}_i}{h}$.

Площа $= \frac{\hat{\omega}_1}{h} \cdot h + \dots + \frac{\hat{\omega}_5}{h} \cdot h = \hat{\omega}_1 + \dots + \hat{\omega}_5 = 1$

Тому, якщо через середини верхніх сторін прямокутників гістограми відносних частот провести криву, то площа під нею ≈ 1.

Ця крива лежить вище осі OX $\Rightarrow$ це графік PDF деякої в.в.

І коли кажемо, що в.в., представлена даними $x_1, \ldots, x_k$ має стандартний нормальний розподіл, то розуміємо



● - гістограма відносних частот

● - графік PDF станд. норм. розподілу

Крім нормального, звичайно використовуються і інші розподіли.

Перетворення PMF та PDF.

Ми вводили PMF для дискрет. в.в. X – це ймовірність.

$$g_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Для неперервних в.в. Y із PDF – це ф-ція

$$\mathbb{P}(y_1 \leq Y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f_Y(y)\,dy \qquad (2)$$

PDF – НЕ ймовірність.

Якщо y_2 близько до y_1, тоді

$$\mathbb{P}(y \le Y < y + \Delta y) \overset{(2)}{=} \int_y^{y+\Delta y} f_Y(y')\,dy' \underset{\text{т-ма про середнє}}{=}$$

мале

$$= f_Y(\hat{y}')\,(y + \Delta y - y) = f_Y(\hat{y}') \cdot \Delta y \qquad (3)$$

де $\hat{y}' \in [y, y+\Delta y]$. Якщо f_Y - неперервна, то

при малих Δy $\qquad f_Y(\hat{y}') \approx f_Y(y)$

Висновок:

$$\mathbb{P}(y \le Y < y + \Delta y) \approx f_Y(y) \cdot \Delta y \qquad (4)$$

Ми розглядали випадкові вектори (X, Y) для одночасно неперервних

Лекція 11

Аналогічно як на попер. лекції, якщо f_{XY} – сумісна PDF випадков. вектора (X,Y), то

$$\mathbb{P}(x \le X < x+\Delta x,\ y \le Y < y+\Delta y) \approx f_{XY}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$$

Різновиди формули Баєса. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймов. простір

1) ф. Баєса для подій $A, B \subset \Omega$.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (1)$$

2) ф. Баєса для PMF. Маємо дві дискретних в. в. Y – „основна", D – „додаткова інформація"

Нехай g_Y, g_D – відповідні PMF

Озн. Умовною PMF дискретної в.в. Y за умови, що дискр. в.в. $D = x$ назив ф-ція змінної y:

$$g_{Y|D}(y|x) \overset{df}{=} \mathbb{P}(Y=y \mid D=x), \quad y \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Вибір (1) для $A = (Y=y)$, $B = (D=x)$

$$\mathbb{P}(Y=y \mid D=x) = \frac{\mathbb{P}(D=x \mid Y=y) \cdot \mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(D=x)},.$$

тобто

$$g_{Y|D}(y|x) = \frac{g_{D|Y}(x|y) \cdot g_Y(y)}{g_D(x)} \qquad (3)$$

або $$g_{Y|D}(y|x) \propto g_{D|Y}(x|y) \cdot g_Y(y) \qquad (4)$$

3) Ф-ла Баєса для PDF

Озн. Умовною CDF неперервної в.в. Y за умови, що неперервна в.в. $D = x$ назив. таку ф-цію змінної y:

$$F_{Y|D}(y|x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to +0} \mathbb{P}(Y < y \mid x \leq D < x + h) \quad (5)$$

Крім того, якщо

$$F_{Y|D}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|D}(y'|x)\, dy' \quad (6)$$

то підінтегральна ф-ція назив. умовною PDF в.в. Y за умови, що $D = x$.

$$\mathbb{P}(Y<y \mid x \le D < x+h) = \frac{\mathbb{P}(x \le D < x+h,\ Y<y)}{\mathbb{P}(x \le D < x+h)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} D - \text{неперр} \\ Y - \text{неперр} \\ (D,Y) - \text{неперр} \end{array} \right\} = \frac{\int_x^{x+h} dx' \int_{-\infty}^{y} f_{DY}(x',y')\,dy'}{\int_x^{x+h} f_D(x')\,dx'} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} dx' \int_{-\infty}^{y} f_{DY}(x',y')\,dy'}{\int_x^{x+h} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f_{DY}(x',y')\,dy'} = \left\{ \begin{array}{l} f_{DY} - \text{неперр}. \ ?? \\ \text{т. про середнє} \\ \text{знач.} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{DY}(\tilde{x}', y')\,dy' \cdot \cancel{(x+h-x)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{DY}(x'', y')\,dy' \cdot \cancel{(x+h-x)}}$$

$\tilde{x}' \in [x, x+h]$

$x'' \in [x, x+h]$

$\tilde{x}' \to x$ та $x'' \to x$ при $h \to +0$. Тому, підставивши цей вираз в (5), отримаємо

$$F_{Y|D}(y|x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{DY}(x, y')\,dy'}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{DY}(x, y')\,dy'} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f_{DY}(x, y')}{f_D(x)}\,dy'$$

число

Порівнюючи це з (6) отрим.

$$f_{Y|D}(y|x) = \frac{f_{DY}(x, y)}{f_D(x)}$$

$$f_{DY} = f_{Y|D} \cdot f_D$$
$$= f_{D|Y} \cdot f_Y$$

$\Rightarrow$ отрим. ф. Баєса для PDF

$$f_{Y|D}(y|x) = \frac{f_{D|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{f_D(x)} \qquad (7)$$

або $$f_{Y|D}(y|x) \propto f_{D|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)$$

4) ф-ла Баєса для PMF та PDF

<u>Озн.</u> Умовною PMF дискретної в.в. D за умови, що неперер. в.в. $Y=y$ назив. ф-цію змінної x:

$$g_{D|Y}(x|y) \overset{df}{=} \lim_{h\to+0} \mathbb{P}(D=x \mid y \leq Y < y+h) \qquad (8)$$

Озн. Умовною CDF непер. в.в. Y за умови, що дискретна в.в. $D = x$ назив така ф-ція змінної y:

$$F_{Y|D}(y|x) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y < y \mid D = x) \qquad (9)$$

Крім того, якщо $F_{Y|D}(y|x) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_{Y|D}(y'|x)\,dy' \quad (10)$

то підінтегральна ф-ція назив умовною PDF непер. в.в. Y за умови, що дискр. в.в. $D = x$.

З формули Баєса для подій $A = \{D = x\}$ та $B = \{y \leq Y < y + h\}$ отримаємо

$$\mathbb{P}(D=x \mid y \le Y < y+h) = \frac{\mathbb{P}(y \le Y < y+h \mid D=x)\cdot \mathbb{P}(D=x)}{\mathbb{P}(y \le Y < y+h)} =$$

$$= \frac{\int_y^{y+h} f_{Y|D}(y' \mid x)\cdot dy' \cdot g_D(x)}{\int_y^{y+h} f_Y(y')\,dy'} = \left\{ \begin{matrix} \text{т-ма} \\ \text{про} \\ \text{середнє} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{f_{Y|D}(\hat{y}' \mid x)\cdot \cancel{(y+h-y)} \cdot g_D(x)}{f_Y(y'')\cdot \cancel{(y+h-y)}}$$

$\hat{y}' \in [y, y+h]$, $y'' \in [y, y+h]$ $\to y$ при $h \to +0$.

Підставивши цей вираз в (8), отримаємо

$$g_{D|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|D}(y|x)\cdot g_D(x)}{f_Y(y)} \qquad (11)$$

або

$$g_{D|Y}(x|y) \propto f_{Y|D}(y|x)\cdot g_D(x) \qquad (12)$$

Знайдемо з (11) перший множник чисельника

$$f_{Y|D}(y|x) = \frac{g_{D|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)}{g_D(x)} \qquad (13)$$

або

$$f_{Y|D}(y|x) \propto g_{D|Y}(x|y)\cdot f_Y(y) . \qquad (14)$$

Приклад про долю

доля = частина цілого , ціле = 1

Припустимо треба знайти долю = частину здорового чоловічого студенства на мех.-маті.

доля - це число від 0 до 1 і ми вважаємо, що це в.в. Y яка має якийсь розподіл, наприклад бета розподіл з параметрами $a \geq 1$, та $b \geq 1$

Незалежну змінну PDF в.в. Y позначимо p.
(як „ймовірність потрапити в долю").

Отже,

$$f_Y(p) \propto \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0 \le p \le 1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (1)$$

Змінюючи значення $a \geq 1$ та $b \geq 1$ ми отримаємо різноманітні версії PDF (див. лекцію 5)! Тому наше припущення щодо розподілу в.в. Y (долі) є доволі загальним.

Лекція 12

Приклад про долю.

Ідея: є щось „ціле", яке вважс = 1

B - все населення України

B - всі результати кидання дайсу.

Є якась частина цілого ≡ доля ≡ це щось ≤ 1

A - кількість жінок в Україні

A - кількість випадань „1" на монеті

Апріорна інф $\xrightarrow{\text{т. Баєса}}$ Баєсівський висновок

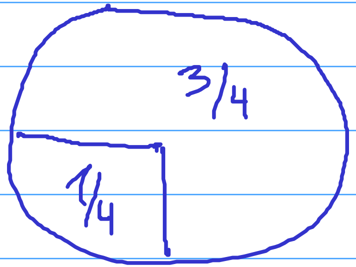
Отже, можна долю вважається в.в. Y, яка має якийсь розподіл. $Y(\omega) \in [0,1]$.

Пр. Y – дискретна, наприклад, її PMF

$$g_Y(p) = \begin{cases} 1/2, & p = \frac{1}{4} \text{ та } p = \frac{3}{4} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

рівномірний дискретний розподіл на двох точках $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{3}{4}$

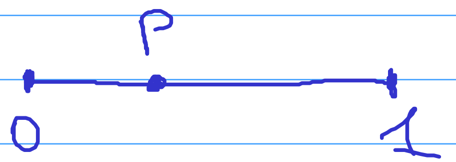
p - значення в.в. Y:



Це, наприклад, апріорне уявлення про вип. вел.

Пр Y – неперервна в.в. її PDF

$$f_Y(p) = \begin{cases} 1, & 0 \le p \le 1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (1)$$



Це, наприклад, апріорне уявлення про вип. вел.

Обидва приклади означають, що ми нічого не знаємо про Y.

Взагалі кажучи доля Y – це в.в., значення якої $p \in [0,1]$. Припустимо, що вона має бета-розподіл.

$$f_Y(p) \propto \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & p \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2)$$

<u>Лема 1</u> Нехай $Y \sim B(a, b)$, $a \geq 1$, $b \geq 1$. Тоді

1) $\operatorname{Var} Y \xrightarrow[a+b\to\infty]{} 0$ причому, монотонно.

2) При $a+b \geq 30$ бета розподіл наближено дорівнює нормальному розподілу з тими самими $\mathbb{E}Y$ та $\operatorname{Var} Y$

☒ Ми зазначали, що

$$\mathbb{E}Y = \frac{a}{a+b}, \qquad \operatorname{Var} Y = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \qquad (3)$$

1) Позначимо $a+b=t$ $\qquad \mu = \mathbb{E}Y = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$

Тоді $\mu = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{t} \Rightarrow a = \mu \cdot t$

$a+b=t \Rightarrow b = t-a = t-\mu t = (1-\mu)t$

Тому $\operatorname{Var} Y = \dfrac{\mu \cdot t \cdot (1-\mu)t}{t^2 \cdot (t+1)} = \dfrac{\mu(1-\mu)}{t+1} \le \dfrac{1 \cdot 1}{t+1} = \dfrac{1}{t+1} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

монотонність не доводимо.

$$0 < \operatorname{Var} Y \le \frac{1}{a+b+1} \le \left\{ \begin{matrix} a \ge 1 \\ b \ge 1 \end{matrix} \right\} \le \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \qquad \blacksquare$$

<u>Теорема 1</u> Якщо апріорне уявлення ($\equiv$оцінка) про в.в. Y має вигляд $Y \sim B(a, b)$, $a \ge 1$, $b \ge 1$, то при обстеженні одного елемента досліджуваної сукупності, уявлення про Y зміниться до такого

$$Y \sim B(a+x,\ b+1-x), \qquad (4)$$

де $x=0$, якщо елемент не попадає в долю,
$x=1$, якщо попадає.

Ідея дослідження: є оцінка $Y \sim B(a,b)$.
Довільним чином вибираємо один елемент з генеральної сукупності. І на підставі т. Баєса перераховуємо PDF Y. D – додаткова інформація

Т. Баєса $\quad f_{Y|D}(p|x) \propto g_{D|Y}(x|p) \cdot f_Y(p), \quad (5)$

де $D=1$, якщо об'єкт має властивість,

$D=0$, якщо – не має.

$g_{D|Y}$ – це PMF дискретної в.в. зі значен. $\{0$ або $1\}$.

$$g_{D|Y}(x|p) = \mathbb{P}(D=x \mid Y=p) = \begin{cases} 1-p, & D=x=0 \\ p, & D=x=1 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \qquad (6)$$

$f_Y(p)$ ~~бу~~взято з (2) за умовою теореми.

З (5) маємо

$$f_{Y|D}(p|0) \propto g_{D|Y}(0|p) \cdot f_Y(p) = (1-p) \cdot f_Y(p) \propto$$

$$\propto (1-p) \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & p \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} = \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b+1-1}, & p \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$f_{Y|D}(p|1) \propto g_{D|Y}(1|p) \cdot f_Y(p) = p \cdot f_Y(p) \propto$$

$$\propto p \cdot \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & p \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} = \begin{cases} p^{a+1-1}(1-p)^{b-1}, & p \in [0,1] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Ті самі міркування можна подати в іншому вигляді, який дуже схожий на бета-розподіл. Перепишемо (6) у вигляді

$$g_{D|Y}(x|p) = \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x}, & x=0 \text{ або } x=1 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \qquad (6')$$

З (5) маємо

$$f_{Y|D}(p|x) \propto g_{D|Y}(x|p)\cdot f_Y(p) \propto$$

$$\propto \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x}, & \ldots \\ 0, & \ldots \end{cases} \cdot \begin{cases} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & \ldots \\ 0, & \ldots \end{cases} = \begin{cases} p^{a+x-1}(1-p)^{b+1-x-1}, & \ldots \\ 0, & \ldots \end{cases}$$

∎

Лекція 13

Наслідок 1 Якщо розподіл долі (апріорн.) має вигляд $Y \sim B(a, b)$, то після обстеження вибірки об'єму n отримаємо такий уточнений (апостеріорний) розподіл

$$Y \sim B(a + \hat{A}, b + \hat{B}) \tag{7}$$

де $\hat{A} + \hat{B} = n$, $\hat{A}$ – кількість елементів вибірки, що попадають в долю, $\hat{B}$ – кількість —||— не попадають в долю.

$\boxed{\equiv}$ очевидно $\blacksquare$

Формалізація конкретних уявлень.

Якщо $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, то відомо, що

$$\mathbb{P}(\mu - 1.96\sigma \le Y < \mu + 1.96\sigma) = 0,95 \qquad (1)$$

Тому 95% ймовірніст. інтервалом для Y буде

$$[\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96 \cdot \sigma) \qquad (2)$$

Наближено матимемо інтервал

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) \qquad (3)$$

Наближено 99% ймов. інтервалом для Y буде

$$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) \qquad (4)$$

Оскільки для в.в. $X \sim B(a,b)$, яка задов.

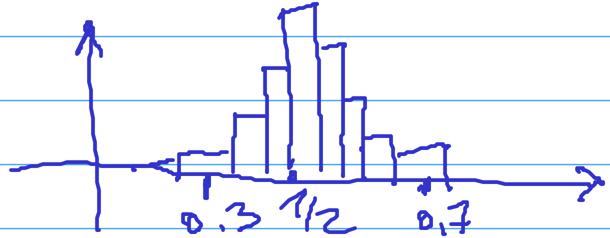
задов. умову $a+b \geq 30$ маємо (див. лекцію), що

$X \approx Y$, де

$$Y \sim N\left(\frac{a}{a+b}, \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\right) \qquad (5)$$

Пр. Апріорні дані такі: ми вважаємо, що середнє значення X приблизно $= 0.5$, що розподіл X симетричний і, в основному, зосереджений між числами 0.3 та 0.7.

Описати розподіл



$0,5 \in [0,1]$

$0.3 \in [0,1]$ $\quad$ $0.7 \in [0,1]$

Тому можна припустити, що всі значення лежать $[0,1]$. Припустимо, що $X \sim B(a,b)$. Тоді

середнє знач. $\mathbb{E}X = \dfrac{a}{a+b} \approx 0.5$

„В основному" $= 95\%$

$[0.3, 0.7] = [0.5-0.2, 0.5+0.2] = [0.5 - 2\cdot 0.1, 0.5+2\cdot 0.1]$

Якщо припустити, що $a+b$ – велике, $X \sim Y$ – норм. розп.

то буде $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.1$ (див. форм. (3))

$$\operatorname{Var} \mathbb{E}X = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \approx (0.1)^2$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+b} = 0.5 \\ \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = 0.01 \end{cases}$$

Знайдемо a та b:

Зробимо заміну $a + b = t$

$$\frac{a}{t} = 0.5 \to a = 0.5t$$

$$b = t - a = t - 0.5t = 0.5t$$

Тоді

$$\frac{0.5\cancel{t} \cdot 0.5\cancel{t}}{\cancel{t^2}(t+1)} = 0.01 \qquad \frac{0{,}25}{t+1} = 0.01$$

$$t+1 = \frac{0.25}{0.01} = 25$$

$b = 12$. $a = 12 \leftarrow t = 24$ Відп: $X \sim B(12, 12)$

$a+b=24<30$, але апріорне уявлення про наші дані все рівно можна брати.

Тепер проводимо „досліди" - обстоюємо вибірку об'єму n на „приналежність" до даних

Отримаємо апостеріорну оцінку

$$X \sim B(12+\hat{A},\ 12+\hat{B})$$

Дисперсія апріорного $X \sim B(a,b)$ була

$$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

стала після обстеження $\hat{A}+\hat{B}=n$ елементів

$$\boxed{X \sim B(a+\hat{A},\ b+\hat{B})}$$

$$\frac{(a+\hat{A})(b+\hat{B})}{(a+\hat{A}+b+\hat{B})^2(a+\hat{A}+b+\hat{B}+1)}$$

Стало $a+\hat{A}+b+\hat{B} = a+b+n > a+b$

тому при $n \to \infty$ дисперсія прямуватиме до нуля

Висновок: зі збільшенням об'єму вибірки n невизначеність зменшуватиметься.

Апріорні уявлення про дані.

Якщо було $X \sim B(a, b)$ $a \geq 1$, $b \geq 1$
то при проведінні n експериментів

отримаємо $X \sim B(a + \hat{A}, b + \hat{B})$

Як знайти a та b коли є дані ми знаємо з прикладу.

Якщо даних нема, то можна вважати, що апріор. розподіл буде рівномірним

$$U[0, 1] = B(1, 1)$$

Отже, можна стартувати з $B(1, 1)$

Розподіл $B(0,0)$ назив. виродженим. Насправді, це не розподіл бо умова нормування для формального PDF не виконується ні з якою сталою (інтеграл $= +\infty$). Але його можна використов.

Приклад (про вибори)

Представники партії любителів темного пива України (ПЛТПУ) хоче знати чи пройде його партія бар'єр на виборах і замовляє дослідження. Ми, наприклад, обстежуємо 100 виборців (вибраних випадковим чином)

Нехай 25 люд. будуть голосувати за ПЛТПУ

75 люд не будуть

Етап 1 Вважаємо, що доля виборців ПЛТПУ має вироджений апріорний розподіл $X \sim B(0,0)$

Тоді апостеріорним буде розподіл $X \sim B(25,75)$

Тому $EX = \frac{25}{25+75} = 0{,}25$

$$\mathrm{Var}X = \frac{25 \cdot 75}{(25+75)^2(25+75+1)} = (0.043)^2$$

$25+75 \geq 30$ тому вважаємо, що

$$X \sim N(0{,}25,\ (0{,}043)^2)$$

а тому з ймовірністю 95% партія набере виборців в діапазоні

$$[0{,}25 - 1{,}96 \cdot 0.043 ,\ 0{,}25 + 1{,}96 \cdot 0.043] =$$

$$= [0.166 ,\ 0.334]$$

Відповідь: підтримують від 17% до 33% голосів виборців з ймов. 95%

Наступний етап 2: додатково обстежено 500 люд і з них 95 за та 405 проти партії

Нова апостеріорна оцінка $X \sim B(120, 480)$

тут $\mathbb{E}X = 0.2$ $\quad Var = (0.0163)^2$

95% ймов. інтервал

$$[0.2 - 1.96 \cdot 0.0163, \quad 0.2 + 1.96 \cdot 0.0163] =$$

$$= [0.168, \quad 0.232]$$

Висновок З ймовірністю 95% партія набере від 17% до 23% голосів виборців

і т.д.