Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

Бокало Микола Михайлович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Текст лекцій

Львів 2023–2024

Програма курсу
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

♣ *АНОТАЦІЯ* ♣

* * * * *

Предмет "Диференціальні рівняння"входить до переліку тих дисциплін, які формують фундаментальну підготовку студентів природничих спеціальностей.

Програма предмету передбачає ознайомлення студентів з найпростішими математичними моделями природних процесів, при побудові яких виникають звичайні диференціальні рівняння, вивчення найпростіших методів інтегрування рівнянь, дослідження коректності задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, вивчення якісних властивостей розв'язків таких рівнянь та знайомство з теорією диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Предмет "Диференціальні рівняння" базується, в основному, на математичному аналізі, лінійній алгебрі та аналітичній геометрії. В свою чергу даний предмет є одним з базових для вивчення курсів рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, варіаційного числення і методів оптимізації, теоретичної механіки, фізики, методів обчислень.

♣ *ЗМІСТ ПРОГРАМИ* ♣

* * * * *

Вступ

1. Поняття звичайного диференціального рівняння (ЗДР) та його порядку. **2.** Приклади застосування ЗДР в математичних моделях природних процесів.

Тема 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

§1. Вступ до теорії звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку

1. Розв'язок, інтеграл, загальний розв'язок та загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння першого порядку. **2.** Класифікація рівнянь за формою запису. **3.** Поле напрямків. Схематична побудова інтегральних ліній ЗДР.

§2. Класи інтегровних рівнянь першого порядку

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. **2.** Однорідні рівняння та звідні до них. **3.** Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них. **4.** Рівняння в повних диференціалах та звідні до них. **5.** Інтегрування нерозв'язних стосовно похідної рівнянь. Рівняння Лагранжа та Клеро.

§3. Задача Коші для розв'язаних стосовно похідної звичайних диференціальних рівнянь.

1. Формулювання задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної ЗДР першого порядку. Інтегральне рівняння, якому еквівалентна задача Коші для ЗДР. **2.** Теорема Пеано про існування розв'язку задачі Коші для ЗДР. **3.** Лема Гронуолла-Белмана. Умова Ліпшіца. **4.** Теорема Пікарра про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЗДР. **5.** Продовження розв'язку ЗДР. **6.** Гладкість та аналітичність розв'язку ЗДР. **7.** Неперервна залежність від параметрів та початкових даних розв'язку задачі Коші для ЗДР. **8.** Диференційовність за параметрами та початковими даними розв'язку задачі Коші для ЗДР. **9.** Існування повного загального розв'язку ЗДР першого порядку.

§4. Задача Коші для нерозв'язних стосовно похідної звичайних диференціальних рівнянь.

1. Формулювання задачі Коші для нерозв'язних стосовно похідної рівнянь; існування та єдиність її розв'язку. **2.** Особливі розв'язки звичайних диференціальних рівнянь.

Тема 2. Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь та звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

§1. Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь (НС).

1. Поняття НС. Геометрична інтерпретація НС. **2.** Задача Коші для НС: існування та єдиність розв'язку, продовження розв'язку. **3.** Гладкість та аналітичність розв'язку задачі Коші для НС. **4.** Неперервна та диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язку задачі Коші для НС. **5.** Існування повного загального розв'язку НС.

§2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Зведення рівнянь вищих порядків до нормальних систем. **2.** Задача Коші для рівняння вищого порядку: існування та єдиність розв'язку, продовження розв'язку. **3.** Гладкість та аналітичність розв'язку задачі Коші для рівняння вищого порядку. **4.** Неперервна та диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язку задачі Коші для рівняння вищого порядку. **5.** Існування повного загального розв'язку рівняння вищого порядку. **6.** Деякі способи пониження порядку рівнянь вищих порядків.

Тема 3. Нормальні лінійні системи та лінійні рівняння вищих порядків

§1. Нормальні лінійні системи (НЛС).

1. Поняття НЛС. Коректність задачі Коші для НЛС. Структура повного загального розв'язку нормальної лінійної системи. **2.** Зображення повного загального розв'язку нормальної лінійної однорідної системи (НЛОС). **3.** Фундаментальна матриця розв'язків НЛОС та визначник Вронського. Формула Остроградського-Ліувілля. **4.** Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків нормальних лінійних неоднорідних систем (НЛНС).

§2. Лінійні рівняння вищих порядків (ЛР).

1. Поняття ЛР. Зв'язок між ЛР і НЛС. Коректність задачі Коші для ЛР. Структура повного загального розв'язку ЛР. **2.** Зображення повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (ЛОР). **3.** Визначник Вронського для ЛОР. Формула Остроградського-Ліувілля. **4.** Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР).

§3. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. Повний загальний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами. **2.** Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків ЛНР зі сталими коефіцієнтами. **3.** Рівняння Ейлера.

§4. Нормальні лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.

1. Повний загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами. **2.** Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків НЛНС зі сталими коефіцієнтами.

§5. Лінійні рівняння з поліноміальними коефіцієнтами.

1. Метод степеневих рядів. **2.** Метод узагальнених степеневих рядів. Рівняння Бесселя.

§6. Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку.

1. Формулювання крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку, єдиність її розв'язку. **2.** Існування розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку. Функція Гріна.

Тема 4. Динамічні (автономні) системи

§1. Основні поняття теорії динамічних систем.

§2. Властивості розв'язків динамічних систем.

§3. Типи фазових портретів двовимірних НЛОС зі сталими коефіцієнтами.

Тема 5. Перші інтеграли нормальних систем

§1. Поняття першого інтеграла нормальної системи та існування повної системи перших інтегралів.

1. Поняття першого інтеграла динамічної системи та його критерій. **2.** Існування повної системи перших інтегралів динамічних систем. **3.** Перші інтеграли нединамічних систем.

§2. Застосування перших інтегралів до знаходження розв'язків нормальних систем.

1. Пониження порядку нормальної системи за допомогою її перших інтегралів. **2.** Зображення повного загального інтегралу нормальної системи через повну систему її перших інтегралів.

Тема 6. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

§1. Загальний розв'язок диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. **2.** Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. **3.** Загальний розв'язок квазілінійного рівняння.

§2. Задача Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

1. Задача Коші для майже лінійних рівнянь. **2.** Задача Коші для квазілінійних рівнянь.

Тема 7. Стійкість за Ляпуновим розв'язків нормальних систем

§1. Поняття стійкості за Ляпуновим розв'язку НС.

§2. Критерій стійкості за Ляпуновим нульового розв'язку НЛОС зі сталою матрицею

§3. Функції Ляпунова і теореми Ляпунова про стійкість розв'язку НС.

§4. Дослідження стійкості за Ляпуновим розв'язку НС за першим наближенням.

♣ *ЛіТЕРАТУРА* ♣

1. А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. Диференціальні рівняння. — Підручник. — Київ, 2003.

2. М. М. Бокало. Нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь. Навчально-методичний посібник. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

3. Бугрій О.М., Процах Н.П., Бугрій Н.В. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. — Навчальний посібник. — Львів, 2011.

4. Бугрій О.М. Диференціальні рівняння: Методичні вказівки. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.

5. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння. - Івано-Франківськ, 2010.

6. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. - К.: Вища школа, 1994.

8. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Т., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – 1981.

9. Craig A. Tracy. Lectures on Differential Equations. Department of Mathematics University of California Davis, 2017.

Основні позначення

Введемо деякі з основних позначень, які будемо використовувати далі. Всюди в тексті лекцій незалежна змінна є дійсною і її, як правило, позначаємо через t, а функції від неї (наприклад, коефіцієнти, вільні члени і невідомі функції в рівняннях) приймають значення в полі $\mathbb{P}$, де $\mathbb{P}$ – поле дійсних чисел ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або $\mathbb{P}$ – поле комплексних чисел ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$).

Через $\mathbb{P}^n$, де $n \in \mathbb{N}$, — позначаємо нормований лінійний простір над полем $\mathbb{P}$, який складається з впорядкованих наборів n-ок елементів з $\mathbb{P}$ (векторів), які записуватимемо або у вигляді вектор-рядків (тобто x належить $\mathbb{P}^n$, якщо $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_k \in \mathbb{P}$ для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$) або у вигляді вектор-стовпчиків (тобто x належить $\mathbb{P}^n$, якщо $x = (x_1, \dots, x_n)^\top := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, де $x_k \in \mathbb{P}$ для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$) (форма запису елементів $\mathbb{P}^n$ в тому чи іншому випадку буде зрозуміла з контексту), зі стандартними операціями додавання та множення на елементи поля $\mathbb{P}$ і нормою $|x| := \big(|x_1|^2 + ... + |x_n|^2\big)^{1/2}$.

Компоненти векторів будемо нумерувати індексами знизу, а самі вектори — індексами зверху; наприклад, записи x_3, x^3, x_2^5 означатимуть, відповідно, третю компоненту вектора x, третій вектор із деякої сім'ї векторів та другу компоненту п'ятого вектора.

Через $\mathbb{P}^{n\times n}$ позначатимемо нормований лінійний простір над полем $\mathbb{P}$, який складається з квадратних матриць розмірності $n \times n$ з елементами з поля $\mathbb{P}$, зі стандартними операціями додавання і множення на скаляри та нормою

$$\|A\| := \Big(\sum_{k,l=1}^{n} |a_{kl}|^2 \Big)^{1/2}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times n}.$$

Інколи елементи матриць з $\mathbb{P}^{n\times n}$ будемо нумерувати двома індексами, один з яких зверху, а другий знизу, причому нижній індекс – номер рядка, а верхній – номер стовпчика. В цьому випадку матрицю будемо записувати також у вигляді вектор-рядка, компонентами якого є вектор-стовпці, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \equiv (a^1, \dots, a^n), \quad \text{де} \quad a^l := \begin{pmatrix} a_1^l \\ \vdots \\ a_n^l \end{pmatrix}, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Операції множення двох матриць з $\mathbb{P}^{n\times n}$ та матриці з $\mathbb{P}^{n\times n}$ на вектор-стовпчик з $\mathbb{P}^n$ визначаємо стандартно. Зауважимо, що для будь-яких $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ і $x \in \mathbb{P}^n$ правильна нерівність

$$|Ax| \leqslant \|A\|\,|x|.$$

Ми використовуватимемо символ "$\langle$"для позначення відкриваючої круглої "("або квадратної "["дужки і символ "$\rangle$"для позначення закриваючої круглої ")"або квадратної "]"дужки (коли немає принципового значення, яка з цих дужок має бути). Отож, якщо $-\infty < a < b < +\infty$, то $\langle a, b\rangle$ означатиме один з числових проміжків $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ або $[a, b)$.

Нехай $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ і $\mathbb{L}$ — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{P}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}$. Розглядатимемо відображення проміжку $\langle a, b\rangle$ в простір $\mathbb{L}$. Під $\mathbb{L}$ далі, переважно, розумітимемо $\mathbb{P}^n$ або $\mathbb{P}^{n\times n}$, де $n \in \mathbb{N}$. Відмітимо, що відображення проміжку $\langle a, b\rangle$ в простір $\mathbb{P}^n$ називають *векторною функцією*, а відображення проміжку $\langle a, b\rangle$ в простір $\mathbb{P}^{n\times n}$ — *матричною функцією.*

Під $C(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$ розумітимемо лінійний простір, складений з неперервних відображень числового проміжку $\langle a, b\rangle$ в простір $\mathbb{L}$. У випадку $\langle a, b\rangle = [a, b]$ (тоді $-\infty < a < b < +\infty$) в просторі $C([a, b]); \mathbb{L})$ вводимо норму

$$\|f\|_{C([a,b]);\mathbb{L})} := \max_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_{\mathbb{L}} \qquad \forall\, f \in C([a, b]); \mathbb{L}).$$

Послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до f в просторі $C([a, b]); \mathbb{L})$ (іншими словами, *рівномірно* збігається), якщо $\|f - f_k\|_{C([a,b]);\mathbb{L})} = \max\limits_{t\in[a,b]} \|f(t) - f_k(t)\|_{\mathbb{L}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

У просторі $C(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$ вводиться таке поняття збіжності послідовностей: скажемо, що послідовність $\{g^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до g в цьому просторі (тобто $g^k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ в $C(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$), якщо ця послідовність збігається до g рівномірно на будь-якому відрізку в $\langle a, b\rangle$, тобто для будь-якого відрізка $[c, d] \subset \langle a, b\rangle$ послідовність звужень членів заданої послідовності на відрізок $[c, d]$ збігається в $C([c, d]; \mathbb{L})$ до звуження g на $[c, d]$.

Через $C^n(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$, де $n \in \mathbb{N}$, позначатимемо лінійний простір, який є підпростором $C(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$ і складається з n раз неперервно диференційовних на $\langle a, b\rangle$ відображень. Зауважимо таке: коли, наприклад, $a \in \langle a, b\rangle$, то під значеннями похідних елементів цього простору в точці a розуміються значення відповідних односторонніх похідних (аналогічно визначаються похідні в точці b у випадку $b \in \langle a, b\rangle$). У випадку $\langle a, b\rangle = [a, b]$ (тоді $-\infty < a < b < +\infty$) в просторі $C^n([a, b]); \mathbb{L})$ вводимо норму

$$\|f\|_{C^n([a,b]);\mathbb{L})} := \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left\|f^{(k)}(t)\right\|_{\mathbb{L}} \qquad \forall\, f \in C^n([a, b]); \mathbb{L}),$$

Послідовність $\{f_m\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до f в просторі $C^n([a, b]); \mathbb{L})$ (іншими словами, *рівномірно* збігається), якщо $\|f - f_m\|_{C^n([a,b]);\mathbb{L})} = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{t\in[a,b]} \left\|f^{(k)}(t) - f_m^{(k)}(t)\right\|_{\mathbb{L}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

У просторі $C^n(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$ вводиться таке поняття збіжності послідовностей: скажемо, що послідовність $\{g^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до g в цьому просторі ($g^k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ в $C^n(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$), якщо вона сама і послідовності, отримані диференціюванням членів заданої послідовності до n-го порядку включно, збігаються, відповідно, до функції g та її похідних до n-го порядку включно в просторі $C(\langle a, b\rangle; \mathbb{L})$.

Вступ

0.1. Поняття звичайного диференціального рівняння (ЗДР) та його порядку.

Математичні моделі різноманітних процесів і явищ, в яких присутні елементи "руху" , містять диференціальні рівняння, тобто співвідношення, що визначають певний зв'язок між різними величинами (одні з яких є залежними від інших) та швидкостями змін залежних величин стосовно незалежних. Вивчення таких рівнянь привело до створення самостійного розділу математики — теорії диференціальних рівнянь. В наш час ця теорія посідає чільне місце серед інших математичних дисциплін. В ній гармонійно поєднуються суто математичний і прикладний аспекти. Це робить цю теорію привабливою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань, бо, подібно до мікроскопа вченого або скальпеля хірурга, математичний апарат диференціальних рівнянь дає змогу проникнути в мікросвіт детермінованих явищ і процесів, описати механізм їх розвитку і тим самим передбачити їх майбутнє.

Тут і далі, якщо інше не обумовлено окремо, вважається, що всі змінні та функції від них приймають дійсні значення.

Введемо поняття звичайного диференціального рівняння. А для цього спочатку нагадаємо одну важливу проблему з математичного аналізу. Нехай $f(t)$, $t \in (a, b)$, – деяка неперервна функція. Розглянемо задачу про відшукання первісних цієї функції, тобто *знаходження неперервно диференційовних функцій* $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, *таких, що* $\varphi'(t) = f(t) \quad \forall t \in (a, b)$. Цю задачу іншими словами можна сформулювати так: *розв'язати звичайне диференціальне рівняння*

$$x' = f(t). \tag{0.1}$$

Очевидно, що воно має безліч розв'язків і множину всеможливих розв'язків цього рівняння можна подати у вигляді

$$x = F(t) + C, \quad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

де F — яка-небудь первісна функції f, а C — параметр, який може набувати довільних дійсних значень, і його називають *довільною сталою.* Запис (0.2) розуміють так: для довільного фіксованого значення C_0 параметра C функція $x = F(t) + C_0$, $t \in (a, b)$, є розв'язком рівняння (0.1). Тому далі ми будемо називати функцію x від двох незалежних змінних t і C, задану формулою (0.2), *загальним розв'язком* даного диференціального рівняння. Більше того, враховуючи, що будь-який розв'язок $x = \varphi(t), t \in (a, b)$, рівняння (0.1) знайдеться стала C_φ така, що

$\varphi(t) = F(t) + C_\varphi$, $t \in (a,b)$, тобто будь-який розв'язок рівняння (0.1) можна отримати із загального розв'язку при відповідному значенні сталої C, то загальний розв'язок (0.2) називають *повним загальним розв'язком* даного рівняння.

Зауважимо, що для того, щоб з отриманої множини розв'язків рівняння (0.1) виділити якийсь один розв'язок, досить задати таку додаткову умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{0.3}$$

де $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – задані фіксовані числа. Тоді розв'язок рівняння (0.1), який задовольняє умову (0.3), згідно з (0.2) матиме вигляд

$$x = F(t) - F(t_0) + x_0, \quad t \in (a,b).$$

Умова (0.3) називається *початковою умовою*, а задача на знаходження розв'язку рівняння (0.1), що задовольняє умову (0.3), є прикладом *задачі Коші* для звичайного диференціального рівняння.

Тепер дамо означення звичайного диференціального рівняння.

Означення 0.1. *Звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР)* називається співвідношення вигляду

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{0.4}$$

яке зв'язує незалежну змінну t, шукану функцію x від змінної t та похідні цієї функції до порядку $n \in \mathbb{N}$.

Означення 0.2. *Порядком звичайного диференціального рівняння* називається найвищий з порядків похідних шуканої функції, що входять в нього.

Приклад 0.1. Рівняння $x' + 4xx'' - tx'^2 = 0$ є прикладом ЗДР другого порядку.

0.2. Приклади застосування ЗДР в математичних моделях природних процесів.

Приклад 0.2. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, величина якої в момент часу $t \in (a,b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ дорівнює $v(t)$. Знайти закон руху цієї точки, якщо в момент часу t_0 у вибраній системі координат вона знаходиться в точці x_0.

Розв'язування. Нехай $x(t)$ — положення точки на координатній прямій в довільний момент часу $t \in I$. Функція $x = x(t)$, $t \in (a,b)$, є законом руху матеріальної точки. Вона задовольняє рівняння

$$x' = v(t), \quad t \in (a,b),$$

та початкову умову

$$x(t_0) = x_0.$$

Звідси випливає, що шуканий закон руху задається за правилом

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds + x_0, \quad t \in (a,b).$$

□

Приклад 0.3. Знайти закон вільного падіння матеріальної точки під дією сили земного тяжіння, якщо в момент часу $t = 0$ матеріальна точка знаходилася на висоті x_0 і мала початкову швидкість v_0.

Розв'язування. Введемо систему координат на вертикальній прямій, по якій рухається матеріальна точка, вибравши напрям вниз за додатній напрям, а початок координат — на рівні поверхні Землі.

Нехай $x(t)$ — положення точки в момент часу t. Очевидно, що $x'(t)$ — швидкість точки, а $x''(t)$ — її прискорення в момент часу t. Згідно з другим законом Ньютона отримаємо

$$mx'' = mg,$$

де g — прискорення вільного падіння, m — маса матеріальної точки, звідки

$$x'' = g.$$

Оскільки $x'' = (x')'$, то маємо

$$x' = gt + C_1,$$

де C_1 — довільна стала.

Але $x'(0) = v_0$. Отож,

$$x' = gt + v_0.$$

Звідси

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_2,$$

де C_2 — довільна стала.

Врахувавши умову $x(0) = x_0$, дістанемо

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

— закон вільного падіння матеріальної точки. □

Тема 1

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

§1. Вступ до теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

1.1. Розв'язок, інтеграл, загальний розв'язок та загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння першого порядку.

В цьому параграфі будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, тобто рівняння вигляду

$$F(t, x, x') = 0, \tag{1.1}$$

де t – незалежна дійсна змінна, x – невідома функція від змінної t , x' – похідна x, а $F : \Omega \to \mathbb{R}$ — задана неперервна функція, Ω — область простору $\mathbb{R}^3$.

Означення 1.1. *Розв'язком* рівняння (1.1) називають функцію

$$x = \varphi(t), \quad t \in \langle a,\, b\rangle, \quad \text{де} \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1(\langle a,\, b\rangle)$ (тобто φ – неперервно диференційовна на $\langle a,\, b\rangle$);

2) $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in \Omega \quad \forall t \in \langle a,\, b\rangle$;

3) $F\,(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in \langle a,\, b\rangle$.

Означення 1.2. *Інтегральною лінією* рівняння (1.1) називають графік розв'язку цього рівняння.

Зауваження 1.1. Розглянемо рівняння

$$x' + \sin t = 0. \tag{1.2}$$

Безпосередньо переконуємося, що функція $x = \cos t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, є розв'язком цього рівняння.

Як відомо, існує три способи аналітичного задання (тобто, за допомогою формул) функцій: *явний, неявний та параметричний.* Оскільки розв'язками диференціальних рівнянь є функції, то використовують теж три способи аналітичного задання розв'язків. В зауваженні 1.1 наведено приклад явного задання розв'язку диференціального рівняння.

Нагадаємо, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a,\, b\rangle$, є неявно заданою рівнянням

$$\Phi(t,\, x) = 0, \tag{1.3}$$

якщо правильна тотожність

$$\Phi(t,\, \varphi(t)) = 0 \quad \forall t \in \langle a,\, b\rangle. \tag{1.4}$$

Зауваження 1.2. Безпосередньо легко перевірити, що функція $x = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1; 1]$, є розв'язком рівняння

$$xx' + t = 0. \tag{1.5}$$

Як легко бачити, ця функція може бути неявно заданою рівнянням

$$x^2 + t^2 - 1 = 0. \tag{1.6}$$

Неважко переконатися, що всі неперервно диференційовні функції, які неявно задані рівнянням (1.6), є розв'язком рівняння (1.5). Віддаючи дань історичній традиції, рівняння (1.6) називають *інтегралом* рівняння (1.5).

Означення 1.3. *Інтегралом* рівняння (1.1) називають рівняння (1.3), якщо будь-яка неявно задана ним неперервно диференційовна функція є розв'язком рівняння (1.1).

Зауваження 1.3. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, – явно заданий розв'язок рівняння (1.1). Очевидно, що його можна подати у вигляді

$$\varphi(t) - x = 0,$$

що є співвідношенням типу (1.3). Отож, будь-який розв'язок рівняння (1.1) можна записати у вигляді інтеграла цього рівняння.

Зауваження 1.4. Легко переконатися, що параметрично задана функція

$$t = p^3,\ x = \ln p, \quad p \in (0, +\infty),$$

є розв'язком рівняння

$$4tx'^3 - \sqrt[3]{t}x' - \frac{\ln t}{x} = 0.$$

Означення 1.4. Розв'язком рівняння (1.1) *в параметричній формі* називають параметрично задану функцію

$$t = \omega(p),\ x = \psi(p), \quad p \in \langle c,\, d\rangle,$$

$-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$, таку, що

1) $\omega, \psi \in C^1(\langle c,\, d\rangle),\ \omega'(p) \neq 0\ \forall p \in \langle c,\, d\rangle$;

2) $(\omega(p), \psi(p), \psi'(p)/\omega'(p)) \in \Omega \quad \forall p \in \langle c,\, d\rangle$;

3) $F(\omega(p), \psi(p), \psi'(p)/\omega'(p)) = 0 \quad \forall p \in \langle c,\, d\rangle$

(тут ми врахували, що $x' = \psi'(p)/\omega'(p)$.

Зауваження 1.5. Нехай для рівняння (1.1) відомий (явно заданий) розв'язок

$$x = \psi(t), \quad t \in \langle a,\, b\rangle.$$

Очевидно, що параметрично задана функція

$$t = p, \quad x = \psi(p), \quad p \in \langle a,\, b\rangle,$$

є розв'язком цього рівняння в параметричній формі (за означенням 1.4).

Зауваження 1.6. Умова 1) означення 1.4 (зокрема, те, що $\omega'(p) \neq 0\ \forall p \in \langle c,\, d\rangle$) гарантує існування оберненої до функції $t = \omega(p),\ p \in \langle c,\, d\rangle$, неперервно-диференційовної функції $p = \omega^{-1}(t)$, $t \in \langle a,\, b\rangle$. Отож, параметрично задана функція з означення 1.4 може бути формально записана у вигляді $x = \psi(\omega^{-1}(t)),\ t \in \langle a,\, b\rangle$. Але оскільки не завжди ми можемо явно задати ω^{-1}, то розв'язок в параметричній формі рівняння (1.1) не у всякому випадку може бути поданим в явній формі.

Зауваження 1.7. Відмітимо, що функція

$$x = \cos t + C \tag{1.7}$$

від незалежної змінної t і параметра C (що можуть приймати будь-які дійсні значення) володіє такою властивістю: при довільному фіксованому значенні C функція від змінної t, задана за правилом (1.7), є розв'язком рівняння (1.2). Тому функцію вигляду (1.7) називають *загальним розв'язком* рівняння (1.2). Але тут маємо і таку ситуацію: будь-який розв'язок даного рівняння можна отримати з функції (1.7), зафіксувавши відповідним чином вибране значення C. Через те функцію, визначену в (1.7), ще називають *повним загальним розв'язком* рівняння (1.2).

Варто також зауважити, що не завжди загальний розв'язок є *повним* загальним розв'язком рівняння. Наприклад, для рівняння

$$x' = x^2$$

функція

$$x = \frac{1}{C - t}, \quad t \in (C, +\infty),\ C \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

є загальним розв'язком, але не є повним загальним розв'язком даного рівняння, бо воно має розв'язок $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, який не визначається із загального розв'язку (1.8) ні при якому значенні параметра C.

Означення 1.5. *Загальним розв'язком* рівняння (1.1) називають функцію

$$x = \psi(t, C)$$

від незалежної змінної t і параметра C, яка задовольняє умову:

• для будь-яких конкретного (допустимого) значення C_* параметра C функція $x = \psi(t,\, C_*)$ від змінної t (з деякого числового проміжку) є розв'язком рівняння (1.1).

Якщо загальний розв'язок $x = \psi(t, C)$ рівняння (1.1) має властивість:
• який би не був розв'язок $x = \varphi(t), t \in \langle a,\, b\rangle$, рівняння (1.1) знайдеться значення C_φ параметра C таке, що

$$\varphi(t) = \psi(t,\, C_\varphi), \quad t \in \langle a,\, b\rangle,$$

то цей загальний розв'язок називають *повним загальним розв'язком* (в протилежному випадку його ще називають *неповним загальним розв'язком*).

Параметр C у виразі загального розв'язку називають *довільною сталою.*

Зауваження 1.8. Легко переконатися, що співвідношення

$$x^2 + t^2 - C = 0, \qquad C > 0, \tag{1.9}$$

володіє такою властивістю: при будь-якому фіксованому значенні $C_0 > 0$ параметра C (1.9) є інтегралом рівняння (1.5). Тому співвідношення (1.9) називають загальним інтегралом рівняння (1.5). Але тут є більше: для довільного інтеграла рівняння (1.5) знайдеться значення $C_0 > 0$ параметра C, при якому рівняння (1.9) співпадає з цим інтегралом. Тому співвідношення (1.9) ще називають повним загальним інтегралом рівняння (1.5). Відмітимо, що не завжди загальний інтеграл є *повним* загальним інтегралом рівняння (див. зауваження 1.7).

Означення 1.6. *Загальним інтегралом* рівняння (1.1) називають співвідношення вигляду

$$G(t,\, x,\, C) = 0, \tag{1.10}$$

яке зав'язує змінні t, x і параметр C так, що
• для довільного фіксованого значення C_0 параметра C співвідношення

$$G(t,\, x,\, C_0) = 0$$

є інтегралом рівняння (1.1).

Повним загальним інтегралом рівняння (1.1) називають загальний інтеграл (1.10) цього рівняння, якщо
• *для довільного інтеграла*

$$\Phi(t,\ x) = 0$$

рівняння (1.1) *знайдеться значення* C_Φ *таке, що*

$$G(t,\ x,\ C_\Phi) = \Phi(t,\ x)$$

для всіх точок $(t,\, x)$ *з області визначення* Φ.

Загальний інтеграл рівняння (1.1), який не є повним, ще називають *неповним загальним інтегралом* цього рівняння.

Зауваження 1.9. Відповідно можна визначити загальний розв'язок та загальний інтеграл рівняння (1.1) в параметричній формі (ці означення будуть дані в п. 5 §2 цієї теми).

Зауваження 1.10. На практиці при розв'язуванні звичайного диференціального рівняння нас буде цікавити, як правило, множина всіх його розв'язків. І ця множина буде задаватися або повним загальним розв'язком, або повним загальним інтегралом, або сукупністю загального розв'язку чи загального інтегралу та окремих розв'язків.

1.2. Класифікація рівнянь за формою запису

Рівняння вигляду (1.1) називають *не розв'язаним стосовно похідної*. Якщо його можна записати у вигляді

$$x' = f(t, x), \tag{1.11}$$

де f — функція, яка визначена в деякій області D площини $\mathbb{R}^2$, то кажуть, що воно є *розв'язним стосовно похідної*, а в протилежному випадку – *нерозв'язним стосовно похідної*. Рівняння вигляду (1.11) називають *розв'язаним стосовно похідної*.

Відмітимо також, що розв'язні стосовно похідної рівняння можна записати у вигляді

$$M(t, x) + N(t, x)\, x' = 0, \tag{1.12}$$

де M, N – задані і неперервні на деякій області D площини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що рівняння (1.12) еквівалентне сукупності рівнянь

$$x' = f(t, x), \quad N(t, x) = 0,$$

де

$$f(t, x) := -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}. \tag{1.13}$$

Далі вважаємо, що розв'язні стосовно похідної рівняння записані у вигляді (1.12).

Приклади:

1) Рівняння $x^2t^2 - x'^3 = 0$ є не розв'язане стосовно похідної, але є розв'язним стосовно похідної, оскільки його можна записати у вигляді

$$x' = \sqrt[3]{x^2 t}.$$

А це рівняння, в свою чергу, є розв'язане стосовно похідної.

2) Рівняння $\ln x' + e^{t+x} - \operatorname{tg} tx' = 0$ є нерозв'язним стосовно похідної.

Тепер зауважимо, що оскільки

$$x' = \frac{dx}{dt},$$

то з рівняння (1.12) маємо

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0, \tag{1.14}$$

де M і N задані в області D функції.

Отож, рівняння (1.14) є наслідком рівняння (1.12).

Тепер зауважимо таке. Нехай $x = x(t)$ – розв'язок рівняння (1.11), який є оборотною функцією, тобто існує обернена до $x = x(t)$ функція $t = t(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції маємо

$$x' = \frac{1}{t'}.$$

Звідси та рівняння (1.11) отримаємо

$$t' = \frac{1}{f(t, x)}. \tag{1.15}$$

Очевидно, що рівняння (1.15) можна розглядати незалежно від рівняння (1.11), трактуючи x як незалежну змінну, а t – як функцію від x. Очевидно, що рівняння (1.14) є наслідком і рівняння (1.15) при виконанні умови (1.13).

На підставі сказаного приходимо до висновку, що клас рівнянь, які записуються у вигляді (1.14), містить в собі, як підкласи, рівняння вигляду (1.11) та (1.15) при умові (1.13). Це, зокрема, означає, в рівнянні (1.14) змінні t і x є "симетричними", тобто це рівняння задає зв'язок між змінними t і x (частковими випадками цієї ситуації є такі, коли t – незалежна, а x – залежна змінні, або, навпаки, x – незалежна, а t – залежна змінні). Тому рівняння вигляду (1.14) називаються *рівняннями в симетричній формі*, а його розв'язки, як правило, визначають в параметричній або неявній формі, причому, враховуючи симетричність входження змінних t, x, означення розв'язків рівняння (1.14) дещо відрізняється від означення розв'язків рівняння (1.1). Через те ми уточнимо, що ми будемо розуміти під розв'язками рівняння (1.14).

Означення 1.7. *Розв'язком* рівняння (1.14) називають параметрично задану функцію

$$t = \omega(p), x = \psi(p), \quad p \in \langle c,\, d\rangle \ (-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty),$$

таку, що

1) $\omega, \psi \in C^1(\langle c,\, d\rangle),\ |\omega'(p)| + |\psi'(p)| > 0 \quad \forall p \in \langle c,\, d\rangle$;

2) $(\omega(p), \psi(p)) \in D \quad \forall p \in \langle c,\, d\rangle$;

3) $M(\omega(p), \psi(p))\, d\omega(p) + N(\omega(p), \psi(p))\, d\psi(p) = 0 \quad \forall p \in \langle c,\, d\rangle$.

Як бачимо, в цьому означенні порівняно з означенням 1.4 немає умови $\omega'(p) \neq 0\ \forall p \in \langle c,\, d\rangle$, що дає можливість існування розв'язків, наприклад, вигляду $t = t_0$, $x \in \langle c,\, d\rangle$ (для цього достатньо, щоб виконувалась умова: $N(t_0, x) = 0\ \forall x \in \langle c,\, d\rangle$).

Під *графіком розв'язку* $t = \omega(p)$, $x = \psi(p)$, $p \in I$, рівняння (1.14) розумітимемо множину точок

$$\{(t, x) \colon t = \omega(p),\ x = \psi(p),\ \text{де}\ p \in I\}\,,$$

а геометричне зображення цієї множини на площині називатимемо *інтегральною лінією* рівняння (1.14).

Означення 1.8. Інтегралом рівняння (1.14) називають рівняння

$$H(t, x) = 0, \tag{1.16}$$

якщо будь-яка (параметрично задана) гладка лінія, координати точок якої задовольняють рівняння (1.16), є інтегральною лінією рівняння (1.14).

Зауваження 1.11. Інтегральна лінія рівняння (1.14) не обов'язково є графіком функції вигляду $x = \varphi(t),\ t \in \langle a,\, b\rangle$, чи $t = \gamma(x),\ x \in \langle c,\, d\rangle$. Наприклад, для рівняння

$$t\, dt + x\, dx = 0 \tag{1.17}$$

інтегральною лінією є коло

$$t^2 + x^2 = 1, \tag{1.18}$$

яке задається, наприклад, таким розв'язком даного рівняння

$$t = \cos p,\ x = \sin p,\ \ p \in [0, 2\pi).$$

Але коло не є графіком жодної із вказаних вище функцій. Принагідно відмітимо, що рівняння (3.5) є інтегралом рівняння (1.17).

Аналогічно, як для рівняння (1.1), даємо означення загального і повного загального розв'язків та загального і повного загального інтегралів рівняння (1.14).

1.3. Поле напрямків. Схематична побудова інтегральних ліній ЗДР.

Розглянемо рівняння (1.11). Виявляється, що існує спосіб схематично будувати інтегральні лінії даного рівняння. Справді, нехай (t_0, x_0) — яка-небудь точка області D, а $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — довільний розв'язок рівняння (1.11) такий, що $\varphi(t_0) = x_0$. Рівняння дотичної до графіка даного розв'язку в точці (t_0, x_0) має вигляд

$$x = x_0 + \varphi'(t_0)(t - t_0),$$

яке можна записати так

$$\frac{t - t_0}{1} = \frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)}\,.$$

Оскільки

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle, \quad \varphi(t_0) = x_0,$$

то $\varphi'(t_0) = f(t_0, x_0)$. Отож, рівняння дотичної до графіка розв'язку в точці (t_0, x_0) має вигляд

$$\frac{t - t_0}{1} = \frac{x - x_0}{f(t_0, x_0)}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що вектор $(1, f(t_0, x_0))$ є напрямним вектором дотичної до графіка розв'язку рівняння (1.11) в точці (t_0, x_0) цього графіка і, крім того, $\operatorname{tg}\alpha(t_0, x_0) = f(t_0, x_0)$, де $\alpha(t_0, x_0)$ — кут нахилу дотичної до графіка розв'язку в точці (t_0, x_0) до осі абсцис.

Побудуємо в кожній точці (t, x) області D вектор $(1, f(t, x))$. В результаті отримаємо так зване *поле напрямків* (або *векторне поле*), відповідне рівнянню (1.11).

Зі сказаного вище випливає, що в довільній точці будь-якої інтегральної лінії рівняння (1.11) відповідний вектор поля напрямків є напрямним вектором дотичної до цієї лінії у цій точці.

Тепер нагадаємо, що гладкою лінією (в площині) називають лінію, в кожній точці якої існує дотична і ця дотична неперервно змінюється при неперервній зміні точки дотику. Покажемо, що коли f є неперервною на D функцією, то гладка лінія в D, яка володіє властивістю, про яку говорилося вище стосовно інтегральних ліній рівняння (1.11), є інтегральною лінією цього рівняння. Справді, нехай $\alpha(t, x)$ — кут нахилу дотичної до даної гладкої лінії в точці (t, x) до осі абсцис. З властивості даної лінії випливає, що

$$\operatorname{tg}\alpha(t, x) = f(t, x). \tag{1.19}$$

Оскільки за нашим припущенням функція f є неперервною, то тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до даної лінії набуває тільки скінченних значень і неперервно змінюється при неперервній зміні точки дотику. Це означає, що будь-яка вертикальна пряма в площині Otx перетинає дану гладку лінію не більше, як в одній точці (якби це було не так, то знайшлася б точка (t_*, x_*) цієї лінії така, що $\alpha(t_*, x_*) = \pi/2$). Отож, дана лінія є графіком деякої функції

$$x = \psi(t), \qquad t \in \langle a, b\rangle.$$

Ця функція є неперервно диференційовною, оскільки в кожній точці її графіка існує дотична і кутовий коефіцієнт дотичної неперервно змінюється. Тоді $\psi'(t_0) = \operatorname{tg}\alpha(t_0, x_0)$, тобто, враховуючи (1.19), маємо

$$\psi'(t_0) = f(t_0, x_0). \tag{1.20}$$

Отже, маючи на увазі, що t_0 — довільне, $x_0 = \psi(t_0)$, з (1.20) отримаємо потрібне твердження.

Поле напрямів, відповідне рівнянню (1.11), можна використати для схематичної побудови сім'ї інтегральних ліній заданого рівняння, враховуючи вказані вище властивості інтегральних ліній ЗДР. При цьому зручно використовувати *ізокліни.*

Означення 1.9. *Ізокліною* називають геометричне місце точок області D, в яких вектори поля напрямів рівні між собою.

Очевидно, що множина тих точок області D, в яких вектори поля напрямів мають координати $(1, k)$, де k — деяке дійсне число, задається рівнянням

$$f(t, x) = k. \tag{1.21}$$

Це є рівняння ізокліни.

На практиці схематичну побудову інтегральних ліній рівняння (1.11) з неперервною функцією f зручно виконувати так:

1. Побудувати ізокліни (1.21) при $k = 0;\ 1;\ -1$, позначивши на них відповідні напрями (вектори).

2. Враховуючи, що f — неперервна функція, а також вже знайдені ізокліни, побудувати ще кілька ізоклін (1.21), відповідних значенням $k < 1$, $-1 < k < 0$, $0 < k < 1$ та $k > 1$, та позначити на них відповідні напрями (вектори).

3. Побудувати схематично інтегральні лінії рівняння (1.11), маючи на увазі, що при перетині якої небудь ізокліни інтегральна лінія в точці перетину має дотичну з відповідним напрямним вектором.

§2. Класи інтегровних рівнянь першого порядку

Звичайні диференціальні рівняння, розв'язки яких можна задати аналітично (за допомогою формул), називають *інтегровними рівняннями.* В цьому параграфі будуть розглядатися чотири класи інтегровних рівнянь, які розв'язні стосовно похідної, а саме:

1) рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них;

2) однорідні рівняння та звідні до них;

3) лінійні рівняння першого порядку та звідні до них;

4) рівняння в повних диференціалах та звідні до них,

а також два класи інтегровних рівнянь, які не розв'язні стосовно похідної:

(i) рівняння, які еквівалентні сукупності рівнянь, вказаних вище;

(ii) рівняння, які можна розв'язати методом введення параметра.

В цьому параграфі розв'язні стосовно похідної рівняння будемо записувати у симетричному вигляді

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0, \tag{2.1}$$

або через похідну невідомої функції

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0, \tag{2.2}$$

де M, N — визначені і неперервні на області D площини $\mathbb{R}^2$.

Частковим, але важливим, випадком рівняння (2.2), є рівняння

$$x' = f(t,x), \tag{2.3}$$

де f — визначена і неперервна на області D площини $\mathbb{R}^2$.

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Почнемо з найпростіших рівнянь з відокремлюваними змінними.

Означення 2.1. *Рівнянням з відокремленими змінними* називають рівняння або вигляду

$$M_0(t) + N_0(x)x' = 0, \tag{2.4}$$

або вигляду

$$M_0(t)\,dt + N_0(x)\,dx = 0, \tag{2.5}$$

де $M_0 \in C(a,b)$, $N_0 \in C(c,d)$ — задані функції (тут і далі $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$).

Теорема 2.1. *Повний загальний інтеграл рівняння (2.5) (відповідно, (2.4)) має вигляд*

$$\widetilde{M_0}(t) + \widetilde{N}_0(x) = C, \qquad (t,x) \in (a,b)\times(c,d), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

де $\widetilde{M_0}$ і $\widetilde{N}_0$ — первісні функцій, відповідно, M_0 та N_0 (тобто, $\big(\widetilde{M_0}\big)' = M_0$ і $\big(\widetilde{N}_0\big)' = N_0$), а C – довільна стала.

Доведення. Оскільки рівняння (2.4), врахувавши, що $x' = \frac{dx}{dt}$, зводиться до рівняння (2.5), то розглянемо друге рівняння. Нехай $t = \omega(p)$, $x = \psi(p)$, $p \in I$,— який-небудь розв'язок рівняння (2.5) (I — проміжок числової осі $\mathbb{R}$). Підставивши цей розв'язок в рівняння (2.5), отримаємо

$$M_0(\omega(p))\, d\varphi(p) + N_0(\psi(p))\, d\psi(p) = 0, \qquad p \in I,$$

звідки, використовуючи правило диференціювання складених функцій, здобудемо рівність

$$d\big(\widetilde{M}_0(\omega(p)) + \widetilde{N}_0(\psi(p))\big) = 0, \qquad p \in I.$$

З цієї рівності випливає

$$\widetilde{M}_0(\omega(p)) + \widetilde{N}_0(\psi(p)) = C_0, \qquad p \in I,$$

де C_0 — деяка стала. Це означає, що будь-який розв'язок рівняння (2.5) можна знайти із співвідношення (2.6) при відповідному значенні параметра C.

Тепер нехай функція $t = \widehat{\omega}(p)$, $x = \widehat{\psi}(p)$, $p \in \widehat{I}$ ($\widehat{I}$ – числовий проміжок), така що $\widehat{\omega}, \widehat{\psi} \in C^1(\widehat{I})$, $(\widehat{\omega}(p), \widehat{\psi}(p)) \in (a,b) \times (c,d)$ для кожного $p \in \widehat{I}$ і

$$\widetilde{M}_0(\widehat{\omega}(p)) + \widetilde{N}_0(\widehat{\psi}(p)) = C_1, \qquad p \in \widehat{I}, \tag{2.7}$$

тобто ця функція задана рівнянням (2.6) при $C = C_1$. Взявши диференціал від лівої і правої частин рівності (2.7), отримаємо

$$M_0(\widehat{\omega}(p))\, d\widehat{\omega}(p) + N_0(\widehat{\psi}(p))\, d\widehat{\psi}(p) = 0, \qquad p \in \widehat{I},$$

тобто задана функція є розв'язком рівняння (2.5). □

Приклад 2.1 Розв'язати рівняння

$$(3t^2 + 1)dt + e^x dx = 0.$$

Розв'язання. Оскільки первісними функцій $3t^2 + 1$ та e^x є відповідно функції $t^3 + t$ та e^x, то на підставі теореми 2.1 отримаємо загальний інтеграл заданого рівняння у вигляді

$$t^3 + t + e^x = C. \qquad \square$$

Рівняння вигляду

$$M_1(t)M_2(x)\, dt + N_1(t)N_2(x)\, dx = 0 \tag{2.8}$$

або вигляду

$$M_1(t)M_2(x) + N_1(t)N_2(x)x' = 0, \tag{2.9}$$

де M_1 і N_1 – функції, які визначені та неперервні на інтервалі (a,b), а M_2, N_2 – функції, які визначені та неперервні на інтервалі (c,d), називають *рівняннями з відокремлюваними змінними.*

Очевидно, що рівняння (2.8) є еквівалентним сукупності співвідношень

$$\frac{M_1(t)}{N_1(t)}\, dt + \frac{N_2(x)}{M_2(x)}\, dx = 0, \tag{2.10}$$

$$N_1(t) = 0, \quad M_2(x) = 0. \tag{2.11}$$

(перше з цих співвідношень формально отримане діленням рівняння (2.8) на $N_1(t)M_2(x)$).

Припустимо, що рівняння (2.11) можна переписати так:

$$N_1(t) = 0 \iff t = t_i,\ i \in K \subset \mathbb{N}; \quad M_2(x) = 0 \iff x = x_j,\ j \in J \subset \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Нехай $F_1 \in C^1\big((a,b) \setminus \{t_i \,|\, i \in K\}\big)$ та $F_2 \in C^1\big((c,d) \setminus \{x_j \,|\, j \in J\}\big)$ – функції такі, що

$$F_1'(t) = \frac{M_1(t)}{N_1(t)},\ t \in (a,b) \setminus \{t_i \,|\, i \in K\}, \quad \text{i} \quad F_2'(x) = \frac{N_2(x)}{M_2(x)},\ x \in \{x_j \,|\, j \in J\}.$$

Оскільки рівняння (2.10) є рівнянням з відокремленими змінними, то з (2.10), (2.12) і теореми 2.1 випливає, що множина всеможливих розв'язків рівняння (2.8) задається співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&F_1(t) + F_2(x) = C, \ \ t \in (a,b) \setminus \{t_i \,|\, i \in K\},\ x \in (c,d) \setminus \{x_j \,|\, j \in J\}, \quad C \in \mathbb{R};\\
&t = t_i, \ \ x \in (c,d), \quad i \in K\,; \qquad x = x_j, \ \ t \in (a,b), \quad j \in J\,.
\end{aligned}$$

Розглянемо **рівняння, які зводяться** певною заміною змінних **до рівнянь з відокремлюваними змінними**. До таких належать рівняння вигляду

$$P(at + bx + c)\, dt + Q(at + bx + c)\, dx = 0, \tag{2.13}$$

або

$$P(at + bx + c) + Q(at + bx + c)x' = 0, \tag{2.14}$$

де $a \neq 0$, $b \neq 0$, c — сталі, $P(z)$, $Q(z)$, $z \in (p,q)$, — задані функції.

Розглянемо рівняння (2.13) і зробимо в ньому заміну змінних

$$x \rightsquigarrow z\ : \quad z = at + bx + c. \tag{2.15}$$

Тут t — незалежна змінна, x — "стара" змінна, а z — "нова" змінна. Маємо

$$dz = adt + bdx \quad \Rightarrow \quad dx = (dz - adt)/b.$$

У результаті отримаємо

$$P(z)\, dt + Q(z)(dz - adt)/b = 0,$$

звідки

$$[P(z) - (a/b)Q(z)]\, dt + [Q(z)/b]\, dz = 0.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо рівняння (2.14) і зробимо в ньому заміну змінних (2.15), де t — незалежна змінна, $x = x(t)$ — "стара" невідома функція, а $z = z(t)$ — "нова" невідома функція. Тоді

$$z' = a + bx' \quad \Rightarrow \quad x' = (z' - a)/b.$$

Враховуючи це та (2.15), із (2.14) отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(P(z) - (a/b)Q(z)) + (Q(z)/b)z' = 0.$$

Відмітимо, що частковим випадком рівняння (2.14) є рівняння

$$x' = f(at + bx + c), \tag{2.16}$$

де $a \neq 0$, $b \neq 0$, c — сталі, $f(z)$, $z \in (p,q)$, — задана функція. Робимо заміну змінних (2.15). Маємо $z' = a + bx'$, звідки $x' = (z' - a)/b$. Враховуючи це та (2.15), із (2.16) отримаємо $(z' - a)/b = f(z)$, тобто

$$z' = bf(z) + a.$$

Це рівняння є з відокремлюваними змінними.

2.2. Однорідні рівняння та звідні до них

Спочатку дамо означення однорідної функції.

Означення 2.2. Функція $F : G \to \mathbb{R}$, де G – множина в $\mathbb{R}^2$, називається однорідною функцією порядку $m \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якої точки (t, x) множини G і довільного числа $k > 0$ маємо, що точка (kt, kx) належить G і

$$F(kt, kx) = k^m F(t, x).$$

Приклади *однорідних функцій*:

1) $F(t,x) = \sin\dfrac{x}{t}, \qquad t \neq 0; \quad m = 0;$

2) $F(t,x) = \dfrac{t^2 + 3tx + x^2}{xt}, \qquad x \neq 0,\, t \neq 0; \quad m = 0;$

3) $F(t,x) = (t + x)\ln\Big(1 + \dfrac{x}{t}\Big), \qquad \dfrac{x}{t} > -1; \quad m = 1.$

Зауваження 2.1. Відмітимо, що функція

$$F(t,x) = g\Big(\frac{x}{t}\Big), \qquad (t,x) \in G = \Big\{(t,x)\colon \frac{x}{t} \in S\Big\},$$

де $g(z), z \in S \subset \mathbb{R}$, — довільна функція, є однорідною функцією нульового порядку.

Означення 2.3. *Однорідним рівнянням* називається рівняння, яке можна записати у вигляді або

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0, \tag{2.17}$$

або

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0, \tag{2.18}$$

де $M \in C(D)$ і $N \in C(D)$ — однорідні функції одного і того ж порядку, а D – область в $\mathbb{R}^2$.

Зауваження 2.2. Нехай рівняння, розв'язане стосовно похідної, має вигляд

$$x' = f(t,x), \tag{2.19}$$

де $f : D \to \mathbb{R}$ — однорідна функція нульового порядку (наприклад, $f(t,x) = g(x/t)$, $(t,x) \in D$, де $g(z)$, $z \in (a,b)$, — деяка функція). Тоді це рівняння є однорідним. Очевидно, що якщо рівняння вигляду (2.19) є однорідним, то функція f *обов'язково* повинна бути однорідною нульового порядку.

Правильне таке твердження.

Теорема 2.2. *Нехай M і N — неперервні однорідні функції одного і того ж порядку, які визначені в області $D = \{(t,x) \,|\, t > 0, -\infty \leqslant a < x/t < b \leqslant +\infty\}$, причому*

$$tM(t,x) + xN(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D.$$

Тоді повний загальний інтеграл однорідного рівняння (2.17) або (2.18) має вигляд

$$\ln t + \int\limits_{z_0}^{x/t} \frac{N(1,s)}{M(1,s) + sN(1,s)}\,ds = C, \quad C - \textit{довільна стала}, \tag{2.20}$$

де $z_0 \in (a,b)$ – фіксоване.

Доведення. Зробимо в рівнянні (2.17) заміну змінних

$$z = \frac{x}{t}, \tag{2.21}$$

де z – "нова" змінна, а x – "стара" змінна. Отож, маємо

$$x = zt, \quad dx = z\,dt + t\,dz.$$

Тоді рівняння (2.17) набуде вигляду

$$M(t, tz)\,dt + N(t, tz)(z\,dt + t\,dz) = 0. \tag{2.22}$$

Оскільки $t > 0$, то в силу означення однорідної функції маємо

$$M(t, tz) = M(t \cdot 1, t \cdot z) = t^m M(1, z), \qquad N(t, tz) = t^m N(1, z).$$

Звідси та рівняння (2.22) отримаємо

$$\big(M(1, z) + zN(1, z)\big)\,dt + tN(1, z)\,dz = 0. \tag{2.23}$$

Рівняння (2.23) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Далі знаходимо його повний загальний інтеграл, врахувавши, що $0 \neq tM(t, x) + xN(t, x) = t^{m+1}(M(1, z) + zN(1, z))$ (див. попередній пункт), а потім підставляємо x/t замість z. У результаті отримаємо (2.20). □

Зауваження 2.3. Як випливає з доведення теореми 2.2, однорідні рівняння заміною змінних (2.21), тобто

$$\frac{x}{t} = z, \quad x = tz, \quad dx = z\,dt + t\,dz,$$

зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

Відмітимо, що коли однорідне рівняння, записане у вигляді (2.18) (t — незалежна, а x — залежна змінні), то варто робити в ньому заміну (2.21), не переходячи до симетричної форми. При цьому із співвідношення $x = tz$ отримуємо співвідношення

$$x' = tz' + z.$$

Отже, при зведенні однорідного рівняння вигляду (2.18) пишемо такий ланцюжок співвідношень між незалежною змінною t і залежними від неї змінними x та z:

$$z = \frac{x}{t}, \qquad x = tz, \qquad x' = tz' + z.$$

Тоді з (2.18) отримаємо

$$M(1, z) + N(1, z)(tz' + z) = 0,$$

звідки

$$(M(1, z) + zN(1, z)) + tN(1, z)z' = 0. \tag{2.24}$$

Рівняння (2.24) є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Тепер розглянемо **рівняння, які зводяться до однорідних.**

1) *Рівняння вигляду або*

$$M_*\Big(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\Big)\,dt+N_*\Big(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\Big)\,dx=0, \tag{2.25}$$

або

$$M_*\Big(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\Big)+N_*\Big(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\Big)x'=0, \tag{2.26}$$

де $M_*(z), N_*(z),\ z\in(a,b),$ *— задані неперервні функції,* $|c_1|+|c_2|>0,\ |a_1|+|b_1|>0,$ $|a_2|+|b_2|>0,$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0, \tag{2.27}$$

зводяться до однорідних заміною змінних

$$\begin{cases} t=s+t_0,\\ x=z+x_0,\end{cases} \tag{2.28}$$

де (t_0,x_0) — розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1t+b_1x+c_1=0,\\ a_2t+b_2x+c_2=0.\end{cases} \tag{2.29}$$

Справді, система (2.29) в силу умови (2.27) має єдиний розв'язок. Підставляючи в (2.25) замість t і x відповідні вирази із змінними s і z згідно з (2.28) і враховуючи, що $dt=d\tau$, $dx=dz$, з (2.25) отримаємо однорідне рівняння вигляду

$$M_*\Big(\frac{a_1s+b_1z}{a_2s+b_2z}\Big)\,ds+N_*\Big(\frac{a_1s+b_1z}{a_2s+b_2z}\Big)\,dz=0,$$

а з (2.26) –

$$M_*\Big(\frac{a_1s+b_1z}{a_2s+b_2z}\Big)+N_*\Big(\frac{a_1s+b_1z}{a_2s+b_2z}\Big)z'=0.$$

Відмітимо, що коли не виконується умова (2.27), то система (2.29) або не має розв'язку, або має безліч розв'язків. Тоді, якщо $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$ (в протилежному випадку рівняння (2.25) є рівнянням з відокремлюваними змінними), то рівняння (2.25) належить до рівнянь (безпосередньо) звідних до рівнянь з відокремлюваними змінними. Справді, з умови $\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ маємо існування числа $\lambda\neq 0$ такого, що $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$. Отож, враховуючи, що $a_2t+b_2x=\lambda(a_1t+b_1x)$, робимо в рівнянні (2.25) заміну змінних

$$z=a_1t+b_1x.$$

Тоді, маючи на увазі, що $dz=a_1\,dt+b_1\,dx$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$M_*\Big(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\Big)\,dt+N_*\Big(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\Big)\Big(\frac{dz-a_1\,dt}{b_1}\Big)=0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \Big(b_1M_*\Big(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\Big)-a_1N_*\Big(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\Big)\Big)\,dt+N_*\Big(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\Big)\,dz=0.$$

Зауважимо, що окремим випадком рівняння (2.26) є рівняння

$$x' = f\Big(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\Big), \tag{2.30}$$

де $f(y)$, $y \in (a, b)$, — задана неперервна функція, $|c_1| + |c_2| > 0$.

Зауваження 2.4. На практиці, маючи рівняння вигляду (2.26), зокрема, (2.30), варто робити в ньому заміну змінних (2.28) і не переходити до симетричної форми, а врахувати, що

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{ds} = z'.$$

Тоді, наприклад, з (2.30) на підставі (2.28) отримаємо однорідне рівняння

$$z' = f\Big(\frac{a_1s + b_1z}{a_2s + b_2z}\Big).$$

2) *Узагальнено однорідні рівняння* — це рівняння вигляду (2.1), які заміною змінних

$$t = s^k, \quad x = z^l, \tag{2.31}$$

де k і l – деякі ненульові дійсні сталі, зводяться до однорідних.

Відмітимо, що коли в рівнянні (2.1) робити заміну змінних (2.31) (тоді $dt = ks^{k-1}\,ds, \quad dx = lz^{l-1}\,dz$), то отримаємо рівняння

$$kM(s^k, z^l)s^{k-1}\,ds + lN(s^k, z^l)z^{l-1}\,dz = 0. \tag{2.32}$$

На практиці для перевірки того, що дане рівняння є узагальнено однорідним, роблять в ньому заміну змінних вигляду (2.31) з неозначеними k та l (або з неозначеним k та $l = 1$, або з неозначеним k та $l = 1$) і в отриманому рівнянні пробують підбирати значення k та l такими, щоби це рівняння було однорідним. Якщо такі значення k та l можна вибрати, то задане рівняння є *узагальнено однорідним.*

Лекція № 3

2.3. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них

Тут розглянемо дуже важливий клас рівнянь першого порядку.

Означення 2.4. *Лінійним рівнянням* (ЛР) *першого порядку* називають рівняння, яке можна записати у вигляді

$$x' + a_1(t)x = f(t), \tag{2.33}$$

де a_1 і f — задані на інтервалі (a, b) неперервні функції.

Функція a_1 називається *коефіцієнтом*, а функція f — *вільним членом* рівняння (2.33). Якщо в рівнянні (2.33) $f(t) = 0\ \forall t \in (a, b)$, тобто воно має вигляд

$$x' + a_1(t)x = 0, \tag{2.34}$$

то його називають *лінійним однорідним рівнянням* (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР).

Якщо в рівняннях (2.33) та (2.34) коефіцієнти однакові, то рівняння (2.34) називають лінійним однорідним рівнянням *відповідним* лінійному неоднорідному рівнянню (2.33).

Теорема 2.3. *Нехай*

$$x = \overset{*}{x}(t), \qquad t \in (a, b),$$

— частковий розв'язок рівняння (2.33).

Тоді для будь-якого розв'язку

$$x = \widetilde{x}(t), \quad t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b),$$

цього рівняння маємо зображення

$$\widetilde{x}(t) = \overset{\circ}{x}(t) + \overset{*}{x}(t), \quad t \in \langle c, d\rangle, \tag{2.35}$$

де

$$x = \overset{\circ}{x}(t), \qquad t \in \langle c, d\rangle,$$

– розв'язок відповідного однорідного рівняння (2.34).

З другого боку, якщо

$$x = \overset{\circ}{x}(t), \qquad t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b),$$

— який-небудь розв'язок рівняння (2.34)*, то функція*

$$x = \overset{\circ}{x}(t) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in \langle c, d\rangle, \tag{2.36}$$

є розв'язком рівняння (2.33).

Доведення. Нехай $x = x(t)$, $t \in \langle \tilde{a}, \tilde{b}\rangle$, — який-небудь розв'язок рівняння (2.33). Покладемо

$$\widetilde{x}(t):=x(t) - \overset{*}{x}(t), \qquad t \in \langle \tilde{a}, \tilde{b}\rangle,$$

і покажемо, що функція $x = \widetilde{x}(t)$, $t \in \langle \tilde{a}, \tilde{b}\rangle$, є розв'язком рівняння (2.34). Справді, маємо

$$\begin{aligned}&\widetilde{x}'(t) + a_1(t)\widetilde{x}(t) = (x(t) - \overset{*}{x}(t))' + a_1(t)(x(t) - \overset{*}{x}(t)) = (x'(t) + a_1(t)x(t)) - \\ &- (\overset{*}{x}{}'(t) + a_1(t)\overset{*}{x}(t)) = f(t) - f(t) = 0 \quad \forall t \in \langle \widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle.\end{aligned}$$

Тепер припустимо, що $x = \widehat{x}(t)$, $t \in \langle \hat{a}, \hat{b}\rangle$, — який-небудь розв'язок рівняння (2.34). Для функції, заданої формулою (2.36), маємо

$$\begin{aligned}&(\widehat{x}(t) + \overset{*}{x}(t))' + a_1(t)(\widehat{x}(t) + \overset{*}{x}(t)) = (\widehat{x}'(t) + a_1(t)\widehat{x}(t)) + (\overset{*}{x}{}'(t) + a_1(t)\overset{*}{x}(t)) = \\ &= 0 + f(t) = f(t) \quad \forall t \in \langle \widehat{a}, \widehat{b}\rangle,\end{aligned}$$

що і потрібно було показати. □

Наслідок 2.1. *Нехай* $x = \overset{\circ}{x}(t, C)$, $(t, C) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *– повний загальний розв'язок рівняння* (2.34)*, а* $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a, b)$, *— частковий розв'язок рівняння* (2.33)*. Тоді*

$$x = \overset{\circ}{x}(t, C) + \overset{*}{x}(t), \quad (t, C) \in \Omega,$$

— повний загальний розв'язок рівняння (2.33).

Дане твердження безпосередньо випливає з теореми 2.3.

Теорема 2.4. *Нехай функції* a_1 *і* f *є неперервними на* (a, b)*. Тоді повний загальний розв'язок рівняння* (2.33) *можна записати у вигляді*

$$x = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) e^{-\int\limits_{\tau}^{t} a_1(s)\,ds}\,d\tau, \quad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{2.37}$$

де $t_0 \in (a, b)$ — *довільно вибране фіксоване значення.*

Доведення. Згідно з наслідком 2.1 теореми 2.3 нам потрібно знайти повний загальний розв'язок рівняння (2.34) і частковий розв'язок рівняння (2.33), а тоді додати їх і отримати повний загальний розв'язок рівняння (2.33).

Спочатку розв'яжемо рівняння (2.34). Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Отож, маємо

$$\frac{dx}{dt} = -a_1(t)x. \tag{2.38}$$

Отримане рівняння еквівалентне сукупності співвідношень

$$\frac{dx}{x} = -a_1(t)\,dt; \qquad x = 0.$$

Отож, всеможливі розв'язки (2.38) задаються співвідношеннями

$$\ln|x| = -\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds + \ln|C|, \quad C \neq 0; \qquad x = 0.$$

Після відповідних спрощень отримаємо

$$|x| = |C|e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \quad C \neq 0; \qquad x = 0.$$

Оскільки C — довільна ненульова стала (від'ємна або додатна), то ці співвідношення можна подати у вигляді

$$x = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \quad C \neq 0; \qquad x = 0.$$

Очевидно, що дану сім'ю розв'язків можна записати так

$$x = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \qquad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

Це і є повний загальний розв'язок рівняння (2.34).

Тепер шукатимемо частковий розв'язок $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a, b)$, рівняння (2.33). Для цього використаємо *метод варіації сталої*. Суть цього методу полягає в тому, що, маючи зображення загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо як функцію, зображення якої відрізняється від зображення загального розв'язку відповідного однорідного рівняння тільки тим, що замість сталої C стоїть певний вираз із незалежною змінною. Точніше, частковий розв'язок рівняння (2.33) шукається у вигляді

$$x = \chi(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \qquad t \in (a, b), \tag{2.40}$$

де $\chi \in C^1(a,b)$.

Для знаходження виразу $\chi(t)$ підставляємо (2.40) в (2.33). Тоді отримаємо

$$\chi'(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds} - a_1(t)\chi(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds} + a_1(t)\chi(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds} = f(t), \qquad t \in (a,b).$$

Звідси маємо

$$\chi'(t) = f(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \qquad t \in (a,b).$$

Отже

$$\chi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} a_1(s)\,ds}\,d\tau, \qquad t \in (a,b). \tag{2.41}$$

Із (2.40) та (2.41) отримуємо зображення часткового розв'язку рівняння (2.33)

$$x = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)e^{-\int\limits_{\tau}^{t} a_1(s)\,ds}\,d\tau, \qquad t \in (a,b). \tag{2.42}$$

На підставі твердження наслідку 2.1 з теореми 2.3 та (2.39) і (2.42) можемо записати загальний розв'язок рівняння (2.33) у вигляді (2.37). □

Зауваження 2.5. З теореми 2.4 випливає, що будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in \langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle \subset (a,b)$, рівняння (2.33) такий, що $\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle \neq (a,b)$, можна продовжити на множину $(a,b)\backslash\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle$ так, що отримана функція буде визначеним на (a,b) розв'язком рівняння (2.33). Отже, можна розглядати тільки ті розв'язки рівняння (2.33), які визначені на (a,b).

Тепер розглянемо **рівняння, які зводяться до лінійних**.

1) *Рівняння Бернуллі*, тобто, рівняння, які можна записати у вигляді

$$x' + \widetilde{a}(t)x = \widetilde{b}(t)x^n, \tag{2.43}$$

де $n \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ — задані на інтервалі (a,b) функції.

Очевидно, що коли $n > 0$, то задане рівняння має частковий розв'язок $x \equiv 0$, а якщо $n < 0$, то такого розв'язку дане рівняння не має. Знайдемо інші розв'язки рівняння (2.43). Для цього поділимо його на x^n:

$$\frac{x'}{x^n} + \widetilde{a}(t)x^{1-n} = \widetilde{b}(t). \tag{2.44}$$

Зробимо тут заміну змінних

$$z = x^{1-n}.$$

Тоді $z' = (1-n)\dfrac{x'}{x^n}$, звідки $\dfrac{x'}{x^n} = \dfrac{1}{1-n}z'$. У результаті прийдемо до лінійного рівняння

$$\frac{1}{1-n}z' + \widetilde{a}(t)z = \widetilde{b}(t).$$

2) *Рівняння, які можна записати у вигляді*

$$\big(h(x)t + g(x)\big)x' = q(x). \tag{2.45}$$

Ці рівняння розв'язуються таким чином. Шукаємо не функції $x = x(t)$, які є розв'язками заданого рівняння, а обернені до них функції $t = t(x)$. Враховуючи зв'язок між похідними взаємно обернених функцій, маємо рівність

$$x' = \frac{1}{t'}\,.$$

Враховуючи це, з рівняння (2.45) отримаємо лінійне рівняння з невідомою функцією t від незалежної змінної x:

$$q(x)t' = h(x)t + g(x). \tag{2.46}$$

Множина всеможливих розв'язків рівняння (2.45) неявно визначається загальним розв'язком рівняння (2.46), до якого треба долучити сталі функції

$$x = x_i, \qquad i \in K \subset \mathbb{N},$$

де x_i, $i \in K$, — розв'язки рівняння

$$q(x) = 0, \tag{2.47}$$

з області визначення функцій h і g , в чому легко безпосередньо переконатися.

3) *Рівняння вигляду*

$$\big(m(x)t^n + h(x)t\big)x' = q(x),$$

переходом до відшукання функцій $t = t(x)$, обернених до розв'язків $x = x(t)$ даного рівняння, зводиться до рівняння Бернуллі (стосовно t)

$$q(x)t' - h(x)t = m(x)t^n.$$

4) *Рівняння вигляду*

$$c(t)\psi'(x)x' + d(t)\psi(x) = g(t)$$

зводяться до лінійного

$$c(t)z' + d(t)z = g(t)$$

заміною змінних

$$z = \psi(x) \qquad (\text{тоді}\ \ z' = \psi'(x)x').$$

5) *Рівняння Рікатті*, тобто, рівняння, які можна записати у вигляді

$$x' + c(t)x + d(t)x^2 = g(t),$$

де c, $d \not\equiv 0$, g — задані функції.

Це рівняння зводиться до рівняння Бернуллі таким чином. Нехай нам відомо частковий розв'язок $x = x_1(t)$ цього рівняння. Тоді робимо в заданому рівнянні заміну змінних

$$x = y + x_1(t).$$

У результаті отримаємо

$$y' + x_1'(t) + c(t)(y + x_1(t)) + d(t)(y + x_1(t))^2 = g(t),$$

звідки

$$y' + \big[c(t) + 2d(t)x_1(t)\big]y + d(t)y^2 = g(t) - (x_1'(t) + c(t)x_1(t) + d(t)x_1^2(t)).$$

Оскільки $x = x_1(t)$ — розв'язок рівняння Рікатті, то звідси маємо рівняння Бернуллі

$$y' + \widetilde{a}(t)y = \widetilde{d}y^2,$$

де $\widetilde{a}(t){:=}c(t) + 2d(t)x_1(t),\ \ \widetilde{d}(t){:=} - d(t),\ \ t \in (a, b).$

2.4. Рівняння в повних диференціалах та звідні до них.

Розглянемо ще один клас інтегровних рівнянь першого порядку.

Означення 2.5. *Рівнянням в повних диференціалах* називають рівняння вигляду

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0, \tag{2.48}$$

де M і N – задані і неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^2$ функції, якщо ліва частина його є повним диференціалом деякої функції $F(t,x)$, $(t,x) \in D$, тобто

$$dF(t,x) = M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx, \qquad (t,x) \in D. \tag{2.49}$$

Нагадаємо, що повний диференціал функції F знаходиться за формулою

$$dF(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\,dx, \qquad (t,x) \in D. \tag{2.50}$$

Зауваження 2.6. Якщо рівняння (2.48) є рівнянням в повних диференціалах, то його, на підставі (2.49), можна подати у вигляді

$$dF(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in D.$$

Лема 2.1. *Рівняння* (2.48) *буде рівнянням в повних диференціалах тоді і лише тоді, коли існує неперервно диференційовна на D функція F така, що*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x), \\[2ex] \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \qquad (t,x) \in D. \end{cases} \tag{2.51}$$

Доведення. З (2.49) і (2.50) випливає (2.51). І навпаки, з (2.51) і відомих результатів математичного аналізу (достатні умови диференційовності функцій багатьох змінних) отримуємо (2.49). □

Виникає питання: як на практиці розпізнати рівняння в повних диференціалах? На нього дає відповідь таке твердження.

Лема 2.2. *Нехай D — однозв'язна область і частинні похідні $\partial M/\partial x, \partial N/\partial t$ є неперервними в D. Тоді рівняння* (2.48) *буде рівнянням в повних диференціалах в тому і лише в тому випадку, коли виконується рівність*

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}, \qquad (t,x) \in D. \tag{2.52}$$

Доведення. Спочатку доведемо *необхідність.* Нехай рівняння (2.48) є рівнянням в повних диференціалах. Тоді на підставі леми 2.1 існує функція $F \in C^1(D)$ така, що

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x), \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \qquad (t,x) \in D. \tag{2.53}$$

Згідно з нашою умовою рівності (2.53) можна диференціювати: першу — за змінною x, а другу — за змінною t. У результаті отримаємо рівності

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}, \qquad (t,x) \in D. \tag{2.54}$$

Оскільки праві частини рівностей (2.54) є неперервними на D, то і ліві частини — неперервні на D, а звідси в силу відповідних результатів з математичного аналізу отримаємо, що

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x}$$

(мішана похідна не змінюється при зміні порядку диференціювання). Це разом із (2.54) дає нам (2.52).

Тепер встановимо *достатність*. В загальному випадку, тобто коли D — довільна однозв'язна область, відповідне твердження випливає з відомих результатів математичного аналізу. Якщо ж $D = (a,b) \times (c,d)$ – прямокутник, то доведення досить спрощується і ми його наведемо тут.

Нехай $(t_0, x_0) \in D$ — довільна фіксована точка. Згідно з лемою нам треба довести існування функції $F \in C^1(D)$, що є розв'язком системи рівнянь (2.51). Це зробимо таким чином. Припустивши, що дана система рівнянь має розв'язок, знаходимо його зображення і переконуємося, що отримана функція є розв'язком.

Отож, припустимо, що існує розв'язок системи (2.51), тобто, існує функція $F \in C^1(D)$ така, що

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x), \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \qquad (t,x) \in D. \tag{2.55}$$

Інтегруючи першу з рівностей (2.55) за змінною t від t_0 до $t \in (a,b)$, отримаємо

$$F(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} M(s,x)\, ds + F(t_0, x). \tag{2.56}$$

Підставимо вираз (2.56) у другу з рівностей (2.55)

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(s,x)}{\partial x}\, ds + \frac{\partial F(t_0,x)}{\partial x} = N(t,x), \qquad (t,x) \in D. \tag{2.57}$$

Використовуючи тотожність (2.52), з (2.57) отримаємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial N(s,x)}{\partial s}\, ds + \frac{\partial F(t_0,x)}{\partial x} = N(t,x),$$

звідки

$$\frac{\partial F(t_0,x)}{\partial x} = N(t_0,x), \qquad (t,x) \in D.$$

Інтегруючи цю рівність за x (від x_0 до $x \in (c,d)$), здобудемо

$$F(t_0,x) = \int\limits_{x_0}^{x} N(t_0,z)\, dz + F(t_0,x_0).$$

Звідси та з (2.56) маємо

$$F(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} M(s,x)\, ds + \int\limits_{x_0}^{x} N(t_0,z)\, dz + C_0, \tag{2.58}$$

де $C_0 = F(t_0,x_0)$. Оскільки розв'язок системи (2.51) знаходиться з точністю до адитивної сталої, то значення C_0 в (2.58) може бути будь-яким.

Тепер перевіримо, що функція, яка задається формулою (2.58), є розв'язком системи (2.51). Справді, маємо

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x),$$
$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(s,x)}{\partial x}\, ds + N(t_0,x) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial N(s,x)}{\partial s}\, ds + N(t_0,x) = N(t,x), \quad (t,x) \in D.$$

Тут ми використали тотожність (2.52). □

Теорема 2.5. *Нехай рівняння* (2.48) *можна записати у вигляді*

$$dF(t,x) = 0\,,$$

де $F \in C^1(D)$ (тобто воно є рівнянням в повних диференціалах).

Тоді повний загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$F(t,x) = C, \tag{2.59}$$

$(t,x) \in D, \quad C \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай

$$t = \varphi(p), \qquad x = \psi(p), \qquad p \in I,$$

— розв'язок рівняння (2.48) (I — інтервал числової осі). Тоді виконується тотожність

$$M(\varphi(p),\psi(p))\, d\varphi(p) + N(\varphi(p),\psi(p))\, d\psi(p) = 0, \qquad p \in I,$$

тобто

$$\frac{\partial F(\varphi(p),\psi(p))}{\partial t}\, d\varphi(p) + \frac{\partial F(\varphi(p),\psi(p))}{\partial x}\, d\psi(p) = 0, \qquad p \in I.$$

Звідси та формули диференціювання композиції функцій багатьох змінних, отримаємо

$$dF(\varphi(p), \psi(p)) = 0, \quad p \in I.$$

Отже, виконується тотожність

$$F(\varphi(p), \psi(p)) = C_0, \quad p \in I,$$

де C_0 — стала. Це означає, що даний розв'язок (неявно) задається рівнянням (2.59) при $C = C_0$.

Нехай тепер гладка функція

$$t = \widetilde{\varphi}(p), \qquad x = \widetilde{\psi}(p), \qquad p \in \widetilde{I},$$

задається рівнянням (2.59) при деякому значенні C_1, тобто,

$$F(\widetilde{\varphi}(p), \widetilde{\psi}(p)) = C_1, \qquad p \in \widetilde{I}. \tag{2.60}$$

Знайдемо диференціали від обох частин даної тотожності. У результаті отримаємо

$$dF(\widetilde{\varphi}(p), \widetilde{\psi}(p)) = 0, \qquad p \in \widetilde{I}, \quad \Leftrightarrow$$

$$M(\widetilde{\varphi}(p), \widetilde{\psi}(p))\, d\widetilde{\varphi}(p) + N(\widetilde{\varphi}(p), \widetilde{\psi}(p))\, d\widetilde{\psi}(p) = 0, \qquad p \in \widetilde{I}.$$

Це означає, що дана функція є розв'язком рівняння (2.48). □

Рівняння, які зводяться до рівнянь в повних диференціалах, — це такі, які не є рівняннями в повних диференціалах, але можуть бути зведеними до них за допомогою множення на певний вираз зі змінними t і x. Такий вираз називається *інтегрувальним множником.*

Нехай функції $\partial M/\partial x, \partial N/\partial t$ є неперервними на D. З леми 2.2 випливає, що коли $\mu(t,x)$, $(t,x) \in D$, — інтегрувальний множник рівняння (2.48), то виконується рівність

$$\frac{\partial\big(\mu(t,x)M(t,x)\big)}{\partial x} = \frac{\partial\big(\mu(t,x)N(t,x)\big)}{\partial t}, \qquad (t,x) \in D, \tag{2.61}$$

і, навпаки, якщо для деякої функції $\mu \in C^1(D)$ виконується рівність (2.61), то $\mu(t,x)$, $(t,x) \in D$, — інтегрувальний множник рівняння (2.48).

Отож, при наших припущеннях можна сказати, що, коли існує розв'язок $\mu \in C^1(D)$ рівняння

$$\frac{\partial M}{\partial x}\mu + M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}\mu + N\frac{\partial \mu}{\partial t}, \qquad (t,x) \in D, \tag{2.62}$$

то рівняння (2.48) є звідним до рівняння в повних диференціалах.

Рівняння (2.62) є диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку. Знаходження його розв'язку не є простішим, а навіть й складнішим завданням, ніж безпосереднє розв'язування рівняння (2.48). Але існують випадки, коли рівняння (2.62) має настільки простий вигляд, що його можна легко розв'язати. Розглянемо деякі з них.

1) *Вираз*

$$\frac{\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}}{N(t,x)} \tag{2.63}$$

явно від x не залежить. Тоді μ шукаємо, як функцію, залежну тільки від t, тобто $\mu = \mu(t)$. Оскільки $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, то рівняння (2.62) набуває вигляду

$$\frac{\partial M}{\partial x}\mu = \frac{\partial N}{\partial t}\mu + N\frac{\partial \mu}{\partial t},$$

звідки, перегрупувавши члени і поділивши рівняння на μ, отримаємо

$$\frac{\partial \ln(|\mu|)}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}}{N(t,x)} \equiv \varkappa(t). \tag{2.64}$$

З цього рівняння знаходимо

$$\mu(t) = C_* e^{\widetilde{\varkappa}(t)},$$

де $\widetilde{\varkappa}$ — яка-небудь первісна функції $\varkappa$, C_* — довільна стала (можна взяти $C_* = 1$).

2) *Вираз*

$$\frac{\dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x}}{M(t,x)} \tag{2.65}$$

явно від t не залежить. Тоді розв'язок рівняння (2.62) шукаємо у вигляді функції $\mu = \mu(x)$ лише від змінної x. Рівняння (2.62) набуде вигляду

$$\frac{\partial M}{\partial x}\mu + M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}\mu,$$

звідки

$$\frac{\partial \ln(|\mu|)}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial x}}{M} \equiv s(x). \tag{2.66}$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$\mu(x) = C_* e^{\widetilde{s}(x)},$$

де $\widetilde{s}$ — яка-небудь первісна функції s, C_* — будб-яка стала.

3) *Вираз*

$$\frac{\dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x}}{tM(t,x) - xN(t,x)} \tag{2.67}$$

залежить тільки від добутку tx. Тоді шукаємо розв'язок рівняння (2.62) у вигляді функції $\mu = \mu(tx)$ $\big(\equiv \mu(z)|_{z=tx}\big)$. Враховуючи, що

$$\frac{\partial \mu(tx)}{\partial t} = \mu'(tx)x, \qquad \frac{\partial \mu(tx)}{\partial x} = \mu'(tx)t,$$

з (2.62) здобуваємо

$$\frac{\partial M}{\partial x}\mu + M\mu' t = \frac{\partial N}{\partial t} + N\mu' x,$$

звідки

$$\left.\frac{\partial \ln(|\mu|)}{\partial z}\right|_{z=tx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{Mt - Nx} \equiv R(z)|_{z=tx}. \tag{2.68}$$

Отже, в цьому випадку інтегрувальний множник рівняння (2.48) можна взяти у вигляді

$$\mu(tx) = e^{\widetilde{R}(tx)},$$

де $\widetilde{R}$ — первісна функції R.

Зауваження 2.7. На практиці не варто зразу обчислювати вирази (2.63), (2.65), (2.67) (які розглядаються у випадках 1)–3)) для того, щоби знати, у якому вигляді шукати інтегрувальний множник. Краще пробувати шукати інтегрувальний множник як розв'язок рівняння (2.62), що залежить тільки або від t, або від x, або від tx; в результаті отримаємо простіше рівняння, з вигляду якого зрозуміємо, чи правильно вибрано вираз інтегрувального множника. Справді, записавши рівняння (2.62) у вигляді або (2.64), або (2.66), або (2.68) (в залежності від того, у якому вигляді шукається інтегрувальний множник), за правою частиною відповідного рівняння можна однозначно сказати, чи наш вибір вдалий.

2.5. Інтегрування нерозв'язних стосовно похідної рівнянь. Рівняння Лагранжа та Клеро.

Нагадаємо, що рівняння
$$F(t,x,x')=0 \tag{2.69}$$
називають *нерозв'язним стосовно похідної,* якщо його *не можна* записати у вигляді
$$x'=f(t,x).$$

Наприклад, рівняння

1)
$$(x')^2-(2+t)x'+2t=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{aligned}&x'-2=0,\\&x'-x=0,\end{aligned}\right.$$

2)
$$x'-e^{tx'}+\ln(2t-x')=0$$

є рівняннями, нерозв'язними стосовно похідної.

Виділимо дві групи інтегровних нерозв'язних стосовно похідної рівнянь в залежності від методу інтегрування.

I група: *Рівняння, що можна подати у вигляді сукупності* $m>1$ *рівнянь*
$$\left[\begin{aligned}&x'=f_1(t,x),\\&\dots\dots\dots\dots\\&x'=f_m(t,x),\end{aligned}\right. \tag{2.70}$$
кожне з яких належить до раніше вивчених класів.

Нехай для кожного $k\in\{1,\dots,m\}$ повний загальний інтеграл k-го рівняння сукупності (2.70) має вигляд
$$\Phi_k(t,x,C)=0.$$
Тоді повний загальний інтеграл рівняння (2.69) має вигляд
$$\Phi_1(t,x,C)\times\ \dots\ \times\Phi_m(t,x,C)=0,$$
що є рівносильно сукупності
$$\left[\begin{aligned}&\Phi_1(t,x,C)=0\\&\dots\dots\dots\dots\dots\\&\Phi_m(t,x,C)=0.\end{aligned}\right.$$

Приклад 2.17 Розв'язати рівняння
$$tx'^2+(2t^2-x)x'-2tx=0.$$

Розв'язування. Спочатку подивимося на це рівняння, як на квадратне стосовно змінної x' з параметрами t,x. Маємо
$$D=(2t^2-x)^2+8t^2x=4t^4-4t^2x+x^2+8t^2x=4t^4+4t^2x+x^2=(2t^2+x)^2.$$
Отже, задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь
$$\left[\begin{aligned}&x'=\frac{-(2t^2-x)-(2t^2+x)}{2t},\\[2ex]&x'=\frac{-(2t^2-x)+(2t^2+x)}{2t},\end{aligned}\right.$$

тобто
$$x' = -2t \quad \text{або} \quad x' = \frac{x}{t}.$$

Повний загальний розв'язок першого рівняння має вигляд
$$x = -t^2 + C,$$
а другого —
$$x = Ct.$$
Отож, повний загальний розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді
$$\left[\begin{array}{l} x = -t^2 + C, \\ x = Ct, \qquad\quad t \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

II група. *Рівняння, які можна записати у вигляді*
$$x = h(t, x') \tag{2.71}$$
або у вигляді
$$t = q(x, x'), \tag{2.72}$$
де h, q *— неперервно диференційовні функції, що задовольняють певну додаткову умову (ця умова буде вказана пізніше).*

Рівняння (2.71) та (2.72) розв'язують *методом введення параметра.* Суть цього методу проілюструємо на рівнянні (2.71).

Дивлячись спочатку на рівняння (2.71) як на рівняння, що зв'язує три незалежні змінні t, x, x', запишемо його в параметричній формі
$$\begin{cases} x' = p \\ t = \tau \\ x = h(\tau, p), \end{cases} \tag{2.73}$$
де τ *і* p — параметри. А тепер згадаємо, що x' — похідна функції $x = x(t)$, тобто
$$dx = x'\,dt\ . \tag{2.74}$$
Система співвідношень (2.73) та (2.74) є *диференціальним рівнянням в параметричній формі.* Це рівняння позначимо через $\{(2.73), (2.74)\}$. Його розв'язуємо таким чином. Підставимо вирази t, x, x' через параметри τ *і* p з (2.73) у співвідношення (2.74). У результаті отримаємо
$$dh(\tau, p) = p\,d\tau \Longleftrightarrow \Big(\frac{\partial h(\tau, p)}{\partial \tau} - p\Big)\,d\tau + \frac{\partial h(\tau, p)}{\partial p}\,dp = 0 \tag{2.75}$$
— диференціальне рівняння, що зв'язує параметри τ *і* p. Припустимо, що можна знайти загальний інтеграл рівняння (2.75)
$$\Phi(\tau, p, C) = 0 \tag{2.76}$$
(це є та додаткова умова на h, про яку говорилося вище).
Тоді повний загальний інтеграл рівняння (2.71) задається в параметричній формі (з двома параметрами) так
$$\begin{cases} t = \tau, \\ x = h(\tau, p), \\ \Phi(\tau, p, C) = 0, \end{cases}$$

звідки, виключаючи параметр τ, отримаємо

$$\begin{cases} x = h(t,p), \\ \Phi(t,p,C) = 0 \end{cases} \tag{2.77}$$

– повний загальний інтеграл рівняння (2.71) у параметричній формі (з одним параметром).

Якщо вдасться виключити із системи (2.77) параметр p, то матимемо повний загальний інтеграл

$$G(t,x,C) = 0 \tag{2.78}$$

в традиційній формі. Але досить часто звести (2.77) до (2.78) не вдається. Тим не менше співвідношення (2.77) можна спростити, якщо маємо один з випадків

$$a) \qquad (2.76) \Longleftrightarrow p = \phi(\tau, C)$$

або

$$b) \qquad (2.76) \Longleftrightarrow \tau = \psi(p, C).$$

У випадку $a)$ маємо

$$(2.77) \Longleftrightarrow x = h(t, \phi(t,C)) \quad \text{— повний загальний розв'язок рівняння (2.71),}$$

а у випадку $b)$ —

$$(2.77) \Longleftrightarrow \begin{cases} t = \psi(p,C), \\ x = h(\psi(p,C),p) \end{cases}$$

— повний загальний розв'язок рівняння (2.71) в параметричній формі.

Зауваження 2.8. На практиці в рівнянні $\{(2.73),(2.74)\}$ замість символа "τ", яким позначають один з параметрів, вживають для зручності записів символ "t", тобто той же, що і для позначення незалежної змінної. Отож, рівняння $\{(2.73),(2.74)\}$ записується у вигляді

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = h(t,p) \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases}$$

Приклад 2.18 Розв'язати рівняння

$$x = {x'}^2 - tx' + \frac{t^2}{2}.$$

Розв'язування. Використовуємо метод введення параметра. Параметризуємо задане рівняння

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = p^2 - tp + \frac{t^2}{2} \end{cases} \\ dx = x'dt. \end{cases}$$

Звідси

$$d\Big(p^2 - tp + \frac{t^2}{2}\Big) = p\,dt \;\Leftrightarrow\; 2p\,dp - t\,dp - p\,dt + t\,dt = p\,dt \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2p-t)\,dp + (t-2p)\,dt = 0 \;\Leftrightarrow\; (2p-t)(dp-dt) = 0.$$

Здобуте рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$2p - t = 0 \quad \text{або} \quad dp - dt = 0,$$

звідки

$$p = \frac{t}{2} \qquad \text{або} \qquad p = t + C.$$

Отже, підставляючи ці вирази у третє із співвідношень, що задають параметризацію даного рівняння, отримаємо

$$x = \frac{t^2}{4} \quad \text{та} \quad x = (t+C)^2 - t(t+C) + \frac{t^2}{2} \iff x = 2tC + C^2 - Ct + \frac{t^2}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{t^2}{4}$ або $x = tC + C^2 + \frac{t^2}{2}$.

Приклад 2.19. Розв'язати рівняння

$$x = \ln x' + x'^2.$$

Розв'язування. Використовуємо метод введення параметра. Параметризуємо рівняння

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = \ln p + p^2 \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases}$$

Отож, маємо зв'язок між параметрами у вигляді диференціального рівняння

$$d(\ln p + p^2) = p\,dt \quad \iff \quad (\frac{1}{p} + 2p)\,dp = p\,dt.$$

Отже, $t = -\frac{1}{p} + 2p + C$ $(p \neq 0)$, і загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{p} + 2p + C \\ x = \ln p + p^2 \end{cases}, \quad p > 0,\; C \in \mathbb{R}.$$

Тепер зауважимо, що коли маємо рівняння (2.72), то метод розв'язування той же, але дещо змінюється параметризація. Коротко опишемо це. Рівняння (2.72) записується в такій параметричній формі

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ x = z \\ t = q(z,p) \end{cases} \\ dx = x'\,dt, \end{cases} \tag{2.79}$$

де p і z — параметри. Підставляючи вирази x', x, t через p і z з (2.79) у співвідношення $dx = x'\,dt$, отримаємо

$$dz = p\,dq(z,p) \Leftrightarrow dz = p\Big(\frac{\partial q(z,p)}{\partial z}\,dz + \frac{\partial q(z,p)}{\partial p}\,dp\Big),$$

тобто

$$\Big(p\frac{\partial q(z,p)}{\partial z} - 1\Big)\,dz + p\frac{\partial q(z,p)}{\partial p}\,dp = 0. \tag{2.80}$$

Припустимо, що існує повний загальний інтеграл

$$Q(z,p,C) = 0$$

рівняння (2.80). Це та додаткова умова на q, про яку йшла мова раніше.

Отже, повний загальний інтеграл заданого рівняння на підставі (2.79) та (2.80) записується в параметричній формі

$$\begin{cases} t = q(z,p) \\ x = z \\ Q(z,p,C) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = q(x,p) \\ Q(x,p,C) = 0. \end{cases}$$

Як і випадку рівняння (2.71), в залежності від конкретного вигляду $Q(y,p,C)$ можна спростити вираз повний загального інтегралу. Зауважимо також, що при параметризації рівняння (2.72) на практиці зручно використовувати символ "x" замість "z" для позначення відповідного параметра.

Приклад 2.20. Розв'язати рівняння

$$t = \frac{x}{x'}\ln x + \frac{x'^2}{x^2}.$$

Розв'язування. Параметризуємо задане рівняння

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ x = x \\ t = \frac{x}{p}\ln x + \frac{p^2}{x^2} \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases}$$

і знаходимо зв'язок між параметрами p і x, підставляючи вирази t, x, x' через параметри x, p у співвідношення $dx = x'dt$.

$$dx = p\,d\Big(\frac{x}{p}\ln x + \frac{p^2}{x^2}\Big) \iff dx = p\Big[\Big(\frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{p} - \frac{2p^2}{x^3}\Big)\,dx + \Big(-\frac{x\ln x}{p^2} + \frac{2p}{x^2}\Big)\,dp\Big] \iff$$

$$\iff \Big(\ln x - \frac{2p^3}{x^3}\Big)\,dx + \Big(\frac{2p^2}{x^2} - \frac{x\ln x}{p}\Big)\,dp = 0,$$

звідки, поділивши рівняння на $xp \neq 0$, матимемо

$$\Big(\frac{\ln x}{p} - \frac{2p^2}{x^3}\Big)\Big(\frac{dx}{x} - \frac{dp}{p}\Big) = 0.$$

Звідси одержуємо

$$p = x\sqrt[3]{\frac{\ln x}{2}} \quad \text{або} \quad p = Cx, \ \ C \text{ — довільна стала.}$$

Отже, розв'язки заданого рівняння неявно задаються співвідношеннями

$$t = \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\sqrt[3]{\ln^2 x}; \quad t = \frac{x}{C}\ln x + C^2.$$

В класі рівнянь, які можна подати у вигляді (2.71) і розв'язати методом введення параметра, виділяють два підкласи: *рівняння Лагранжа та Клеро.*

Рівнянням Лагранжа називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$x = t\varphi(x') + \psi(x'), \tag{2.81}$$

де $\varphi(p) - p \not\equiv 0$, *а рівнянням Клеро* — рівняння

$$x = tx' + \psi(x'). \tag{2.82}$$

Розглянемо рівняння Лагранжа (2.81). Параметризуємо його

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = t\varphi(p) + \psi(p) \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases} \tag{2.83}$$

Звідси

$$d(t\varphi(p) + \psi(p)) = p\,dt \Longleftrightarrow \varphi(p)\,dt + (t\varphi'(p) + \psi'(p))\,dp = p\,dt,$$

тобто

$$(\varphi(p) - p)\,dt + (t\varphi'(p) + \psi'(p))\,dp = 0.$$

Нехай $\varphi(p) - p \neq 0$ для кожного допустимого значення p. Тоді задане рівняння можна записати у вигляді

$$t' + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}t = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p},$$

тобто воно є лінійним відносно t. Нехай

$$t = f(p, C), \quad C \text{ — довільна стала} \tag{2.84}$$

його повний загальний розв'язок.

Тоді загальний розв'язок рівняння (2.81), на підставі (2.83) та (2.84), матиме вигляд

$$\begin{cases} t = f(p, C), \\ x = f(p, C) \cdot \varphi(p) + \psi(p), \end{cases} \tag{2.85}$$

де C — довільна стала.

Увага! Якщо

$$\varphi(p) - p = 0 \Longleftrightarrow p = p_i, \ i \in M \subset \mathbb{N} \ (M \neq \varnothing),$$

то сім'ю розв'язків (2.85) треба доповнити частковими розв'язками вигляду

$$x = t\varphi(p_i) + \psi(p_i), \quad i \in I.$$

Приклад 2.21. Розв'язати рівняння Лагранжа

$$x + tx' - {x'}^3 = 0.$$

Розв'язування. Запишемо це рівняння у вигляді

$$x = -tx' + {x'}^3. \tag{2.86}$$

Параметризуємо рівняння (2.86)

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = -tp + p^3 \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases}$$

Звідси

$$d(-tp + p^3) = p\,dt \Longleftrightarrow -t\,dp - p\,dt + 3p^2\,dp = p\,dt \Longleftrightarrow 2p\,dt + (t - 3p^2)\,dp = 0.$$

Якщо $p = 0$, то отримаємо розв'язок: $x = 0$.

Розглянемо випадок $p \neq 0$. Тоді отримаємо лінійне рівняння

$$t' + \frac{t}{2p} = \frac{3p}{2}. \tag{2.87}$$

Розв'яжемо його.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$t' + \frac{t}{2p} = 0.$$

Маємо

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{t}{2p} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dt}{t} = -\frac{dp}{2p} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|t| = -\frac{1}{2}\ln|p| + \ln|C| \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{C}{\sqrt{|p|}}.$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок рівняння (2.87) методом варіації сталої, тобто у вигляді

$$t = \frac{\varphi(p)}{\sqrt{|p|}},$$

де $\varphi(p)$ — функція, яку треба визначити.

Підставляючи вираз часткового розв'язку у (2.87), отримаємо

$$\varphi'(p)\sqrt{|p|} - \frac{\varphi(p)\,\mathrm{sign}\,p}{2\sqrt{|p|^3}} + \frac{\varphi(p)}{2p\sqrt{|p|}} = \frac{3p}{2},$$

де

$$\mathrm{sign}\,p = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad p > 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad p = 0 \\ -1, & \text{якщо} \quad p < 0, \end{cases} \qquad (|p| = p\ \,\mathrm{sign}\,p).$$

Звідси
$$\varphi'(p) = \frac{3p}{2\sqrt{|p|}}.$$
Оскільки $p = |p| \operatorname{sign} p$, то
$$\varphi'(p) = \frac{3}{2}\sqrt{|p|} \operatorname{sign} p,$$
звідси, $\varphi(p) = \sqrt{|p|^3}$.

Отже,
$$t = |p|, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
— частковий розв'язок рівняння (2.87), а
$$t = \frac{C}{\sqrt{|p|}} + |p|$$
— загальний розв'язок рівняння (2.87).

У результаті отримаємо, що сім'я всіх розв'язків заданого рівняння може бути записаною у вигляді
$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} t = \frac{C}{\sqrt{|p|}} + |p| \\ x = -tp + p^3. \end{cases} \end{array}\right. .$$

Тепер розглянемо *рівняння Клеро* (2.82). Параметризуємо його
$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p \\ t = t \\ x = tp + \psi(p) \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases}$$

Звідси
$$d(tp + \psi(p)) = p\,dt \quad \Leftrightarrow \quad t\,dp + p\,dt + \psi'(p)\,dp = p\,dt \quad \Leftrightarrow \quad (t + \psi'(p))\,dp = 0.$$
Отримане рівняння рівносильне сукупності рівнянь
$$dp = 0 \quad \text{або} \quad t + \psi'(p) = 0.$$
З першого рівняння маємо: $p = C$, а з другого: $t = -\psi'(p)$. Отже, повна сім'я розв'язків даного рівняння має вигляд
$$\begin{cases} t = -\psi'(p), \\ x = -\psi'(p)p + \psi(p), \end{cases} \qquad x = Ct + \psi(C).$$

Приклад 2.22. Розв'язати рівняння
$$x'^3 = 3(tx' - x).$$

Розв'язування. Виразимо з цього рівняння x
$$x = tx' - \frac{1}{3}x'^3. \tag{2.88}$$

Це є рівняння Клеро. Параметризуємо його

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = p, \\ t = t, \\ x = tp - \frac{1}{3}p^3, \end{cases} \\ dx = x'\,dt. \end{cases} \tag{2.89}$$

Звідси

$$d(tp - \frac{1}{3}p^3) = p\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad t\,dp + p\,dt - p^2\,dp = p\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad (t - p^2)\,dp = 0. \tag{2.90}$$

Рівняння (2.90) рівносильне такій сукупності рівнянь

$$dp = 0 \qquad \text{або} \qquad t = p^2. \tag{2.91}$$

З першого рівняння маємо

$$p = C. \tag{2.92}$$

Отож, рівняння (2.88), на підставі (2.89),(2.91),(2.92), має розв'язки, задані співвідношеннями

$$x = Ct - \frac{1}{3}C^3 \quad \text{і} \quad \begin{cases} t = p^2, \\ x = \frac{2}{3}p^3 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{t^3},$$

де C — довільна стала.

§3. Задача Коші для розв'язаних стосовно похідної рівнянь

3.1. Формулювання задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної звичайного диференціального рівняння. Інтегральне рівняння, яке еквівалентне задачі Коші для ЗДР

3.1.1. Формулювання задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної звичайного диференціального рівняння

Розглянемо розв'язане стосовно похідної звичайне диференціальне рівняння першого порядку:

$$x' = f(t, x), \tag{3.1}$$

де t – незалежна змінна, x – функція від t, x' – похідна x, $f : D \to \mathbb{R}$ – задана неперервна функція, D – область в $\mathbb{R}^2$.

Нагадаємо, що *розв'язком* рівняння (3.1) називають функцію $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1(\langle a, b\rangle)$ (тобто φ є неперервно-диференційовною функцією) ;

2) $(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$ (тобто графік φ лежить в області визначення f) ;

3) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$ (тобто φ задовольняє рівняння (3.1)).

Задача Коші для рівняння (3.1) полягає у знаходженні розв'язку рівняння (3.1), який задовольняє умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.2}$$

де (t_0, x_0) — задана точка області D.

Умова (3.2) називається *початковою умовою*, а точка (t_0, x_0) — *початковими даними*. Під *вхідними даними* задачі Коші для рівняння (3.1) розуміємо функцію f та початкові дані (t_0, x_0).

З геометричної точки зору задача Коші для рівняння (3.1) полягає у знаходженні інтегральної лінії цього рівняння, яка проходить через задану точку (t_0, x_0).

Далі сформульовану задачу будемо коротко називати задачею (3.1), (3.2).

При формулюванні будь-якої задачі виникає питання про її *коректність*. Стосовно задачі (3.1), (3.2) це означає виконання таких трьох умов:
1) *існування її розв'язку,*
2) *його єдиність,*
3) *неперервну залежність розв'язку від вхідних даних.*

Принагідно зауважимо таке. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, – розв'язок задачі (3.1),(3.2), а $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ – який-небудь проміжок такий, що $t_0 \in \langle c, d\rangle$ і $\langle c, d\rangle \neq \langle a, b\rangle$. Тоді функція $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, де $\psi(t) = \varphi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, теж є розв'язком задачі (3.1),(3.2) і він відрізняється від попереднього областю визначення. Відмітимо, що функцію ψ називають *звуженням* функції φ на проміжок $\langle c, d\rangle$, а функцію φ *продовженням* функції ψ на проміжок $\langle a, b\rangle$. Отож, якщо задача Коші для ЗДР має хоча б один розв'язок, то вона має безліч розв'язків і в цьому випадку будемо казати, що задача має розв'язки. Але при наявності у цієї задачі безлічі розв'язків можлива одна із двох ситуацій: 1) будь-які два розв'язки даної задачі співпадають на спільній частині їх областей визначення; 2) існує хоча б два розв'язки даної задачі, які в деяких точках спільної частини їх областей визначення мають різні значення. В першій ситуації кажуть, що розв'язок задачі *єдиний*, а в другій – нема єдиності розв'язку задачі. Далі ми покажемо, що в першій ситуації (а для її наявності потрібні певні умови на f) існує і тільки одна функція, причому визначена на інтервалі числової осі, яка є розв'язком задачі (3.1),(3.2) та є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі. Такий розв'язок називають непродовжуваним. Суть слів "розв'язок неперервно залежить від вхідних даних " буде уточнено пізніше.

3.1.2. Інтегральне рівняння, яке еквівалентне задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

Далі ми будемо досліджувати питання про коректність задачі (3.1), (3.2). При цьому дуже важливу роль відіграватиме інтегральне рівняння

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x)\, ds. \tag{3.3}$$

Розв'язком рівняння (3.3) називають функцію $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$ $(t_0 \in \langle c, d\rangle)$, яка задовольняє умови:

1) $\psi \in C\big(\langle c, d\rangle\big)$;

2) $(t, \psi(t)) \in D \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$;

3) $\psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\, \psi(s))\, ds \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$.

Теорема 3.1. *Будь-який розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *є розв'язком рівняння* (3.3) *і, навпаки, довільний розв'язок рівняння* (3.3) *є розв'язком задачі* (3.1), (3.2).

Доведення. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — розв'язок задачі (3.1),(3.2), тобто

$$\varphi'(s) = f(s, \varphi(s)), \qquad s \in \langle a, b\rangle, \tag{3.4}$$

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{3.5}$$

(тут ми змінили позначення незалежної змінної з t на s).

Умови 1) і 2) означення розв'язку рівняння (3.3) для функції φ виконані. Крім цього, права і ліва частини рівності (3.4) є неперервними. Проінтегруємо рівність (3.4) по s від t_0 до $t \in \langle a, b\rangle$, врахувавши (3.5). У результаті отримаємо тотожність

$$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds\,, \qquad t \in \langle a, b\rangle.$$

Це означає, що виконується умова 3) означення розв'язку рівняння (3.3), а отже, функція $x = \varphi(t),\ t \in \langle a, b\rangle$, є розв'язком цього рівняння.

Тепер нехай $x = \psi(t),\ t \in \langle c, d\rangle$, — розв'язок рівняння (3.3). Тоді маємо тотожність

$$\psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds, \qquad t \in \langle c, d\rangle. \tag{3.6}$$

Оскільки права частина тотожності (3.6) є неперервно диференційовною функцією, то і ліва частина — теж. Продиференціюємо тотожність (3.6). У результаті отримаємо тотожність

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \qquad t \in \langle c, d \rangle.$$

Звідси випливає, що функція ψ є розв'язком рівняння (3.1). Крім цього, на підставі (3.6) маємо умову $\psi(t_0) = x_0$. Отож, функція $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d \rangle$, є розв'язком задачі (3.1),(3.2). □

Зауважимо, що умова неперервності функції f є природною при дослідженні рівняння (3.1), оскільки його розв'язками ми називаємо неперервно диференційовні функції, що задовольняють рівняння. Далі всюди в цьому параграфі будемо вважати, що f є неперервною. Тому, як випливає з теореми 3.1, для встановлення умов коректності задачі (3.1),(3.2) нам досить знайти умови на f, при яких рівняння (3.3) має розв'язок, він єдиний і неперервно залежить від f та (t_0, x_0) (зміст слів "неперервно залежить" буде уточнено далі).

3.2. Теорема Пеано про існування розв'язку задачі Коші для ЗДР

Дослідимо питання існування розв'язку задачі Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою (3.2).

Теорема 3.2 (Пеано)**.** *Нехай функція f є неперервною. Тоді задача* (3.1), (3.2) *має розв'язки.*

Доведення. Розглянемо випадок $n = 1$. Нехай числа $r > 0$ і $q > 0$ такі, що прямокутник

$$P^{r,q}_{t_0,x_0} = \{(t, x) \ : \ t_0 - r \le t \le t_0 + r, \ \ x_0 - q \le x \le x_0 + q\}$$

лежить в області D. Покладемо

$$m := \max_{(t,x)\in P^{r,q}_{t_0,x_0}} |f(t, x)|, \quad h := \min\Big\{r, \frac{q}{m}\Big\}.$$

Покажемо, що задача (3.1),(3.2) має розв'язок, визначений на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h]$ (цей відрізок називається *відрізком Пеано* для задачі (3.1),(3.2). Цей розв'язок отримаємо як границю рівномірно збіжної послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ функцій з простору $C([t_0 - h, t_0 + h])$, графіки яких є так званими *ламаними Ейлера.*

Для довільного $k \in \mathbb{N}$ функцію $\overset{k}{x}$ будуємо таким чином. Нехай

$$\sigma_k = \{\overset{k}{t}_{-k}, \overset{k}{t}_{-k+1}, \ldots, \overset{k}{t}_{-1}, t_0, \overset{k}{t}_1, \ldots, \overset{k}{t}_{k-1}, \overset{k}{t}_k\}$$

– яке-небудь розбиття відрізка $[t_0 - h, t_0 + h]$, тобто впорядкована множина чисел

$$\overset{k}{t}_{-k}, \overset{k}{t}_{-k+1}, \ldots, \overset{k}{t}_{-1}, t_0, \overset{k}{t}_1, \ldots, \overset{k}{t}_{k-1}, \overset{k}{t}_k,$$

що задовольняють таку умову

$$t_0 - h = \overset{k}{t}_{-k} < \overset{k}{t}_{-k+1} < \ldots < \overset{k}{t}_{-1} < t_0 < \overset{k}{t}_1 < \ldots < \overset{k}{t}_{k-1} < \overset{k}{t}_k = t_0 + h.$$

Далі проведемо через точку (t_0, x_0) пряму з кутовим коефіцієнтом $f(t_0, x_0)$ і знайдемо точки перетину цієї прямої відповідно з прямими $t = \overset{k}{t}_{-1}$ і $t = \overset{k}{t}_1$. Позначимо ординати цих точок відповідно через $\overset{k}{x}_{-1}$ і $\overset{k}{x}_1$. Оскільки $-m \le f(t_0, x_0) \le m$, то відрізки з кінцями в точках $(\overset{k}{t}_{-1}, \overset{k}{x}_{-1})$ і (t_0, x_0) та (t_0, x_0) і $(\overset{k}{t}_1, \overset{k}{x}_1)$ лежать відповідно у трикутниках $\overset{-}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$ та $\overset{+}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$, де

$$\overset{-}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0} = \{(t,x) :\ t_0 - h \le t \le t_0,\ x_0 + m(t - t_0) \le x \le x_0 - m(t - t_0)\},$$

$$\overset{+}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0} = \{(t,x) :\ t_0 \le t \le t_0 + h,\ x_0 - m(t - t_0) \le x \le x_0 + m(t - t_0)\}.$$

Далі проводимо ще дві прямі: одну – через точку $(\overset{k}{t}_{-1}, \overset{k}{x}_{-1})$ з кутовим коефіцієнтом $f(\overset{k}{t}_{-1}, \overset{k}{x}_{-1})$, а другу – через точку $(\overset{k}{t}_1, \overset{k}{x}_1)$ з кутовим коефіцієнтом $f(\overset{k}{t}_1, \overset{k}{x}_1)$. Знайдемо точки перетину першої прямої з прямою $t = \overset{k}{t}_{-2}$, а другої – з прямою $t = \overset{k}{t}_2$. Нехай $\overset{k}{x}_{-2}$ і $\overset{k}{x}_2$ – ординати відповідних точок. Оскільки

$$-m \le f(\overset{k}{t}_i, \overset{k}{x}_i) \le m, \quad i \in \{-1, 1\},$$

то відрізок з кінцями в точках $(\overset{k}{t}_{-2}, \overset{k}{x}_{-2})$ і $(\overset{k}{t}_{-1}, \overset{k}{x}_{-1})$ лежить в трикутнику $\overset{-}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$, а відрізок з кінцями в точках $(\overset{k}{t}_1, \overset{k}{x}_1)$ і $(\overset{k}{t}_2, \overset{k}{x}_2)$ – в трикутнику $\overset{+}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$. Тепер знову проводимо дві прямі через точки $(\overset{k}{t}_{-2}, \overset{k}{x}_{-2})$ і $(\overset{k}{t}_2, \overset{k}{x}_2)$ відповідно з кутовими коефіцієнтами $f(\overset{k}{t}_{-2}, \overset{k}{x}_{-2})$ і $f(\overset{k}{t}_2, \overset{k}{x}_2)$ та знаходимо точки перетину цих прямих відповідно з прямими $t = \overset{k}{t}_{-3}$ та $t = \overset{k}{t}_3$. Ординати цих точок позначаємо відповідно через $\overset{k}{x}_{-3}$ і $\overset{k}{x}_3$. І так продовжуємо робити далі, поки не знайдемо точки $(\overset{k}{t}_{-k}, \overset{k}{x}_{-k})$ та $(\overset{k}{t}_k, \overset{k}{x}_k)$. В результаті отримаємо впорядковану множину точок

$$(\overset{k}{t}_{-k}, \overset{k}{x}_{-k}), \quad \ldots, \quad (\overset{k}{t}_{-1}, \overset{k}{x}_{-1}), \quad (t_0, x_0), \quad (\overset{k}{t}_1, \overset{k}{x}_1), \quad \ldots, \quad (\overset{k}{t}_k, \overset{k}{x}_k).$$

Ламана, множина послідовних вершин якої збігається з цією множиною, називається *ламаною Ейлера*. Очевидно, що ламана Ейлера лежить в $\overset{-}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0} \cup \overset{+}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$. Вона є графіком функції $\overset{k}{x}$, яка аналітично задається таким чином: $\overset{k}{x}(t) = \overset{k}{x}_i + f(\overset{k}{t}_i, \overset{k}{x}_i)(t - \overset{k}{t}_i)$, якщо $t \in [\overset{k}{t}_i, \overset{k}{t}_{i+1}]$ для деякого $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, та $\overset{k}{x}(t) = \overset{k}{x}_{-j} + f(\overset{k}{t}_{-j}, \overset{k}{x}_{-j})(t - \overset{k}{t}_{-j})$, якщо $t \in [\overset{k}{t}_{-j-1}, \overset{k}{t}_{-j}]$ для деякого $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Виберемо тепер послідовність розбиттів $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, щоб $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, де $\lambda_k := \max\limits_{-k \le j < k} |\overset{k}{t}_{j+1} - \overset{k}{t}_j|$, $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи теорему Арцела-Асколі покажемо, що існують підпослідовность $\{\overset{k_j}{x}\}_{j=1}^{\infty}$ та функція $\varphi \in C([t_0 - h, t_0 + h])$ такі, що $\overset{k_j}{x} \rightrightarrows \varphi$ при $j \to +\infty$ на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Для цього маємо встановити рівномірну обмеженість та одностайну неперервність на $[t_0 - h, t_0 + h]$ членів послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$.

Послідовність $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ *рівномірно обмежена*, якщо існує стала $K \ge 0$ така, що

$$|\overset{k}{x}(t)| \le K \quad \text{для будь-яких} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{і} \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Оскільки графіки функцій $\overset{k}{x}$, $k \in \mathbb{N}$, лежать в множині $T^{h,q}_{t_0,x_0} = \overset{-}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0} \cup \overset{+}{T}{}^{h,q}_{t_0,x_0}$, то

$$|\overset{k}{x}(t) - x_0| \leqslant m|t - t_0| \leqslant mh \le q, \quad \text{коли} \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3.7}$$

Звідси випливає рівномірна обмеженість послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$.

Члени послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ будуть *одностайно неперервними*, якщо для довільного, як завгодно малого, значення $\varepsilon > 0$ існує значення $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якої пари чисел $\{t_1, t_2\}$ з відрізка $[t_0 - h, t_0 + h]$ такої, що $|t_1 - t_2| < \delta$, виконується нерівність

$$|\overset{k}{x}(t_1) - \overset{k}{x}(t_2)| < \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що члени послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ є одностайно неперервними. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\Delta_k(t) := (\overset{k}{x}(t))' - f(t, \overset{k}{x}(t)),$$

якщо $t \in [t_0 - h, t_0 + h] \setminus \sigma_k$, і $\Delta_k(t) = 0$, якщо $t \in \sigma_k$. Отже,

$$(\overset{k}{x}(t))' = f(t, \overset{k}{x}(t)) + \Delta_k(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]/\sigma_k,$$

звідки, враховуючи, що $\overset{k}{x} \in C([t_0 - h, t_0 + h])$, отримаємо

$$\overset{k}{x}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [f(s, \overset{k}{x}(s)) + \Delta_k(s)] ds, \tag{3.8}$$

$t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k \in \mathbb{N}$. З (3.8), врахувавши, що

$$|f(s, \overset{k}{x}(s)) + \Delta_k(s)| = |(\overset{k}{x}(t))'| \le m, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \setminus \sigma_k,$$

$\Delta_k(t) = 0$, $t \in \sigma_k$, випливає нерівність

$$|\overset{k}{x}(t_1) - \overset{k}{x}(t_2)| \le m|t_1 - t_2|$$

для будь-яких $\{t_1, t_2\} \subset [t_0 - h, t_0 + h]$ і кожного $k \in \mathbb{N}$. А це означає, що члени послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ є одностайно неперервними на $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Отже, для послідовності $\{\overset{k}{x}\}_{k=1}^{\infty}$ виконуються умови теореми Арцела-Асколі, з якої випливає існування підпослідовності
$\{\overset{k_j}{x}\}_{j=1}^{\infty}$ цієї послідовності та функція $\varphi \in C([t_0 - h, t_0 + h])$ такі, що $\overset{k_j}{x} \rightrightarrows \varphi$ на $[t_0 - h, t_0 + h]$ при $j \to +\infty$.

Покажемо, що функція φ є розв'язком задачі (3.1),(3.2). В силу рівномірної неперервності функції f на $P^{h,q}_{t_0,x_0}$ маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|f(t, x) - f(t, \widetilde{x})| < \varepsilon$$

як тільки $|x - x_0| \le q$, $|\widetilde{x} - x_0| \le q$ і $|x - \widetilde{x}| \le \delta$. Звідси та з рівномірної збіжності $\{\overset{k_j}{x}\}_{j=1}^{\infty}$ до φ, враховуючи (3.7), випливає, що

$$\max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} |f(t, \overset{k_j}{x}(t)) - f(t, \varphi(t))| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{3.9}$$

Тепер покажемо, що
$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} \Delta_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.10}$$
Нехай $\tau \in [t_0-h, t_0+h]$. Якщо $\tau \in \sigma_k$, то $\Delta_k(\tau)=0$. Тому розглянемо випадок, коли $\tau \neq \sigma_k$. Тоді існує таке число $i_\tau \in \{-k+1,\dots,k-1\}$, що $\tau \in (\overset{k}{t}_{i_\tau}, \overset{k}{t}_{i_\tau+1})$, коли $\tau > t_0$, і $\tau \in (\overset{k}{t}_{i_\tau-1}, \overset{k}{t}_{i_\tau})$, коли $\tau < t_0$. Отже, за означенням $\overset{k}{x}$ маємо $(\overset{k}{x})'(\tau) = f(\overset{k}{t}_{i_\tau}, x_{i_\tau})$ і $\Delta_k(\tau) = f(\overset{k}{t}_{i_\tau}, x_{i_\tau}) - f(\tau, \overset{k}{x}(\tau))$, причому $|\tau - \overset{k}{t}_{i_\tau}| \le \lambda_k$, $|\overset{k}{x}(\tau) - x_{i_\tau}| \le m\lambda_k$, $k\in\mathbb{N}$. Звідси та з рівномірної неперервності f на $P^{h,q}_{t_0,x_0}$ і того, що $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, маємо (3.10).

Таким чином, поклавши в (3.8) $k=k_j$, $j\in\mathbb{N}$, перейдемо до границі при $j\to+\infty$, враховуючи (3.9) і (3.10). В результаті отримаємо рівність
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds, \quad t\in[t_0-h,t_0+h]. \tag{3.11}$$
З формули (3.11) випливає, що $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ для довільного $t\in[t_0-h,t_0+h]$ і $\varphi(t_0)=x_0$. Оскільки $(t, \overset{k}{x}(t)) \in T^{h,q}_{t_0,x_0}$ для довільного $t\in[t_0-h,t_0+h]$, $k\in\mathbb{N}$, то $(t,\varphi(t)) \in T^{h,q}_{t_0,x_0}$ для довільного $t\in[t_0-h,t_0+h]$.

Отож, функція $x=\varphi(t)$, $t\in[t_0-h,t_0+h]$, є розв'язком задачі (3.1), (3.2).

Випадок $n>1$ розглядається аналогічно. □

Зауваження 3.1. Як випливає з доведення теореми Пеано, задача (3.1), (3.2) має розв'язок, визначений на відрізку Пеано. Цей відрізок знаходиться таким чином. Вибираємо який-небудь прямокутник $P^{r,q}_{t_0,x_0}$, що лежить в області D, і знаходимо $m = \max_{(t,x)\in P^{r,q}_{t_0,x_0}} |f(t,x)|$. Тоді відрізок Пеано визначається як відрізок $[t_0-h,t_0+h]$, де $h=\min\left\{r, \frac{q}{m}\right\}$.

Зауваження 3.2. Умова теореми Пеано не гарантує однозначності задачі Коші. Наприклад, задача Коші
$$x' = 3\sqrt[3]{x^2}, \qquad x(0)=0$$
має розв'язки
$$x=0,\ t\in\mathbb{R}, \quad \text{і} \quad x=t^3,\ t\in\mathbb{R},$$
які не співпадають ніде, за винятком точки 0, хоча умова теореми 3.2 виконана.

Зауваження 3.3. Коли відомо, що задача (3.1),(3.2) має єдиний розв'язок, то вся послідовність $\{\overset{n}{x}\}$ є рівномірно збіжною до цього розв'язку (це легко показати міркуючи від супротивного). В цьому випадку функції $\overset{n}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, можна брати в якості наближення до розв'язку задачі (3.1),(3.2). Такий метод знаходження наближень розв'язку задачі (3.1),(3.2) називається *методом ламаних Ейлера*.

3.3. Лема Гронуолла-Белмана. Умова Ліпшіца

3.3.1. Доведемо допоміжне твердження, яке будемо часто використовувати при дослідженні задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

Твердження 3.3 (лема Гронуолла-Белмана)**.** *Нехай функція* $u \in C[a,b]$ *для деяких сталих* $t_0 \in [a,b]$, $A \geqslant 0$, $B > 0$ *задовольняє нерівність*

$$0 \leqslant u(t) \leqslant A + B\left|\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds\right|, \qquad t \in [a,b]. \tag{3.12}$$

Тоді

$$u(t) \leqslant Ae^{B|t-t_0|}, \qquad t \in [a,b]. \tag{3.13}$$

Доведення. Покладемо $v(t) := \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,ds$, $t \in [a,b]$, тоді $v'(t) = u(t)$, $t \in [a,b]$. Спочатку припустимо, що $t_0 < b$ і розглянемо нерівність (3.12) на відрізку $[t_0, b]$. З (3.12) маємо

$$u(t) \leqslant A + Bv(t), \qquad t \in [t_0, b], \tag{3.14}$$

звідки отримаємо

$$v'(t) \leqslant A + Bv(t), \qquad t \in [t_0, b],$$

а це означає, що правильна нерівність

$$v'(s) - Bv(s) \leqslant A, \qquad s \in [t_0, b]. \tag{3.15}$$

Домножимо нерівність (3.15) на e^{-Bs} і перетворимо таким чином

$$\left(v(s)e^{-Bs}\right)' \leqslant Ae^{-Bs}, \qquad s \in [t_0, b].$$

Проінтегруємо отриману нерівність по s від t_0 до $t \in (t_0, b]$:

$$v(t)e^{-Bt} - v(t_0)e^{-Bt_0} \leqslant -\frac{A}{B}\left(e^{-Bt} - e^{-Bt_0}\right).$$

Звідси, врахувавши, що $v(t_0) = 0$, і домноживши отриману нерівність на e^{Bt}, матимемо

$$v(t) \leqslant -\frac{A}{B}\left(1 - e^{B(t-t_0)}\right), \qquad t \in [t_0, b]. \tag{3.16}$$

Із (3.14) і (3.16) одержимо

$$u(t) \leqslant A - A\left(1 - e^{B(t-t_0)}\right),$$

що, після спрощення, співпадає з (3.13) при $t > t_0$.

Розглядаючи нерівність (3.12) на $[a, t_0]$ і міркуючи аналогічно до того, як це робилося вище, отримаємо нерівність (3.13) на відрізку $[a, t_0]$. $\square$

3.3.2. Далі буде часто використовуватися таке поняття, як "***умова Ліпшіца***". Введемо його тут.

Означення 3.1. Кажуть, що функція $\psi(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, задовольняє *умову Ліпшіца*, якщо існує стала $L \geqslant 0$ така, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ виконується нерівність

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Найменша зі сталих типу L називається *сталою Ліпшіца* функції ψ на множині X.

Твердження 3.4. *Якщо функція ψ є диференційовною на $\langle c, d\rangle$ і її похідна ψ' є обмеженою на $\langle c, d\rangle$, то функція ψ задовольняє умову Ліпшіца на $\langle c, d\rangle$.*

Доведення. За теоремою Лагранжа про скінчений приріст маємо для будь-яких $x_1, x_2 \in \langle c, d\rangle$ $(x_1 < x_2)$ рівність

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) = \psi'(\xi)(x_1 - x_2), \qquad \text{де} \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Звідси, враховуючи, що $|\psi'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in (c, d)$, де $L = \mathrm{const} \geqslant 0$, отримаємо нерівність

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

□

Наслідок 3.1. *Якщо функція ψ є неперервно диференційовною на відрізку $[c, d]$, то вона задовольняє умову Ліпшіца на $[c, d]$.*

Доведення. Це твердження безпосередньо випливає з твердження 3.4 і теореми Вейерштрасса про обмеженість неперервної на відрізку функції. □

Нагадаємо, що обмежені і замкнені множини в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ називають *компактами* чи *компактними множинами.* Зокрема, відрізки числової осі компактами в $\mathbb{R}$.

Означення 3.2. Кажуть, що функція $\psi(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$ (X не є компактом), задовольняє умову Ліпшіца локально на X, якщо для будь-якого компакту $K \subset X$ звуження цієї функції на K задовольняє умову Ліпшіца (на K).

Твердження 3.5. *Якщо функція ψ є диференційовною на проміжку $\langle c, d\rangle$, який не є компактом, і її похідна обмежена на кожному відрізку проміжку $\langle c, d\rangle$, то ця функція задовольняє умову Ліпшіца на $\langle c, d\rangle$ локально.*

Доведення випливає з твердження 3.4.

Наслідок 3.2. *Якщо функція ψ є неперервно диференційовною на проміжку $\langle c, d\rangle$, то вона задовольняє умову Ліпшіца на $\langle c, d\rangle$ локально.*

Доведення. Це твердження безпосередньо випливає з твердження 3.5 і теореми Вейерштрасса про обмеженість неперервної на відрізку функції. □

Означення 3.3. Нехай Ω — множина в $\mathbb{R}^2$. Кажуть, що функція $g(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє *умову Ліпшіца за другим аргументом* (змінною x) на Ω (глобально), якщо існує стала $L \geqslant 0$ така, що для будь-яких $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ виконується нерівність

$$|g(t, x_1) - g(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Найменша зі сталих типу L називається *сталою Ліпшіца.*

Твердження 3.6. *Нехай Ω — опукла за змінною x область в $\mathbb{R}^2$, а функція $g(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, має обмежену частинну похідну $g_x(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$. Тоді функція g задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом глобально.*

Доведення цього твердження аналогічне доведенню леми 3.4.

Означення 3.4. Кажуть, що функція $g(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$ (Ω не є компактом), задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом (змінною x) на Ω *локально*, якщо для будь-якого компакту $F \subset \Omega$ звуження цієї функції на F задовольняє умову Ліпшіца (на F глобально).

Означення 3.5. Кажуть, що підобласть Ω' області Ω (в $\mathbb{R}^2$) є строго внутрішньою, якщо Ω' — обмежена і $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ (умова $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ рівносильна умові: відстань між межами $\partial\Omega'$ і $\partial\Omega$ — додатня).

Зауваження 3.4. Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Тоді функція $g(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє умову Ліпшіца локально, якщо для будь-якої строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω звуження цієї функції на Ω' задовольняє умову Ліпшіца (на Ω' глобально).

Твердження 3.7. *Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^2$ і функція $f(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, разом з частинною похідною $f_x(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, є неперервними на Ω. Тоді функція f задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом (на Ω) локально.*

Доведення. Нехай Ω' — строго внутрішня підобласть області Ω. Розглянемо функцію

$$F(t,x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{f(t,x_1) - f(t,x_2)}{x_1 - x_2}, & \text{якщо } x_1 \neq x_2, \\ \\ f_x(t,x_1), & \text{якщо } x_1 = x_2, \end{cases}$$

визначену на множині $\Gamma = \big\{(t,x_1,x_2)\colon (t,x_1),(t,x_2) \subset \overline{\Omega'}\big\}$. Легко переконатися, що множина Γ — компакт в $\mathbb{R}^3$, а функція F — неперервна на Γ функція. Отже, за теоремою Вейерштрасса існує стала $L \geqslant 0$ така, що $|F(t,x_1,x_2)| \leqslant L$ для будь-яких $(t,x_1,x_2) \in \Gamma$. А це означає, що звуження функції f на Ω' задовольняє умову Ліпшіца (на Ω'). □

Лекція № 5

3.4. Теорема Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЗДР

В пункті 3.2 ми розглянули питання про існування розв'язку задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної рівняння. Тут ми вернемося знову до цього питання. При цьому, порівняно з пунктом 3.2, підсилимо умови на праву частину рівняння. Ці додаткові умови будуть гарантувати єдиність розв'язку досліджуваної задачі Коші і, крім того, дають можливість використовувати для знаходження наближень розв'язку цієї задачі *метод послідовних наближень*.

Відмітимо, що слова *«будь-які два розв'язки $x = \varphi_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$, і $x = \varphi_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$, задачі (3.1), (3.2) співпадають на спільній частині їх областей визначення»* означають, що $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ $\forall t \in \langle a_1, b_1\rangle \cap \langle a_2, b_2\rangle$.

Теорема 3.8 (Пікар). *Нехай функція f є неперервною і задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом локально. Тоді задача (3.1), (3.2) має розв'язки і будь-які два з них співпадають на спільній частині їх областей визначення.*

Доведення. 1 етап. Як відомо (див. теорему 3.1), будь-який розв'язок задачі (3.1), (3.2) є розв'язком інтегрального рівняння

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,x)\,ds \tag{3.17}$$

і, навпаки, довільний розв'язок рівняння (3.17) є розв'язком задачі (3.1), (3.2).

Тому нам достатньо довести твердження нашої теореми стосовно рівняння (3.17), що ми і будемо робити.

2 етап. Будуємо так звані *послідовні наближення* розв'язку інтегрального рівняння (3.17) за правилом

$$x_0(t) = x_0, \quad t \in (a_0, b_0), \tag{3.18}$$

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds, \quad t \in (a_n, b_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$

де (a_0, b_0) – максимальний числовий інтервал такий, що $t_0 \in (a_0, b_0)$ і $(t, x_0) \in D \ \forall t \in (a_0, b_0)$, і для кожного $n \in \mathbb{N}$ (a_n, b_n) – максимальний числовий інтервал такий, що $t_0 \in (a_n, b_n)$ і $(t, x_{n-1}(t)) \in D \ \forall t \in (a_n, b_n)$. Ясно, що $(a_n, b_n) \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

3 етап. Виберемо довільним чином і зафіксуємо числа $r > 0$ і $q > 0$ такі, що прямокутник

$$P^{r,q}_{t_0,x_0} := \{(t, x) \colon t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0 + r,\ x_0 - q \leqslant x \leqslant x_0 + q\}$$

лежить в D. Визначимо

$$m := \max_{(t,x) \in P^{r,q}_{t_0,x_0}} |f(t, x)|, \qquad h := \min\left\{r, \frac{q}{m}\right\}.$$

Покажемо, що відрізок $[t_0 - h, t_0 + h]$ (його називають, як говорилося раніше, відрізком Пеано) лежить в (a_n, b_n) для кожного $n \in \mathbb{N}$ і графік звуження функції x_n на $[t_0 - h, t_0 + h]$ лежить в $P^{h,q}_{t_0,x_0}$, тобто $\{(t, x_n(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \subset P^{h,q}_{t_0,x_0}$. Для цього використаємо метод математичної індукції.

Нехай $n = 1$. Очевидно, що $[t_0 - h, t_0 + h] \subset (a_1, b_1)$. Тоді для довільного $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ з (3.18) маємо

$$|x_1(t) - x_0| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\, ds \right| \leqslant m|t - t_0| \leqslant mh \leqslant q.$$

Звідси випливає, що $\{(t, x_1(t)) \colon t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \subset P^{h,q}_{t_0,x_0}$.

Тепер нехай для деякого $n = k - 1$ $(k \geqslant 2)$ справедливе наше твердження, тобто $[t_0 - h, t_0 + h] \subset (a_{k-1}, b_{k-1})$ і $\{(t, x_{k-1}(t)) \colon t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \subset P^{h,q}_{t_0,x_0}$. Тоді функція $f(s, x_{k-1}(s))$ визначена для будь-якого s з відрізка $[t_0 - h, t_0 + h]$ і неперервна на цьому відрізку, а отже, функція x_k визначена на $[t_0 - h, t_0 + h]$, тобто $[t_0 - h, t_0 + h] \subset (a_k, b_k)$. Крім цього, з (3.19) при $n = k$ для $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ отримаємо

$$|x_k(t) - x_0| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds \right| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, x_{k-1}(s)|\, ds \right| \leqslant m|t - t_0| \leqslant q.$$

Це означає, що $\{(t, x_k(t)) \colon t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \subset P^{h,q}_{t_0,x_0}$, тобто наше твердження доведено.

4 етап. Покажемо, що функційна послідовність

$$x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \tag{3.20}$$

рівномірно збіжна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Для цього розглянемо функційний ряд

$$x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \cdots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \cdots, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3.21}$$

Нехай $\{S_n(t), t \in [t_0 - h, t_0 + h]\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність частинних сум цього ряду. Очевидно, що

$$S_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \cdots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) \equiv x_n(t),$$
$$t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Це означає, що рівномірна збіжність послідовності (3.20) є еквівалентною рівномірній збіжності ряду (3.21), причому границя послідовності (3.20) співпадає із сумою ряду (3.21).

Доведемо рівномірну збіжність ряду (3.21), використовуючи ознаку Вейерштрасса. Це означає, що нам потрібно знайти збіжний числовий ряд з додатними членами, кожен член якого мажорує (оцінює зверху взятий по модулю) відповідний член ряду (3.21).

Легко бачити, що з (3.18) для кожного $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ маємо

$$|x_1(t) - x_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\, ds \right| \leqslant m|t - t_0| = m\frac{|t - t_0|}{1!}.$$

Використовуючи цю оцінку та умову Ліпшиця зі сталою L, з (3.19) (беручи послідовно $n = 1$ і $n = 2$) отримаємо

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0)|\, ds \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0|\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant mL \left| \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|}{1!}\, ds \right| = mL\frac{|t - t_0|^2}{2!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Аналогічно отримаємо оцінку

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leqslant mL^2\frac{|t - t_0|^3}{3!}, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тому можна очікувати, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant mL^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3.22}$$

Доведемо це методом математичної індукції. Для $n = 1$ уже доведено. Нехай (3.22) справджується для $n = k$, де k — яке-небудь натуральне число. Тоді з (3.19) та умови Ліпшиця маємо

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))|\, ds \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{mL^k}{k!} \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k\, ds \right| = mL^k\frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

що треба було довести.

Із (3.22) маємо для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{m}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3.23}$$

Числовий ряд

$$|x_0| + \frac{m}{L}\frac{(Lh)}{1!} + \frac{m}{L}\frac{(Lh)^2}{2!} + \dots + \frac{m}{L}\frac{(Lh)^n}{n!} + \cdots \tag{3.24}$$

є збіжним, що можна показати, використовуючи ознаку Д'Аламбера, і навіть можна знайти його суму, згадавши ряд Маклорена (Тейлора) для e^y $(e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots)$. Очевидно, що сума ряду (3.24) має вигляд

$$|x_0| + \frac{m}{L}(e^{Lh} - 1).$$

Отож, на підставі ознаки Вейерштрасса ряд (3.21) є рівномірно збіжним на відрізку Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$. Нехай його сума дорівнює $\varphi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. З властивостей рівномірно збіжних рядів (а саме, з факту, що сума рівномірно збіжного ряду, складеного з неперервних функцій, є неперервною функцією) випливає, що φ є неперервною на $[t_0 - h, t_0 + h]$ функцією. Із зв'язку між послідовністю (3.20) і рядом (3.21) отримаємо, що

$$x_n(t) \rightrightarrows \varphi(t) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3.25}$$

Очевидно, що $\{(t, \varphi(t)) \colon t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \subset P^{h,q}_{t_0,x_0}$.

<u>Етап 5.</u> Покажемо, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, є розв'язком задачі (3.1), (3.2). Для цього спочатку доведемо, що

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Справді, використовуючи умову Ліпшіца, на підставі (3.25) отримаємо

$$0 \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s)) - f(s, \varphi(s))|\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |x_n(s) - \varphi(s)|\, ds \right| \leqslant L \int_{t_0-h}^{t_0+h} |x_n(s) - \varphi(s)| ds \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Враховуючи це, а також (3.25), перейдемо в (3.19) до границі при $n \to \infty$. У результаті отримаємо

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Це означає, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, є розв'язком рівняння (3.17), а отже, задачі (3.1), (3.2).

<u>Етап 6.</u> Доведемо, що будь-які два розв'язки задачі (3.1),(3.2) співпадають на спільній частині їх областей визначення. Припустимо протилежне. Нехай $x = \varphi_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$, і $x = \varphi_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$, — розв'язки задачі (3.1),(3.2), які відрізняються на спільній частині їх областей визначення, тобто існує точка $t_* \in \langle a, b\rangle = \langle a_1, b_1\rangle \cap \langle a_2, b_2\rangle$ така, що $\varphi_1(t_*) \neq \varphi_2(t_*)$. Для зручності викладення, не зменшуючи загальності, припустимо, що $t_* > t_0$. Тоді, оскільки $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, на проміжку $[t_0, t_*)$ знайдеться t_1 таке, що $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$, але в будь-якому околі точки t_1 існує хоча б одна точка, в якій значення φ_1 і φ_2 різні. Покладемо $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(t_1)(= \varphi_2(t_1))$. Виберемо прямокутник $P^{r,q}_{t_1,x_1} = \{(t, x) : t_1-r \leqslant t \leqslant t_1+r,\ x_1-q \leqslant x \leqslant x_1+q\} \subset D$ такий, що $[t_1-r, t_1+r] \subset \langle a, b\rangle$, і $\{(t, \varphi_1(t)), (t, \varphi_2(t))\} \subset P^{r,q}_{t_1,x_1}$ для кожного $t \in [t_1-r, t_1+r]$. Це можна зробити, оскільки (t_1, x_1) є внутрішньою точкою множини D, а отже, входить в цю множину разом з деяким кругом (для якого вона є центром).

Трактуючи функції φ_1 і φ_2 як розв'язки задачі Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою

$$x(t_1) = x_1,$$

запишемо для них відповідні рівності

$$\varphi_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi_1(s))\, ds, \quad \varphi_2(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi_2(s))\, ds, \quad t \in [t_1 - r, t_1 + r].$$

Віднімемо ці рівності одну від другої. З отриманої рівності випливає

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|\, ds\right| \leqslant L\left|\int_{t_1}^{t} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds\right|, \tag{3.26}$$

де $L \geqslant 0$ — стала з умови Ліпшіца, тобто така стала, що

$$|f(t, x) - f(t, \widetilde{x})| \leqslant L|x - \widetilde{x}|$$

для будь-яких $(t, x), (t, \widetilde{x}) \in P^{r,q}_{t_1,x_1}$.

Покладемо $u(t) := |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$, $t \in [t_1 - r, t_1 + r]$. Тоді з (3.26) матимемо

$$u(t) \leqslant L\left|\int_{t_1}^{t} u(s)\, ds\right|, \quad t \in [t_1 - r, t_1 + r]. \tag{3.27}$$

З (3.27) на підставі леми Гронуолла-Белмана отримаємо нерівність $u(t) \leqslant 0$, що, враховуючи нерівність $u(t) \geqslant 0$, дає нам рівність $u(t) = 0$, $t \in [t_1 - r, t_1 + r]$, тобто $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, $t \in [t_1 - r, t_1 + r]$. А це суперечить нашому припущенню, що доводить наше твердження. □

Зауваження 3.5. Як випливає з доведення теореми Пікара функції $x = x_n(t)$, де $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $n \in \mathbb{N}$, можна брати в якості наближення розв'язку задачі (3.1), (3.2) на проміжку $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оцінимо похибку відхилення від точного розв'язку, яку матимемо, коли за наближення розв'язку задачі (3.1), (3.2) візьмемо x_n для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки

$$\varphi(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \cdots +$$
$$+ (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + (x_{n+1}(t) - x_n(t)) + (x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)) + \cdots ,$$

і

$$x_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0) + \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

то на підставі (3.23) одержимо

$$|\varphi(t) - x_n(t)| = |(x_{n+1}(t) - x_n(t)) + (x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)) + \dots| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m}{L}\left[\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(Lh)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots\right] = \frac{mL^n h^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{Lh}{n+2} + \dots\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{mL^n h^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{Lh}{1!} + \frac{(Lh)^2}{2!} + \dots\right] \leqslant \frac{mL^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Звідси випливає, що коли n — один з натуральних розв'язків нерівності

$$\frac{mL^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh} < \varepsilon, \tag{3.28}$$

де $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале задане число, то $|\varphi(t) - x_n(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Оскільки $\frac{mL^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh} \to 0$ при $n \to \infty$, то нерівність (3.28) завжди має розв'язок.

3.5. Продовження розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (3.1) з початковою умовою (3.2).

Означення 3.6. Нехай $x = \varphi_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$, і $x = \varphi_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$ — розв'язки задачі (3.1),(3.2). Розв'язок φ_1 називають *продовженням* розв'язку φ_2 (а φ_2 — *звуженням* φ_1), якщо $\langle a_2, b_2 \rangle \subset \langle a_1, b_1 \rangle$ і $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для кожного $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$.

Означення 3.7. Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, задачі (3.1),(3.2) називається *непродовжуваним* (*повним*), а його область визначення $\langle a, b \rangle$ — *максимальною*, якщо не існує нетривільного продовження цього розв'язку.

Під тривіальним продовженням заданого розв'язку розуміється сам розв'язок.

Теорема 3.9. *Нехай функція f є неперервною і задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом локально. Тоді задача* (3.1), (3.2) *має тільки один непродовжуваний розв'язок, він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

Доведення. Нехай $(t_0, x_0) \in D$ — яка-небудь точка. Розглянемо множину всеможливих розв'язків задачі (3.1), (3.2). Вона непорожня на підставі теореми Пікара. Позначимо через A множину всіх лівих кінців, а через B — правих кінців проміжків, які є областями визначення розв'язків задачі (3.1), (3.2). Нехай

$$a := \inf A, \quad b := \sup B.$$

Зауважимо, що для довільної точки $t_* \in (a,b)$ знайдеться розв'язок задачі (3.1),(3.2), який визначений в околі цієї точки (це випливає з означення (a,b)), і будь-які два розв'язки, що визначені в точці t_*, мають там однакове значення (за теоремою 3.8). Отож, можна визначити функцію $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, таким чином: якщо $t_* \in (a,b)$, то $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$, де $x = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, — який-небудь розв'язок задачі (3.1),(3.2), що визначений в околі точки t_*. Покажемо, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, є непродовжуваним розв'язком, про який говориться у формулюванні теореми.

Оскільки в деякому околі будь-якої точки інтервалу (a,b) функція φ співпадає з розв'язком рівняння (3.1), то φ є розв'язком рівняння (3.1).

Нехай $x = \omega(t)$, $t \in \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle$, — який-небудь розв'язок задачі (3.1),(3.2). З означення (a,b) випливає, що $a \leqslant \widetilde{a} < \widetilde{b} \leqslant b$. Покажемо, що $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle \subset (a,b)$. Припустимо, що це не так, тобто маємо один з двох випадків:
1) $b < +\infty$ і $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle = \langle \widetilde{a}, b]$ (тобто $\widetilde{b} = b$ і $\widetilde{b} \in \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle$);
2) $a > -\infty$ і $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle = [a, \widetilde{b} \rangle$ (тобто $\widetilde{a} = a$ і $\widetilde{a} \in \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle$).

Нехай маємо перший випадок. Тоді $(b, \omega(b)) \in D$. Розглянемо задачу Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою

$$x(b) = \omega(b). \tag{3.29}$$

Задача (3.1), (3.29) за теоремою Пікара має розв'язок $x = \psi(t)$, визначений на деякому відрізку $[b - h, b + h]$, де $h > 0$.

Побудуємо функцію $x = \widetilde{\omega}(t)$, $t \in \langle \widetilde{a}, b+h]$, за правилом: $\widetilde{\omega}(t) = \omega(t)$, коли $t \in \langle \widetilde{a}, b]$, і $\widetilde{\omega}(t) = \psi(t)$, коли $t \in (b, b+h]$. В силу теореми єдиності розв'язку задачі Коші $\omega(t) = \psi(t)$, коли $t \in \langle \widetilde{a}, b] \cap [b-h, b]$. Отож, функція $x = \widetilde{\omega}(t)$, $t \in \langle \widetilde{a}, b+h]$, є розв'язком задачі (3.1),(3.2). Але $b + h > b$, що суперечить вибору b. Аналогічно розглядається другий випадок. Отже, $\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle \subset (a,b)$ і в силу теореми єдиності розв'язку задачі Коші маємо $\omega(t) = \varphi(t)$, $t \in \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle$. □

Непродовжуваний розв'язок задачі Коші для рівняння (3.1), про який говорилося в теоремі 3.9, далі позначатимемо через $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$.

Наслідок 3.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.9. Припустимо, що F — компакт (замкнена обмежена множина) в області D, $(t_0, x_0) \in D$. Тоді, якщо $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$, — непродовжуваний розв'язок задачі* (3.1), (3.2), *то знайдуться значення t_1, $t_2 \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$ такі, що $a_{t_0,x_0} < t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 < b_{x_0,x_0}$ і точка $(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ лежить поза F для кожного t з множини $(a_{t_0,x_0}, t_1] \cup [t_2, b_{t_0,x_0})$.*

Доведення. Якщо $b_{t_0,x_0} = +\infty$, то існування значення t_2 очевидне. Нехай $b_{t_0,x_0} < +\infty$. Покладемо $\rho := = \operatorname{dist}(F, \partial D)$, якщо $D \neq \mathbb{R}^2$, і $\rho := 1$, якщо $D = \mathbb{R}^2$, і $F_{\rho/2} = \{(t,x) : \operatorname{dist}((t,x), F) < \rho/2\}$. Очевидно, що $\overline{F}_{\rho/2} \subset D$ і $\overline{F}_{\rho/2}$ — компакт. Нехай $M := \max\limits_{(t,x) \in \overline{F}_{\rho/2}} |f(t,x)|$.

З теореми Пікара випливає, що для довільної точки $(t_*, x_*) \in F$ задача Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою

$$x(t_*) = x_*$$

має розв'язок, визначений на відрізку $[t_* - \widehat{h}, t_* + \widehat{h}]$, де $\widehat{h} := \min\{\frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho}{2\sqrt{2}M}\}$. Щоб переконатися в цьому, досить розглянути квадрат $P_{t_*,x_*}^{\frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho}{2\sqrt{2}}}$, який міститься в замкненому крузі з центром (t_*, x_*) і радіусом $\rho/2$, а цей, в свою чергу, в $\overline{F}_{\rho/2}$, маючи на увазі, що $M \geqslant m := \max\limits_{(t,x)\in P^{\frac{\rho}{2\sqrt{2}},\frac{\rho}{2\sqrt{2}}}_{t_*,x_*}} |f(t,x)|$ і, отже, $\widehat{h} \leqslant h = \min\{\frac{\rho}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho}{2\sqrt{2}m}\}$. Очевидно, що величина $\widehat{h}$ від вибору точки (t_*, x_*) з F не залежить.

Тепер припустимо, що твердження наслідку неправильне. Тоді на проміжку $[b_{t_0,x_0} - \widehat{h}/2, b_{t_0,x_0})$ знайдеться точка $\widehat{t}$ така, що $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in F$, де $\widehat{x} = \varphi(\widehat{t}, t_0, x_0)$. Зі сказаного вище випливає, що задача Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою

$$x(\widehat{t}) = \widehat{x}$$

має розв'язок $x = \psi(t)$, визначений на $[\widehat{t} - \widehat{h}, \widehat{t} + \widehat{h}]$. Очевидно, що $\widehat{t} + \widehat{h} > b_{t_0,x_0}$. Але в силу теореми єдиності розв'язку задачі Коші маємо рівність

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \psi(t),\ t \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0}) \cap [\widehat{t} - \widehat{h}, \widehat{t} + \widehat{h}].$$

Побудуємо функцію $x = \omega(t)$, $t \in (a_{t_0,x_0}, \widehat{t} + \widehat{h}]$, поклавши $\omega(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, коли $t \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$, і $\omega(t) = \psi(t)$, якщо $t \in [b_{t_0,x_0}, \widehat{t} + \widehat{h}]$. Легко переконатися, що функція $x = \omega(t)$, $t \in (a_{t_0,x_0}, \widehat{t} + \widehat{h}]$, є розв'язком задачі (3.1),(3.2), який є продовженням розв'язку $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$, що суперечить нашому припущенню. Отже, існування t_2 встановлено.

Цілком аналогічно доводиться існування t_1. □

Наслідок 3.4. *Нехай виконуються умови наслідку* 3.3 *і точка* (t_0, x_0) *належить* F. *Тоді знайдуться значення* $\widetilde{t_1}$, $\widetilde{t_2} \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$ *такі, що*

$$a_{t_0,x_0} < \widetilde{t_1} \leqslant t_0 \leqslant \widetilde{t_2} < b_{t_0,x_0}$$

і точки $(\widetilde{t_1}, \varphi(\widetilde{t_1}, t_0, x_0)), (\widetilde{t_2}, \varphi(\widetilde{t_2}, t_0, x_0))$ *належать межі* ∂F *множини* F.

Доведення. Позначимо $T = \{t : (t, \varphi(t, t_0, x_0)) \in F\}$. Згідно з наслідком 3.3 існують значення $t_1, t_2 \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$ такі, що $a_{t_0,x_0} < t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 < b_{t_0,x_0}$ і $(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \notin F$ для кожного $t \in (a_{t_0,x_0}, t_1] \cup [t_2, b_{t_0,x_0})$. Отже, множина T обмежена, тобто $\inf T > -\infty$ і $\sup T < +\infty$. Покладемо $\widetilde{t_1} := \inf T$, $\widetilde{t_2} := \sup T$ і покажемо, що значення $\widetilde{t_1}$ і $\widetilde{t_2}$ ті, про які говориться в даному твердженні. Подивимося на $\widetilde{t_2}$. Згідно з означенням $\sup T$ існує послідовність $\{t_m \in T\}$ така, що $t_m \to \widetilde{t_2}$ при $m \to \infty$. З означення T і $\widetilde{t_2}$ випливає, що $(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \notin F$ для будь-якого $t > \widetilde{t_2}$. Отже, в будь-якому околі точки $\big(\widetilde{t_2}, \varphi(\widetilde{t_2}, t_0, x_0)\big)$ є точки з F і точки, які не належать до F. Це означає, що $(\widetilde{t_2}, \varphi(\widetilde{t_2}, t_0, x_0)) \in \partial F$.

Аналогічно досліджується значення $\widetilde{t_1}$. □

Наслідок 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.9 і* (t_0, x_0) *— довільна точка області* D. *Тоді*

$$\operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), \partial D) \to 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), 0) \to +\infty$$

при $t \to a_{t_0,x_0} + 0$ *і* $t \to b_{t_0,x_0} - 0$ *(очевидно, що випадок* $\operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), 0) \to +\infty$*) може бути лише тоді, коли область* D *є необмеженою).*

Доведення. Виберемо монотонно зростаючу послідовність компактів $\{F_n\}$, яка "вичерпує"область D, тобто F_n — компакт і $F_n \subset F_{n+1} \subset D$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D$. Наприклад, $F_n := \{(t,x) \in D \,\big|\, \operatorname{dist}\big((t,x), \partial D\big) \leqslant< 1/n,\ \operatorname{dist}\big((t,x), 0\big) \leqslant< n\}$. □

Нехай виконуються умови наслідку 3.3 і точка (t_0, x_0) належить F. Тоді знайдуться значення $\widetilde{t_1}$, $\widetilde{t_2} \in (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$ такі, що

$$a_{t_0,x_0} < \widetilde{t_1} \leqslant t_0 \leqslant \widetilde{t_2} < b_{t_0,x_0}$$

і точки $(\widetilde{t_1}, \varphi(\widetilde{t_1}, t_0, x_0)), (\widetilde{t_2}, \varphi(\widetilde{t_2}, t_0, x_0))$ належать межі ∂F множини F.

3.6. Гладкість та аналітичність розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (3.1) з початковою умовою (3.2), припустивши, що виконуються умови теореми Пікара. З означення розв'язку задачі (3.1),(3.2) випливає, що він є один раз неперервно диференційовною функцією. Виникає питання: а при яких додаткових умовах на функцію f розв'язок задачі (3.1),(3.2) є l раз неперервно диференційовною функцією, де $l \geqslant 2$ (тоді ми його будемо називати гладким)? Відповідь дає таке твердження.

Теорема 3.10. *Нехай f є k раз неперервно диференційовною функцією (на D), де $k \in \mathbb{N}$. Тоді будь-який розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *є* $k+1$ *раз неперервно диференційовною функцією.*

Доведення. Нехай $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, — розв'язок задачі (3.1),(3.2), зокрема, це може бути непродовжуваний розв'язок. Підставимо його в рівняння (3.1). В результаті отримуємо тотожність

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle. \tag{3.30}$$

Нехай $k = 1$. Тоді в силу властивостей композицій диференційовних функцій та враховуючи, що $\psi \in C^1\big(\langle a, b \rangle\big)$, маємо неперервну диференційовність правої частини рівняння (3.30), а отже, і лівої частини. Тим самим доведено, що ψ — двічі неперервно диференційовна функція, тобто встановлено справедливість теореми у випадку $k = 1$.

Нехай $k = 2$. З попереднього випливає, що $\psi \in C^2\big(\langle a, b \rangle\big)$ і виконується тотожність (3.30). Продиференціюємо цю тотожність (за t), враховуючи, що її ліва і права частини неперервно диференційовні. У результаті, на підставі формули диференціювання складених функцій, матимемо тотожність

$$\psi''(t) = \frac{\partial f(t, \psi(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, \psi(t))}{\partial x}\psi'(t), \quad t \in \langle a, b \rangle. \tag{3.31}$$

Оскільки права частина, в силу наших припущень і доведеного вище ($\psi \in C^2\big(\langle a, b \rangle\big)$), є неперервно диференційовною, то і ліва частина — теж. Це означає, що $\psi \in C^3\big(\langle a, b \rangle\big)$. Абсолютно аналогічно міркуючи, можна довести твердження теореми для $k = 3, 4, \ldots$. □

Розглянемо питання про **аналітичність** розв'язку задачі (3.1),(3.2). Спочатку нагадаємо означення аналітичних дійсних функцій.

Означення 3.8. Функція $\varphi(t)$, $t \in (a, b)$, називається аналітичною в точці $t_0 \in (a, b)$, якщо існує окіл $O(t_0)$ цієї точки (що лежить в (a, b)), на якому задана функція визначається як сума абсолютно збіжного степеневого ряду, тобто

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (t - t_0)^k, \quad t \in O(t_0) \subset (a, b), \tag{3.32}$$

де $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — числова послідовність і $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varphi_k| \, |t - t_0|^k < \infty \ \ \forall t \in O(t_0)$.

Зауваження 3.6. Легко переконатися, що коли функція $\varphi(t)$, $t \in (a, b)$, є аналітичною в точці $t_0 \in (a, b)$, тобто подається у вигляді степеневого ряду (3.32), то вона має похідні будь-якого порядку в околі точки t_0 і

$$\varphi_k = \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.33}$$

Означення 3.9. Функція $\varphi(t)$, $t \in (a,b)$, називається *аналітичною* на (a,b), якщо вона аналітична в кожній точці інтервалу (a,b).

Означення 3.10. Функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, називається аналітичною в точці $(t_0,x_0) \in D$, якщо існує окіл $O(t_0,x_0)$ цієї точки (що лежить в D), на якому задана функція визначається як сума абсолютно збіжного степеневого ряду, тобто

$$f(t,x) = \sum_{k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0} f_{k_1,k_2}(t-t_0)^{k_1}(x-x_0)^{k_2}, \quad (t,x) \in O(t_0,x_0) \subset D, \tag{3.34}$$

де $\left\{ f_{k_1,k_2} \,\middle|\, k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0 \right\}$ — числова послідовність.

Відмітимо, що ряд (3.34) є абсолютно збіжним, якщо

$$\sum_{k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0} |f_{k_1,k_2}|\, |t-t_0|^{k_1}\, |x-x_0|^{k_2} < \infty \quad \forall (t,x) \in O(t_0,x_0).$$

Зауваження 3.7. Легко переконатися, що, коли функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, є аналітичною в точці $(t_0,x_0) \in D$, то в деякому околі цієї точки функція f має похідні будь-якого порядку і коефіцієнти f_{k_1,k_2} $(k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0)$ ряду (3.34) знаходяться за правилом

$$f_{k_1,k_2} = \frac{1}{k_1!k_2!} \frac{\partial^{k_1+k_2} f(t_0,x_0)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}}, \quad k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0.$$

Означення 3.11. Функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, називається аналітичною в області D, якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.

Теорема 3.11. *Якщо функція f є аналітичною в області D, то непродовжуваний (а отже, будь-який інший) розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *є аналітичною функцією на області визначення.*

Доведення цієї теореми можна знайти в [**?**].

Приклад 1. Знайти перші три члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі

$$\begin{cases} x' = 3x^2 + t^3, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{3.35}$$

Оскільки функція $f(x,t) := 3x^2 + t^3$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, аналітична всюди на площині, то будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, задачі (3.35) є аналітичним в точці 0, тобто має вигляд

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad t \in O(0), \tag{3.36}$$

де $O(0)$ – окіл точки 0,

$$c_k = \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.37}$$

З початкової умови задачі (3.35) маємо $\varphi(0) = 0$, тобто $c_0 = 1$. Підставимо цей розв'язок в рівняння задачі (3.35):

$$\varphi'(t) = 3\varphi^2(t) + t^3, \quad t \in (a,b). \tag{3.38}$$

Звідки $\varphi'(0) = 3\varphi^2(0) + 0^3 = 3 \cdot 1^2 + 0 = 3$, тобто (див. (3.37)) маємо

$$c_1 = \frac{1}{1!}\varphi'(0) = 3.$$

Продиференціюємо тотожність (3.38):

$$\varphi''(t) = 6\varphi(t)\varphi'(t) + 3t^2, \quad t \in (a, b). \tag{3.39}$$

Звідси маємо

$$\varphi''(0) = 6\varphi(0) \cdot \varphi'(0) + 3 \cdot 0^2 = 6 \cdot 1 \cdot 3 + 0 = 18,$$

а отже,

$$c_2 = \frac{1}{2!}\varphi''(0) = \frac{18}{2} = 9.$$

Отже, з (**??**) випливає

$$x = 1 + 3t + 9t^2 + \cdots .$$

Завдання для самостійної роботи. Знайти перші три члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші для ЗДР:

1.

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 - 3t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = \sin x, \\ x(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x' = \cos(x + t), \\ x(0) = \pi. \end{cases}$$

Лекція № 6

3.7. Неперервна залежність від параметрів та початкових даних розв'язку задачі Коші для ЗДР

Приклад 3.1. Знайти непродовжуваний розв'язок задачі Коші для залежного від параметра звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} x' = \mu x^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.40}$$

де $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ – довільно задана точка площини, а $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр.

Розв'язання. Спочатку знайдемо сім'ю всеможливих розв'язків рівняння задачі (3.40), а тоді виберемо той, який нам потрібен.

Очевидно, що рівняння задачі (3.40) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а отже, маємо

$$\frac{dx}{dt} = \mu x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = \mu dt, \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} = \mu t - C, \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{C - \mu t}, \quad x = 0, \tag{3.41}$$

де $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала. Виберемо із сім'ї розв'язків (3.41) той, який задовольняє початкову умову задачі (3.40). Для цього розглянемо три випадки:

1) $\mu = 0$;

2) $\mu \neq 0,\ x_0 = 0$;

3) $\mu \neq 0,\ x_0 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu x_0 \neq 0$.

У випадку 1) розглядаємо загальний розв'язок $x = \frac{1}{C}$ і частковий розв'язок $x = 0$. Тоді з початкової умови задачі (3.40) отримаємо розв'язок $x = x_0,\ t \in (-\infty, +\infty)$, задачі (3.40) при $\mu = 0$.

Нехай маємо випадок 2). Легко переконатися, що тоді початкову умову задачі (3.40) задовольняє розв'язок $x = 0,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

Тепер розглянемо випадок 3). Підставимо вираз загального розв'язку $x = \frac{1}{C-\mu t}$ в початкову умову задачі (3.40):

$$x_0 = \frac{1}{C - \mu t_0} \quad \Leftrightarrow \quad C = \mu t_0 + \frac{1}{x_0}. \tag{3.42}$$

Отже, розв'язком задачі (3.40) у випадку 3) є функція

$$x = \frac{1}{\mu t_0 + \frac{1}{x_0} - \mu t} \equiv \frac{-1}{\mu\big[t - (t_0 + \frac{1}{\mu x_0})\big]}. \tag{3.43}$$

яка визначена на промені $(-\infty, t_0 + \frac{1}{\mu x_0})$, якщо $\mu x_0 > 0$, і на промені $(t_0 + \frac{1}{\mu x_0}, +\infty)$, якщо $\mu x_0 < 0$.

Можемо зробити такий висновок : розв'язуючи задачу (3.40) при різних значеннях $(t_0, x_0, \mu) \in \mathbb{R}^3$, отримали функцію

$$x = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } \mu x_0 = 0, \\ -\frac{1}{\mu\left[t - (t_0 + \frac{1}{\mu x_0})\right]}, & \text{якщо } \mu x_0 \neq 0, \end{cases}$$

яка визначена для всіх $t \in (-\infty, +\infty)$, якщо $\mu x_0 = 0$, $t \in (-\infty, t_0 + \frac{1}{\mu x_0})$, якщо $\mu x_0 > 0$, і $t \in (t_0 + \frac{1}{\mu x_0}, +\infty)$, якщо $\mu x_0 < 0$.

$\square$

****

Нехай

$$\Omega := \{(t, x, \mu) \mid t \in (a, b),\ x \in (-\infty, +\infty),\ \mu \in (c, d)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$f(t, x, \mu)$, $(t, x, \mu) \in \Omega$, – неперервна і обмежена функція, що приймає дійсні значення і має неперервні та обмежені частинні похідні

$$\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad \text{на } \Omega.$$

Правильне таке технічне твердження.

Лема 3.1 (лема Адамара)**.** *Для будь-яких точок* (t, x_1, μ_1), $(t, x_2, \mu_2) \in \Omega$ *правильна рівність*

$$f(t, x_1, \mu_1) - f(t, x_2, \mu_2) = \Big(\int_0^1 \partial_x f(t, x_2 + \tau(x_1 - x_2), \mu_2 + \tau(\mu_1 - \mu_2))\, d\tau \Big)(x_1 - x_2) +$$

$$+ \Big(\int_0^1 \partial_\mu f(t, x_2 + \tau(x_1 - x_2), \mu_2 + \tau(\mu_1 - \mu_2))\, d\tau \Big)(\mu_1 - \mu_2). \tag{3.44}$$

Доведення. Позначимо $h(\tau) := f(t, x_2 + \tau(x_1 - x_2), \mu_2 + \tau(\mu_1 - \mu_2))$, $\tau \in [0, 1]$. Маємо

$$f(t, x_1, \mu_1) - f(t, x_2, \mu_2) = h(1) - h(0) = \int\limits_0^1 h'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \big[\partial_x f(t, x_2 + \tau(x_1 - x_2), \mu_2 + \tau(\mu_1 - \mu_2))(x_1 - x_2) +$$

$$+ \partial_\mu f(t, x_2 + \tau(x_1 - x_2), \mu_2 + \tau(\mu_1 - \mu_2))(\mu_1 - \mu_2)\big]\, d\tau,$$

звідки прямо випливає рівність (3.44). □

Наслідок 3.6. *Існує стала $K > 0$ така, що правильна нерівність*

$$|f(t, x_1, \mu_1) - f(t, x_2, \mu_2)| \le K(|x_1 - x_2| + |\mu_1 - \mu_2|) \tag{3.45}$$

для будь-яких точок (t, x_1, μ_1), $(t, x_2, \mu_2) \in \Omega$.

Доведення. Покладемо

$$K := \max\{\sup_\Omega |\partial_x f|, \sup_\Omega |\partial_\mu f|\}.$$

Тоді з рівності (3.44) безпосередньо випливає нерівність (3.45). □

Розглянемо задачу Коші:

$$x' = f(t, x, \mu), \tag{3.46}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.47}$$

де де t – незалежна змінна, x – невідома функція від змінної t, x' – похідна x, $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр, (t_0, x_0, μ) – довільно вибрана точка області Ω, тобто $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, $\mu \in (c, d)$.

З наслідку 3.6 для будь-яких (t, x_1, μ_1), $(t, x_2, \mu_2) \in \Omega$ маємо нерівність

$$|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)| \le K|x_1 - x_2|.$$

Це означає, що функція f задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом. На підставі теореми про існування непродовжуваого розв'язку задачі Коші для ЗДР, для будь-якої фіксованої точки $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$ існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі (3.46), (3.47)

$$x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \quad t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu}) \subset (a, b).$$

Покажемо, що $a_{t_0,x_0,\mu} = a$, $b_{t_0,x_0,\mu} = b$.

Справді задача (3.46), (3.47) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^t f(s, x, \mu)\, ds, \tag{3.48}$$

а тому

$$\varphi(t, t_0, x_0, \mu) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t f(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)\, ds, \quad t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu}). \tag{3.49}$$

Оскільки f – обмежена на D, то існує стала $M > 0$ така, що функція

$$|f(t, x, \mu)| \leq M \quad \text{для всіх} \ \ (x, t, \mu) \in \Omega.$$

Звідси і рівності (3.49) маємо

$$|\varphi(t, t_0, x_0, \mu) - x_0| = \Big| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)\, ds \Big| \leq$$

$$\leq \Big| \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)|\, ds \Big| \leq M|t - t_0|, \quad t \in (a_{t_0, x_0, \mu}, b_{t_0, x_0, \mu}).$$

Це означає що графік функції φ лежить між прямими $x = x_0 \pm M(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, а звідси та наслідку теореми про існування непродовжуваного розв'язку випливає, що $a_{t_0, x_0, \mu} = a$, $b_{t_0, x_0, \mu} = b$.

Далі будемо вважати, що значення $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ не змінюються, а змінюється тільки значення μ, і дослідимо неперервність функції φ стосовно змінної μ. Тому будемо писати $\varphi(t, \mu)$ замість $\varphi(t, t_0, x_0, \mu)$ і – (a, b) замість $(a_{t_0, x_0, \mu}, b_{t_0, x_0, \mu})$. Також вважатимемо, що $-\infty < a < b < +\infty$.

Нехай $\mu_0, \mu \in (c, d)$ – які-небудь. Запишемо відповідні тотожності, отримані з рівняння (3.48):

$$\varphi(t, \mu) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, \mu), \mu)\, ds, \quad t \in (a, b), \tag{3.50}$$

$$\varphi(t, \mu_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)\, ds, \quad t \in (a, b). \tag{3.51}$$

Віднімемо рівності (3.50) і (3.51) і оцінимо відповідним чином, використовуючи наслідок 3.6:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| = \Big| \int\limits_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s, \mu), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)]\, ds \Big| \leq$$

$$\leq \Big| \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s, \mu), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)|\, ds \Big| \leq$$

$$\leq K \Big| \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(s, \mu) - \varphi(s, \mu_0)|\, ds + |\mu - \mu_0| \cdot |t - t_0| \Big| \leq$$

$$\leq K(b - a)|\mu - \mu_0| + K \Big| \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(s, \mu) - \varphi(s, \mu_0)|\, ds \Big|, \quad t \in (a, b). \tag{3.52}$$

Позначимо

$$u(t) := |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)|, \quad t \in (a, b).$$

Тоді з нерівності (3.52) маємо

$$0 \le u(t) \le K(b-a)|\mu-\mu_0| + K\Big|\int\limits_{t_0}^{t} u(s)\,ds\Big|, \quad t \in (a,b). \tag{3.53}$$

Застосуємо до нерівності (3.53) лему Гронуолла-Белмана і отримаємо

$$u(t) \le K(b-a)|\mu-\mu_0|e^{K|t-t_0|}, \quad t \in (a,b),$$

тобто

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)| \le K(b-a)e^{K(b-a)}|\mu-\mu_0|, \quad t \in (a,b). \tag{3.54}$$

З нерівності (3.54) випливає, що

$$\varphi(\cdot,\mu) \to \varphi(\cdot,\mu_0) \quad \text{рівномірно на} \ \ (a,b) \ \ \text{при} \ \ \mu \to \mu_0,$$

тобто для будь-якого, як завгодно малого, $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $\mu \in (c,d)$:

$$\sup_{t\in(a,b)} |\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu_0)| < \varepsilon, \quad \text{якщо} \ \ |\mu-\mu_0| < \delta.$$

Справді, як випливає з (3.54), для наперед заданого $\varepsilon > 0$ треба взяти $\delta > 0$ таке, щоби виконувалась нерівність

$$K(b-a)e^{K(b-a)}\delta = \varepsilon.$$

Звідси, зокрема, випливає, що функція

$$x = \varphi(t,\mu), \quad (t,\mu) \in \Omega := (a,b)\times(c,d),$$

є неперервною. Іншими словами, ми довели, що розв'язок задачі (3.46), (3.47) неперервно залежить від параметра μ.

****

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з параметрами

$$x' = f(t,x,\mu), \tag{3.55}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.56}$$

де t – незалежна змінна, x – невідома функція від змінної t, x' – похідна x, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_k) \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, – параметри, $f(t,x,\mu)$, $(t,x,\mu) \in \Omega$, – задана функція, Ω – область (відкрита та зв'язна множина) в просторі $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^k_\mu = \{(t,x,\mu)\colon t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}^k\}$, t_0 і x_0 такі, що $(t_0,x_0,\mu) \in \Omega$.

Нехай виконується умова:

$(\mathcal{F})$ $f(t,x,\mu)$, $(t,x,\mu) \in \Omega$, *є неперервною функцією і задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом локально.*

Тоді (як випливає з п.3.5) при будь-яких вхідних даних $(t_0,x_0,\mu) \in \Omega$ існує тільки один непродовжуваний розв'язок задачі (3.55),(3.56) і будь-який інший її розв'язок є звуженням цього непродовжуваного розв'язку. Такий розв'язок позначатимемо через $x = \varphi(t,t_0,x_0,\mu)$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$.

Встановимо неперервну залежність (непродовжуваного) розв'язку задачі Коші від вхідних даних (t_0,x_0,μ). Для цього спочатку доведемо таке допоміжне твердження, прийнявши $|\mu|:= \sum\limits_{i=1}^{k} |\mu_i|$ для довільного $\mu \in \mathbb{R}^k$.

Лема 3.2. *Нехай виконується умова ($\mathcal{F}$) і $(\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})$ — довільна точка з Ω. Тоді для будь-якого відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}})$, і як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0$ таке, що як тільки $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta$, то*

1) $[\alpha, \beta] \subset (a_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu}, b_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu})$,

2) $|\varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu) - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Доведення. Оскільки значення $\widehat{t}_0$, $\widehat{x}_0$ в процесі доведення не змінюються, то для спрощення викладок писатимемо $x = \varphi(t, \mu)$ і (a_μ, b_μ) замість відповідно $\varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu)$ та $(a_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu}, b_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \mu})$.

Нехай $[\alpha, \beta]$ — довільний відрізок з інтервалу $(a_{\widehat{\mu}}, b_{\widehat{\mu}})$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\widehat{t}_0 \in [\alpha, \beta]$. Оскільки множина $\Gamma := \{(t, \varphi(t, \widehat{\mu}), \widehat{\mu}) : t \in [\alpha, \beta]\}$ лежить в Ω і є обмеженою та замкненою, тобто компактом, то існують $p > 0$ і $q > 0$ такі, що множина

$$G_{p,q} = \{(t, x, \mu) \colon t \in [\alpha, \beta], \quad |x - \varphi(t, \widehat{\mu})| \leqslant p, \quad |\mu - \widehat{\mu}| \leqslant q\}$$

лежить в Ω.

Покладемо

$$A_\mu = \{t \in [\alpha, \widehat{t}_0) \,\big|\, |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \widehat{\mu})| = p\},$$
$$B_\mu = \{t \in (\widehat{t}_0, \beta] \,\big|\, |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \widehat{\mu})| = p\}$$

для кожного μ, $|\mu - \widehat{\mu}| \leqslant q$.

Коли $A_\mu = \varnothing$, то з наслідків 3.3 і 3.4 п.3.5 (після теореми 3.9 про продовження розв'язку) випливає, що $a_\mu \leqslant \alpha$. Аналогічно, коли $B_\mu \neq \varnothing$, то $b_\mu \geqslant \beta$.

Покладемо

$\alpha_\mu = \sup A_\mu$, якщо $A_\mu \neq \varnothing$, і $\alpha_\mu = \alpha$, якщо $A_\mu = \varnothing$;

$\beta_\mu = \inf B_\mu$, якщо $B_\mu \neq \varnothing$, і $\beta_\mu = \beta$, якщо $B_\mu = \varnothing$.

Оскільки $\varphi(\widehat{t}_0, \mu) = \widehat{x}_0$ для всіх $\mu \in [\widehat{\mu} - q, \widehat{\mu} + q]$, то $\alpha \leqslant \alpha_\mu < \widehat{t}_0 < \beta_\mu \leqslant \beta$. Ясно, що $\alpha_{\widehat{\mu}} = \alpha$, $\beta_{\widehat{\mu}} = \beta$.

Оскільки для кожного $\mu \in [\widehat{\mu} - q, \widehat{\mu} + q]$ функція $x = \varphi(t, \mu)$ є розв'язком задачі (3.55), (3.56) при $t_0 = \widehat{t}_0$, $x_0 = \widehat{x}_0$, то

$$\varphi(t, \mu) = \widehat{x}_0 + \int\limits_{\widehat{t}_0}^{t} f(s, \varphi(s, \mu), \mu)\, ds, \quad |\mu - \widehat{\mu}| \leqslant q, \quad t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu].$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \widehat{\mu})| \leqslant & \left| \int\limits_{\widehat{t}_0}^{t} |f(s, \varphi(s, \mu), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu), \widehat{\mu})|\, ds \right| + \\ & + \left| \int\limits_{\widehat{t}_0}^{t} |f(s, \varphi(s, \mu), \widehat{\mu}) - f(s, \varphi(s, \widehat{\mu}), \widehat{\mu})|\, ds \right| \end{aligned} \tag{3.57}$$

для всіх $t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu]$.

Тепер зауважимо, що оскільки $f \in C(G_{p,q})$ і $G_{p,q}$ — компакт, то f — рівномірно неперервна функція на $G_{p,q}$. Отже, для всякого $\eta > 0$ існує $\nu(\eta) \in (0, q]$ таке, що

$$|f(t,x,\mu) - f(t,x,\widehat{\mu})| < \eta, \tag{3.58}$$

якщо $(t,x,\mu), (t,x,\widehat{\mu}) \in G_{p,q}$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \nu(\eta)$. Крім цього, оскільки f задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом на $G_{p,q}$, то знайдеться стала $L \geqslant 0$ така, що

$$|f(t,x,\widehat{\mu}) - f(t,\widetilde{x},\widehat{\mu})| \leqslant L|x - \widetilde{x}| \tag{3.59}$$

для будь-яких $(t,x,\widehat{\mu})$, $(t,\widetilde{x},\widehat{\mu})$ з множини $G_{p,q}$.

Оскільки

$$\big\{(t,\varphi(t,\mu),\mu) \,\big|\, |\mu - \widehat{\mu}| \leqslant q,\ t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu]\big\} \cup \{(t,\varphi(t,\mu),\widehat{\mu}) \colon\ |\mu - \widehat{\mu}| \leqslant q,\ t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu]\} \subset G_{p,q},$$

то з (3.57), на підставі (3.58),(3.59), випливає, що для будь-яких $\eta > 0$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \nu(\eta)$ і $t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu]$ виконується нерівність

$$|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\widehat{\mu})| < \eta(\beta - \alpha) + L\left|\int_{\widehat{t}_0}^{t} |\varphi(s,\mu) - \varphi(s,\widehat{\mu})|\, ds\right|. \tag{3.60}$$

Використовуючи лему Гронуолла-Белмана, з (3.60) отримаємо

$$|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\widehat{\mu})| \leqslant \eta(\beta - \alpha)e^{L(\beta-\alpha)}, \quad t \in [\alpha_\mu, \beta_\mu]. \tag{3.61}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Виберемо η таким, щоби

$$\eta(\beta - \alpha)e^{L(\beta-\alpha)} < \min\{\varepsilon, p\}, \tag{3.62}$$

і покладемо $\delta = \nu(\eta)$. Тоді з (3.61) і (3.62) випливає, що, коли $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta$, то $A_\mu = \varnothing$, $B_\mu = \varnothing$, тобто $\alpha_\mu = \alpha$, $\beta_\mu = \beta$, і

$$|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\widehat{\mu})| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

$\square$

Тепер можемо показати справедливість твердження про неперервну залежність розв'язку задачі (3.55),(3.56) від початкових даних та параметрів.

Теорема 3.12. *Нехай виконується умова ($\mathcal{F}$) і $(\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})$ — довільна точка з Ω. Тоді для будь-якого відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$ і як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0$ таке, що як тільки $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta$, $|x_0 - \widehat{x}_0| < \delta$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta$, то*

1) $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$,

2) $|\varphi(t, t_0, x_0, \mu) - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Доведення. Зробимо в задачі (3.55),(3.56) заміну $\tau = t - t_0$, $y = x - x_0$. У результаті прийдемо до задачі

$$y' = g(\tau, y, t_0, x_0, \mu), \quad (\tau, y, t_0, x_0, \mu) \in \widetilde{\Omega}, \tag{3.63}$$

$$y(0) = 0, \tag{3.64}$$

де $g(\tau, y, t_0, x_0, \mu) = f(\tau + t_0, y + x_0, \mu)$, $\widetilde{\Omega} = \{(\tau, y, t_0, x_0, \mu) \,\big|\, (t_0, x_0, \mu) \in \Omega,\ (\tau + t_0, y + x_0, \mu) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{k+4}$.

Легко показати, що $\widetilde{\Omega}$ — відкрита множина в $\mathbb{R}^{k+4}$ і функція g є неперервною та задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом локально. Отже, задача (3.63)), (3.64) має єдиний непродовжуваний розв'язок, який позначатимемо через $y = \psi(\tau, t_0, x_0, \mu)$, $\tau \in (c_{t_0,x_0,\mu}, d_{t_0,x_0,\mu})$.

Відмітимо, що

$$\varphi(t, t_0, x_0, \mu) = \psi(t - t_0, t_0, x_0, \mu) + x_0,$$
$$a_{t_0,x_0,\mu} = c_{t_0,x_0,\mu} + t_0, \quad b_{t_0,x_0,\mu} = d_{t_0,x_0,\mu} + t_0$$

для будь-яких точок $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$.

Нехай $[\alpha, \beta]$ — довільний відрізок з інтервалу $(a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$, а $\varepsilon > 0$ — будь-яке число. Виберемо число $\delta_1 > 0$ і відрізок $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}] \subset (c_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, d_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$ такими, щоби $[\alpha - t_0, \beta - t_0] \subset [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}] \subset (c_{t_0,x_0,\mu}, d_{t_0,x_0,\mu})$, як тільки $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta_1$, $|x_0 - \widehat{x}_0| < \delta_1$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta_1$. Це можна зробити, оскільки $[\alpha - \widehat{t}_0, \beta - \widehat{t}_0] \subset (c_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, d_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$.

Зауважимо, що задачу (3.63),(3.64) можна трактувати, як задачу (3.55),(3.56) з фіксованими початковими даними і параметрами (t_0, x_0, μ). А отже, для задачі (3.63),(3.64) справедливе твердження, аналогічне твердженню леми 3.2. Згідно з цим твердженням існує $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ таке, що, як тільки $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta_2$, $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta_2$, $|x_0 - \widehat{x}_0| < \delta_2$, то

$$|\psi(\tau, t_0, x_0, \mu) - \psi(\tau, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon/3$$

для всіх $\tau \in [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$, звідки

$$|\psi(t - t_0, t_0, x_0, \mu) - \psi(t - t_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon/3 \tag{3.65}$$

для кожного $t \in [\alpha, \beta]$.

Оскільки функція $y = \psi(\tau, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})$ рівномірно неперервна на $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$, то існує $\delta_3 \in (0, \delta_2]$ таке, що, як тільки $|\tau_1 - \tau_2| < \delta_3$, $\{\tau_1, \tau_2\} \subset [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$, то

$$|\psi(\tau_1, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}) - \psi(\tau_2, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon/3.$$

А це означає, що коли $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta_3$, то

$$|\psi(t - t_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}) - \psi(t - \widehat{t}_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| < \varepsilon/3 \tag{3.66}$$

для кожного $t \in [\alpha, \beta]$.

Тепер зауважимо, що

$$\begin{aligned} |\varphi(t, t_0, x_0, \mu) - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| &\leqslant |\psi(t - t_0, t_0, x_0, \mu) - \psi(t - \widehat{t}_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| + \\ &+ |x_0 - \widehat{x}_0| \leqslant |\psi(t - t_0, t_0, x_0, \mu) - \psi(t - t_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| + \\ &+ |\psi(t - t_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}) - \psi(t - \widehat{t}_0, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| + |x_0 - \widehat{x}_0|. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Таким чином, взявши $\delta = \min\{\delta_3, \varepsilon/3\} > 0$, з (3.65)–(3.67) отримаємо умову 2) з формулювання теореми для всіх $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$ таких, що $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta$, $|x_0 - \widehat{x}_0| < \delta$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta$. □

З теореми 3.12 випливає таке твердження.

Наслідок 3.7. *Нехай виконується умова ($\mathcal{F}$). Тоді множина*

$$Q{:=}\{(t,t_0,x_0,\mu)\colon (t_0,x_0,\mu)\in\Omega,\ t\in(a_{t_0,x_0,\mu},b_{t_0,x_0,\mu})\}$$

є областю (тобто відкритою і зв'язною множиною) в просторі $\mathbb{R}^{k+3}$ і функція $x=\varphi(t,t_0,x_0,\mu)$, $(t,t_0,x_0,\mu)\in Q$, — неперервна за сукупністю своїх аргументів.

Доведення. З теореми 3.12 випливає, що Q є відкритою множиною. Покажемо, що Q є зв'язною множиною. Нехай $(\overset{1}{t},\overset{1}{t}_0,\overset{1}{x}_0,\overset{1}{\mu})$ і $(\overset{2}{t},\overset{2}{t}_0,\overset{2}{x}_0,\overset{2}{\mu})$ — довільні точки з Q. Очевидно, що точки $(\overset{1}{t},\overset{1}{t}_0,\overset{1}{x}_0,\overset{1}{\mu})$ і $(\overset{1}{t}_0,\overset{1}{t}_0,\overset{1}{x}_0,\overset{1}{\mu})$, $(\overset{2}{t},\overset{2}{t}_0,\overset{2}{x}_0,\overset{2}{\mu})$ і $(\overset{2}{t}_0,\overset{2}{t}_0,\overset{2}{x}_0,\overset{2}{\mu})$ можна з'єднати відрізками, що лежать в Q. Нехай неперервна лінія $\{(t_0(\tau),x_0(\tau),\mu(\tau))\colon \tau\in[\tau_1,\tau_2]\}$ лежить в області Ω і з'єднує точки $(\overset{1}{t}_0,\overset{1}{x}_0,\overset{1}{\mu})$ і $(\overset{2}{t}_0,\overset{2}{x}_0,\overset{2}{\mu})$, зокрема $\overset{1}{t}_0= t_0(\tau_1)$, $\overset{1}{x}_0= x_0(\tau_1)$, $\overset{1}{\mu}= \mu(\tau_1)$, $\overset{2}{t}_0= t_0(\tau_2)$, $\overset{2}{x}_0= x_0(\tau_2)$, $\overset{2}{\mu}= \mu(\tau_2)$ (така лінія існує, оскільки Ω — зв'язна множина). З означення Q випливає, що неперервна лінія $\{(t_0(\tau),t_0(\tau),x_0(\tau),\mu(\tau)) : \tau\in[\tau_1,\tau_2]\}$, лежить в Q і з'єднує точки $(t_0^1,t_0^1,x_0^1,\mu^1)$ та $(t_0^2,t_0^2,x_0^2,\mu^2)$. Отже, ми показали, що Q — зв'язна множина, а значить, враховуючи вищесказане, Q — область. Неперервність функції $x=\varphi(t,t_0,x_0,\mu)$ на Q безпосередньо випливає з теореми 3.12. □

3.8. Диференційовність за початковими даними та параметрами розв'язку задачі Коші для ЗДР

Розглянемо питання про диференційовність розв'язку задачі (3.46), (3.47) за параметром. З рівностей (3.50), (3.51) при $\mu=\mu_0+\triangle\mu$ маємо

$$\varphi(t,\mu_0{+}\triangle\mu){-}\varphi(t,\mu_0)=\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi(s,\mu_0{+}\triangle\mu),\mu_0{+}\triangle\mu){-}f(s,\varphi(s,\mu_0),\mu_0)]\,ds,\quad t\in(a,b). \tag{3.68}$$

Покладемо в (3.68) $\mu=\mu_0+\triangle\mu$ і використаємо лему 3.1 для перетворення правої частини (3.68)

$$f(s,\varphi(s,\mu_0+\triangle\mu),\mu_0+\triangle\mu)-f(s,\varphi(s,\mu_0),\mu_0)=$$

$$=\Big(\int_0^1\partial_x f(s,\varphi(s,\mu_0){+}\tau(\varphi(s,\mu_0{+}\triangle u){-}\varphi(s,\mu_0)),\mu_0{+}\tau\triangle\mu)\,d\mu\Big)(\varphi(s,\mu_0{+}\triangle u){-}\varphi(s,\mu_0)){+}$$

$$+\Big(\int_0^1\partial_\mu f(s,\varphi(s,\mu_0)+\tau(\varphi(s,\mu_0+\triangle u)-\varphi(s,\mu_0)),\mu_0+\tau\triangle\mu)\,d\tau\Big)\triangle\mu. \tag{3.69}$$

Поділивши (3.68) на $\triangle\mu$ і врахувавши (3.69), отримаємо

$$\frac{\varphi(t,\mu_0+\triangle\mu)-\varphi(t,\mu_0)}{\triangle\mu}=\int_{t_0}^{t}\Big[p(s,\triangle\mu)\frac{\varphi(s,\mu_0+\triangle\mu)-\varphi(s,\mu_0)}{\triangle\mu}{+}q(s,\triangle\mu)\Big]\,ds,\quad t\in(a,b), \tag{3.70}$$

де

$$p(s,\triangle\mu):=\int_0^1\partial_x f(s,\varphi(s,\mu_0)+\tau(\varphi(s,\mu_0+\triangle u)-\varphi(s,\mu_0)),\mu_0+\tau\triangle\mu)\,d\tau,$$

$$q(t,\triangle\mu) := \int\limits_0^1 \partial_\mu f(s,\varphi(s,\mu_0)+\tau(\varphi(s,\mu_0+\triangle u)-\varphi(s,\mu_0)),\mu_0+\tau\triangle\mu)\,d\tau,$$

$t\in(a,b)$, $\triangle\mu$ таке, що $\mu_0+\triangle\mu\in(c,d)$.

Покладемо

$$u(t,\triangle\mu) := \frac{\varphi(t,\mu_0+\triangle\mu)-\varphi(t,\mu_0)}{\triangle\mu},\quad t\in(a,b),\quad \triangle\mu\neq 0 \ \text{ і } \ \mu_0+\triangle\mu\in(c,d).$$

З (3.70) випливає, що

$$u'(t,\triangle\mu) = p(t,\triangle\mu)u(t,\triangle\mu)+q(t,\triangle\mu), \tag{3.71}$$

$$u(0,\triangle\mu)=0. \tag{3.72}$$

Домножимо рівність (3.71) на $e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(r,\triangle\mu)\,dr}$ і перепишемо отриману рівність так:

$$\Big(e^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(r,\triangle\mu)\,dr}u(s,\triangle\mu)\Big)'_s = e^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(r,\triangle\mu)\,dr}q(s,\triangle\mu),\quad s\in(a,b). \tag{3.73}$$

Проінтегрувавши рівність за s від t_0 до t з врахуванням (3.72), отримаємо

$$u(t,\triangle\mu) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(r,\triangle\mu)\,dr}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(r,\triangle\mu)\,dr}q(s,\triangle\mu)\,ds \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{s}^{t} p(r,\triangle\mu)\,dr}q(s,\triangle\mu)\,ds,\quad t\in(a,b),\ \triangle\mu\neq 0\ i\ \mu_0+\triangle\mu\in(c,d). \tag{3.74}$$

Оскільки

$$\lim_{\triangle\mu\to 0}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{s}^{t} p(r,\triangle\mu)\,dr}q(s,\triangle\mu)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{s}^{t} p_0(r)\,dr}q_0(s)\,ds,\quad t\in(a,b),$$

де $p_0(t)=\partial_x f(t,\varphi(t,\mu_0),\mu_0),\ t\in(a,b)$, $q_0(t)=\partial_\mu f(t,\varphi(t,\mu_0),\mu_0),\ t\in(a,b)$, то з (3.74) маємо

$$\partial_\mu\varphi(t,\mu_0) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{s}^{t} p_0(r)\,dr}q_0(s)\,ds,\quad t\in(a,b). \tag{3.75}$$

Диференціюючи (3.75) за t отримаємо

$$\big(\partial_\mu\varphi(t,\mu_0)\big)' = q_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{s}^{t} p_0(r)\,dr}q_0(s)\,ds\cdot p_0(t) \equiv$$

$$\equiv \partial_x f(t,\varphi(t,\mu_0),\mu_0)\cdot\partial_\mu\varphi(t,\mu_0)+\partial_\mu f(t,\varphi(t,\mu_0),\mu_0),\quad t\in(a,b). \tag{3.76}$$

Також з (3.75) при $t=t_0$ маємо

$$\partial_\mu\varphi(t_0,\mu_0)=0. \tag{3.77}$$

Отже, з (3.76) і (3.77) можемо зробити висновок, що функція $y = \partial_\mu \varphi(t, \mu_0)$, $t \in (a, b)$, є розв'язком (єдиним) задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \partial_x f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0) y + \partial_\mu f(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0), \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

****

Будемо розглядати питання про диференційовність розв'язку задачі Коші для рівняння (3.55) за початковими даними та параметрами. Але спочатку встановимо одне допоміжне твердження.

Лема 3.3 (Адамар)**.** *Нехай функція $g(s, y)$ визначена для $(s, y) \in D$, де D — область в просторі $\mathbb{R}^{l+1} = \big\{(s, y) \colon s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^l\big\}$, яка є за змінною y опуклою і неперервно-диференційовною в D. Тоді для довільних точок (s, y^1) і (s, y^2) з D*

$$g(s, y^1) - g(s, y^2) = \sum_{i=1}^{l} \Bigg(\int_0^1 \frac{\partial g(s, \tau y^1 + (1-\tau) y^2)}{\partial y_i} d\tau \Bigg) (y_i^1 - y_i^2).$$

Доведення. Нехай (s, y^1), (s, y^2) — довільні фіксовані точки з D. Розглянемо функцію

$$h(\tau) = g\big(s, \tau y^1 + (1-\tau) y^2\big), \quad \tau \in [0, 1].$$

Очевидно, що $h(0) = g(s, y^2)$, $h(1) = g(s, y^1)$. На підставі формули диференціювання складеної функції багатьох змінних маємо

$$g(s, y^1) - g(s, y^2) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \Bigg(\int_0^1 \frac{\partial g(s, \tau y^1 + (1-\tau) y^2)}{\partial y_i}\, d\tau \Bigg) (y_i^1 - y_i^2).$$

□

Теорема 3.13. *Нехай $f \in C^1(\Omega)$. Тоді функція $x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu)$, $(t, t_0, x_0, \mu) \in Q$, є неперервно-диференційовною за всіма своїми аргументами, причому*

1) *для довільної точки $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$ та значення $i \in \{1, \ldots, k\}$ функція $y = \dfrac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial \mu_i}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком задачі Коші*

$$y' = \frac{f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \mu)}{\partial x} y + \frac{f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \mu)}{\partial \mu_i}, \tag{3.78}$$

$$y(t_0) = 0; \tag{3.79}$$

2) *для довільної точки $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$ функція $y = \dfrac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial x_0}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком задачі Коші*

$$y' = \frac{f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \mu)}{\partial x} y, \tag{3.80}$$

$$y(t_0) = 1; \tag{3.81}$$

3) *для довільної точки* $(t_0, x_0, \mu) \in \Omega$ *функція* $y = \dfrac{\partial\varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial t_0}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, *є розв'язком задачі Коші*

$$y' = \frac{\partial f_x(t, \varphi(t, t_0, x_0, \mu), \mu)}{\partial x} y, \tag{3.82}$$

$$y(t_0) = -f(t_0, x_0, \mu). \tag{3.83}$$

Спочатку встановимо таке твердження.

Лема 3.4. *Нехай функції* f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mu_k}$ *є неперервними на* Ω. *Тоді функція* $x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu), (t, t_0, x_0, \mu) \in Q$, *має неперервні частинні похідні*

$$x = \frac{\partial\varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial\mu_i}, \quad (t, t_0, x_0, \mu) \in Q,\ i \in \{1, ..., k\}.$$

Доведення. Для зручності викладок (не зменшуючи загальності) будемо вважати, що $k = 1$, тобто $\mu \in \mathbb{R}$. Нехай $(\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})$ — довільна точка області Ω. Візьмем довільний відрізок $[\alpha, \beta] \subset (a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$ такий, що $\widehat{t}_0 \in (\alpha, \beta)$.

З леми 3.2 випливає, що існують числа $p, r > 0$ такі, що

$$\{(t, \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu} + \Delta\mu), \widehat{\mu} + \Delta\mu) \,|\, t \in [\alpha, \beta],\ |\Delta\mu| \leqslant r\} \subset$$
$$\subset G_{p,r} := \{(t, x, \widehat{\mu} + \Delta\mu) \,|\, t \in [\alpha, \beta],\ |x - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})| \leqslant p,\ |\Delta\mu| \leqslant r\} \subset \Omega.$$

Оскільки значення $\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}$ в цьому доведенні не змінюватимуться, то далі писатимемо $x = \psi(t, \Delta\mu)$ замість $x = \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu} + \Delta\mu)$.

З того, що функції $x = \psi(t, 0)$, $x = \psi(t, \Delta\mu)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ є розв'язками задачі (3.55),(3.56) відповідно при $\mu = \widehat{\mu}$ та $\mu = \widehat{\mu} + \Delta\mu$ $(0 < |\Delta\mu| \leqslant r)$, та згідно з лемою 3.3 отримаємо рівності

$$\psi'(t, \Delta\mu) - \psi'(t, 0) = M(t, \Delta\mu)(\psi(t, \Delta\mu) - \psi(t, 0)) + K(t, \Delta\mu)\Delta\mu \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \tag{3.84}$$

$$\psi(t_0, \Delta\mu) - \psi(t_0, 0) = 0, \tag{3.85}$$

де

$$M(t, \Delta\mu) = \int_0^1 f_x\big(t, \tau\psi(t, \Delta\mu) + (1 - \tau)\psi(t, 0), \widehat{\mu} + \tau\Delta\mu\big)\, d\tau,$$

$$K(t, \Delta\mu) = \int_0^1 f_\mu\big(t, \tau\psi(t, \Delta\mu) + (1 - \tau)\psi(t, 0), \widehat{\mu} + \tau\Delta\mu\big)\, d\tau.$$

Поділивши рівності (3.84),(3.85) на $\Delta\mu \neq 0$, приходимо до висновку, що функція

$$y = u(t, \Delta\mu), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

де

$$u(t, \Delta\mu) = \frac{\varphi(t, \Delta\mu) - \varphi(t, 0)}{\Delta\mu}, \quad t \in (\alpha, \beta), \quad \Delta\mu \neq 0, \quad 0 < |\Delta\mu| < r,$$

є розв'язком задачі Коші

$$y' = M(t,\Delta\mu)y + K(t,\Delta\mu), \quad (t,y,\Delta\mu) \in (\alpha,\beta)\times\mathbb{R}\times(-r,r), \tag{3.86}$$
$$y(t_0) = 0, \tag{3.87}$$

коли $\Delta\mu \in (-r,0)\cup(0,r)$.

Зауважимо, що рівняння (3.86) є лінійним з неперервними коефіцієнтом і вільним членом. Нехай $y = \chi(t,\Delta\mu)$, $t \in (\alpha,\beta)$, — непродовжуваний розв'язок задачі (3.86),(3.87) для кожного $\Delta\mu$, $|\Delta\mu| < r$ (див. зауваження п.3.5). До задачі (3.86),(3.87) можна застосувати лему 3.2. З неї отримаємо, що функція $y = \chi(t,\Delta\mu)$, $(t,\Delta\mu) \in (\alpha,\beta)\times(-r,r)$, є неперервною на множині $(\alpha,\beta)\times(-r,r)$. В силу теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо рівність $\chi(t,\Delta\mu) = u(t,\Delta\mu)$, $t \in (\alpha,\beta)$, $\Delta\mu \in (-q,0)\cup(0,q)$. Звідси випливає, що

$$u(t,\Delta\mu) \to \chi(t,0) \quad \text{при} \quad \Delta\mu \to 0$$

для кожного $t \in (\alpha,\beta)$, а це означає, що існує

$$\frac{\partial\psi(t,0)}{\partial\mu} = \lim_{\Delta\mu\to 0}\frac{\psi(t,\Delta\mu)-\psi(t,0)}{\Delta\mu}$$

для кожнго $t \in (\alpha,\beta)$ і

$$\frac{\partial\psi(t,0)}{\partial\mu} = \chi(t,0) \quad \forall t \in (\alpha,\beta).$$

Оскільки $\frac{\partial\psi(t,0)}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi(t,\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu})}{\partial\mu}$, $t \in (\alpha,\beta)$, і $[\alpha,\beta]$ — довільний відрізок з $(a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$, то вираз $\frac{\partial\varphi(t,\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu})}{\partial\mu}$ визначений для всіх $t \in (a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$. Також зі сказаного випливає, що функція $y = \frac{\partial\varphi(t,\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu})}{\partial\mu}$, $t \in (\alpha,\beta)$, є розв'язком задачі (3.86),(3.87) при $\Delta\mu = 0$. Звідси, враховуючи, що $M(t,0) = f_x(t,\varphi(t,\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}),\widehat{\mu})$, $K(t,0) = f_\mu(t,\varphi(t,\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}),\widehat{\mu})$, і довільність відрізка $[\alpha,\beta] \subset (a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$, приходимо до висновку, що функція $y = \frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0,\mu)}{\partial\mu}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком задачі (3.78),(3.79) при $t_0 = \widehat{t}_0$, $x_0 = \widehat{x}_0$, $\mu = \widehat{\mu}$. Оскільки точка $(\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}) \in \Omega$ довільна, то з наслідку 3.7 теореми 3.12 (стосовно задачі (3.78),(3.79)) випливає неперервність функції $y = \frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0,\mu)}{\partial\mu}$, $(t,t_0,x_0,\mu) \in Q$. □

Доведення теореми 3.13. Зробивши в задачі (3.55),(3.56) заміну $y = x - x_0$, $\tau = t - t_0$, прийдемо до задачі (3.63),(3.64). Ця задача є аналогічною до задачі (3.55),(3.56), але має фіксовані початкові дані і параметрами є (t_0,x_0,μ). В силу леми (3.4) розв'язок $y = \psi(\tau,t_0,x_0,\mu)$ задачі (3.63),(3.64) є неперервно диференційовним за параметрами (t_0,x_0,μ) і змінною τ. Оскільки $\varphi(t,t_0,x_0,\mu) = \psi(t-t_0,t_0,x_0,\mu) + x_0$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, то $\varphi \in C^1(Q)$. Так як $x = \varphi(t,t_0,x_0,\mu)$ є розв'язком задачі (3.55),(3.56) для будь-яких $(t_0,x_0,\mu) \in \Omega$, то

$$\varphi(t,t_0,x_0,\mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,t_0,x_0,\mu),\mu)\,ds \tag{3.88}$$

для всіх $(t,t_0,x_0,\mu) \in Q$.

Ліва і права частини (3.88) допускають диференціювання за параметрами. Для кожного $i \in \{1,\ldots,k\}$, продиференціювавши тотожність (3.88) за μ_i, приходимо до висновку, що функція $y = \frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0,\mu)}{\partial\mu_i}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком інтегрального рівняння

$$y = \int\limits_{t_0}^{t} [f_x(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)y + f_{\mu_i}(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)]\, ds. \tag{3.89}$$

Але це рівняння є еквівалентним задачі (3.78),(3.79). Оскільки ця задача має єдиний розв'язок, то функція $y = \frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0,\mu)}{\partial\mu_i}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, і є цим єдиним розв'язком ($i \in \{1, \ldots, k\}$). Зауважимо, що цей результат раніше одержано при доведенні леми 3.4.

Цілком аналогічно (диференціюючи рівність (3.88) за x_0) встановлюємо, що функція $y = \frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0,\mu)}{\partial x_0}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком задачі (3.80),(3.81).

Тепер продиференціюємо (3.88) за t_0. В результаті отримаємо рівність

$$\frac{\partial\varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial t_0} = -f(t_0, x_0, \mu) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, \varphi(s, t_0, x_0, \mu), \mu)}{\partial x}\, ds,$$

яка означатиме, що функція $y = \dfrac{\partial\varphi(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial t_0}$, $t \in (a_{t_0,x_0,\mu}, b_{t_0,x_0,\mu})$, є розв'язком задачі (3.82),(3.83). □

Зауваження 3.8. Якщо нас цікавить диференційовність функції $x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu)$ тільки за змінними x_0 і μ, то, як випливає з доведення теореми 3.13, досить вимагати, щоби функції f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mu_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \mu_k}$ були неперервними.

Наслідок 3.8. *Якщо функція $f(t, x, \mu), (t, x, \mu) \in \Omega$, є ν раз неперервно-диференційовною за змінними x і μ, то функція $x = \varphi(t, t_0, x_0, \mu)$ є ν раз неперервно-диференційовна за змінними x_0 і μ.*

Доведення. Для доведення наслідку досить застосувати відповідну кількість раз теорему 3.13 з врахуванням зауваження 3.8. □

Зауваження 3.9. Нехай виконуються умови наслідку 3.8 і (для простоти формулювання результату) $k = 1$. Тоді для довільної точки $(\widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu}) \in \Omega$ та будь-якого відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}}, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}_0,\widehat{\mu}})$ існує число $\delta > 0$ таке, що

$$\varphi(t, \widehat{t}_0, x_0, \mu) = \sum_{m+l \leqslant \nu} \varphi_{ml}(t, \widehat{t}_0) \cdot (x_0 - \widehat{x}_0)^m (\mu - \widehat{\mu})^l + o\big((|x_0 - \widehat{x}_0| + |\mu - \widehat{\mu}|)^\nu\big),$$

якщо $t \in [\alpha, \beta]$, $|x_0 - \widehat{x}_0| < \delta$, $|\mu - \widehat{\mu}| < \delta$. Тут

$$\varphi_{ml}(t, \widehat{t}_0) = \frac{\partial\varphi^{m+l}(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_0, \widehat{\mu})}{(\partial x_0)^m \partial\mu^l}, \quad m \geqslant 0, \quad l \geqslant 0.$$

Це випливає з доведеного вище і формули Тейлора.

Приклад 3.2. Знайти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$, якщо x – розв'язок задачі:

$$\begin{cases} x' = 2x + \mu e^x, \\ x(0) = \mu^2, \end{cases} \tag{3.90}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр.
Розв'язання. З теореми про існування непродовжуваного розв'язку задачі Коші для ЗДР випливає, що для будь-якого $\mu \in \mathbb{R}$ задача (3.90) має єдиний непродовжуваний розв'язок

$$x = \varphi(t, \mu), \quad t \in (a_\mu, b_\mu),$$

де $-\infty \leq a_\mu < b_\mu \leq +\infty$.

Позначимо $\Omega := \{(t, \mu) | \mu \in \mathbb{R}, t \in (a_\mu, b_\mu)\}$ і підставимо його в задачу (3.90):

$$\begin{cases} \varphi'(t, \mu) = 2\varphi(t, \mu) + \mu e^{\varphi(t,\mu)}, & (t, \mu) \in \Omega \\ \varphi(0, \mu) = \mu^2, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.91}$$

Продиференціюємо отримані тотожності за μ , враховуючи, що

$$\frac{\partial(\varphi'(t, \mu))}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}\right)', \quad (t, \mu) \in \Omega$$

(тут і далі через $(...)'$ позначатимемо похідну за змінною t). У результаті отримаємо тотожності

$$\left(\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}\right)' = 2\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu} + e^{\varphi(t,\mu)} + \mu e^{\varphi(t,\mu)}\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}, \quad (t, \mu) \in \Omega. \tag{3.92}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}\right|_{t=0} = 2\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{3.93}$$

Покладемо $\mu = 0$ в рівностях (3.92) і (3.93) та позначимо

$$u(t) := \left.\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}, \quad t \in (a_0, b_0).$$

Тоді отримаємо

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) + e^{\varphi(t,0)}, & t \in (a_0, b_0), \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.94}$$

Знайдемо $\varphi(t, 0),\ t \in (a_0, b_0)$, як розв'язок задачі (3.90) при $\mu = 0$, тобто задачі

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3.95}$$

Легко переконатися, що єдиним розв'язком задачі (3.95) є функція $x = 0,\ t \in (-\infty, +\infty)$, тобто $\varphi(t, 0) = 0,\ t \in (-\infty, +\infty)$, бо повний загальний розв'язок рівняння (3.95) є функція $x = Ce^{2t}$, а початкова умова задачі (3.95) виконується при $C = 0$. Отже, шукана функція u, яка задовольняє рівняння (3.94) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} y' = 2y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.96}$$

Рівняння (3.96) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а отже,

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y + \frac{1}{2}} = 2dt,\ y = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|y+\frac{1}{2}| = 2t + \ln|C|,\ C\neq 0,\quad y=-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y = Ce^{2t}-\frac{1}{2},\ t\in(-\infty,+\infty),\ C\in\mathbb{R}$$

– повний загальний розв'язок рівняння (3.96). Звідси та початкової умови задачі (3.96) маємо

$$0 = C - \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad C = \frac{1}{2},$$

тобто

$$y = \frac{1}{2}(e^{2t}-1),\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

– розв'язок задачі (3.96), а отже, функція

$$u(t) = \frac{1}{2}(e^{2t}-1),\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

і є шукана похідна $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

$\square$

Приклад 3.3. Знайти $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\Big|_{x_0=1}$, якщо x – розв'язок задачі

$$x' = 2x^2, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

де $x_0\in\mathbb{R}$ –довільне задане.
Розв'язування. Нехай $x=\varphi(t,x_0)$, $t\in(a_{x_0},b_{x_0})$ – непродовжуваний розв'язок задачі (1),(2) для довільного значення $x_0\in\mathbb{R}$. Позначимо $\Omega := \{(t,x_0)|x_0\in\mathbb{R},\ t\in(a_{x_0},b_{x_0})\}$.

Підставимо цей розв'язок в рівняння (1) і умову (2):

$$\begin{cases} \varphi'(t,x_0) &= 2(\varphi(t,x_0))^2,\quad (t,x_0)\in\Omega, \qquad (3)\\ \varphi(0,x_0) &= x_0,\quad x_0\in\mathbb{R} \qquad\qquad (4).\end{cases}$$

Продиференціюємо тотожності (3) і (4) за x_0, враховуючи, що

$$\frac{\partial\varphi'(t,x_0)}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial\varphi(t,x_0)}{\partial x_0}\right)',\quad (t,x)\in\Omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi(0,x_0)}{\partial x_0} = 1,\quad x_0\in\mathbb{R} \tag{6}$$

Покладемо в (5) і (6) $x_0 = 1:$

$$\left(\frac{\partial\varphi(t,1)}{\partial x_0}\right)' = 4\varphi(t,1)\frac{\partial\varphi(t,1)}{\partial x_0},\quad t\in(a_1,b_1) \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi(0,1)}{\partial x_0} = 1, \tag{8}$$

Знайдемо $\varphi(t,1)$, $t\in(a_1,b_1)$. Для цього в рівності (3) і (4) покладемо $x_0=1$. Отже, приходимо до висновку, що функція $z=\varphi(t,1)$, $t\in(a_1,b_1)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' &= 2z^2, \qquad (9)\\ z(0) &= 1. \qquad (10)\end{cases}$$

Маємо
$$\frac{dz}{dt} = 2z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2} = 2dt,\, z = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = 2t - C;$$
$$z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{-2t}, z = 0.$$

Із отриманої сім'ї всеможливих розв'язків рівняння (9) виберемо той, який задовольняє умову (10):
$$1 = \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = 1.$$

Отже, маємо
$$z = \frac{1}{1-2t} \equiv \frac{-1}{2(t-\frac{1}{2})} \quad t \in (-\infty, \frac{1}{2}),$$
розв'язок задачі (9),(10), тобто
$$\varphi(t,1) = \frac{1}{1-2t}, \quad t \in (-\infty, \frac{1}{2}).$$

Врахувавши знайдений вираз
$$\varphi(t,1), \quad t \in (-\infty, \frac{1}{2})$$
з виразу (7) і (8) отримуємо задачу Коші для знаходження функції
$$y = \frac{\varphi(t,1)}{\partial x_0}, \quad t \in (-\infty, \frac{1}{2}):$$
$$\begin{cases} y' &= \dfrac{4}{1-2t}y, \qquad (11) \\ y(0) &= 1. \qquad\qquad (12) \end{cases}$$

Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (11):
$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{1-2t}y \quad |:y|\cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad y = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{4dt}{1-2t} \quad \Leftrightarrow$$
$$\ln|y| = -2\ln|2t-1| + \ln|C|, \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{C}{(2t-1)^2}$$
– повний загальний розв'язок даного рівняння. Звідси та умови (12) маємо
$$1 = \frac{C}{(2\cdot 0 - 1)^2} \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Отже, маємо $y = \dfrac{1}{(2t-1)^2}$, тобто
$$\frac{\partial\varphi(t,1)}{\partial x_0} = \frac{1}{(2t-1)^2}, \quad t \in (-\infty, \frac{1}{2}).$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи. Знайти похідні за параметром і початковими даними розв'язків задачі Коші для ЗДР:

1.
$$\begin{cases} x' = 2(x-1)^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial x_0}|_{x_0=1}$.

2.
$$\begin{cases} x' = x^2 - \mu^2 \cos x, \\ x(0) = \mu + 1. \end{cases}$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$.

3.
$$\begin{cases} x' = \mu x^2 + 2t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$.

4.
$$\begin{cases} x' = x + \mu \cos x, \\ x(0) = \mu. \end{cases}$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$.

3.9. Існування повного загального розв'язку ЗДР першого порядку

Розглянемо рівняння (3.1). Під *повним загальним розв'язком цього рівняння в деякому околі $D_* \subset D$ точки $(t_*, x_*) \in D$* розумітимемо функцію $x = \psi(t, C)$, $(t, C) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, таку, що для довільного значення C_0 такого, що множина $I_{C_0} := \{t \,|\, (t, C_0) \in \Omega\}$ непорожня і зв'язна, функція $x = \psi(t, C_0)$, $t \in I_{C_0}$, є розв'язком рівняння (3.1), та для будь-якого розв'язку $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, цього рівняння, графік якого лежить в D_*, маємо рівність $\varphi(t) = \psi(t, C_1)$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$ для деякого C_1.

Теорема 3.14. *Нехай функція f є неперервною і задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом локально. Тоді для будь-якої фіксованої точки області D існує її окіл в D такий, що рівняння* (3.1) *в цьому околі має повний загальний розв'язок.*

Доведення. Нехай $(t_*, x_*) \in D$ — яка-небудь фіксована точка області D і $x = \varphi(t, t_*, x_*)$, $t \in (a_{t_*,x_*}, b_{t_*,x_*})$, — непродовжуваний розв'язок рівняння (3.1), що задовольняє початкову умову
$$x(t_*) = x_*.$$
Виберемо який-небудь відрізок $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_*,x_*}, b_{t_*,x_*})$. За теоремою про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $C \in (x_* - \delta, x_* + \delta) := (x_* - \delta, x_* + \delta)$, маємо вкладення $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_*,C}, b_{t_*,C})$, де $(a_{t_*,C}, b_{t_*,C})$ — область визначення непродовжуваного розв'язку рівняння (3.1), який задовольняє початкову умову
$$x(t_*) = C.$$
Покладемо
$$D_* := \big\{(t, x) \,\big|\, t \in (\alpha, \beta), \quad x = \varphi(t, t_*, C), \quad \text{де } C \text{ пробігає всі значення з } (x_* - \delta, x_* + \delta)\big\},$$

тобто D_* — це об'єднання графіків звужень функцій $x = \varphi(t, t_*, C)$ на інтервал (α, β) для всіх $C \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$, або ще по іншому

$$D_* := \bigcup_{C \in (x_* - \delta, x_* + \delta)} \{(t, x) \colon t \in (\alpha, \beta), \quad x = \varphi(t, t_*, C)\}.$$

Покажемо, що D_* — відкрита множина. Нехай (t_0, x_0) — яка-небудь точка множини D_*. В силу означення D_* та єдиності непродовжуваного розв'язку задачі Коші для рівняння (3.1) існує $C_0 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ таке, що $C_0 = \varphi(t_*, t_0, x_0)$ і $(a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0}) = (a_{t_*,C_0}, b_{t_*,C_0})$, а отже, $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0})$. Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що коли $|C - C_0| < \varepsilon$, то $C \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$. З теореми про неперервну залежність від початкових даних розв'язку задачі Коші для ЗДР випливає існування значення $\delta_1 > 0$ такого, що, як тільки $|t_1 - t_0| < \delta_1$ і $|x_1 - x_0| < \delta_1$, то $t_1 \in (\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_1,x_1}, b_{t_1,x_1})$ і $|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$. Отже, маємо

$$|\varphi(t_*, t_1, x_1) - \varphi(t_*, t_0, x_0)| = |C_1 - C_0| < \varepsilon,$$

де $C_1 := \varphi(t_*, t_1, x_1)$. Це означає, що $C_1 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$, тобто $x_1 = \varphi(t_1, t_*, C_1)$, звідки випливає, що $(t_1, x_1) \in D_*$.

Таким чином, ми показали, що D_* — відкрита множина. Легко довести, що D_* — зв'язна множина, а отже, D_* — область в $\mathbb{R}^2$, тобто є околом точки (t_*, x_*).

Покладемо

$$\psi(t, C) := \varphi(t, t_*, C), \quad t \in (\alpha, \beta), \quad C \in (x_* - \delta, x_* + \delta),$$

і покажемо, що функція

$$x = \psi(t, C), \quad (t, C) \in (\alpha, \beta) \times (x_* - \delta, x_* + \delta),$$

є загальним розв'язком рівняння (3.1), якщо розглядати це рівняння на D_*. Справді, для будь-якого конкретного значення $C_* \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ функція $x = \psi(t, C_*)$ (за означенням) є розв'язком рівняння (3.1).

Нехай $x = \omega(t)$, $t \in \langle a, b \rangle \subset (\alpha, \beta)$, — розв'язок рівняння (3.1), графік якого лежить в D_*. За означенням D_* і в силу теореми про єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (3.1) маємо $\omega(t) = \varphi(t, t_*, \widetilde{C})$, $t \in \langle a, b \rangle$, де $C_1 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$. А оскільки $\varphi(t, t_*, C_1) = \psi(t, C_1)$, $t \in (\alpha, \beta)$, то $\omega(t) = \psi(t, C_1)$, $t \in \langle a, b \rangle$, що завершує наше доведення. □

Наслідок 3.9. *Нехай $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, де $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Припустимо, що функція f є неперервною, обмеженою і задовольняє умову Ліпшіца за другим аргументом локально на області D. Тоді рівняння (3.1) має повний загальний розв'язок (в області D) і його можна записати у вигляді*

$$x = \varphi(t, t_*, C), \quad (t, C) \in (a, b) \times \mathbb{R}, \tag{3.97}$$

де t_* — яка-небудь фіксована точка з (a, b).

Доведення. Доведення цього твердження легко отримати із доведення теореми 3.14 і наслідку теореми про продовження розв'язку задачі Коші для рівняння вигляду (3.1). □

Зауважимо, що співвідношення (3.97) ще називається повним загальним розв'язком рівняння (3.1) у формі Коші.

Лекція № 7

§4. Задача Коші для нерозв'язних стосовно похідної рівнянь

4.1. Формулювання задачі Коші для нерозв'язних стосовно похідної рівнянь; існування та єдиність її розв'язку.

Розглянемо спочатку один приклад нерозв'язного стосовно похідної рівняння:

$$x'^2 - 1 = 0. \tag{4.1}$$

Рівняння (4.1) еквівалентне сукупності двох рівнянь

$$x' = \pm 1. \tag{4.2}$$

Легко знаходимо повний загальний розв'язок даного рівняння

$$x = \pm t + C, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{— довільна стала.} \tag{4.3}$$

Отже, сім'я інтегральних ліній рівняння (4.1) складається із всеможливих прямих, які нахилені до осі Ot під кутом $45°$ або $135°$.

Поставимо задачу аналогічну задачі Коші для рівняння, розв'язаного стосовно похідної: знайти розв'язок рівняння (4.1), який задовольняє початкову умову

$$x(1) = 1. \tag{4.4}$$

З (4.3) і (4.4) випливає, що розв'язками цієї задачі є функції

$$x = t, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{та} \qquad x = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Відмітимо, що ці розв'язки відрізняються в будь-якому околі точки 1. Отже, умови (4.4) не достатньо, щоби розв'язок даної задачі був єдиним. Потрібні додаткові умови. Які? Щоб краще зрозуміти, як шукати відповідь на це питання, зауважимо таке. Графіками функцій (4.5) є прямі з кутовими коефіцієнтами відповідно 1 та -1. Тому для виділення одного з цих розв'язків можна задати одну з двох умов:

$$x'(1) = 1 \qquad \text{або} \qquad x'(1) = -1. \tag{4.6}$$

Якщо задати першу з умов (4.6), то розв'язком даної задачі буде перша з функцій (4.5), причому всі інші розв'язки є звуженнями цього розв'язку. Аналогічний результат отримаємо, коли задамо другу з умов (4.6). А чи можна задати додаткову умову у вигляді

$$x'(1) = p_0,$$

де $p_0 \neq \pm 1$. Легко бачити (як з (4.2) так і з (4.3)), що за такої умови дана задача не має розв'язку.

Принагідно відмітимо, що множина значень $\{-1; 1\}$ є множиною розв'язків рівняння

$$p^2 - 1 = 0, \tag{4.7}$$

яке отримується з рівняння (4.1) заміною x' на p.

Зі сказаного випливає, що природно задачу Коші для рівняння (4.1) ставити так: *знайти розв'язок рівняння* (4.1), *який задовольняє початкову умову*

$$x(t_0) = x_0$$

та одну з двох додаткових умов

$$x'(t_0) = 1$$

або

$$x'(t_0) = -1,$$

де (t_0, x_0) — *довільна фіксована точка площини* $\mathbb{R}^2$ (ще раз зауважимо, що числа 1 та -1 беруться з множини розв'язків рівняння (4.7)).

На підставі сказаного можемо сформулювати *задачу Коші для нерозв'язних стосовно похідної рівнянь* у загальному випадку.

Нехай G — деяка область в $\mathbb{R}^3$, а $F(t, x, p)$, $(t, x, p) \in G$, — задана неперервна функція. Розглянемо нерозв'язне стосовно похідної рівняння

$$F(t, x, x') = 0\,. \tag{4.8}$$

Введемо позначення

$$L{:=}\big\{(t, x, p) \in G \,\big|\, F(t, x, p) = 0\big\}, \quad D{:=}\big\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, \exists p \in \mathbb{R} \quad \text{таке, що} \quad (t, x, p) \in L\big\},$$

тобто D — проекція на площину Otx множини L.

Задача Коші для рівняння (4.8) полягає у знаходженні розв'язку рівняння (4.8), що задовольняє умови

$$x(t_0) = x_0, \tag{4.9}$$

$$x'(t_0) = p_0, \tag{4.10}$$

де (t_0, x_0) — довільна фіксована точка з D, а p_0 — один з розв'язків рівняння

$$F(t_0, x_0, p) = 0$$

стосовно p, тобто $(t_0, x_0, p_0) \in L \quad \Leftrightarrow \quad F(t_0, x_0, p_0) = 0$.

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (4.8) – (4.10).

Вияснимо, при яких умовах на F задача (4.8) – (4.10) має розв'язок і цей розв'язок в певному сенсі єдиний.

Теорема 4.1. *Нехай точка* $(t_0, x_0, p_0) \in G$ *така, що функція* F *є неперервно-диференційовною в деякому околі цієї точки і*

$$F(t_0, x_0, p_0) = 0, \qquad \frac{\partial F(t_0, x_0, p_0)}{\partial p} \neq 0. \tag{4.11}$$

Тоді знайдеться значення $\rho > 0$ *таке, що існує розв'язок задачі* (4.8) – (4.10), *визначений на* $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, *і будь-який інший розв'язок цієї задачі збігається з ним на спільній частині їх областей визначення.*

Доведення. Введемо позначення

$$\Pi^{r,u,v}_{t_0,x_0,p_0} := \big\{(t, x, p) \,\big|\, |t - t_0| < r, |x - x_0| < u, |p - p_0| < v\big\},$$

де $r > 0$, $u > 0$, $v > 0$.

Розглянемо рівняння

$$F(t, x, p) = 0, \tag{4.12}$$

вважаючи t і x параметрами, а p — невідомою змінною.

За теоремою про неявну функцію, умови якої в даному випадку виконані, існують числа $r > 0$, $u > 0$ та $v > 0$ і тільки одна функція $f : D' \to (p_0 - v, p_0 + v)$, де $D' := \{(t,x) \mid t_0 - r < t < t_0 + r,\ x_0 - u < x < x_0 + u\}$ такі, що $\Pi^{r,u,v}_{t_0,x_0,p_0} \subset G$ і

$$F(t,x,p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = f(t,x), \quad (t,x,p) \in \Pi^{r,u,v}_{t_0,x_0,p_0}, \tag{4.13}$$

тобто рівняння (4.12) в паралелепіпеді $\Pi^{r,u,v}_{t_0,x_0,p_0}$ для кожної точки $(t,x) \in D'$ має і тільки один розв'язок $p = f(t,x)$; крім того, $f \in C^1(\overline{D'})$ і $p_0 = f(t_0,x_0)$.

Тепер розглянемо задачу Коші

$$x' = f(t,x), \tag{4.14}$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{4.15}$$

Згідно з теоремою Пікарра дана задача має розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, де $\rho \in (0, r)$.

Зауважимо, що

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \qquad t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho], \tag{4.16}$$
$$\varphi(t_0) = x_0, \tag{4.17}$$

а отже

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, x_0) = p_0. \tag{4.18}$$

Оскільки

$$(t, \varphi(t)) \in D', \qquad t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho], \tag{4.19}$$

то $|f(t,\varphi(t)) - p_0| < v \ \ \forall t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, звідки, враховуючи (4.16), матимемо

$$|\varphi'(t) - p_0| < v, \qquad t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]. \tag{4.20}$$

З (4.16), (4.19) і (4.20), маючи на увазі (4.13), отримаємо

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0, \qquad t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho],$$

то $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, — розв'язок рівняння (4.8). А це разом з (4.17) і (4.18) означає, що дана функція є розв'язком задачі (4.8)–(4.10). Отже, перша частина твердження теореми доведена.

Тепер покажемо, що якщо $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d \rangle$, — який-небудь розв'язок задачі (4.8)–(4.10), то $\varphi(t) = \psi(t)$, коли $t \in \langle a, b \rangle = [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \cap \langle c, d \rangle$. Справді, припустимо, що це не так. Тоді існує точка $t_* \in \langle a, b \rangle$ така, що $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$ і $\varphi'(t_*) = \psi'(t_*)$, але в будь-якому околі цієї точки знайдеться хоча б одне значення $t \in \langle a, b \rangle$ таке, що $\varphi(t) \neq \psi(t)$.

Розглянемо випадок, коли t_* — внутрішня точка проміжку $\langle a, b \rangle$. Оскільки $\psi \in C^1(\langle a, b \rangle)$ і $\psi(t_*) = \varphi(t_*) \in (x_0 - u, x_0 + u)$, $\psi'(t_*) = \varphi'(t_*) \in (x_0 - v, x_0 + v)$, то існує окіл $O(t_*) \subset \langle a, b \rangle$ такий, що $|\psi(t) - x_0| < u$ і $|\psi'(t) - p_0| < v \ \ \forall t \in O(t_*)$. Звідси, враховуючи (4.13) і те, що

$$F(t, \psi(t), \psi'(t)) = 0, \qquad t \in O(t_*),$$

отримаємо

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \qquad t \in O(t_*). \tag{4.21}$$

Маючи на увазі (4.16), (4.21) і те, що $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$ та $O(t_*) \subset [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, з теореми єдиності розв'язку задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної рівняння отримаємо рівність

$$\varphi(t) = \psi(t), \qquad t \in O(t_*).$$

Але це протирічить нашому припущенню, що доводить потрібне нам твердження.

Випадок, коли t_* — гранична точка проміжку $\langle a, b \rangle$, розглядається цілком аналогічно. $\square$

4.2. Особливі розв'язки звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$F(t, x, x') = 0, \tag{4.22}$$

припускаючи, що функція F визначена і неперервно диференційовна в області G простору $\mathbb{R}^3 = \{(t, x, p) \,|\, t, x, p \in \mathbb{R}\}$. Нехай множини L і D такі ж, як в п. 4.1. Під *інтегральною лінією* рівняння (4.22) розумітимемо графік розв'язку цього рівняння. Говоритимемо, що інтегральна лінія проходить через задану точку, якщо ця точка належить даній лінії. Далі припускатимемо, що всі розв'язки рівняння (4.22), які тут розглядатимуться, визначені на інтервалах числової осі.

Означення 4.1. Точка $(t_0, x_0) \in D$ називається *звичайною* для рівняння (4.22), якщо через неї проходить хоча б одна інтегральна лінія і нема двох інтегральних ліній, що проходять цю точку, дотикаються в ній і відрізняються одна від другої в будь-якому (як завгодно малому) околі заданої точки.

Зауважимо, що слова "дві лінії відрізняються одна від другої в деякому околі заданої точки"означають, що частини цих ліній, які лежать в цьому околі, не співпадають.

Означення 4.2. Точка $(t_0, x_0) \in D$ називається *особливою* для рівняння (4.22), якщо вона не є звичайною.

Означення 4.3. Множина особливих точок рівняння (4.22) називається *особливою множиною.*

Означення 4.4. *Особливою інтегральною лінією* рівняння (4.22) називають інтегральна лінія, яка складається з особливих точок цього рівняння.

Особливим розв'язком рівняння (4.22) називають його розв'язок, графіком якого є особлива інтегральна лінія.

Отже, особливою інтегральною лінією рівняння (4.22) є така інтегральна лінія цього рівняння, через кожну точку якої проходить ще хоча б одна його інтегральна лінія, яка дотикається в цій точці до даної лінії і відрізняється від неї в будь-якому околі цієї точки. Також легко бачити, що коли $x = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, – особливий розв'язок рівняння, то в кожній точці (t_0, x_0, p_0), де t_0 – довільна точка інтервалу (a, b), $x_0 = \psi(t_0)$, $p_0 = \psi'(t_0)$, порушується умова теореми 4.1.

Оскільки особлива інтегральна лінія лежить в особливій множині, то відшукання особливих інтегральних ліній (особливих розв'язків) рівняння (4.22) варто починати із знаходження особливої множини заданого рівняння.

Приклад 4.1. Розглянемо рівняння

$$x'^3 - 27x^2 = 0. \tag{4.23}$$

Серед його розв'язків, як легко безпосередньо переконатися, є функції $x = (t - C)^3$, $t \in \mathbb{R}$, де $C \in \mathbb{R}$, та функція $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отже, точка $(t_0, 0)$, де t_0 — яке-небудь число, є особливою, бо через неї проходять інтегральні лінії, що є графіками розв'язків $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, та $x = (t - t_0)^3$, $t \in \mathbb{R}$ та які відрізняються одна від другої в будь-якому околі цієї точки. Звідси, зокрема, випливає, що $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, — особливий розв'язок даного рівняння. Легко показати, що особлива множина рівняння (4.23) вичерпується множиною $\{(t, 0) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Справді, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2}. \tag{4.24}$$

Очевидно, що для кожної точки (t_0, x_0), де $x_0 \neq 0$, знайдеться окіл $O(t_0, x_0)$ цієї точки, на якому функція $f(t, x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ є неперервною разом з частинною похідною за x. Отож, задача Коші для рівняння (4.24), розглядуваного в $O(t_0, x_0)$, з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0,$$

де $x_0 \neq 0$, має розв'язки і будь-які два з них збігаються на спільній частині їх областей визначення. Це означає, що точка (t_0, x_0), де $x_0 \neq 0$, є звичайною для рівняння (4.23). Таким чином, ми повністю обгрунтували висновок про те, що особлива множина рівняння (4.23) складається зі всіх точок осі t (і тільки з них) і ця особлива множина співпадає з особливою інтегральною лінією, що задається рівнянням $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$. □

Повернемось до питання про відшукання особливих інтегральних ліній (особливих розв'язків) рівняння (4.22) в загальному випадку. Спочатку припустимо, що рівняння (4.22) можна записати у вигляді

$$x' = f(t, x), \tag{4.25}$$

де $f : D \to \mathbb{R}$ – задана функція, D – область в $\mathbb{R}^2$, тобто воно є розв'язним стосовно похідної. З теорем про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння вигляду (4.25) випливає, що достатньою умовою того, щоби точка $(t_0, x_0) \in D$ була звичайною, є існування околу цієї точки, в якому функція f є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця за змінною x (або ж має неперервну похідну за змінною x). Якщо ж такого околу нема, то ця точка може бути особливою (але не обов'язково є!). Отож, можна зробити такий висновок: *особлива множина рівняння (4.25) міститься в множині точок з області D, для яких не виконується вказана вище достатня умова того, щоби точка була звичайною.* Уточнимо характеристику цієї множини, припустивши, що функція f на області D є неперервною і має неперервну частинну похідну f_x (за змінною x) на області $D' \subset D$. Тоді особлива множина рівняння (4.25) (якщо вона існує) лежить в множині $D \setminus D'$.

Тепер розглянемо рівняння (4.22) (яке не обов'язково можна записати у вигляді (4.25)). Оскільки таке рівняння може мати досить складну структуру, то природним припущенням при розгляді рівняння першого порядку загального вигляду (4.22) є умова, що функція $F(t, x, p)$ є неперервно диференційовною на G (її області визначення). З цієї умови будемо стартувати.

За теоремою про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (4.22) точка $(t_0, x_0) \in D$ є звичайною, якщо для будь-якого розв'язку (відносно p) рівняння

$$F(t_0, x_0, p) = 0 \tag{4.26}$$

виконується умова

$$\frac{\partial F(t_0, x_0, p)}{\partial p} \neq 0. \tag{4.27}$$

Отже, необхідною умовою того, що точка $(t_0, x_0) \in D$ є особливою, є умова, що для хоча б одного розв'язку (стосовно p) рівняння (4.26) порушується умова (4.27). Таким чином, приходимо до висновку, що особлива множина рівняння (4.22) складається з точок (t, x) (можливо, не всіх) множини D, які знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(t, x, p) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial F(t, x, p)}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

(координати (t, x) будь-якої з цих точок — це перші дві компоненти трійки чисел (t, x, p), які є розв'язками системи (4.28)). Множину таких точок позначимо через D_0. Якщо із системи (4.28) можна виключити параметр p, тобто записати її у вигляді одного рівняння

$$H(t, x) = 0, \tag{4.29}$$

то множина D_0 є множиною розв'язків рівняння (4.29).

Позначимо через D_* особливу множину рівняння (4.22). Як було сказано, маємо $D_* \subseteq D_0$, тобто для знаходження D_* варто знайти спочатку D_0 і провести додаткові дослідження.

Продемонструємо сказане на прикладі рівняння (4.23), яке ми вже детально дослідили вище. Система (4.28) в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{cases} p^3 - 27x^2 = 0, \\ 3p^2 = 0, \end{cases}$$

звідки отримаємо рівняння (див. (4.29))

$$x = 0.$$

Отже, $D_0 = \{(t, 0) \colon t \in \mathbb{R}\}$. Повторивши міркування з прикладу 4.1, приходимо до висновку, що $D_* = D_0$ і $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, — особливий розв'язок заданого рівняння. Приклад показує, що спосіб знаходження особливих розв'язків (інтегральних ліній) рівняння (4.22) через використання системи (4.28) навіть у випадку, коли рівняння (4.22) можна розв'язати стосовно похідної, є дещо простішим, ніж безпосередній.

Покажемо на прикладі, що не завжди $D_* = D_0$.

Приклад 4.2. Розглянемо рівняння

$$x'^3 - x^3 = 0.$$

Система (4.28) для цього рівняння набуде вигляду

$$\begin{cases} p^3 - x^3 = 0, \\ 3p^2 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $D_0 = \{(t, 0) \colon t \in \mathbb{R}\}$.

Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x' = x,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$x = Ce^t, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Звідси легко випливає, що особливих точок дане рівняння не має, тобто $D_* = \varnothing$, і значить, $D_* \neq D_0$. ☐

На практиці часто зустрічаються рівняння «квадратні відносно x'», тобто рівняння, які можна записати у вигляді

$$a(t,x)x'^2 - 2b(t,x)x' + c(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D, \tag{4.30}$$

де D — область в $\mathbb{R}^2$, $a, b, c \in C^1(D)$, $a(t,x) \neq 0$, $(t,x) \in D$.

Знайдемо множину D_0 для рівняння (4.30). Система (4.28) в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{cases} a(t,x)p^2 - 2b(t,x)p + c(t,x) = 0, \\ a(t,x)p - b(t,x) = 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Виключимо із цієї системи параметр p, виразивши з другого рівняння p і підставивши отриманий вираз в перше рівняння:

$$a(t,x)\left(\frac{b(t,x)}{a(t,x)}\right)^2 - 2b(t,x)\frac{b(t,x)}{a(t,x)} + c(t,x) = 0,$$

звідки отримаємо рівняння (пор. з (4.29))

$$b^2(t,x) - a(t,x)c(t,x) = 0, \tag{4.32}$$

всі розв'язки якого складають множину D_0. Очевидно, що ліва частина рівняння (4.32) є поділеним на 4 дискримінантом рівняння (4.30), як квадратного стосовно x'. Тому множину D_0 називають *дискримінантною множиною,* а лінію, задану рівнянням (4.32), — дискримінантною лінією рівняння (4.30). Оскільки рівняння (4.32) є частковим випадком рівняння (4.29), то ці поняття переносяться і на загальний випадок, тобто множину розв'язків рівняння (4.29) називають *дискримінантною множиною,* а лінію, задану рівнянням (4.29), — *дискримінантною лінією* рівняння (4.22).

Підведемо певний підсумок викладеного вище: для знаходження особливої множини і особливих розв'язків (інтегральних ліній) рівняння (4.22) можна діяти таким чином:

1) знайти дискримінантну множину заданого рівняння, записавши систему (4.28) і (якщо це можна зробити) виключивши з неї параметр p;

2) провести додаткові дослідження дискримінантної множини (її частин) на «особливість» (ці дослідження залежать від специфіки рівняння та множини D_0).

Є інший спосіб відшукання особливих інтегральних ліній. Він базується на понятті *обвідної сім'ї ліній.* Нагадаємо що це таке.

Нехай

$$R(t,x,C) = 0, \qquad (t,x,C) \in U, \quad \text{де } U \text{ — область в } \mathbb{R}^3, \tag{4.33}$$

— сім'я гладких ліній на площині $\mathbb{R}^2$ в системі координат Otx; тут C — параметр, який "ідентифікує" лінії заданої сім'ї. Під *обвідною* заданої сім'ї ліній розуміють гладку лінію, яка в кожній своїй точці дотикається до однієї з ліній цієї сім'ї, причому в різних точках — до різних ліній.

Приклад 4.3. Розглянемо сім'ю ліній
$$x = (t - C)^3, \qquad (t, C) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.34}$$

Легко бачити, що лінія, задана рівнянням $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, є обвідною сім'ї (4.34). Справді, через кожну точку даної лінії проходить одна із даної сім'ї ліній, дотикаючись до неї (через точку $(t_0, 0)$ проходить лінія $x = (t - t_0)^3$, $t \in \mathbb{R}$, і дотична до неї в цій точці має нульовий кутовий коефіцієнт, оскільки $x'(t_0) = 0$), причому в різних точках — різні лінії. □

Покажемо, що обвідна сім'ї інтегральних ліній звичайного диференціального рівняння є його особливою інтегральною лінією.

Нехай
$$\Phi(t, x, C) = 0, \qquad (t, x, C) \in \Omega \quad (\Omega \text{ — область в } \mathbb{R}^3), \tag{4.35}$$
сім'я інтегральних ліній рівняння (4.22), а $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, — її обвідна. Нехай $t_0 \in (a, b)$ — яка-небудь точка. З означення обвідної випливає, що в точці (t_0, x_0), де $x_0 = \varphi(t_0)$, обвідна дотикається до деякої інтегральної лінії з сім'ї (4.35). Нехай це буде лінія $x = \psi(t)$, $t \in (c, d)$, яка визначається рівнянням (4.35) при певному значенні C. З умови дотику в точці (t_0, x_0) ліній, заданих відповідно рівняннями $x = \varphi(t)$ та $x = \psi(t)$, маємо $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0)$. Звідси та того, що функція $x = \psi(t)$, $t \in (c, d)$, є розв'язком рівняння (4.22), випливає, що
$$F(t_0, \varphi(t_0), \varphi'(t_0)) = 0,$$
а це означає, оскільки t_0 — довільне, що
$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0, \quad t \in (a, b),$$
тобто функція $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, є розв'язком рівняння (4.22). Звідси та означення обвідної випливає те, що потрібно було показати.

З іншого боку, як це випливає з означення, особлива інтегральна лінія є обвідною деякої сім'ї інтегральних ліній рівняння (4.22).

Отже, приходимо до такого висновку. Якщо співвідношення (4.35) є сім'єю інтегральних ліній рівняння (4.22), то його особливі інтегральні лінії можна шукати, як обвідні цієї сім'ї. Як відомо з диференціальної геометрії ([**?**]), обвідні сім'ї (4.35) можна шукати таким чином. Спочатку записуємо систему рівнянь
$$\begin{cases} \Phi(t, x, C) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi(t, x, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$
Нехай D_1 — множина точок (t, x), координати яких є першими двома компонентами трійок чисел (t, x, C), що є розв'язками системи (4.36). Якщо вдається виключити із системи (4.36) параметр C, тобто записати цю систему у вигляді рівняння
$$Q(t, x) = 0, \tag{4.37}$$
то множина D_1 є множиною розв'язків рівняння (4.37).

Якщо сім'я ліній (4.35) має обвідну, то вона складається з точок множини D_1. Але не кожна гладка лінія, яка лежить в D_1, може бути обвідною. Тому після знаходження множини D_1 потрібно провести додаткові дослідження, виходячи із специфіки даної проблеми. При цьому варто використати достатні умови того, що лінія, задана рівнянням

$$x = \omega(t), \qquad t \in (p, q),$$

яка отримується із системи (4.36) (або рівняння (4.37)), є обвідною. Такими є умови

$$\left.\frac{\partial \Phi(t, x, C)}{\partial t}\right|_{\substack{x=\omega(t)\\ C=C(t)}} \neq 0 \quad \forall t \in (p, q),$$

або

$$\left.\frac{\partial \Phi(t, x, C)}{\partial x}\right|_{\substack{x=v(t)\\ C=C(t)}} \neq 0 \quad \forall t \in (p, q),$$

де $C(t)$ — значення C, при якому трійка чисел $(t, \omega(t), C)$ є розв'язком системи (4.36).

Приклад 4.4. Нехай маємо рівняння

$$x'^3 - 27x^2 = 0.$$

Легко переконатися, що сім'я ліній

$$x = (t - C)^3, \qquad (t, C) \in \mathbb{R}^2,$$

є сім'єю інтегральних ліній цього рівняння. Запишемо систему типу (4.36) для даного випадку

$$\begin{cases} x - (t - C)^3 = 0, \\ 3(t - C)^2 = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо, що лінія, задана рівнянням $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$, може бути обвідною. Безпосередньо (див. приклад 4.3) легко переконатися, що насправді ця лінія є обвідною, а отже, особливою інтегральною лінією. □

Лекція № 8

Колоквіум № 1

Тема 2

Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь та звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

§1. Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь (НС)

1.1. Поняття нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь. Геометрична інтерпретація НС.

Під $\mathbb{R}^k$, де $k \in \mathbb{N}$, розумітимемо нормований лінійний простір над полем $\mathbb{R}$, який складається з впорядкованих наборів з k дійсних чисел (векторів) $z = (z_1, \dots, z_k)$, зі стандартними операціями додавання та множення на скаляр і нормою $|z| := \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_k^2}$.

Системою звичайних диференціальних рівнянь називають систему співвідношень

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

яка зв'язує незалежну змінну t, n функцій $x_1, \dots, x_n$ від змінної t ($n \geqslant 2$) та похідні цих функцій до певних порядків.

Тут і далі для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ величина $m_j \in \mathbb{N}$ — найвищий з порядків похідних функції x_j, які входять в рівняння системи (1.1). *Порядком системи* (1.1) називають число $m_1 + \dots + m_n$.

Якщо систему (1.1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1^{(m_1)} = f_1(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(m_n)} = f_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \tag{1.2}$$

то її називають *системою, розв'язною стосовно старших похідних*, а в протилежному випадку — *системою, нерозв'язною стосовно старших похідних*. Систему (1.2) називають *системою, розв'язаною стосовно старших похідних*, а систему (1.1) — *системою, не розв'язаною стосовно старших похідних*.

Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку називають систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.3}$$

де $n \geqslant 2$ – яке-небудь натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі дійсні функції від змінної t, $x_1', \ldots, x_n'$ – похідні невідомих функцій, $f_1 : D \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ – задані неперервні функції, D – область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$.

Очевидно, що система (1.3) є частковим випадком системи вигляду (1.2).

Означення 1.1. Розв'язком нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.3) називають систему функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \quad \text{де} \ \ \infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

які задовольняють умови:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^1\big(\langle a, b \rangle\big)$;

2) $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$;

3) $\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad \forall t \in \langle a, b \rangle. \end{cases}$

Означення 1.2. *Загальним розв'язком* системи рівнянь (1.3) називають систему функцій

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_n),\ \ldots,\ x_n = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \ \ (t, C_1, \ldots, C_n) \in G, \tag{1.4}$$

де G — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, які задовольняють умову:

• для будь-яких конкретних допустимих значень $C_1^0, ..., C_n^0$ відповідних параметрів $C_1, ..., C_n$ система функцій $x_1 = \psi_1(t, C_1^0, ..., C_n^0)$, ..., $x_n = \psi_n(t, C_1^0, ..., C_n^0)$, $t \in \langle c, d \rangle$, є розв'язком системи (1.3).

Якщо загальний розв'язок (1.4) системи рівнянь (1.3) має властивість:

• для будь-якого розв'язку $x_1 = \varphi_1(t), ..., x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, системи (1.3) знайдуться значення $C_{1,\varphi}$, ..., $C_{n,\varphi}$ параметрів C_1, ..., C_n такі, що

$$\varphi_1(t) = \psi_1(t, C_{1,\varphi}, ..., C_{n,\varphi}), ..., \varphi_n(t) = \psi_n(t, C_{1,\varphi}, ..., C_{n,\varphi}), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

то цей загальний розв'язок називають *повним загальним розв'язком.*

Якщо загальний розв'язок системи (1.3) не має такої властивості, то його ще називають *неповним загальним розв'язком.*

Параметри C_1, ..., C_n називають *довільними сталими.*

Означення 1.3. Під *інтегралом* системи (1.3) розуміють систему рівнянь

$$\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.5}$$

таку, що будь-яка система неперервно-диференційовних функцій $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, неявно заданих системою рівнянь (1.5), є розв'язком системи (1.3).

Означення 1.4. *Загальним інтегралом* системи (1.3) називають систему співвідношень

$$\Psi_1(t, x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n) = 0, \ldots, \Psi_n(t, x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.6}$$

які зв'язують змінні t, $x_1, \ldots, x_n$, $C_1, \ldots, C_n$, таку, що
• при довільно фіксованих значеннях $C_1^0, \ldots, C_n^0$ відповідних параметрів (довільних сталих) $C_1, \ldots, C_n$ система рівнянь

$$\Psi_1(t, x_1, \ldots, x_n, C_1^0, \ldots, C_n^0) = 0, \ldots, \Psi_n(t, x_1, \ldots, x_n, C_1^0, \ldots, C_n^0) = 0$$

є інтегралом системи (1.3).

Якщо загальний інтеграл (1.6) має властивість:
• для будь-якого інтегралу (1.5) системи (1.3) знайдуться допустимі значення $C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}$ параметрів (довільних сталих) $C_1, \ldots, C_n$ такі, що

$$\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv \Psi_1(t, x_1, \ldots, x_n, C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}), \ldots,$$
$$\Phi_m(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv \Psi_m(t, x_1, \ldots, x_n, C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}),$$

то цей загальний інтеграл називають *повним загальним інтегралом.*

Дамо *геометричну інтерпретацію системи* (1.3). Спочатку зауважимо таке. Нехай $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, – розв'язок нормальної системи (1.3). Під його графіком розуміють множину точок

$$\Gamma := \big\{ \big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \,\big|\, t \in \langle a, b\rangle \big\}.$$

Геометричне місце точок множини Γ в $\mathbb{R}^{1+n}$ утворює лінію в цьому просторі, яку називають *інтегральною лінією* системи (1.3).

Нехай t_0 — яка-небудь точка з $\langle a, b\rangle$. Покладемо

$$x_1^0 := \varphi_1(t_0), \ \ldots, \ x_n^0 := \varphi_n(t_0).$$

Як відомо, дотична до лінії Γ в точці $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задається рівнянням

$$\frac{t - t_0}{1} = \frac{x_1 - x_1^0}{\varphi_1'(t_0)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^0}{\varphi_n'(t_0)}, \qquad (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}. \tag{1.7}$$

Оскільки згідно з означенням розв'язку системи (1.3) маємо

$$\varphi_j'(t_0) = f_j(t_0, \varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)) = f_j(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \qquad j \in \{1, \ldots, n\},$$

то рівняння (1.7) можна переписати у вигляді

$$\frac{t - t_0}{1} = \frac{x_1 - x_1^0}{f_1(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^0}{f_n(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)}, \qquad (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

Звідси видно, що вектор $\big(1, f_1(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \cdots, f_n(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\big)$ є напрямним вектором дотичної до графіка розв'язку або, іншими словами, інтегральної лінії системи (1.3) в точці $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Побудуємо в кожній точці $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$ вектор $\big(1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \cdots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big)$. В результаті отримаємо так зване *поле напрямків,* відповідне системі (1.3). Зі сказаного вище випливає, що інтегральна лінія системи (1.3) володіє властивістю: в кожній її точці відповідний вектор поля напрямків є напрямним вектором дотичної до цієї лінії у вибраній точці.

Запишемо систему (1.3) у векторній формі. Для цього елементи простору $\mathbb{R}^n$ записуватимемо у вигляді вектор-стовпчиків, тобто, якщо x належить $\mathbb{R}^n$, то $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, де $x_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,n}$. На просторі $\mathbb{R}^n$, як було сказано вище, розглядаємо норму, визначену за правилом $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ для будь-якого елемента $x \in \mathbb{R}^n$ з компонентами $x_1, ..., x_n$. Компоненти векторів простору $\mathbb{R}^n$ нумеруватимемо індексами знизу, самі вектори — індексами зверху; наприклад, записи x_3, x^3, x_2^5 означатимуть відповідно третю компоненту вектора x, третій вектор із деякої сім'ї векторів x та другу компоненту вектора x^5. Лінійний простір з елементами (t, x), де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, позначимо через $\mathbb{R}^{1+n}$ і визначимо норму за правилом $|(t,x)| := |t| + |x|$.

Нехай

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad f(t,x) := \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Отже, систему (1.3) можна записати у вигляді

$$x' = f(t, x), \tag{1.8}$$

де t – незалежна дійсна змінна, x – векторна функція від змінної t зі значеннями в просторі $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задана неперервна функція, D – область в $\mathbb{R}^{1+n}$.

Нормальну систему, записану у вигляді (1.8), також називають *векторним рівнянням.* Як бачимо, векторний запис (1.8) системи (1.3) зовнішньо нічим не відрізняється від запису рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної. Виявляється, що за цим також стоїть глибокий зв'язок між відповідними поняттями і результатами для скалярного рівняння і нормальної системи.

Під *розв'язком* нормальної системи у вигляді векторного рівняння (1.8) розуміємо вектор-функцію

$$x = \varphi(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1\big(\langle a, b\rangle; \mathbb{R}^n\big)$;

2) $\big(t, \varphi(t)\big) \in D \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$;

3) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$.

Тут і далі через $C^1\big(\langle a,b\rangle;\mathbb{R}^n\big)$ позначатимемо лінійний простір вектор-функцій, які визначені на $\langle a,b\rangle$, приймають значення в $\mathbb{R}^n$ і є неперервно-диференційовними. А точніше, елементами простору $C^1\big(\langle a,b\rangle;\mathbb{R}^n\big)$ є функції вигляду $x = \begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \vdots \\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}$, $t \in \langle a,b\rangle$, де $\varphi_k \in C^1\big(\langle a,b\rangle\big)\ \ \forall k \in \{1,\ldots,n\}$.

1.2. Задача Коші для нормальних систем: існування та єдиність її розв'язку, продовження розв'язку.

Розглянемо нормальну систему (1.3).

Задача Коші для системи (1.3) полягає у знаходженні розв'язку цієї системи, який задовольняє початкову умову

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — яка-небудь фіксована точка з D.

Цю задачу далі коротко називатимемо *задачею* (1.3), (1.9).

З геометричної точки зору задача Коші для системи (1.3) полягає у знаходженні інтегральної лінії цієї системи, яка проходить через задану точку $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ області D.

Якщо систему (1.3) подати у векторній формі (1.8) і ввести позначення $x^0 := (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\top$, то задачу (1.3),(1.9) можна переформулювати так: *знайти розв'язок системи (1.8), що задовольняє початкову умову*

$$x(t_0) = x^0, \tag{1.10}$$

де (t_0, x^0) *— яка-небудь фіксована точка області* D.

Виникає питання про *коректність задачі* (1.3), (1.9) (відповідно, (1.8), (1.10)), *тобто існування її розв'язку, його єдиності та неперервної залежності від вхідних даних.* Далі сформулюємо твердження, які в сукупності вирішують це питання. При доведенні цих тверджень важливу роль відіграє система скалярних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1, \ldots, x_n)\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_n(s, x_1, \ldots, x_n)\, ds, \end{cases} \tag{1.11}$$

яку можна записати у вигляді векторного інтегрального рівняння

$$x = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x)\, ds, \tag{1.12}$$

Розв'язком системи скалярних рівнянь (1.11) називають систему функцій $x_1 = \psi_1(t)$,..., $x_n = \psi_n(t)$, $t \in \langle c,d\rangle$, які задовольняють умови

1) $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C\big(\langle c, d\rangle\big)$;

2) $\big(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big) \in D \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$;

$$3)\ \begin{cases} \psi_1(t) = x_1^0 + \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} f_1(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(t) = x_1^0 + \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} f_n(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\, ds \qquad \forall t \in \langle c, d\rangle. \end{cases}$$

а під розв'язком системи у вигляді векторного рівняння (1.12) розумітимемо вектор-функцію $x = \psi(t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$, $t \in \langle c, d\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\psi \in C\big(\langle c, d\rangle; \mathbb{R}^n\big)$;

2) $\big(t, \psi(t)\big) \in D \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$;

3) $\psi(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$,

Аналогічно, як у випадку одного скалярного рівняння, доводимо таке твердження.

Теорема 1.1. *Нехай $f_1, \ldots, f_n \in C(D)$ (відповідно, $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$). Тоді будь-який розв'язок задачі (1.3), (1.9) (відповідно, (1.8), (1.10)) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.11)) (відповідно, (1.12)), і навпаки, довільний розв'язок системи (1.11) (відповідно, (1.12)) є розв'язком задачі (1.3), (1.9) (відповідно, (1.8), (1.10)).*

Тут і далі через $C(D; \mathbb{R}^n)$ позначатимемо лінійний простір, елементами якого є вектор-функції $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$ такі, що $f(t, x) := \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{pmatrix}$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, де $f_k \in C(D) \ \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

Зауваження 1.1. Очевидно, що теорема 1.1 дає можливість звести дослідження коректності задачі Коші для НС до вивчення відповідної проблеми для системи інтегральних рівнянь.

Аналогічно, як у випадку скалярного рівняння, можна довести таке твердження.

Теорема 1.2 (Пеано)**.** *Нехай $f_1, \ldots, f_n \in C(D)$ (відповідно, $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$). Тоді задача (1.3),(1.9) (відповідно, (1.8),(1.10)) має розв'язки.*

Зауваження 1.2. Умови теореми Пеано не гарантують єдиності розв'язку задачі Коші в сенсі, що будь-які два її розв'язки збігаються на спільній частині їх областей визначення.

Справді, розглянемо таку задачу Коші для нормальної системи

$$x_1' = 3\sqrt[3]{(x_2)^2}, \quad x_2' = 3\sqrt[3]{(x_1)^2}, \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Очевидно, що розв'язками цієї задачі є системи функцій

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

та

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^3, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

що доводить справедливість нашого зауваження.

Тепер введемо ще деякі нові поняття та позначення. Нагадаємо, що елементи простору $\mathbb{R}^{1+n}$ позначаємо через (t, x), де $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ – вектор-стовпчик, але, для зручності, будемо писати $(t, x_1, \ldots, x_n)$ замість $(t, (x_1, \ldots, x_n)^\top)$.

Означення 1.5. Скажемо, що функція

$$g(t, x) = g(t, x_1, ..., x_n), \quad (t, x) = (t, x_1, ..., x_n) \in G, \tag{1.13}$$

де G — множина в $\mathbb{R}^{1+n}$, задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$), якщо існує стала $L \geqslant 0$ така, що

$$\left|g(t, x^1) - g(t, x^2)\right| = \left|g(t, x_1^1, \ldots, x_n^1) - g(t, x_1^2, \ldots, x_n^2)\right| \leqslant L\Big(\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^1 - x_i^2\right|^2\Big)^{1/2} = L\left|x^1 - x^2\right|$$

$$\forall\, (t, x^1) = (t, x_1^1, \ldots, x_n^1),\ (t, x^1) = (t, x_1^2, \ldots, x_n^2) \in D. \tag{1.14}$$

Означення 1.6. Скажемо, що функція (1.13) задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x = (x_1, ..., x_n)^\top$) в G *локально*, якщо для будь-якого компакту $K \subset G$ звуження функції g на компакт K задовольняє умову Ліпшіца (на K) за всіма аргументами, крім першого.

Твердження 1.3. *Функція* (1.13) *задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними* $x = (x_1, ..., x_n)^\top$*) в* G *локально, де* G *— область в просторі* $\mathbb{R}^{1+n}$*, якщо*

$$g,\ \frac{\partial g}{\partial x_k} \in C(D), \quad k = \overline{1, n}.$$

Означення 1.7. Скажемо, що вектор-функція

$$h(t, x) = (h_1(t, x), ..., h_n(t, x))^\top = (h_1(t, x_1, ..., x_n), ..., h_n(t, x_1, ..., x_n))^\top, \tag{1.15}$$

$(t, x) = (t, x_1, ..., x_n) \in G$, де G — множина в $\mathbb{R}^{1+n}$, задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x = (x_1, ..., x_n)^\top$), якщо для кожного $k \in \{1, ..., n\}$ функція $h_k(t, x_1, ..., x_n),\ (t, x_1, ..., x_n) \in G$, задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого, або, іншими словами, існує стала $L \geqslant 0$ така, що

$$\left|h(t, x^1) - h(t, x^2)\right| \leqslant L\left|x^1 - x^2\right| \quad \text{для будь-яких } (t, x^1), (t, x^2) \in G. \tag{1.16}$$

Означення 1.8. Скажемо, що вектор-функція (1.15) задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого, *локально*, якщо для будь-якого компакту $K \subset G$ звуження функції h на компакт K задовольняє умову Ліпшіца (на K) за всіма аргументами, крім першого.

Зауваження 1.3. Очевидно, що в нерівності (1.14) (відповідно, (1.16)) замість даної сталої L можна взяти будь-яку іншу, більшу за неї. Найменшу із сталих L, для яких виконується нерівність (1.14) (відповідно, (1.16)), називають *сталою Ліпшіца* функції g (відповідно, h) на множині G.

Твердження 1.4. *Функція* (1.15) *задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x = (x_1, ..., x_n)^\top$) в G локально, де G — область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$, якщо*

$$h_j, \ \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \in C(D), \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Перейдемо до формулювання тверджень, які вирішують питання коректності задачі Коші для НС. Для зручності і лаконічності викладення відповідного матеріалу будемо розглядати задачі Коші для НС у формі задачі (1.8), (1.10) При цьому зауважимо, що оскільки розв'язками задачі 1.8), (1.10) є функції, то природно вважати, що розв'язки, які мають різні області визначення, є різними. Отже, якщо задача (1.8), (1.10) має розв'язок, то вона має безліч розв'язків (зокрема, звуження даного розв'язку на проміжки, які є підмножинами його області визначення).

Теорема 1.5 (Пікар)**.** *Нехай функція f належить простору $C(D; \mathbb{R}^n)$ і задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого, локально. Тоді для будь-якої точки $(t_0, x^0) \in D$ задача* $(1.8), (1.10)$ *має розв'язки і будь-які два з них збігаються на спільній частині їх областей визначення.*

Доведення. Це твердження доводиться аналогічно як теорема Пікара у скалярному випадку. □

Зауваження 1.4. Нехай виконуються умови теореми Пікара і $r > 0$ та $q > 0$ такі, що

$$P^{r,q}_{t_0,x^0} := \big\{(t,x) \,\big|\, |t - t_0| \leqslant r, \ |x - x^0| \leqslant q\big\} \subset D.$$

Тоді задача $(1.8), (1.10)$ має розв'язок, визначений на відрізку Пеано

$$I_{t_0,h} := [t_0 - h, \, t_0 + h], \quad \text{де} \quad h = \min\Big\{r, \frac{q}{m}\Big\}, \quad \text{а} \quad m := \max_{(t,x) \in P^{r,q}_{t_0,x^0}} |f(t,x)|.$$

Нехай $P^{r,R}_{t_0,u^0} = \Big\{(t,v) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + r, \ \|v - u^0\| \leq R\Big\}$ для будь-яких $r > 0$, $R > 0$. Виберемо $r > 0$, $R > 0$ такими, щоб $P^{r,R}_{t_0,u^0} \subset D$. Нехай

$$m := \max_{(t,v) \in P^{r,R}_{t_0,u^0}} \|f(t,v)\|, \quad h := \min\Big\{r, \frac{R}{m}\Big\}.$$

Нехай

$$M_{h,R}(u^0) := \Big\{w \in C([t_0, t_0 + h]; \mathbb{R}^N) \mid \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \|w(t) - u^0\| \leq R\Big\}.$$

Розглянемо оператор

$$G : M_{h,R} \to C([t_0, t_0 + h]; \mathbb{R}^N),$$

визначений за правилом

$$(Gw)(t) := u^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Легко переконатися, що $G(M_{h,R}) \subset M_{h,R}$. Справді, маємо

$$\forall\, t \in [t_0, t_0 + h] : \ \|(Gw)(t) - u^0\| = \| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds\| \leq \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s, w(s))\|\, ds \leq mh \leq R.$$

На множині $M_{h,R}(u^0)$ введемо метрику:

$$d_\alpha(w_1, w_2) = \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} [e^{-\alpha(t - t_0)} \|w_1(t) - w_2(t)\|] \quad \forall\, w_1, w_2 \in M_{h,R}(u^0),$$

де $\alpha > 0$.

Зауваження 1.5. Умови теореми 1.5 виконуються, якщо

$$f_j,\ \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in C(D), \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Виходячи із твердження теореми 1.5, напрошується питання: а чи при умові цієї теореми існує розв'язок задачі (1.8),(1.10) з максимальною областю визначення, тобто такий, що будь-який інший розв'язок є його звуженням? Відповідь на це питання дає таке твердження.

Теорема 1.6. *Нехай виконуються умови теореми* 1.5. *Тоді існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі* (1.8), (1.10), *він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку.*

Означення непродовжуваного розв'язку задачі Коші для НС таке ж саме, як у випадку задачі Коші для одного рівняння першого порядку. Позначимо цей розв'язок через $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0}, b_{t_0,x^0})$.

Наслідок 1.1. *Нехай* F *— компакт в області* D, $(t_0, x^0) \in F$, *а* $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\ b_{t_0,x^0})$, *— непродовжуваний розв'язок задачі* (1.8), (1.10). *Тоді знайдуться точки* t_1, t_2, $a_{t_0,x^0} < t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 < b_{t_0,x^0}$, *такі, що*

$$\big(t_1, \varphi(t_1, t_0, x^0)\big),\ \big(t_2, \varphi(t_2, t_0, x^0)\big) \in \partial F \quad i$$

$$\Big\{\big(t, \varphi(t, t_0, x^0)\big) \,\big|\, t \in (a_{t_0,x^0},\ t_1) \cup (t_2,\ b_{t_0,x^0})\Big\} \notin F \quad \forall\, t \in (a_{t_0,x^0}, t_1) \cup (t_2, b_{t_0,x^0}).$$

1.3. Гладкість та аналітичність розв'язків задачі Коші для нормальної системи.

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \in D, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad \dots \quad , x_n(t_0) = x_n^0, \tag{1.18}$$

де D — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ — початкові дані.

Вияснимо, при яких умовах на праві частини рівнянь системи (1.17) розв'язок задачі (1.17), (1.18) можна диференціювати потрібну кількість раз.

Теорема 1.7. *Нехай праві частини рівнянь системи* (1.17) *є k раз неперервно диференційовними на D для деякого натурального k. Тоді розв'язок задачі* (1.17), (1.18) *є $k+1$ раз неперервно диференційовною функцією.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідного твердження для рівняння першого порядку.

Розглянемо проблему існування аналітичного розв'язку задачі (1.17), (1.18).

Означення 1.9. Вектор-функція $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$, $t \in (a, b)$, — аналітична в точці $t_0 \in (a, b)$ (відповідно, на (a, b)), якщо кожна її компонента є аналітичною в точці $t_0 \in (a, b)$ (відповідно, на (a, b)).

Означення 1.10. Функція $g(z_1, \dots, z_k)$, $(z_1, \dots, z_k) \in \Omega$ (Ω — область в $\mathbb{R}^k$), — аналітична в точці $(z_1^0, \dots, z_k^0) \in \Omega$, якщо в деякому околі $O(z_1^0, \dots, z_k^0)$ точки $(z_1^0, \dots, z_k^0)$ дану функцію можна розвинути в степеневий ряд, тобто на $O(z_1^0, \dots, z_k^0)$ функція g є сумою абсолютно збіжного степеневого ряду

$$g(z_1, \dots, z_k) = \sum_{m_1 \geqslant 0, \dots, m_k \geqslant 0} g_{m_1, \dots, m_k} (z_1 - z_1^0)^{m_1} \cdots (z_k - z_k^0)^{m_k}, \tag{1.19}$$

$$(z_1, \dots, z_k) \in O(z_1^0, \dots, z_k^0).$$

Легко переконатися, що в (1.19)

$$g_{m_1, \dots, m_k} = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_k} g(z_1^0, \dots, z_k^0)}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_k^{m_k}}, \qquad m_1 \geqslant 0, \dots, m_k \geqslant 0.$$

Ясно, що необхідною умовою аналітичності функції в точці є існування похідних будь-якого порядку в деякому околі цієї точки.

Якщо функція $g(z_1, \dots, z_k)$, $(z_1, \dots, z_k) \in \Omega$, аналітична в кожній точці області Ω, то ця функція називається *аналітичною в області* Ω.

Теорема 1.8. *Нехай праві частини рівнянь системи* (1.17) *є аналітичними функціями в D. Тоді розв'язок задачі* (1.17), (1.18) *є аналітичною вектор-функцією.*

Без доведення.

1.4. Неперервна та диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язків задачі Коші для НС.

Розглянемо задачу Коші для НС з параметрами

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n, , \mu_1, \ldots, \mu_k), \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.21}$$

де n, k – натуральні числа; t – незалежна дійсна змінна; $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі функції від змінної t, $x_1', \ldots, x_n'$ – похідні цих функцій; $\mu_1, \ldots, \mu_k$ – параметри; $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані функції, Ω – область в просторі $\mathbb{R}^{1+n+k}$; $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ — задані значення такі, що $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k) \in \Omega$.

Запишемо задачу (1.20),(1.21) у компактному вигляді, ввівши такі позначення:

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x, \mu) := \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1 \ldots, \mu_k) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1 \ldots, \mu_k) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{R}^{1+n+k} := \big\{(t, x.\mu) \,\big|\, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k\big\}.$$

Тоді задачу (1.20), (1.21) можна записати у векторній формі

$$x' = f(t, x, \mu), \tag{1.22}$$

$$x(t_0) = x^0. \tag{1.23}$$

Припустимо, що $f(t, x, \mu), (t, x, \mu) \in \Omega$, неперервна і задовольняє умову Ліпшіца за другою групою змінних (тобто змінних x). Тоді для будь-якої точки $(t_0, x^0, \mu) \in \Omega$ існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі (1.22), (1.23), він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі. Позначимо непродовжуваний розв'язок задачі (1.22), (1.23) через $x = \varphi(t, t_0, x^0, \mu)$, $t \in (a_{t_0,x^0,\mu}\, ,\, b_{t_0,x^0,\mu})$.

Зауважимо, що значення (t_0, x^0) називаються *початковими даними,* μ — *параметрами,* а (t_0, x^0, μ) — *вхідними даними.*

Суть поняття неперервної залежності від початкових даних і параметрів розв'язку задачі Коші для НС та умови, при яких ця задача має таку властивість, даються таким твердженням.

Теорема 1.9. *Нехай* $(\widehat{t}_0, \widehat{x}^0, \widehat{\mu})$ *— довільна фіксована точка з* Ω, *а* $[\alpha, \beta]$ *— будь-який відрізок з* $(a_{\widehat{t}_0,\widehat{x}^0,\widehat{\mu}}\, ,\, b_{\widehat{t}_0,\widehat{x}^0,\widehat{\mu}})$. *Тоді* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що, як тільки* $|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta \wedge |x^0 - \widehat{x}^0| < \delta \wedge |\mu - \widehat{\mu}| < \delta$, *то*

1) $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_0,x^0,\mu}\,,\, b_{t_0,x^0,\mu})$,

2) $\big|\varphi(t, t_0, x^0, \mu) - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}^0, \widehat{\mu})\big| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Наслідок 1.2. *Множина*

$$Q = \big\{(t, t_0, x^0, \mu) \,\big|\, (t_0, x^0, \mu) \in \Omega, \quad t \in (a_{t_0,x^0,\mu}\,,\, b_{t_0,x^0,\mu})\big\}$$

є областю в просторі $\mathbb{R}^{2+n+k}$*, а функція* $x = \varphi(t, t_0, x^0, \mu)$*,* $(t, t_0, x^0, \mu) \in Q$*, є неперервною за сукупністю своїх аргументів.*

Теорема 1.10. *Нехай* $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$*. Тоді функція* $x = \varphi(t, t_0, x^0, \mu)$*,* $(t, t_0, x^0, \mu) \in Q$*, — неперервно-диференційовна за всіма аргументами, причому*

1) *для довільної точки* $(t_0, x^0, \mu) \in \Omega$ *і кожного* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *функція* $y = \dfrac{\partial \varphi(t, t_0, x^0, \mu)}{\partial \mu_i}$*,* $t \in (a_{t_0,x^0,\mu}\,,\, b_{t_0,x^0,\mu})$*, є розв'язком задачі Коші*

$$\begin{aligned} &y' = \frac{\partial f(t, \varphi(t, t_0, x^0, \mu), \mu)}{\partial x} y + \frac{\partial f(t, \varphi(t, t_0, x^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_i}, \\ &y(t_0) = 0; \end{aligned}$$

2) *для довільної точки* $(t_0, x^0, \mu) \in \Omega$ *і кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *функція* $y = \dfrac{\partial \varphi(t, t_0, x^0, \mu)}{\partial x_j^0}$*,* $t \in (a_{t_0,x^0,\mu}\,,\, b_{t_0,x^0,\mu})$*, є розв'язком задачі Коші для НС*

$$\begin{aligned} &y' = \frac{\partial f(t, \varphi(t, t_0, x^0, \mu), \mu)}{\partial x} y, \\ &y(t_0) = e^j, \end{aligned}$$

де e^j *— вектор-стовпець, компоненти якого, крім* j*-ї, рівні нулеві, а* j*-та дорівнює 1;*

3) *довільної точки* $(t_0, x^0, \mu) \in \Omega$ *функція* $y = \dfrac{\partial \varphi(t, t_0, x^0, \mu)}{\partial t_0}$*,* $t \in (a_{t_0,x^0,\mu}\,,\, b_{t_0,x^0,\mu})$*, є розв'язком задачі Коші для НС*

$$\begin{aligned} &y' = \frac{\partial f(t, \varphi(t, t_0, x^0, \mu), \mu)}{\partial x} y, \\ &y(t_0) = -f(t_0, x^0, \mu). \end{aligned}$$

1.5. Існування повного загального розв'язку нормальної системи

Розглянемо нормальну систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.24}$$

де $n \geqslant 2$, $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, n})$ – задані функції, D — область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$.

Теорема 1.11. *Нехай функції $f_1, \ldots, f_n$ є неперервними і задовольняють умову Ліпшиця за всіма аргументами, крім першого, локально. Тоді для будь-якої фіксованої точки області D існує її окіл в D такий, що система* (1.24) *в цьому околі має повний загальний розв'язок.*

Доведення. Доведення повністю аналогічне доведенню аналогічної теореми у випадку скалярного рівняння (див. тему 1). □

Лекція № 10

§2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Зведення рівнянь вищих порядків до нормальних систем

Звичайним диференціальним рівнянням вищого порядку називають звичайне диференціальне рівняння

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

порядок якого вищий за перший. В рівнянні (2.1) $n \geqslant 2$ — натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, x – невідома функція від змінної t, а $x', \ldots, x^{(n)}$ – похідні функції x, $F(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega$, – задана функція, Ω – область простору $\mathbb{R}^{n+2}$.

Якщо рівняння (2.1) можна подати у вигляді

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{2.2}$$

де $f(t, x_1, \ldots, x_n)$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, – задана функція, D – область простору $\mathbb{R}^{1+n}$, то його називають *розв'язним стосовно старшої похідної рівнянням*, а в протилежному випадку — *нерозв'язним стосовно старшої похідної рівнянням*. Рівняння вигляду (2.2) називають *розв'язаним стосовно старшої похідної рівнянням*. Рівняння вигляду (2.1) називають *не розв'язаним стосовно старшої похідної рівнянням*.

Означення 2.1. *Розв'язком* рівняння (2.1) називають функцію $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови:

1) $\psi \in C^n\big(\langle a, b\rangle\big)$;

2) $\big(t, \psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n)}(t)\big) \in \Omega \ \ \forall t \in \langle a, b\rangle$;

3) $F(t, \psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n)}(t)) = 0 \ \ \forall t \in \langle a, b\rangle$.

Означення 2.2. *Загальним розв'язком* рівняння (2.1) називають функцію

$$x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n), \quad (t, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega, \tag{2.3}$$

(Ω — область в $\mathbb{R}^{1+n}$), яка задовольняє умову:
• для кожних конкретних допустимих значень $C_1^0, \ldots, C_n^0$ відповідних параметрів $C_1, \ldots, C_n$ функція $x = \varphi(t, C_1^0, \ldots, C_n^0)$, $t \in \langle a, b\rangle$, є розв'язком рівняння (2.1).

Повним загальним розв'язком рівняння (2.1) називають загальний розв'язок (2.3), якщо він задовольняє умову:
• який би не був розв'язок $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, рівняння (2.1), знайдуться значення $C_1^0, \ldots, C_n^0$ такі, що

$$\psi(t) = \varphi(t, C_1^0, \ldots, C_n^0) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle.$$

Означення 2.3. *Інтегралом* рівняння (2.1) називають рівняння

$$\Phi(t, x) = 0,$$

таке, що будь-яка n раз неперервно-диференційовна функція $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, неявно задана цим рівнянням, є розв'язком рівняння (2.1).

Означення 2.4. *Загальним інтегралом* рівняння (2.1) називають співвідношення

$$H(t, x, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

яке зв'язує змінні t, x, $C_1, \ldots,$ C_n, таке, що
• при довільно вибраних і зафіксованих значеннях $C_1^0, \ldots, C_n^0$ відповідних параметрів (довільних сталих) $C_1, \ldots, C_n$ рівняння

$$H(t, x, C_1^0, \ldots, C_n^0) = 0$$

є інтегралом рівняння (2.1).

Повним загальним інтегралом рівняння (2.1) називають загальний інтеграл (2.3), якщо він задовольняє умову:
• для будь-якого інтегралу

$$\Phi(t, x) = 0$$

рівняння (2.1) знайдуться допустимі значення $C_{1,\Phi}, \ldots,$ $C_{n,\Phi}$ параметрів $C_1, \ldots,$ C_n такі, що

$$\Phi(t, x) = H(t, x, C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}).$$

Далі розглянемо ***розв'язане стосовно старшої похідної рівняння*** (2.2) і поряд з ним таку нормальну систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2\,, \\ x_2' = x_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}' = x_n\,, \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n)\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Якщо функція*

$$x = \psi(t), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

є розв'язком рівняння (2.2)*, то система функцій*

$$x_1 = \psi(t),\ x_2 = \psi'(t),\ \ldots,\ x_n = \psi^{(n-1)}(t), \quad t \in \langle a, b\rangle, \tag{2.5}$$

є розв'язком системи (2.4)*. І навпаки, якщо система функцій*

$$x_1 = \varphi_1(t),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t), \quad t \in \langle c, d\rangle, \tag{2.6}$$

є розв'язком системи (2.4), *то функція*

$$x = \varphi_1(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle,$$

є розв'язком рівняння (2.2), *причому*

$$\varphi_2 = \varphi_1',\ \varphi_3 = \varphi_1'',\ \ldots,\ \varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}. \tag{2.7}$$

Доведення. Нехай функція $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, — розв'язок рівняння (2.2). Тоді маємо

$$\psi^{(n)}(t) = f(t, \psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n-1)}(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle. \tag{2.8}$$

Використовуючи це, безпосередньо переконуємося, що сукупність функцій (2.5) є розв'язком системи (2.4).

Тепер нехай сукупність функцій (2.6) є розв'язком системи (2.4). Тоді з перших $n-1$ рівнянь цієї системи маємо (2.7). Звідси та n-го рівняння системи (2.4) здобудемо

$$\varphi_1^{(n)}(t) = f(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t)), \quad t \in \langle c, d \rangle.$$

Це означає, що функція $x = \varphi_1(t)$, $t \in \langle c, d \rangle$, є розв'язком рівняння (2.2). □

Наслідок 2.1. *Між множинами розв'язків рівняння* (2.2) *та системи* (2.4) *існує взаємно однозначне відображення, визначене за правилом*

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = x', \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.9}$$

де x — розв'язок рівняння (2.2), *а $x_1, \ldots, x_n$ — розв'язок системи* (2.4).

Доведення. Враховуючи твердження теореми 2.1, нам залишається довести, що відповідність (2.9) між множинами розв'язків рівняння (2.2) та системи (2.4) є взаємно однозначною. Очевидно, що двом різним розв'язкам рівняння (2.2) за правилом (2.9) відповідає два різні розв'язки системи (2.4). Доведемо обернене твердження. Нехай

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(t),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle, \\ &x_1 = \widetilde{\varphi}_1(t),\ \ldots,\ x_n = \widetilde{\varphi}_n(t), \qquad t \in \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle, \end{aligned} \tag{2.10}$$

— два різні розв'язки системи (2.4). Покажемо, що відповідні їм розв'язки рівняння (2.2)

$$x = \varphi_1(t), \quad t \in \langle c, d \rangle, \qquad x = \widetilde{\varphi}_1(t), \quad t \in \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle, \tag{2.11}$$

— різні.

Оскільки розв'язки (2.10) системи (2.4) — різні, то можливі два випадки: 1) $\langle c, d \rangle \neq \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$; 2) $\langle c, d \rangle = \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$, але існує $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $\varphi_k \not\equiv \widetilde{\varphi_k}$. В першому випадку функції (2.11) — різні, оскільки їхні області визначення різні. Розглянемо другий випадок. При $k = 1$ відразу отримаємо, що функції (2.11) різні. Нехай $k > 1$. Тоді з теореми 2.1 випливає, що $\varphi_1^{(k-1)} \neq \widetilde{\varphi}_1^{(k-1)}$. Але це означає, що функції (2.11) різні, бо в протилежному випадку не можуть бути різними їхні похідні порядку $k - 1$. □

2.2. Задача Коші для рівнянь вищих порядків: існування та єдиність розв'язку, продовження розв'язку.

Розглянемо рівняння (2.2). *Задача Коші* для нього полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} x(t_0) = x_1^0, \\ x'(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{2.12}$$

де $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ — задана точка області D (початкові дані).

Цю задачу коротко називатимемо задачею (2.2),(2.12).

Розглянемо поряд із задачею (2.2),(2.12) задачу Коші для нормальної системи (2.4) з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ x_2(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{2.13}$$

де значення $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ — ті ж самі, що і в (2.12). Виходячи з наслідку теореми 2.1 (див. пункт 2.1), приходимо до висновку, що питання про коректність задачі (2.2),(2.12) зводиться до аналогічного питання стосовно задачі (2.4),(2.13), для якої ми його вже вирішили. Тому, використовуючи відповідні результати для нормальних систем, можна сформулювати такі твердження.

Теорема 2.2 (Пеано)**.** *Нехай* $f \in C(D)$. *Тоді задача* (2.2),(2.12) *має розв'язки.*

Теорема 2.3 (Пікар)**.** *Нехай функція* $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, *є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшіца за всіма змінними, крім першої. Тоді існують розв'язки задачі* (2.2),(2.12), *причому будь-які два з них співпадають на спільній частині їх областей визначення.*

Теорема 2.4 (існування непродовжуваного розв'язку)**.** *Нехай функція* $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, *є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшіца за всіма змінними, крім першої. Тоді існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі* (2.2),(2.12), *він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

2.3. Гладкість та аналітичність розв'язків задачі Коші для рівнянь вищих порядків.

Розглянемо задачу Коші для рівняння вищого порядку (2.2),(2.12), припускаючи, що функція $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшіца за всіма змінними, крім першої. Згідно з результатами попереднього пункту (див. теорему 2.4) задача (2.2),(2.12) має безліч розв'язків, але серед них існує один (так званий непродовжуваний розв'язок) такий, що всі інші є його звуженням. Тут нас буде цікавити питання про гладкість розв'язків задачі (2.2),(2.12), в тому числі і непродовжуваного, в залежності від гладкості правої частини рівняння (2.2).

Теорема 2.5. *Нехай функція f є k раз неперервно диференційовною в D для деякого натурального числа k. Тоді будь-який розв'язок задачі* (2.2),(2.12) *є $k+1$ раз неперервно диференційовною функцією.*

Теорема 2.6. *Нехай функція f є аналітичною в області D. Тоді будь-який визначений на інтервалі розв'язок задачі* (2.2),(2.12) *— аналітична функція.*

Ці два твердження безпосередньо випливають із зв'язку між рівняннями вищих порядків і нормальними системами та відповідних результатів для нормальних систем.

2.4. Неперервна і диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язків задачі Коші для рівнянь вищих порядків.

Нехай k і n — деякі натуральні числа ($n \geqslant 2$), $\mathbb{R}^{1+n+k} := \big\{(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k) \,\big|\, t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}\big\}$.

Розглянемо задачу Коші для рівняння вищого порядку:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, \mu_1, \dots, \mu_k), \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_1^0, \\ x'(t_0) = x_2^0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Тут і далі в цьому пункті припускається, що:

1) функція $f(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k)$, $(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k) \in \Omega$, неперервна в області $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n+k}$ і задовольняє локально умову Ліпшіца за другою групою змінних;

2) t_0 і $x_1^0, \dots, x_n^0$ такі, що $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k) \in \Omega$.

Тоді для будь-якого набору чисел $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k) \in \Omega$ існує єдиний непродовжуваний розв'язок задачі (2.14),(2.15). Позначатимемо його через

$$x = \varphi(t,\, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0,\, \mu_1, \dots, \mu_k), \quad t \in (a_{t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k}, b_{t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k}).$$

Теорема 2.7. *Нехай $(\widehat{t}_0, \widehat{x}_1^0, \dots, \widehat{x}_n^0, \widehat{\mu}_1, \dots, \widehat{\mu}_k) \in \Omega$ — довільна фіксована точка і $[\alpha, \beta]$ — будь-який відрізок з інтервалу $(a_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_1^0, \dots, \widehat{x}_n^0, \widehat{\mu}_1, \dots, \widehat{\mu}_k},\ b_{\widehat{t}_0, \widehat{x}_1^0, \dots, \widehat{x}_n^0, \widehat{\mu}_1, \dots, \widehat{\mu}_k})$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що, як тільки*

$$|t_0 - \widehat{t}_0| < \delta \wedge \sum_{j=1}^{n} |x_j^0 - \widehat{x}_j^0| < \delta \wedge \sum_{j=1}^{k} |\mu_j - \widehat{\mu}_j| < \delta,$$

то

1) $[\alpha, \beta] \subset (a_{t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k},\ b_{t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k})$,

2) $\big|\varphi(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu_1, \dots, \mu_k) - \varphi(t, \widehat{t}_0, \widehat{x}_1^0, \dots, \widehat{x}_n^0, \widehat{\mu}_1, \dots, \widehat{\mu}_k)\big| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Покладемо

$$Q = \big\{(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k)\colon (t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k) \in \Omega,$$
$$t \in (a_{t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k}\,,\, b_{t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k})\big\}.$$

Наслідок 2.2. *Множина Q є областю в $\mathbb{R}^{2+n+k}$ і функція*

$$x = \varphi(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k), \quad (t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k) \in Q,$$

є неперервною (за сукупністю своїх аргументів).

Теорема 2.8. *Нехай $f \in C^1(\Omega)$. Тоді функція*

$$x = \varphi(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k), \quad (t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu_1, \ldots, \mu_k) \in Q,$$

є неперервно-диференційовною (за всіма аргументами).

2.5. Існування повного загального розв'язку рівняння вищого порядку.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, $f(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, — деяка функція.

Розглянемо рівняння вищого порядку

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{2.16}$$

Теорема 2.9. *Нехай функція $f(t, x_1, \ldots, x_n)$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшиця за всіма змінними, крім першої. Тоді для будь-якої фіксованої точки області D існує її окіл в D такий, що рівняння* (2.16) *в цьому околі має повний загальний розв'язок.*

Доведення. Доведення цієї теореми випливає із взаємозв'язку між рівняннями вищих порядків і відповідними нормальними системами та теореми 1.11. □

2.6. Деякі способи пониження порядку рівняння вищого порядку.

Розглянемо рівняння вищого порядку

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \quad (n \geqslant 2). \tag{2.17}$$

Виділимо декілька груп рівнянь (2.17), для яких існують відповідні способи пониження порядку.

I група. Рівняння вигляду

$$x^{(n)} = f(t), \tag{2.18}$$

де $f(t)$ — задана на (a, b) і неперервна там функція. Розв'язок цього рівняння шукається n-кратним інтегруванням функції f.

II група. Рівняння вигляду

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{2.19}$$

де $k \geqslant 1$ (рівняння, в якому явно не фігурують значення шуканої функції та її похідних до певного порядку).

Вводимо заміну
$$x^{(k)} = z.$$
Оскільки
$$x^{(k+1)} = z', \ldots, x^{(n)} = z^{(n-k)},$$
то з рівняння (2.19) отримаємо рівняння
$$F(t, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$
порядок якого $n - k$.

III група. Рівняння вигляду
$$F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{2.20}$$
(рівняння, в якому явно не фігурують значення незалежної змінної t).

Тоді
$$x' = p,$$
де $p = p(x)$ ($p(x)$ — функція, яка залежить від значень шуканої функції x).

Оскільки
$$x'(t) = p(x(t)),$$
то
$$\begin{aligned}
&x''(t) = p'(x(t)) \cdot x'(t) = p'(x(t)) \cdot p(x(t)),\\
&x'''(t) = p''(x(t)) \cdot x'(t) \cdot p(x(t)) + p'(x(t)) \cdot p'(x(t)) \cdot x'(t) =\\
&\qquad = p''(x(t)) \cdot p^2(x(t)) + p'^2(x(t)) \cdot p(x(t)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned}$$
Коротко це можна записати у вигляді
$$x'' = p'p, \quad x''' = p''p^2 + p'^2p, \quad \ldots \quad , x^{(n)} = g(p, p', \ldots, p^{(n-1)}).$$
Тоді з рівняння (2.20) отримаємо рівняння
$$G(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0,$$
порядок якого на 1 менший за порядок вихідного рівняння.

IV група. Однорідні рівняння (стосовно $x, x', \ldots, x^{(n)}$), тобто рівняння вигляду (2.17), де F — однорідна функція стосовно змінних $x, x', \ldots, x^{(n)}$:
$$F(t, kx, kx', \ldots, kx^{(n)}) = k^m F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) \ \ \forall k > 0, \quad \text{де } m \in \mathbb{R}.$$

Покладемо
$$\frac{x'}{x} = z.$$

Тоді $x' = zx$, звідки $x'' = z'x + zx' = (z' + z^2)x$, $x''' = (z'' + 2zz')x + (z' + z^2)x' = (z'' + 3z'z + z^3)x$, $\ldots$, $x^{(n)} = h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})x$. Підставляючи ці вирази в (2.17), отримаємо, враховуючи, що (в силу однорідності)

$$F\big(t, x, xz, \ldots, h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})x\big) = x^m F\big(t, 1, z, \ldots, h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})\big),$$

рівняння

$$H\big(t, z, z', \ldots, h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})\big) = 0.$$

V група. Узагальнено однорідні рівняння, тобто рівняння вигляду (2.17), де функція $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ володіє властивістю

$$F\big(kt, k^m x, k^{m-1}x', \ldots, k^{m-n}x^{(n)}\big) = k^\nu F\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big) \qquad \forall k > 0,$$

де m і ν — деякі дійсні числа.

Розв'язуватимемо спочатку наше рівняння. Зробимо заміну змінних при $t > 0$

$$\begin{cases} t = e^\tau, \\ x = ze^{m\tau}, \end{cases}$$

де $z = z(\tau)$ — "нова" шукана функція від "нової" змінної τ.

Оскільки

$$x(t) = z(\tau)e^{m\tau}|_{\tau = \ln t},$$

то

$$\begin{aligned} &x'_t = (ze^{m\tau})'_\tau \cdot \tau'_t = (z'_\tau e^{m\tau} + mze^{m\tau}) \cdot \frac{1}{t'_\tau} = (z'_\tau + mz)e^{(m-1)\tau}, \\ &x''_t = \big((z'_\tau + mz)e^{(m-1)\tau}\big)'_\tau \cdot \tau'_t = \big[(z''_\tau + mz'_\tau)e^{(m-1)\tau} + (z'_\tau + mz)(m-1)e^{(m-1)\tau}\big]e^{-\tau} = \\ &\quad = \big[z''_\tau + (2m-1)z'_\tau) + m(m-1)z\big]e^{(m-2)\tau}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_t^{(n)} = q\big(z, z'\tau, \ldots, z_\tau^{(n)}\big)e^{(m-n)\tau}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (2.17) та враховуючи рівність

$$\begin{aligned} &F\big(e^\tau, z(e^\tau)^m, (z'_\tau + mz)(e^\tau)^{m-1}, \ldots, q(z, z'_\tau, \ldots, z_\tau^{(n)})(e^\tau)^{(m-n)}\big) = \\ &= e^{\nu\tau} F\big(1, z, z'_\tau + mz, \ldots, q(z, z'\tau, \ldots, z_\tau^{(n)})\big), \end{aligned}$$

отримаємо рівняння

$$M\big(z, z', \ldots, z^{(n)}\big) = 0,$$

яке належить до групи III.

VI група. Рівняння, які після певних елементарних перетворень (множення і ділення на певні вирази), можна записати у вигляді

$$\Big(F_1\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big)\Big)' = \Big(F_2\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big)\Big)'.$$

Звідси, очевидно, отримаємо рівняння

$$F_1\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big) = F_2\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big) + C_1.$$

Лекція № 11

Колоквіум №2

Тема 3
Нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь та лінійні звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

§1. Нормальні лінійні системи (НЛС)

1.1. Поняття НЛС. Коректність задачі Коші для НЛС. Структура повного загального розв'язку НЛС

1.1.1. Поняття НЛС

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Означення 1.1. *Нормальною лінійною системою* звичайних диференціальних рівнянь (скорочено НЛС) називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

де $n \geq 2$ — натуральне число, t — незалежна змінна, яка пробігає значення з інтервалу (a, b) числової осі $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, a_{kl}, f_k, $k, l = \overline{1, n}$, — задані на (a, b) зі значеннями в $\mathbb{P}$ функції, а x_k, $k = \overline{1, n}$, — невідомі функції від змінної t, що приймають значення в $\mathbb{P}$.

Функції a_{kl}, $k, l = \overline{1, n}$, називають *коефіцієнтами*, а f_k, $k = \overline{1, n}$, — *вільними членами* системи (1.1). Якщо $f_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, то систему (1.1) називають *нормальною лінійною однорідною системою (НЛОС)*, в іншому випадку — *нормальною лінійною неоднорідною системою (НЛНС)*.

Через $C^1(\langle c, d\rangle; \mathbb{P})$ позначаємо лінійний простір, складений з визначених на $\langle c, d\rangle$ неперервно-диференційовних функцій зі значеннями в $\mathbb{P}$.

Під *розв'язком* системи (1.1) розуміємо набір функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \dots, \ x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b),$$

з простору $C^1(\langle c, d\rangle; \mathbb{P})$, якщо при підстановці їх в рівняння системи отримуємо тотожності.

Для зручності і лаконічності викладення матеріалу запишемо систему (1.1) у вигляді векторного рівняння. Спочатку введемо відповідні позначення. Нехай $\mathbb{P}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \equiv (p_1, \ldots, p_n)^\top$ елементів поля $\mathbb{P}$ і наділений стандартними лінійними операціями та нормою $\|p\| := \big(|p_1|^2 + \ldots + |p_n|^2\big)^{1/2}$. Елементи нормованого лінійного простору $\mathbb{P}^n$ називатимемо *векторами.* Під $M_n(\mathbb{P})$ розуміємо лінійний простір, складений з квадратних матриць $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$ з елементами з поля $\mathbb{P}$ і наділений стандартними лінійними операціями та нормою $\|B\| := \Big(\sum\limits_{k,l=1}^{n} |b_{kl}|^2\Big)^{1/2}$.

Зауваживши, що систему (1.1) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

і ввівши позначення

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a,b),$$

систему (1.1) можна подати у вигляді векторного лінійного диференціального рівняння

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{1.2}$$

де t — незалежна дійсна змінна, яка набуває значень з інтервалу (a,b), $A : (a,b) \to M_n(\mathbb{P})$, $f : (a,b) \to \mathbb{P}^n$ — задані, відповідно, матрична та векторна функції, x — невідома векторна функція зі значеннями в $\mathbb{P}^n$ від змінної t.

Під *розв'язком* НЛС у вигляді векторного рівняння (1.2) розуміємо векторну функцію $x = \varphi(t)$, $t \in \langle c,d\rangle \subset (a,b)$, з простору $C^1\big(\langle c,d\rangle; \mathbb{P}^n\big)$, яка при підстановці її у рівняння (1.2) перетворює його в тотожність на проміжку $\langle c,d\rangle$.

1.1.2. Коректність задачі Коші для НЛС

Задача Коші для нормальної лінійної системи в скалярній формі (1.1) формулюється (аналогічно як для нормальної системи в §1 теми 2) так: знайти розв'язок системи (1.1), що задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.3}$$

де $t_0 \in (a,b)$, $x_1^0, \ldots, x_n^0 \in \mathbb{P}$ — задані.

Далі задачу Коші для системи (1.1) з початковими умовами (1.3) коротко називатимемо задачею (1.1),(1.3).

Задача Коші для НЛС у вигляді векторного рівняння (1.2) полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x^0, \tag{1.4}$$

де $t_0 \in (a, b), \quad x^0 = (x_1^0 \dots x_n^0)^\top \in \mathbb{P}^n$ — задані.

Далі задачу Коші для НЛС вигляду (1.2) з початковими умовами вигляду (1.4) коротко називатимемо задачею (1.2),(1.4).

Дослідимо *коректність задачі Коші для НЛС* (яку будемо записувати у вигляді задачі (1.1),(1.3) чи, що те саме, задачі (1.2),(1.4)), тобто ***існування*** її розв'язку, його ***єдиність*** та ***неперервну залежність від вхідних даних***. Для цього нам буде потрібна відповідна задачі Коші для НЛС вигляду (1.1),(1.3) система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big[a_{11}(s)x_1 + \dots + a_{1n}(s)x_n + f_1(s)\big]\, ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big[a_{n1}(s)x_1 + \dots + a_{nn}(s)x_n + f_n(s)\big]\, ds, \end{cases} \tag{1.5}$$

а вигляду (1.2),(1.4) – векторне інтегральне рівняння

$$x = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x + f(s)]\, ds. \tag{1.6}$$

Очевидно, що векторне рівняння (1.6) є записом у векторній формі системи інтегральних рівнянь (1.5).

Припускаємо, що функції a_{kl}, f_k $(k, l = \overline{1, n})$, а отже, матрична функція A і векторна функція f є *неперервними* на (a, b).

Розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.5) (відповідно, векторного інтегрального рівняння (1.6)) називають набір неперервних функцій $x_1 = \psi_1(t), \dots, x_n = \psi_n(t)$, $t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b)$ (відповідно, неперервна векторна функція $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b)$), якщо при підстановці цих функцій (відповідно, цієї функції) в задану систему інтегральних рівнянь (відповідно, у задане векторне інтегральне рівняння) отримуємо тотожності (відповідно, тотожність) на $\langle c, d\rangle$.

Далі, враховуючи, що задачі (1.1),(1.3) та (1.2),(1.4) є різними записами задачі Коші для однієї і тієї ж НЛС, будемо (з міркувань зручності та лаконічності викладення матеріалу) переважно говорити про задачу Коші для НЛС у вигляді задачі (1.2),(1.4).

Теорема 1.1. *Нехай функції A і f є неперервними. Тоді будь-який розв'язок задачі* (1.2), (1.4) *є розв'язком векторного інтегрального рівняння* (1.6)*, і навпаки, довільний розв'язок рівняння* (1.6) *є розв'язком задачі* (1.2), (1.4).

Доведення. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, — який-небудь розв'язок задачі (1.2), (1.4). Тоді правильна тотожність

$$\varphi'(s) = A(s)\varphi(s) + f(s), \quad s \in \langle c, d\rangle.$$

Проінтегруємо цю тотожність за s від t_0 до $t \in \langle c, d\rangle$:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \big[A(s)\varphi(s) + f(s)\big]\, ds.$$

Звідси та умови (1.4) випливає, що функція φ є розв'язком рівняння (1.6).

Припустимо, що $x = \psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, — якийсь розв'язок інтегрального рівняння (1.6). Підставивши його в це рівняння, легко переконуємося, що ψ є неперервно диференційовною і задовольняє умову (1.4) (це випливає з того, що інтеграли з однаковими межами дорівнюють нулю). Продиференціювавши відповідну тотожність, отримаємо тотожність таку саму, яку отримали б, коли б підставили функцію ψ в рівняння (1.2). Отож, ми показали, що функція ψ є розв'язком задачі (1.2),(1.4). $\square$

З'ясуємо питання ***існування та єдиності розв'язку*** задачі $(1.2), (1.4)$.

Теорема 1.2. *Нехай матрична функція A і векторна функція f є неперервними. Тоді існує і тільки один визначений на (a, b) розв'язок задачі* $(1.2), (1.4)$ *і він є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

Доведення. На підставі теореми 1.1 задача (1.2),(1.4) еквівалентна векторному інтегральному рівнянню (1.6). Отож, нам достатньо довести, що векторне інтегральне рівняння (1.6) має розв'язок, про який йдеться у твердженні теореми. Зробимо це *методом послідовних наближень.*

Спочатку побудуємо послідовні наближення. Приймемо

$$x^0(t) := x^0, \qquad t \in (a, b),$$

$$x^k(t) := x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^{k-1}(s) + f(s)]\, ds, \qquad t \in (a, b), \tag{1.7}$$

де $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція x^k визначена на (a, b). Покажемо, що існує векторна функція $\varphi \in C((a, b); \mathbb{P}^n)$ така, що для будь-якого відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ маємо рівність

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[\alpha,\beta]} \|x^k(t) - \varphi(t)\| = 0. \tag{1.8}$$

Для цього розглянемо функційний ряд

$$x^0(t) + \big(x^1(t) - x^0(t)\big) + \big(x^2(t) - x^1(t)\big) + \cdots + \\ + \big(x^k(t) - x^{k-1}(t)\big) + \cdots, \ t \in (a, b). \tag{1.9}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ позначимо

$$S_k(t) := x^0(t) + \big(x^1(t) - x^0(t)\big) + \cdots + \big(x^k(t) - x^{k-1}(t)\big), \quad t \in (a, b).$$

Очевидно, що $S_k(t) = x^k(t)$, $t \in (a, b)$, — часткова сума цього ряду для будь-якого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отож, нам достатньо довести рівномірну збіжність ряду (1.9) на кожному відрізку з $(a,\ b)$. Нехай $[\alpha, \beta]$ — який-небудь відрізок з (a, b). Без втрати загальності можна вважати, що $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Покажемо рівномірну збіжність на $[\alpha, \beta]$ ряду (1.9), використовуючи ознаку Вейєрштрасса.

Нехай

$$m := \max_{t\in[\alpha,\beta]} \|A(t)x^0 + f(t)\|, \quad L := \max_{t\in[\alpha,\beta]} \|A(t)\|.$$

Як відомо, правильними є нерівності

$$\|p^1 + p^2\| \leqslant \|p^1\| + \|p^2\|, \quad \|A(t)p\| \leqslant \|A(t)\|\, \|p\| \leqslant L\|p\|, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad p, p^1, p^2 \in \mathbb{P}^n, \tag{1.10}$$

$$\Big\| \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,ds \Big\| \leqslant \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \|g(s)\|\,ds \Big|, \quad t \in (a,b), \quad g \in C((a,b);\mathbb{P}^n). \tag{1.11}$$

Оцінимо кожен член ряду (1.9), коли $t \in [\alpha, \beta]$. Використовуючи (1.10) і (1.11) маємо для $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}
&\|x^0(t)\| = \|x^0\|;\\
&\|x^1(t) - x^0(t)\| = \Big\| \int\limits_{t_0}^{t} \big(A(s)x^0(s) + f(s)\big)\,ds \Big\| \leqslant\\
&\qquad \leqslant \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)x^0 + f(s)\big\|\,ds \Big| \leqslant m|t-t_0| = m\frac{|t-t_0|}{1!};\\
&\big\|x^2(t) - x^1(t)\big\| \leqslant \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big(x^1(s) - x^0(s)\big)\big\|\,ds \Big| \leqslant\\
&\qquad \leqslant \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big\|\,\big\|x^1(s) - x^0(s)\big\|\,ds \Big| \leqslant L\Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|x^1(s) - x^0(s)\big\|\,ds \Big| \leqslant\\
&\qquad \leqslant mL\Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big|s - t_0\big|\,ds \Big| = mL\frac{|t-t_0|^2}{2} = mL\frac{|t-t_0|^2}{2!};\\
&\big|x^3(t) - x^2(t)\big| \leqslant \Big| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big\|\,\big\|x^2(s) - x^1(s)\big\|\,ds \Big| \leqslant\\
&\qquad \leqslant mL^2\Big| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^2}{2}\,ds \Big| = mL^2\frac{|t-t_0|^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Отож, виникає гіпотеза: для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$\big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\| \leqslant mL^{k-1}\frac{|t-t_0|^k}{k!}, \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.12}$$

Вона легко підтверджується методом математичної індукції.

Отже, ряд (1.9) на підставі (1.12) мажорується на $[\alpha, \beta]$ числовим рядом

$$\|x^0\| + \frac{m}{L}\frac{L(\beta-\alpha)}{1!} + \frac{m}{L}\frac{\big[L(\beta-\alpha)\big]^2}{2!} + \dots + \frac{m}{L}\frac{\big[L(\beta-\alpha)\big]^k}{k!} + \dots =$$

$$= \|x^0\| + \frac{m}{L}\Big[-1 + 1 + \frac{L(\beta-\alpha)}{1!} + \frac{\big[L(\beta-\alpha)\big]^2}{2!} + \dots + \frac{\big[L(\beta-\alpha)\big]^k}{k!} + \dots \Big],$$

який, згідно з ознакою Д'Аламбера, є збіжним і сума якого (нагадаємо розвинення в ряд Тейлора-Маклорена функції e^τ: $e^\tau = 1 + \frac{\tau}{1!} + \frac{\tau^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^k}{k!} + \dots$) дорівнює $|x^0| + \frac{m}{L}\big(e^{L(\beta-\alpha)} - 1\big)$.

Звідси, на підставі ознаки Вейєрштрасса, випливає, що ряд (1.9) рівномірно збіжний на $[\alpha, \beta]$ і, отже, існує неперервна на $[\alpha, \beta]$ векторна функція $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, така, що $\max\limits_{t\in[\alpha,\beta]}\big\|x^k(t)-\varphi_{\alpha,\beta}(t)\big\| \to 0$ при $k\to\infty$. Очевидно, що $\varphi_{\alpha_1,\beta_1}(t)=\varphi_{\alpha,\beta}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, якщо $[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha,\beta]$. Тому існує неперервна функція $\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, така, що правильна рівність (1.8), де $[\alpha,\beta]$ — будь-який відрізок з (a,b), тобто

$$x^k\to\varphi \quad \text{в} \quad C\big((a,b);\mathbb{P}^n\big) \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{1.13}$$

Нехай t — довільне число з (a,b). Зафіксуємо його і перейдемо до границі в (1.7) при $k\to\infty$, врахувавши (1.13). У результаті отримаємо

$$\varphi(t)=x^0+\int\limits_{t_0}^{t}[A(s)\varphi(s)+f(s)]\,ds, \qquad t\in(a,b). \tag{1.14}$$

Звідси випливає, що функція $x=\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, є розв'язком рівняння (1.6). Покажемо, що будь-який розв'язок рівняння (1.6) збігається з побудованим або є його звуженням. Справді, нехай $x=\psi(t)$, $t\in\langle c,d\rangle\subset(a,b)$, — який-небудь розв'язок рівняння (1.6). Тоді

$$\psi(t)=x^0+\int\limits_{t_0}^{t}[A(s)\psi(s)+f(s)]\,ds, \qquad t\in\langle c,d\rangle. \tag{1.15}$$

Візьмемо який-небудь відрізок $[\alpha,\beta]\subset\langle c,d\rangle$ такий, що $t_0\in[\alpha,\beta]$. Віднявши рівності (1.14) і (1.15) та використавши (1.10) і (1.11), отримаємо для $t\in[\alpha,\beta]$ такі нерівності

$$\begin{gathered}\big\|\varphi(t)-\psi(t)\big\|\leqslant\left\|\int\limits_{t_0}^{t}A(s)\big(\varphi(s)-\psi(s)\big)\,ds\right\|\leqslant\\ \leqslant\left|\int\limits_{t_0}^{t}\big\|A(s)\big\|\,\big\|\varphi(s)-\psi(s)\big\|\,ds\right|\leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t}\big\|\varphi(s)-\psi(s)\big\|\,ds\right|,\end{gathered} \tag{1.16}$$

де $L:=\max\limits_{s\in[\alpha,\beta]}\big\|A(s)\big\|$.

Звідси та нерівності Гронуолла-Белмана випливає, що $\big\|\varphi(t)-\psi(t)\big\|=0$, $t\in[\alpha,\beta]$, тобто $\varphi(t)=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. Оскільки $[\alpha,\beta]$ — довільний відрізок з $\langle c,d\rangle$, то $\varphi(t)=\psi(t)$, $t\in\langle c,d\rangle$, що і треба було довести. □

Надалі вважатимемо, що матрична функція A та векторна функція f є неперервними і будемо говорити про розв'язки рівняння (1.2) тільки ті, які визначені на інтервалі (a,b).

Тепер покажемо ***неперервну залежність розв'язку задачі Коші для НЛС від вхідних даних***. Для цього спочатку встановимо правильність такого твердження.

Теорема 1.3. *Для розв'язку $x=\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, задачі* (1.2),(1.4) *і довільного відрізка $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ такого, що $t_0\in[\alpha,\beta]$, правильна оцінка*

$$\|\varphi(t)\|\leqslant\big[\|x^0\|+(\beta-\alpha)\max_{s\in[\alpha,\beta]}\|f(s)\|\big]\,e^{(\beta-\alpha)\max\limits_{s\in[\alpha,\beta]}\|A(s)\|}, \qquad t\in[\alpha,\beta]. \tag{1.17}$$

Доведення. На підставі теореми 1.1 одержуємо рівність

$$\varphi(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + f(s)]\, ds, \qquad t \in (a,b). \tag{1.18}$$

Тоді для будь-якого $t \in [\alpha, \beta]$ з (1.18) на підставі (1.10) і (1.11) маємо

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leqslant \|x^0\| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)x(s) + f(s)\big\|\, ds \right| \leqslant \\ &\leqslant \|x^0\| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|f(s)\big\|\, ds \right| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(s)\varphi(s)\big\|\, ds \right| \leqslant \\ &\leqslant \|x^0\| + (\beta - \alpha) \max_{s\in[\alpha,\beta]} \|f(s)\| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|\varphi(s)\|\, ds \right| \leqslant \\ &\leqslant \big[\|x^0\| + (\beta - \alpha) \max_{s\in[\alpha,\beta]} \|f(s)\|\big] + \max_{s\in[\alpha,\beta]} \|A(s)\| \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\varphi(s)\|\, ds \right|. \end{aligned}$$

Звідси та з нерівності Гроноулла-Белмана отримаємо (1.17).

□

Теорема 1.4. *Нехай* $A \in C\big((a,b); M_n(\mathbb{P})\big)$ *і* $f^k \to f$ *в* $C\big((a,b); \mathbb{P}^n\big)$, $x^{0,k} \to x^0$ *в* $\mathbb{P}^n$ *при* $k \to \infty$. *Тоді* $\varphi^k \to \varphi$ *в* $C^1\big((a,b); \mathbb{P}^n\big)$ *при* $k \to \infty$, *де для кожного* $k \in \mathbb{N}$ φ^k *— розв'язок задачі*

$$x' = A(t)x + f^k(t), \tag{1.19}$$

$$x(t_0) = x^{0,k}, \tag{1.20}$$

а φ *— розв'язок задачі* (1.2),(1.4).

Доведення. На підставі теореми 1.1 маємо рівності

$$\varphi(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + f(s)]\, ds, \qquad t \in (a,b),$$

$$\varphi^k(t) = x^{0,k} + \int\limits_{t_0}^{t} [A(s)\varphi^k(s) + f^k(s)]\, ds, \qquad t \in (a,b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Віднявши ці рівності та ввівши позначення $\psi^k(t) := \varphi^k(t) - \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, отримаємо

$$\psi^k(t) = (x^{0,k} - x^0) + \int\limits_{t_0}^{t} [A(s)\psi^k(s) + (f^k(s) - f(s))]\, ds,$$

$$t \in (a,b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $[\alpha, \beta]$ — який-небудь відрізок з (a, b), що містить точку t_0. Тоді з теореми 1.3 (із заміною x, x^0 і f відповідно на ψ^k, $x^{0,k} - x^0$ та $f^k - f$) маємо

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \|\varphi^k(t) - \varphi(t)\| \leqslant \big[\|x^{0,k} - x^0\| + (\beta - \alpha) \max_{s\in[\alpha,\beta]} \|f^k(s) - f(s)\|\big]\times \\ \times e^{(\beta-\alpha) \max\limits_{s\in[\alpha,\beta]} \|A(s)\|}. \tag{1.21}$$

На підставі наших припущень права частина нерівності (1.21) прямує до нуля при $k \to \infty$. Звідси та довільності відрізка $[\alpha, \beta]$ отримаємо, що $\varphi^k \to \varphi$ в $C\big((a, b); \mathbb{P}^n\big)$ при $k \to \infty$.

Віднявши рівності, отримані при підстановці функцій φ^k, $k \in \mathbb{N}$, в рівняння (1.19) і φ — в (1.2), приходимо до рівностей

$$\big(\varphi^k(t) - \varphi(t)\big)' = A(t)\big(\varphi^k(t) - \varphi(t)\big) + f^k(t) - f(t), \\ t \in (a, b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси

$$\|\big(\varphi^k(t)\big)' - \big(\varphi(t)\big)'\| \le \|A(t)\|\|\varphi^k(t) - \varphi(t)\| + \|f^k(t) - f(t)\|, \\ t \in (a, b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки права частина цієї нерівності збігається до нуля в $C\big((a, b); \mathbb{R}\big)$ при $k \to \infty$, то і ліва частина — теж. Звідси випливає збіжність послідовності $\{(\varphi^k)'\}_{k=1}^{\infty}$ до φ' в $C\big((a, b); \mathbb{P}^n\big)$ при $k \to \infty$. $\square$

Аналогічно можна довести таке твердження.

Теорема 1.5. *Нехай* $A^k \to A$ *в* $C\big((a, b); M_n(\mathbb{P})\big)$, $f^k \to f$ *в* $C\big((a, b); \mathbb{P}^n\big)$, $t_{0,k} \to t_0$ *в* $\mathbb{R}$, $x^{0,k} \to x^0$ *в* $\mathbb{P}^n$ *при* $k \to \infty$. *Тоді* $\varphi^k \to \varphi$ *в* $C^1\big((a, b); \mathbb{P}^n\big)$ *при* $k \to \infty$, *де для кожного* $k \in \mathbb{N}$ φ^k *— розв'язок задачі*

$$x' = A^k(t)x + f^k(t), \\ x(t_{0,k}) = x^{0,k},$$

а φ *— розв'язок задачі* (1.2),(1.4) *(тут* $t_{0,k} \in (a, b)$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$*).*

Вправа. Довести теорему 1.5.

1.1.3. Структура повного загального розв'язку НЛС

Розглянемо нормальну лінійну неоднорідну систему (коротко, НЛНС) у векторній формі (1.2). Систему

$$x' = A(t)x\,, \tag{1.22}$$

де $A(t), t \in (a, b)$, — та сама матрична функція, що в (1.2), називаємо *нормальною лінійною однорідною системою* (коротко, НЛОС) *відповідною НЛНС* (1.2).

Лема 1.1. *Нехай* $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a, b)$, *— деякий розв'язок НЛНС (1.2). Тоді для будь-якого розв'язку* $x = x(t)$, $t \in (a, b)$, *цієї системи знайдеться розв'язок* $x = \widehat{x}(t)$, $t \in (a, b)$, *відповідної однорідної системи (1.22), такий, що*

$$x(t) = \widehat{x}(t) + \overset{*}{x}(t), \quad t \in (a, b), \tag{1.23}$$

і навпаки, якщо $x = \widehat{x}(t)$, $t \in (a, b)$, *— розв'язок однорідної системи (1.22), то функція* $x = x(t)$, $t \in (a, b)$, *де вираз* $x(t)$ *визначається рівністю (1.23), є розв'язком неоднорідної системи (1.2).*

Доведення. Нехай $x = x(t)$, $t \in (a, b)$, — який-небудь розв'язок НЛНС (1.2). Приймемо $\hat{x}(t){:=}x(t) - \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a, b)$. Враховуючи (1.2), одержуємо

$$\widehat{x}'(t) = x'(t) - \overset{*}{x}{}'(t) = \big(A(t)x(t) + f(t)\big) - \big(A(t)\overset{*}{x}(t) + f(t)\big) =$$
$$= A(t)\big(x(t) - \overset{*}{x}(t)\big) = A(t)\widehat{x}(t), \quad t \in (a, b).$$

Це означає, що функція $x = \hat{x}(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок НЛНС (1.22).

З іншого боку, якщо векторна функція $x = \hat{x}(t)$, $t \in (a, b)$, є розв'язком системи (1.22) і маємо рівність (1.23), то

$$x'(t) = \hat{x}'(t) + \overset{*}{x}{}'(t) = A(t)\hat{x}(t) + A(t)\overset{*}{x}(t) + f(t) =$$
$$= A(t)\big(\hat{x}(t) + \overset{*}{x}(t)\big) + f(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in (a, b),$$

що і треба було довести. □

Теорема 1.6. *Повний загальний розв'язок НЛНС* (1.2) *має вигляд*

$$x = \overset{\circ}{x}(t, C) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{P}^n,$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t, C)$, $t \in (a, b)$, $C \in \mathbb{P}^n$, *— повний загальний розв'язок НЛОС* (1.22), *а* $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a, b)$, *— (частковий) розв'язок неоднорідного рівняння* (1.2).

Лекція № 13

1.2. Зображення повного загального розв'язку НЛОС

Розглянемо нормальну лінійну однорідну систему (1.22). Нас цікавить вигляд її повного загального розв'язку, а для цього потрібно вияснити деякі властивості множини розв'язків цієї системи.

Перш за все відмітимо, що розв'язки системи (1.22) є елементами лінійного простору $C^1((a, b); \mathbb{P}^n)$, який є підпростором лінійного простору векторних функцій, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}^n$.

Лема 1.2. *Будь-яка лінійна комбінація розв'язків системи* (1.22) *є розв'язком цієї системи, тобто множина розв'язків системи* (1.22) *утворює підпростір лінійного простору* $C^1((a, b); \mathbb{P}^n)$.

Доведення. Нехай $x = \varphi^1(t)$, $\ldots$, $x = \varphi^k(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язки (1.22), а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — довільні елементи поля $\mathbb{P}$. Приймемо

$$\varphi(t){:=}\lambda_1\varphi^1(t) + \cdots + \lambda_k\varphi^k(t), \quad t \in (a, b),$$

і покажемо, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, є розв'язком (1.22). Справді,

$$\varphi'(t) = \lambda_1\big(\varphi^1(t)\big)' + \cdots + \lambda_k\big(\varphi^k(t)\big)' = \lambda_1 A(t)\varphi^1(t) + \cdots +$$
$$+\lambda_k A(t)\varphi^k(t) = A(t)\big(\lambda_1\varphi^1(t) + \cdots + \lambda_k\varphi^k(t)\big) = A(t)\varphi(t), \quad t \in (a, b).$$

□

Означення 1.2. Систему векторних функцій $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ ($k \in \mathbb{N}$), які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}^n$, називають *лінійно залежною* (ЛЗ), якщо існують сталі $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ з $\mathbb{P}$, які не всі дорівнюють нулеві (тобто, $|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_k| > 0$) і такі, що

$$\lambda_1\varphi^1(t) + \cdots + \lambda_k\varphi^k(t) = 0, \quad t \in (a, b). \tag{1.24}$$

Означення 1.3. Систему векторних функцій $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}^n$, називають *лінійно незалежною* (ЛН), якщо вона не є лінійно залежною, тобто рівність (1.24) справджується тоді і лише тоді, коли $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Приклад 1.1. Для будь-якого натурального числа $k \in \mathbb{N}$, довільних різних чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{C}$ і будь-яких ненульових векторних многочленів $p^1, \ldots, p^k$ функції

$$p^1(t)e^{\mu_1 t}, \quad \ldots, \quad p^k(t)e^{\mu_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— лінійно незалежні.

Для доведення цього факту використаємо метод математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження очевидне. Припустимо, що воно правильне для якого-небудь $k = \nu \in \mathbb{N}$, і покажемо, що з цього випливатиме його правильність для $k = \nu + 1$. Справді, нехай існують ненульові функції $p^1(t)e^{\mu_1 t}, \ldots, p^{\nu+1}(t)e^{\mu_{\nu+1} t}$, $t \in \mathbb{R}$, та числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu+1}$ такі, що $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{\nu+1}| > 0$ і

$$\alpha_1 p^1(t)e^{\mu_1 t} + \cdots + \alpha_{\nu+1}p^{\nu+1}(t)e^{\mu_{\nu+1} t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Якщо хоча б одне з цих чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu+1}$ дорівнює нулеві, то всі решта, за припущенням, теж дорівнюють нулеві. Отже, $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_{\nu+1} \neq 0$. Поділимо (1.25) на $e^{\mu_{\nu+1} t}$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 p^1(t)e^{(\mu_1 - \mu_{\nu+1})t} + \alpha_2 p^2(t)e^{(\mu_2 - \mu_{\nu+1})t} + \cdots + \\ &+ \alpha_\nu p^\nu(t)e^{(\mu_\nu - \mu_{\nu+1})t} + \alpha_{\nu+1}p^{\nu+1}(t) = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Нехай степінь $\deg p^{\nu+1}$ векторного полінома $p^{\nu+1}$ дорівнює $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Продиференціюємо (1.26) за t $(\mu + 1)$ раз. Оскільки $(p^{\nu+1})^{(\mu+1)}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, а $\mu_1 - \mu_{\nu+1} \neq 0$, $\mu_2 - \mu_{\nu+1} \neq 0, \ldots, \mu_\nu - \mu_{\nu+1} \neq 0$, то в результаті одержимо

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \tilde{p}^1(t)e^{(\mu_1 - \mu_{\nu+1})t} + \alpha_2 \tilde{p}^2(t)e^{(\mu_2 - \mu_{\nu+1})t} + \cdots + \\ &+ \alpha_\nu \tilde{p}^\nu(t)e^{(\mu_\nu - \mu_{\nu+1})t} = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Позаяк $\deg \tilde{p}^1(t) = \deg p_1(t), \ldots, \deg \tilde{p}^\nu(t) = \deg p_\nu(t)$ (в силу правила диференціювання добутку функцій і вигляду похідних від експоненціальної функції), то на підставі нашого припущення з (1.27) випливає, що $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\nu = 0$, а отже, і $\alpha_{\nu+1} = 0$. Одержали суперечність, що доводить правильність нашого твердження.

Лема 1.3. *Нехай* $\varphi^1, ..., \varphi^k$ *— розв'язки НЛОС* (1.22)*. Тоді такі два твердження є правильними:*

1) *Якщо для деякого* $t_0 \in (a, b)$ *вектори* $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^k(t_0)$*, як елементи* $\mathbb{P}^n$*, — ЛЗ (відповідно, ЛН), то векторні функції* $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ *— ЛЗ (відповідно, ЛН).*

2) Якщо $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ — ЛН (відповідно, ЛЗ), то для будь-якого $t_0 \in (a,b)$ вектори $\varphi^1(t_0), \dots, \varphi^k(t_0)$ (як елементи $\mathbb{P}^n$) — ЛН (відповідно, ЛЗ).

Доведення. Спочатку доведемо перше твердження. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — сталі з $\mathbb{P}$, які не всі дорівнюють нулеві ($|\lambda_1| + \dots + |\lambda_k| > 0$) і такі, що

$$\lambda_1\varphi^1(t_0) + \dots + \lambda_k\varphi^k(t_0) = 0. \tag{1.28}$$

Приймемо

$$\varphi(t) := \lambda_1\varphi^1(t) + \dots + \lambda_k\varphi^k(t) \quad \forall\, t \in (a,b). \tag{1.29}$$

За лемою 1.2 функція $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, є розв'язком рівняння (1.22) і згідно з (1.28) маємо $\varphi(t_0) = 0$. Отож, функція φ є розв'язком задачі Коші для векторного рівняння (1.22) з початковою умовою

$$x(t_0) = 0. \tag{1.30}$$

Розв'язком задачі (1.22),(1.30) є також функція $x = 0$, $t \in (a,b)$. На підставі єдиності розв'язку задачі Коші для НЛС маємо рівність: $\varphi(t) = 0, \quad t \in (a,b)$, звідки, врахувавши (1.29), отримаємо

$$\lambda_1\varphi^1(t) + \dots + \lambda_k\varphi^k(t) = 0, \quad t \in (a,b),$$

що і потрібно.

Тепер доведемо друге твердження, використовуючи метод доведення від супротивного. Нехай існує $t_0 \in (a,b)$ таке, що $\varphi^1(t_0), \dots, \varphi^k(t_0)$ — ЛЗ. Тоді згідно з попереднім твердженням приходимо до висновку, що $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ — ЛЗ, а це суперечить нашому припущенню. Отож, друге твердження є правильним. $\square$

Лема 1.4. *Існує n ЛН розв'язків НЛОС* (1.22).

Доведення. Нехай $a^1, \dots, a^n$ — ЛН (сталі) вектори з $\mathbb{P}^n$, $t_0 \in (a,b)$ — довільне фіксоване значення. Для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ розв'яжемо задачу Коші для системи (1.22) з початковою умовою

$$x(t_0) = a^j$$

і позначимо розв'язок цієї задачі через $x = \varphi^j(t)$, $t \in (a,b)$ (його існування та єдиність випливають з відповідних результатів попереднього пункту). Оскільки $\varphi^1(t_0) = a^1, \dots, \varphi^n(t_0) = a^n$ і $a^1, \dots, a^n$ — ЛН, то на підставі першого твердження леми 1.3 векторні функції $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — ЛН. $\square$

Лема 1.5. *Нехай $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — ЛН розв'язки НЛОС* (1.22)*. Тоді для будь-якого розв'язку φ НЛОС* (1.22) *знайдуться (єдиним чином визначені) сталі $c_1, \dots, c_n$ такі, що*

$$\varphi(t) = c_1\varphi^1(t) + \dots + c_n\varphi^n(t) \quad \forall\, t \in (a,b). \tag{1.31}$$

Доведення. Нехай $t_0 \in (a,b)$ — яка-небудь фіксована точка. Розглянемо систему $n+1$ (сталих) векторів $\varphi^1(t_0), \dots, \varphi^n(t_0)$, $\varphi(t_0)$ з простору $\mathbb{P}^n$. Вони є ЛЗ, оскільки розмірність простору $\mathbb{P}^n$ дорівнює n. Тоді згідно з першим твердженням леми 1.3 векторні функції $\varphi^1, \dots, \varphi^n, \varphi$ — ЛЗ і, отже, існують сталі $\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\lambda}_{n+1}$, які не всі дорівнюють нулеві і такі, що

$$\widetilde{\lambda}_1\varphi^1(t) + \dots + \widetilde{\lambda}_n\varphi^n(t) + \widetilde{\lambda}_{n+1}\varphi(t) = 0 \qquad \forall\, t \in (a,b). \tag{1.32}$$

Оскільки $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — ЛН, то $\widetilde{\lambda}_{n+1} \neq 0$, бо в протилежному випадку було б $\widetilde{\lambda}_1 = \dots = \widetilde{\lambda}_n = 0$. Поділивши (1.32) на $\widetilde{\lambda}_{n+1}$ і ввівши відповідні позначення, отримаємо (1.31). $\square$

З леми 1.5 випливає природність введення такого поняття, як *фундаментальна система розв'язків* НЛОС (1.22).

Означення 1.4. Систему n ЛН розв'язків НЛОС (1.22) називають *фундаментальною системою розв'язків* НЛОС (1.22), або, скорочено, ФСР (1.22).

Наслідок 1.1. *Множина розв'язків НЛОС* (1.22) *утворює n-вимірний лінійний підпростір простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}^n\big)$ і будь-яка ФСР* (1.22) *утворює базу в цьому підпросторі.*

Доведення. Твердження наслідку 1.1 випливає з лем 1.2, 1.4, 1.5 (див. також зауваження після леми 1.2). □

А тепер можемо сформулювати основний результат цього пункту.

Теорема 1.7. *Повний загальний розв'язок НЛОС* (1.22) *можна записати у вигляді*

$$x = C_1\varphi^1(t) + \dots + C_n\varphi^n(t), \qquad t \in (a,b), \quad C_1,\dots,C_n \in \mathbb{P},$$

де $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ — яка-небудь (фіксована) ФСР (1.22).

Доведення. Твердження теореми 1.7 безпосередньо випливає з наслідку 1.1. □

1.3. Фундаментальна матриця розв'язків НЛОС та визначник Вронського.

Розглянемо НЛОС (1.22). Нехай

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^1(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi^n(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^n(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b),$$

— розв'язки цієї НЛОС. Матричну функцію

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix} \equiv \big(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)\big), \qquad t \in (a,b),$$

називають *матрицею розв'язків*, *матриціантом* або *матрицею Вронського* НЛОС (1.22), а коротко, МР (1.22).

Визначник цієї матриці

$$W(t) = \det\Phi(t), \qquad t \in (a,b)$$

називають *визначником Вронського* або *вронскіаном.*

Якщо ж задані розв'язки $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ є ЛН, тобто утворюють ФСР (1.22), то відповідну матрицю розв'язків $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, називають *фундаментальною матрицею розв'язків* НЛОС (1.22), а коротко ФМР (1.22).

Зі властивостей добутків матриць і теореми 1.7 (п.1.2) випливають такі два твердження.

Наслідок 1.2. *Повний загальний розв'язок НЛОС* (1.22) *можна записати у вигляді*

$$x = \Phi(t)C, \qquad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{P}^n, \tag{1.33}$$

де $\Phi(t)$, $t \in (a, b)$, *— ФМР (1.22).*

Наслідок 1.3. *Якщо* $\Phi(t)$, $t \in (a, b)$, *– МР (1.22), то правильна тотожність*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \in (a, b). \tag{1.34}$$

І навпаки, якщо функційна матриця $\Phi(t)$, $t \in (a, b)$, *компоненти якої є неперервно-диференційовними функціями, задовольняє тотожність (1.34), то вона є МР (1.22).*

Доведення. Нехай $\Phi(t) = \big(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\big)$, $t \in (a, b)$, — МР (1.22), тобто

$$\big(\varphi^k(t)\big)' = A(t)\varphi^k(t), \quad t \in (a, b), \quad k = \overline{1, n}.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \Big(\big(\varphi^1(t)\big)', \ldots, \big(\varphi^n(t)\big)'\Big) = \Big(A(t)\varphi^1(t), \ldots, A(t)\varphi^n(t)\Big) = \\ &= A(t)\big(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\big) = A(t)\Phi(t), \qquad t \in (a, b),\end{aligned}$$

що й треба було довести. Обернене твердження доводимо аналогічно. $\square$

З'ясуємо деякі властивості визначника Вронського.

Теорема 1.8. *Нехай векторні функції* $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *є розв'язками НЛОС* (1.22), *а* $W(t) = \det\big(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\big)$, $t \in (a, b)$, *— визначник Вронського. Тоді такі три твердження еквівалентні:*

1°. $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *— ЛН (відповідно, ЛЗ);*

2°. $\exists t_0 \in (a, b) \colon W(t_0) \neq 0$ *(відповідно,* $= 0$*);*

3°. $W(t) \neq 0$ *(відповідно,* $= 0$*),* $t \in (a, b)$.

Доведення. Доведення проведемо за схемою: **1**° $\Rightarrow$ **2**° $\Rightarrow$ **3**° $\Rightarrow$ **1**°. Покажемо, що з твердження **1**° випливає твердження **2**°. Нехай $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — ЛН. Тоді з другого твердження леми 1.3 (п.1.2) випливає, що для будь-якого $t_0 \in (a, b)$ вектори $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)$, як елементи $\mathbb{P}^n$, є ЛН, а отже, визначник $W(t_0)$, стовпцями якого є ці вектори, відмінний від нуля, тобто твердження **2**° є правильним. Покажемо, що з твердження **2**° випливає твердження **3**°. Оскільки $W(t_0) \neq 0$, то вектори $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)$ — ЛН. Припустимо, що твердження **3**° не є правильним. Тоді існує значення $t_* \in (a, b)$ таке, що $W(t_*) = 0$, звідки випливає, що вектори $\varphi^1(t_*), \ldots, \varphi^n(t_*)$ — ЛЗ. На підставі першого твердження леми 1.3 (п.1.2) це означає, що $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — ЛЗ, звідки отримаємо, що вектори $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)$ — ЛЗ, а це суперечить твердженню **2**°, яке ми вважаємо правильним. Отож, твердження **3**° є правильним. Тепер доведемо, що з твердження **3**° випливає твердження **1**°. Оскільки $W(t) \neq 0$, то сталі вектори $\varphi^1(\hat{t}), \ldots, \varphi^n(\hat{t})$ — ЛН для якого-небудь $\hat{t} \in (a, b)$. Звідси та з першого твердження леми 1.3 (п.1.2) випливає правильність твердження **1**°. $\square$

Наслідок 1.4. *Нехай* $\Phi(t) = \big(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)\big)$, $t \in (a,b)$, *– матриця розв'язків НЛОС* (1.22)*. Ця МР* (1.22) *є фундаментальною, якщо* $\det\Phi(t_0) \neq 0$ *для деякого* $t_0 \in (a,b)$.

Наслідок 1.5. *Правильні такі два твердження:*

1) Якщо $\Phi(t) = \big(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)\big)$, $t \in (a,b)$, *– ФМР (1.22), а* $\Psi(t) = \big(\psi^1(t),\dots,\psi^n(t)\big)$, $t \in (a,b)$, *– МР (1.22), то існує стала матриця* $B \in M_n(\mathbb{P})$ *така, що*

$$\Psi(t) = \Phi(t)B, \quad t \in (a,b), \tag{1.35}$$

причому, якщо $\Psi(t)$, $t \in (a,b)$, *– ФМ (1.22), то* B *– невироджена матриця.*

2) Якщо $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, *– МР (1.22), а* $B \in M_n(\mathbb{P})$, *то матрична функція* $\Psi(t)$, $t \in (a,b)$, *визначена рівністю (1.35), є МР (1.22), причому, якщо* $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, *– ФМР (1.22), а* $B \in M_n(\mathbb{P})$ *– невироджена матриця, то* $\Psi(t)$, $t \in (a,b)$, *– ФМР (1.22).*

Вправа. Довести наслідок 1.5.

Лекція № 14

1.4. Формула Остроградського-Ліувілля

Встановимо зв'язок між значеннями визначника Вронського в різних точках, який називають *формулою Остроградського-Ліувілля.*

Теорема 1.9. *Нехай векторні функції* $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ *— розв'язки НЛОС* (1.22)*, а*

$$W(t) = \det\big(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)\big), \quad t \in (a,b),$$

— визначник Вронського. Тоді

$$W(t) = W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)\,d\tau}, \qquad t_0,\, t \in (a,b), \tag{1.36}$$

де $S(t) := a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ *— слід матриці* $A(t)$, $t \in (a,b)$.

Доведення. За означенням визначника

$$W(t) := \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{\sigma(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} \varphi_1^{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_k^{j_k}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_n^{j_n}(t), \quad t \in (a,b), \tag{1.37}$$

де $(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)$ – перестановка чисел множини $\{1,\dots,n\}$,
а $\sigma(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n) = 0$, якщо перестановка $(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)$ парна,
і $\sigma(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n) = 1$, якщо ця перестановка непарна.

З (1.37) випливає, що

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{\sigma(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} \varphi_1^{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot\big(\varphi_k^{j_k}(t)\big)'\cdot\ldots\cdot\varphi_n^{j_n}(t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} W_k(t), \quad t \in (a,b), \tag{1.38}$$

де

$$W_k(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \big(\varphi_k^1(t)\big)' & \cdots & \big(\varphi_k^n(t)\big)' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (a,b),$$

— визначник матриці, який відрізняється від визначника Вронського тільки тим, що в k-му рядку замість функцій φ_k^l стоять відповідно їхні похідні $\big(\varphi_k^l\big)'$, $l = \overline{1,n}$.

Тепер зауважимо таке: оскільки $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — розв'язки НЛОС (1.22), то

$$\big(\varphi^l(t)\big)' = A(t)\varphi^l(t), \qquad t \in (a,b), \quad l = \overline{1,n},$$

звідки

$$\big(\varphi_k^l(t)\big)' = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}(t)\varphi_s^l(t), \qquad t \in (a,b), \quad l = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$\Big(\big(\varphi_k^1(t)\big)', \ldots, \big(\varphi_k^n(t)\big)'\Big) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}(t)\big(\varphi_s^1(t), \ldots, \varphi_s^n(t)\big), \quad t \in (a,b), \ k = \overline{1,n},$$

тобто k-ий рядок визначника W_k є лінійною комбінацією рядків визначника W. Звідси та з властивостей визначників випливає, що

$$W_k(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}(t)W_{k,s}(t), \qquad t \in (a,b), \tag{1.39}$$

де $W_{k,s}$ — визначник, який відрізняється від визначника W тільки тим, що в його k-му рядку стоять відповідні елементи s-го рядка визначника W.

Оскільки визначник, в якого два рядки однакові, дорівнює нулеві, то $W_{k,s}(t) = 0$, $t \in (a,b)$, якщо $s \neq k$. Звідси та з (1.39) маємо

$$W_k(t) = a_{kk}(t)W(t), \qquad t \in (a,b), \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.40}$$

З (1.38) і (1.40) здобуваємо

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)W(t) \equiv S(t)W(t), \qquad t \in (a,b). \tag{1.41}$$

Як випливає з теореми 1.8 (п.1.3), можливі два випадки:

1) $W(t) = 0$ для кожного $t \in (a,b)$;

2) $W(t) \neq 0$ для будь-якого $t \in (a,b)$.

У першому випадку рівність (1.36) очевидна. Розглянемо другий випадок. Оскільки $W(t)$, $t \in (a,b)$, — неперервна функція, то $W(t) > 0$ для довільного $t \in (a,b)$ або $W(t) < 0$ для довільного $t \in (a,b)$. Звідси та з рівності (1.41), поділивши її на $W(t)$ і домноживши на dt, після заміни t на τ отримаємо

$$\frac{dW(\tau)}{W(\tau)} = S(\tau)\,d\tau, \qquad \tau \in (a,b).$$

Проінтегруємо цю рівність від t_0 до t ($t_0, t \in (a,b)$):

$$\ln\left|\frac{W(t)}{W(t_0)}\right| = \int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)\,d\tau.$$

Звідси, враховуючи, що $\dfrac{W(t)}{W(t_0)} > 0,\ t \in (a,b)$,, маємо (1.36). $\square$

1.5. Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків нормальних лінійних неоднорідних систем (НЛНС)

Розглянемо нормальну лінійну неоднорідну систему (коротко, НЛНС) у векторній формі (1.2). Як випливає з твердження наслідку 1.6 повний загальний розв'язок НЛНС (1.2) є сумою повного загального розв'язку НЛОС (1.22) і часткового розв'язку НЛНС (1.2). Повний загальний розв'язок НЛОС (1.22) (див. зауваження 1.2 п. 1.3) можна записати у вигляді

$$x = \Phi(t)C, \qquad t \in (a,b), \quad C \in \mathbb{P}^n. \tag{1.42}$$

Теорема 1.10. *Нехай* $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, *— фундаментальна матриця НЛОС* (1.22), *яка відповідає НЛНС (1.2). Тоді частковий розв'язок НЛНС* (1.2) *можна записати у вигляді*

$$x = \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds, \qquad t \in (a,b), \tag{1.43}$$

де t_0 *— яке-небудь фіксоване число з* (a,b).

Доведення. Частковий розв'язок НЛНС (1.2) знайдемо *методом варіації сталих.* Суть його полягає в тому, що частковий розв'язок НЛНС (1.2) шукається у вигляді

$$x = \Phi(t)\chi(t), \qquad t \in (a,b), \tag{1.44}$$

де $\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \vdots \\ \chi_n(t) \end{pmatrix}$, $t \in (a,b)$, — деяка функція з $C^1\big((a,b);\mathbb{P}^n\big)$. Функцію χ знаходимо за умови, що функція, задана в (1.44), є розв'язком системи (1.2).

Підставимо вираз (1.44) функції x в (1.2):

$$\Phi'(t)\chi(t) + \Phi(t)\chi'(t) = A(t)\Phi(t)\chi(t) + f(t), \qquad t \in (a,b). \tag{1.45}$$

Оскільки $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, — ФМР (1.22), то на підставі наслідку 1.3 (див. п.1.3) отримаємо

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \qquad t \in (a,b). \tag{1.46}$$

Отож, з (1.45), врахувавши (1.46), маємо

$$\Phi(t)\chi'(t) = f(t), \qquad t \in (a,b),$$

звідки, оскільки $\det \Phi(t) = W(t) \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$ на підставі теореми 1.8 (нагадаємо, що Φ — ФМР (1.22)), здобуваємо

$$\chi'(t) = \Phi^{-1}(t) f(t), \qquad t \in (a,b),$$

тобто

$$\chi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds, \qquad t \in (a,b). \tag{1.47}$$

Отже, з (1.44) і (1.47) отримаємо частковий розв'язок НЛНС (1.2) у вигляді (1.48).
□

Наслідок 1.6. *Нехай $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, — фундаментальна матриця НЛОС* (1.22), *відповідної НЛНС (1.2). Тоді повний загальний розв'язок НЛНС* (1.2) *можна записати у вигляді*

$$x = \Phi(t) C + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds, \qquad t \in (a,b), \quad C \in \mathbb{P}^n, \tag{1.48}$$

де t_0 — яке-небудь фіксоване число з (a,b).

Доведення. З (1.42) і (1.48), на підставі твердження наслідку 1.6, одержимо (1.48).
□

Фундаментальну матрицю розв'язків $\Phi(t)$, $t \in (a,b)$, системи (1.22) назвемо *нормованою в точці* t_0 і позначимо через $\overset{\circ}{\Phi}(t)$, $t \in (a,b)$, якщо $\Phi(t_0) = I$, де I — одинична матриця. Для знаходження $\overset{\circ}{\Phi}(t)$, $t \in (a,b)$, достатньо розв'язати n задач Коші для рівняння (1.22) з початковими умовами

$$x(t_0) = e^j, \qquad j = \overline{1,n},$$

де e^j — вектор-стовпчик, компонентами якого, крім j-ї, є нулі, а j-ва дорівнює 1. Розв'язки цих задач позначимо відповідно через $\overset{\circ}{\varphi}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{\varphi}{}^n$. Тоді

$$\overset{\circ}{\Phi}(t) := \big(\overset{\circ}{\varphi}{}^1(t), \ldots, \overset{\circ}{\varphi}{}^n(t)\big), \quad t \in (a,b).$$

Наслідок 1.7. *Якщо $\overset{\circ}{\Phi}$ — нормована в точці t_0 фундаментальна матриця розв'язків НЛОС* (1.22), *то розв'язок задачі* (1.2),(1.4) *можна записати у вигляді*

$$x = \overset{\circ}{\Phi}(t)\, x^0 + \overset{\circ}{\Phi}(t) \int_{t_0}^{t} \overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(s) f(s)\, ds, \quad t \in (a,b).$$

Доведення. Цей результат легко випливає з наслідку 1.6, якщо в ньому вибрати $\Phi(t) = \overset{\circ}{\Phi}(t)$, $t \in (a,b)$. □

§2. Лінійні рівняння вищих порядків

2.1. Поняття лінійного рівняння (ЛР) вищого порядку. Зв'язок між ЛР і НЛС. Коректність задачі Коші для ЛР. Структура повного загального розв'язку ЛР

2.1.1 Поняття лінійного рівняння (ЛР) вищого порядку

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Означення 2.1. *Лінійним рівнянням вищого порядку* (коротко, ЛР) називається звичайне диференціальне рівняння вищого порядку, яке можна записати у вигляді

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \tag{2.1}$$

де $n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$, t – незалежна змінна, що пробігає значення з числового інтервалу $(a, b)\,(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, $a_1, \ldots, a_n$, f — задані функції від змінної t, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, x – невідома функція від змінної t зі значеннями в $\mathbb{P}$ (зауважимо, що коли $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то розв'язок ЛР можна записати у вигляді $x = u(t) + iv(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, де u і v — дійсні функції, i — уявна одиниця в $\mathbb{C}$).

Функції $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називають *коефіцієнтами*, а функцію f — *вільним членом* ЛР. Якщо в рівнянні (2.1) маємо $f(t) = 0$, $t \in (a, b)$, тобто воно має вигляд

$$L(t)x \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \qquad t \in (a,\, b), \tag{2.2}$$

то його називають *лінійним однорідним* рівнянням (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР).

Якщо в рівняннях (2.1) і (2.2) однакові коефіцієнти, то рівняння (2.2) називають лінійним однорідним рівнянням, *відповідним* лінійному неоднорідному рівнянню (2.1).

Під *розв'язком* рівняння (2.1) будемо розуміти функцію $x = \psi(t)$, яка визначена на деякому проміжку $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$, приймає значення в $\mathbb{P}$ і задовольняє умови

1) $\psi \in C^n\big(\langle c, d\rangle; \mathbb{P}\big)$;

2) $a_0(t)\psi^{(n)}(t) + a_1(t)\psi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)\psi(t) = f(t), \qquad t \in \langle c, d\rangle.$

Тут і далі $C^n\big(\langle c, d\rangle; \mathbb{P}\big)$ — лінійний простір n раз неперервно-диференційовних функцій, які визначені на $\langle c, d\rangle$ і приймають значення в $\mathbb{P}$.

Ввівши позначення

$$L(t) := \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t), \qquad t \in (a, b),$$
$$L(t)u := u^{(n)} + a_1(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)u, \qquad t \in \langle c, d\rangle \subset (a, b), \quad u \in C^n(\langle c, d\rangle; \mathbb{P}),$$

рівняння (2.1) можна компактно записати у вигляді

$$L(t)x = f(t). \tag{2.3}$$

2.1.2 Зв'язок між ЛР і НЛС

Поряд з рівнянням (2.1) розглянемо НЛС

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2, \\
x_2' = x_3, \\
\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-1}' = x_n, \\
x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + f(t), \qquad t \in (a, b).
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

Правильним є таке твердження.

Лема 2.1. *Якщо*

$$x = \psi(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle \subset (a, b),$$

— розв'язок рівняння (2.1)*, то набір функцій*

$$x_1 = \psi(t), \quad x_2 = \psi'(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi^{(n-1)}(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle,$$

є розв'язком системи (2.4)*, і навпаки, коли набір функцій*

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle p, q \rangle \subset (a, b),$$

є розв'язком системи (2.4)*, то функція*

$$x = \varphi_1(t), \qquad t \in \langle p, q \rangle,$$

є розв'язком рівняння (2.1)*, причому*

$$\varphi_2 = \varphi_1', \quad \varphi_3 = \varphi_1'', \quad \dots, \quad \varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}.$$

Ця лема доводиться аналогічно як відповідне твердження стосовно рівнянь вищих порядків (див. теорему 2.1 з §2 теми 2).

Зауваження 2.1. Зв'язок між множинами розв'язків рівняння (2.1) та системи (2.4) можна коротко записати у вигляді

$$
\begin{cases}
x_1 = x, \\
x_2 = x', \\
\dots\dots\dots \\
x_n = x^{(n-1)},
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

де x — розв'язок рівняння (2.1), а $x_1, \dots, x_n$ — розв'язок системи (2.4).

2.1.3 Коректність задачі Коші для ЛР

Розглянемо задачу Коші для рівняння (2.1): знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_1^0, \\
x'(t_0) = x_2^0, \\
\dots\dots\dots\dots \\
x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0,
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

де t_0 – довільне фіксоване число з інтервалу (a, b), а $x_1^0, \ldots, x_n^0$ – довільні фіксовані елементи поля $\mathbb{P}$. Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.1),(2.6).

Зі сказаного вище випливає, що задача (2.1),(2.6) у відповідному сенсі еквівалентна задачі Коші для системи (2.4) з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ x_2(t_0) = x_2^0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \tag{2.7}$$

(цю задачу далі коротко називатимемо задачею (2.1),(2.7)). Точніше, якщо $x = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок задачі (2.1),(2.6), то набір функцій $x_1 = \psi(t)$, $x_2 = \psi'(t), \ldots$, $x_n = \psi^{(n-1)}(t)$, $t \in (a, b)$, є розв'язком задачі (2.4),(2.7), і навпаки, якщо $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок задачі (2.4),(2.7), то $x = \varphi_1(t)$, $t \in (a, b)$ — розв'язок задачі (2.1),(2.6), причому вказана відповідність між розв'язками є взаємно однозначною. Отже, для встановлення коректності задачі Коші (2.1),(2.6) нам досить скористатися відповідними результатами для задачі (2.4),(2.7) (див. попередній параграф). З цих результатів випливає правильність таких тверджень.

Теорема 2.1. *Нехай функції $a_1, \ldots, a_n, f$ є неперервними на $(a,\, b)$. Тоді задача* (2.1),(2.6) *має і тільки один визначений на $(a,\, b)$ розв'язок і він є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

Далі всюди в цьому параграфі будемо вважати, що коефіцієнти та вільний член рівняння (2.1) є неперервними на (a, b) функціями і розглядатимемо тільки ті розв'язки, які визначені на (a, b) (це стосується і системи (2.4)).

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і $x = x(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок задачі* (2.1),(2.6)*, а $[\alpha, \beta]$ — який-небудь відрізок інтервалу (a, b). Тоді правильна оцінка*

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \sum_{k=0}^{n-1} |x^{(k)}(t)| \leqslant \Big[\sum_{j=0}^{n} |x_j^0| + \max_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t)| \cdot (\beta - \alpha)\Big] \cdot e^{(\beta-\alpha) \max\limits_{t\in[\alpha,\beta]} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i(t)|^2 + n - 1\right)^{1/2}}.$$

З теореми 2.2 легко випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2.1),(2.6) від вихідних даних.

Вправа. Довести неперервну залежність розв'язку задачі (2.1),(2.6) від вихідних даних.

Лекція № 15

2.1.4 Структура повного загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР)

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (2.1), а поряд з ним відповідне йому однорідне рівняння (2.2).

Лема 2.2. *Нехай $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a,b)$, — деякий розв'язок неоднорідного рівняння* (2.1). *Тоді для будь-якого розв'язку $x = x(t)$, $t \in (a,b)$, цього рівняння знайдеться розв'язок $x = \widehat{x}(t)$, $t \in (a,b)$, відповідного однорідного рівняння* (2.2) *такий, що*

$$x(t) = \widehat{x}(t) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in (a,b), \tag{2.8}$$

і навпаки, якщо $x = \widehat{x}(t)$, $t \in (a,b)$, — який-небудь розв'язок (*однорідного*) *рівняння* (2.2), *то функція $x = x(t)$, $t \in (a,b)$, де вираз $x(t)$, визначений за правилом* (2.8), *є розв'язком рівняння* (2.1).

Доведення. Запишемо ліву частину рівняння (2.1) у вигляді $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)x^{(j)}$, де $a_0(t){:=}1$, $t \in (a,b)$. Нехай $x = x(t)$, $t \in (a,b)$, і $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a,b)$, — розв'язки рівняння (2.1). Покладемо $\widehat{x}(t){:=}x(t) - \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a,b)$. Тоді

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\widehat{x}^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\big(x^{(j)}(t) - \overset{*}{x}{}^{(j)}(t)\big) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)x^{(j)}(t) -$$
$$- \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\overset{*}{x}{}^{(j)}(t) = f(t) - f(t) = 0, \qquad t \in (a,b).$$

Отже, перша частина теореми доведена. Справедливість її другої частини випливає з такого ланцюжка рівностей

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)x^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\big(\widehat{x}^{(j)}(t) + \overset{*}{x}{}^{(j)}(t)\big) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\widehat{x}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)\overset{*}{x}{}^{(j)}(t) = 0 + f(t) = f(t), \qquad t \in (a,b).$$

□

Теорема 2.3. *Повний загальний розв'язок рівняння* (2.1) *має вигляд*

$$x = \overset{\circ}{x}(t, C_1, \ldots, C_n) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in (a,b), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P}, \tag{2.9}$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t, C_1, \ldots, C_n)$, $t \in (a,b)$, $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P}$, — повний загальний розв'язок рівняння (2.2), *а $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a,b)$, — частковий (який-небудь) розв'язок рівняння* (2.1).

Дане твердження можна сформулювати і таким чином: повний загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.1) є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2.2) та деякого (часткового) розв'язку даного неоднорідного рівняння.

2.2. Зображення повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (ЛОР).

Розглянемо лінійне однорідне рівняння (2.2). По аналогії з НЛОС встановимо властивості множини розв'язків та вигляд повного загального розв'язку рівняння (2.2). Нагадаємо, що розв'язки рівняння (2.2) є елементами лінійного простору $C^n((a,b);\mathbb{P})$, який є лінійним підпростором простору функцій, які визначені на (a,b) і приймають значення в $\mathbb{P}$.

Означення 2.2. Систему функцій $\psi_1, \dots, \psi_k$, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, називають лінійно залежною (ЛЗ), якщо існують сталі $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ з $\mathbb{P}$, не всі рівні нулеві (тобто, $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_k| > 0$) такі, що

$$\alpha_1\psi_1(t) + \dots + \alpha_k\psi_k(t) = 0, \qquad t \in (a, b). \tag{2.10}$$

Означення 2.3. Систему функцій $\psi_1, \dots, \psi_k$, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, називають лінійно незалежною (ЛН), якщо вона не є лінійно залежною, тобто з того, що виконується рівність (2.10) для деяких $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, випливають рівності $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Лема 2.3. *Для будь-якого натурального k система функцій $p_1(t)e^{\mu_1}t, \dots, p_k(t)e^{\mu_k}t$, $t \in \mathbb{R}$, де $p_1, \dots, p_k$ – ненульові многочлени, $\mu_1, \dots, \mu_k$ – різні елементи поля $\mathbb{P}$, є лінійно незалежною.*

Вправа 2.1. Довести лему 2.3, використовуючи метод математичної індукції.

Лема 2.4. *Будь-яка лінійна комбінація розв'язків рівняння* (2.2) *є розв'язком цього рівняння, тобто множина розв'язків цього рівняння утворює лінійний підпростір простору $C^n((a, b); \mathbb{P})$.*

Доведення. Нехай $\psi_1, \dots, \psi_k$ — розв'язки рівняння (2.2), а $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — які-небудь елементи поля $\mathbb{P}$. Покладемо

$$\psi(t) := \gamma_1\psi_1(t) + \dots + \gamma_k\psi_k(t), \qquad t \in (a, b).$$

Функція ψ називається лінійною комбінацією розв'язків $\psi_1, \dots, \psi_k$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Покажемо, що функція ψ – розв'язок (2.2). Справді, поклавши $a_0(t){:=}1$, маємо

$$L(t)\psi(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\psi^{(n-j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\Big(\sum_{s=1}^{k} \gamma_s\psi_s(t)\Big)^{(n-j)} =$$
$$= \sum_{s=1}^{k} \gamma_s \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\psi_s^{(n-j)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \gamma_s L(t)\psi_s(t) = 0, \qquad t \in (a, b).$$

□

Лема 2.5. *Нехай $\psi_1, \dots, \psi_k$ — система n-раз неперервно-диференційовних функцій, які визначені на $(a,\ b)$ і приймають значення в $\mathbb{P}$. Тоді система функцій $\psi_1, \dots \psi_k$ — ЛН (відповідно, ЛЗ) в тому і лише в тому випадку, коли система вектор-функцій*

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1' \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi^k = \begin{pmatrix} \psi_k \\ \psi_k' \\ \vdots \\ \psi_k^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{— ЛН (відповідно, ЛЗ).}$$

Доведення. Нехай $\psi_1, \dots, \psi_k$ — ЛЗ. Тоді існують сталі $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ з $\mathbb{P}$, не всі рівні нулеві, такі, що виконується тотожність (2.10). Продиференціюємо її спочатку раз, потім — ще раз і т.д. до $(n-1)$-го порядку. У результаті отримаємо n рівностей

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\psi_1(t) + \dots + \alpha_k\psi_k(t) = 0, && t \in (a, b);\\
&\alpha_1\psi_1'(t) + \dots + \alpha_k\psi_k(t) = 0, && t \in (a, b);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_1\psi_1^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_k\psi_k^{(n-1)}(t) = 0, && t \in (a, b),
\end{aligned}$$

які можна записати у вигляді векторної рівності

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \cdots + \alpha_k\varphi^k(t) = 0, \qquad t \in (a,b). \tag{2.11}$$

Це означає, що $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ — теж ЛЗ.

Тепер доведемо обернене твердження. Припустимо, що $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ — ЛЗ. Тоді існують сталі $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ з $\mathbb{P}$, не всі рівні нулеві, такі, що виконується рівність (2.11). Але звідси безпосередньо випливає рівність (2.10), що означає лінійну залежність функцій $\psi_1, \ldots, \psi_k$.

З доведеного легко випливає, що коли $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — ЛН, то $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ — ЛН і навпаки. Справді, якщо $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — ЛН, то $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ не можуть бути ЛЗ, оскільки в цьому випадку з доведеного вище випливало б, що $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ — ЛН. Аналогічно проводиться доведення в зворотному напрямку. □

Поряд з рівнянням (2.2) розглянемо НЛОС

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n, \qquad t \in (a,b). \end{cases} \tag{2.12}$$

Як було показано в попередньому пункті, між множинами розв'язків рівняння (2.2) та системи (2.12) існує взаємно-однозначна відповідність, задана правилом

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = x', \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.13}$$

де x — розв'язок рівняння (2.2), а $x_1, \ldots, x_n$ — розв'язок системи (2.12). Відмітимо, що на підставі леми 2.5 лінійно незалежній системі розв'язків рівняння (2.2) за правилом (2.13) відповідає лінійно незалежна система розв'язків НЛОС (2.12). Звідси та відповідних результатів для НЛОС випливає таке твердження.

Наслідок 2.1. *Множина розв'язків рівняння* (2.2) *утворює n-вимірний лінійний підпростір простору n-раз неперервно-диференційовних функцій, які визначені на (a,b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, тобто простору $C^n((a,b);\mathbb{P})$.*

Введемо таке означення.

Означення 2.4. Будь-яка система n лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.2) називається *фундаментальною системою розв'язків* рівняння (2.2) (коротко, ФСР (2.2)).

Зі сказаного вище безпосередньо випливає таке важливе твердження.

Теорема 2.4. *Повний загальний розв'язок рівняння* (2.2) *має вигляд*

$$x = C_1\psi_1(t) + \cdots + C_n\psi_n(t), \qquad t \in (a,b), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P},$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — яка-небудь ФСР (2.2).

2.3. Визначник Вронського. Формула Остроградського-Ліувілля.

Нехай $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — розв'язки рівняння (2.2). Визначник

$$W(t) := \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \cdots & \psi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \qquad t \in (a,b), \tag{2.14}$$

називається *визначником Вронського* або *вронскіаном.* Очевидно, що визначник (2.14) є визначником матриці розв'язків системи (2.12) (відповідної рівнянню (2.2)). Звідси на підставі леми 2.5 п.2.2 і відповідних теорем для НЛОС маємо такі твердження

Теорема 2.5. *Нехай $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — розв'язки рівняння* (2.2). *Тоді є еквівалентними такі три твердження:*

1) $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *— ЛН (ЛЗ);*

2) $\exists t_0 \in (a,b) \colon W(t_0) \neq 0 \quad (= 0)$*;*

3) $\forall t \in (a,b) \colon W(t) \neq 0 \quad (= 0)$.

Теорема 2.6. *Справедлива рівність*

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \qquad t_0, t \in (a,b). \tag{2.15}$$

Рівність (2.15) називається *формулою Остроградського-Ліувілля.*

Доведення. Формула (2.15) випливає з формули Остроградського-Ліувілля для визначника Вронського системи (2.12) (п. 2.2), якщо врахувати, що

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b).$$

□

2.4. Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь (ЛНР)

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (2.1) і вкажемо спосіб знаходження його часткового розв'язку при умові, що ми знаємо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння (2.2).

Теорема 2.7. *Якщо $\psi_1, \dots, \psi_n$ — ФСР (2.2), то рівняння* (2.1) *має (частковий) розв'язок у вигляді функції*

$$x = \chi_1(t)\psi_1(t) + \dots + \chi_n(t)\psi_n(t), \quad t \in (a,b), \tag{2.16}$$

де $\chi_1, \dots, \chi_n$ — (які-небудь) функції з простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}\big)$, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \cdots & \psi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1'(t) \\ \chi_2'(t) \\ \vdots \\ \chi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b). \tag{2.17}$$

Зауваження 2.2. Формулу (2.16), враховуючи (2.17), можна подати у вигляді

$$x = \big(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\big) \times \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \psi_1(s) & \cdots & \psi_n(s) \\ \psi_1'(s) & \cdots & \psi_n'(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} ds, \tag{2.18}$$

$t \in (a,b)$, де t_0 — довільне фіксоване число з інтервалу (a,b).

Доведення. Як було встановлено вище, між множинами розв'язків ЛР (2.1) та НЛС (2.4) існує взаємно-однозначна відповідність (2.5). На підставі цієї відповідності і отримаємо те, що нам потрібно. Отож, застосуємо теорему 1.10 до системи (2.4) і, як наслідок, матимемо вигляд часткового розв'язку рівняння (2.1).

З леми 2.5 п.2.2 випливає, що вектор-функції

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_1'(t) \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi^k(t) = \begin{pmatrix} \psi_k(t) \\ \psi_k'(t) \\ \vdots \\ \psi_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b),$$

утворюють ФСР (2.12). З теореми 1.10, застосованої до системи (2.4), випливає, що ця система має розв'язок вигляду

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \cdots & \psi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \times \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \psi_1(s) & \cdots & \psi_n(s) \\ \psi_1'(s) & \cdots & \psi_n'(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} ds,$$

$t \in (a,b)$. Звідси та (2.5) випливає (2.18), що і потрібно було довести. □

Наслідок 2.2. *Повний загальний розв'язок рівняння* (2.1) *можна записати у вигляді*

$$x = C_1\psi_1(t) + \dots + C_n\psi_n(t) + \chi_1(t)\psi_1(t) + \dots + \chi_n(t)\psi_n(t), \tag{2.19}$$
$$t \in (a,b), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{P},$$

де $\psi_1, \dots, \psi_n$ *— ФСР (2.2),* $\chi_1, \dots, \chi_n$ *— які-небудь функції з простору* $C^1\big((a,b);\mathbb{P}\big)$*, що задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \cdots & \psi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1'(t) \\ \chi_2'(t) \\ \vdots \\ \chi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b). \tag{2.20}$$

Зауваження 2.3. Формулу (2.19), враховуючи (2.20), можна подати у вигляді

$$x = \big(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\big) \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \psi_1(s) & \cdots & \psi_n(s) \\ \psi_1'(s) & \cdots & \psi_n'(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} ds \right], \tag{2.21}$$

$$t \in (a,b), \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{P},$$

де t_0 — довільне фіксоване число з (a,b).

Лекція № 16

Колоквіум №3

§3. Лінійні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

3.1. Повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (ЛОР) зі сталими коефіцієнтами.

3.1.1. Повний загальний комплексний розв'язок ЛОР (випадок $\mathbb{P} = \mathbb{C}$). Розглянемо лінійне однорідне рівняння (ЛОР) (2.2) у випадку, коли його коефіцієнти є сталими, тобто рівняння, яке можна записати у вигляді

$$Lx \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0, \tag{3.1}$$

де n — натуральне число, $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, x — шукана функція від змінної t зі значеннями в $\mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$.

Під *розв'язком* рівняння (3.1) розумітимемо n раз неперервно-диференційовну комплекснозначну функцію $x = u_1(t) + iu_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (тут u_1, u_2 — дійсні функції від змінної $t \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця), тобто функцію $x \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$, яка при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Рівняння (3.1) є частковим випадком рівнянь, вивчених в §2, оскільки можна вважати, що коефіцієнти цього рівняння є визначеними на всій числовій осі і сталими функціями, а тому побудована там теорія стосується і рівняння (3.1). Зокрема, з неї випливає, що повний загальний розв'язок рівняння (3.1) має вигляд

$$x = C_1\psi_1(t) + \cdots + C_n\psi_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, .., C_n \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — часткові лінійно-незалежні розв'язки (фундаментальна система розв'язків) рівняння (3.1).

Назагал, для лінійних рівнянь вищих порядків відшукання фундаментальної системи розв'язків є досить складною справою. Але у випадку рівняння зі сталими коефіцієнтами можна вказати простий алгоритм знаходження фундаментальної системи розв'язків, а значить, повного загального розв'язку цього рівняння. Тут важливим є таке твердження.

Лема 3.1. *Функція*

$$x = e^{\lambda_* t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

де $\lambda_* \in \mathbb{C}$, *є розв'язком рівняння* (3.1) *тоді і лише тоді, коли* λ_* *— корінь рівняння*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.4}$$

Доведення. Підставимо в рівняння (3.1) вираз $e^{\lambda_* t}$ замість x. У результаті, враховуючи, що

$$\left(e^{\lambda_* t}\right)^{(k)} = \lambda_*^k e^{\lambda_* t}, \quad t \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N},$$

отримаємо

$$(\lambda_*^n + a_1\lambda_*^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda_* t} = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

звідки, оскільки $e^{\lambda_* t} \neq 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, отримаємо наше твердження. $\square$

Означення 3.1. Многочлен

$$D(\lambda):=\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.5}$$

називається *характеристичним многочленом*, рівняння (3.4) — *характеристичним рівнянням*, а його корені — *характеристичними числами* рівняння (3.1).

Як відомо, в полі комплексних чисел ліву частину рівняння (3.4) можна розкласти на лінійні множники, тобто рівняння (3.4) можна записати у вигляді

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m} = 0, \tag{3.6}$$

де $m \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant m \leqslant n,\ \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — різні комплексні числа, а $k_1, \dots, k_m$ — натуральні числа, причому $k_1 + \dots + k_m = n$. Для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ число k_j називають *(алгебраїчною) кратністю* кореня λ_j.

Зауваження 3.1. З лем 2.3 і 3.1 випливає, що функції

$$x = e^{\lambda_1 t},\ \dots,\ x = e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

є лінійно незалежними розв'язками рівняння (3.1) в $C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Звідси та сказанного вище отримуємо, що коли $m = n$, то система функцій (3.7) утворює ФСР (3.1), а отже, в цьому випадку повний загальний розв'язок рівняння (3.7) в просторі $C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Приклад 3.1. Розв'язати рівняння:

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Розв'язання. Шукаємо часткові розв'язки цього рівняння у вигляді функцій $x = e^{\lambda t},\ t \in \mathbb{R}$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ є розв'язком характеристичного рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Його корені: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Отже, функції $x = e^t$, $x = e^{2t},\ t \in \mathbb{R}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків даного рівняння і його повний загальний комплексний розв'язок рівняння має вигляд: $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. □

Розглянемо загальний випадок, тобто випадок $1 \leqslant m \leqslant n$. Перш ніж сформулювати основний результат, доведемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 3.2. *Нехай $g \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$, тобто g — визначена на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathbb{C}$ функція, яка є n-раз неперервно диференційовна. Тоді*

$$L\big(g(t)e^{\lambda t}\big) = e^{\lambda t}\left[\frac{g(t)D(\lambda)}{0!} + \frac{g'(t)D'(\lambda)}{1!} + \dots + \frac{g^{(j)}(t)D^{(j)}(\lambda)}{j!} + \dots + \frac{g^{(n)}(t)D^{(n)}(\lambda)}{n!}\right] \equiv$$
$$\equiv e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{n}\frac{g^{(j)}(t)D^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

Доведення. Для кожного $k \in \{0, \dots, n\}$ покладемо

$$L_k x := x^{(k)}, \quad D_k(\lambda) := \lambda^k,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, що

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}L_k, \quad D(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}D_k(\lambda), \qquad \text{де} \ \ a_0 := 1,\ x^{(0)} := x. \tag{3.10}$$

Використовуючи формулу Лейбніца диференціювання добутку функцій, для кожного $k \in \{0, \dots, n\}$ отримаємо

$$L_k(g(t)e^{\lambda t}) = (g(t)e^{\lambda t})^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j g^{(j)}(t)(e^{\lambda t})^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} \lambda^{k-j} g^{(j)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(t)(\lambda^k)^{(j)}}{j!} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t)(\lambda^k)^{(j)}}{j!} = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t) D_k^{(j)}(\lambda)}{j!}. \tag{3.11}$$

Тут ми врахували, що $(\lambda^k)^{(j)} = 0$ для будь-яких $j > k$. На підставі (3.10) і (3.11) маємо

$$L(g(t)e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} L_k(g(t)e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t) D_k^{(j)}(\lambda)}{j!} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t)}{j!} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D_k^{(j)}(\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(t) D^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Лема 3.3. *Нехай* λ_* *— корінь характеристичного рівняння* (3.4) *кратності* $k_* \geqslant 1$. *Тоді для кожного* $r \in \{0, 1, \dots, k_* - 1\}$ *функція*

$$x = t^r e^{\lambda_* t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

є розв'язком рівняння (3.1).

Доведення. Нехай $r \in \{0, 1, \dots, k_* - 1\}$. За лемою 3.2 маємо

$$L(t^r e^{\lambda_* t}) = e^{\lambda_* t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(t^r)^{(j)} D^{(j)}(\lambda_*)}{j!} = e^{\lambda_* t} \left[\sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{(t^r)^{(j)} D^{(j)}(\lambda_*)}{j!} + \sum_{j=k_*}^{n} \frac{(t^r)^{(j)} D^{(j)}(\lambda_*)}{j!} \right]. \tag{3.12}$$

Оскільки λ_* — корінь кратності k_*, то $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^{k_*} D_0(\lambda)$. Звідси випливає, що

$$D(\lambda_*) = D'(\lambda_*) = \cdots = D^{(k_*-1)}(\lambda_*) = 0. \tag{3.13}$$

Оскільки $r \leqslant k_* - 1$, то

$$(t^r)^{(j)} = 0 \quad \text{при } j \geqslant k_*. \tag{3.14}$$

З (3.12), враховуючи (3.13) і (3.14), отримаємо

$$L(t^r e^{\lambda_* t}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \ r = \overline{0, k_* - 1}.$$

□

Розглянемо функції

$$\begin{array}{lll} x = \psi_{1,1}(t) \equiv e^{\lambda_1 t}, & \dots, & x = \psi_{1,k_1}(t) \equiv t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ x = \psi_{2,1}(t) \equiv e^{\lambda_2 t}, & \dots, & x = \psi_{2,k_2}(t) \equiv t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x = \psi_{m,1}(t) \equiv e^{\lambda_m t}, & \dots, & x = \psi_{m,k_m}(t) \equiv t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{3.15}$$

Лема 3.4. *Функції системи* (3.15) *утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОР* (3.1).

Доведення. Згідно з лемою 3.3 функції із системи (3.15) є розв'язками рівняння (3.1). Покажемо, що вони є лінійно незалежними. Припустимо, що сталі $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{m,k_m} \in \mathbb{C}$ такі, що

$$\alpha_{1,1}\psi_{1,1}(t) + \ldots + \alpha_{m,k_m}\psi_{m,k_m}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто

$$(\alpha_{1,1} + \ldots + \alpha_{1,k_1}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t} + \ldots + (\alpha_{m,1} + \ldots + \alpha_{m,k_m}t^{k_m-1})e^{\lambda_m t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси на підставі леми 2.3 отримуємо, що

$$\alpha_{1,1} + \ldots + \alpha_{1,k_1}t^{k_1-1} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{m,1} + \ldots + \alpha_{m,k_m}t^{k_m-1} = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

А це означає, що $\alpha_{1,1} = \ldots = \alpha_{m,k_m} = 0$. Отож, наше твердження доведене. □

Із загальної теорії лінійних рівнянь (§2) і леми 3.4 випливає таке твердження.

Теорема 3.1. *Повний загальний комплексний розв'язок рівняння* (3.1) *можна записати у вигляді*

$$x = C_{1,1}\psi_{1,1}(t) + \cdots + C_{m,k_m}\psi_{m,k_m}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C}, \tag{3.16}$$

де $\psi_{1,1}, \ldots, \psi_{m,k_m}$ *— функції із системи* (3.15).

Зауваження 3.2. Відмітимо, що формулу (3.16), яка задає повний загальний розв'язок рівняння (3.1), можна подати у вигляді

$$x = (C_1 + \ldots + C_{k_1}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t} + \ldots + (C_{n-k_m+1} + \ldots + C_n t^{k_m-1})e^{\lambda_m t}, \tag{3.17}$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}.$$

3.1.2. Повний загальний дійсний розв'язок ЛОР (випадок $\mathbb{P} = \mathbb{R}$). Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнти рівняння (3.1) — *дійсні*, нас цікавлять тільки *дійсні розв'язки* і шукаємо *повний загальний дійсний розв'язок* (розв'язок рівняння називається *дійсним*, якщо він набуває тільки дійсних значень і, відповідно, визначається *повний загальний дійсний розв'язок*). З теореми 2.4 випливає таке твердження.

Наслідок 3.1. *Якщо* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *— фундаментальна система розв'язків рівняння (3.1), складена з дійсних розв'язків, то повний загальний дійсний розв'язок має вигляд*

$$x = C_1\psi_1(t) + \cdots + C_n\psi_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Звідси і леми 3.4 отримуємо таке твердження.

Наслідок 3.2. *Якщо корені* $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ *характеристичного рівняння* (3.4) *— дійсні, то повний загальний дійсний розв'язок має вигляд* (3.17)*, де довільні сталі — дійсні.*

Розглянемо загальний випадок, тобто випадок, коли серед характеристичних чисел рівняння (3.1) можуть бути комплексні числа.

Як відомо з алгебри, якщо коефіцієнти рівняння (3.4) є дійсними і λ_* — його комплексний корінь (уявна частина λ_* відмінна від нуля), то $\overline{\lambda_*}$ — теж корінь цього рівняння і кратності λ_* і $\overline{\lambda_*}$ збігаються.

Далі, не втрачаючи загальності, вважаємо, що корені рівняння (3.4) можна записати так:

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1,\ \lambda_2 = \mu_1 - i\nu_1,\ \lambda_3 = \mu_3 + i\nu_3,\ \lambda_4 = \mu_3 - i\nu_3, \dots, \tag{3.19}$$
$$\lambda_{2l-1} = \mu_{2l-1} + i\nu_{2l-1},\ \lambda_{2l} = \mu_{2l-1} - i\nu_{2l-1},$$
$$\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_m,$$

де $\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{2l-1}, \nu_1 \neq 0,\ \nu_3 \neq 0, \dots, \nu_{2l-1} \neq 0, \lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_m$ — дійсні числа, причому, якщо нема комплексних коренів, то $l = 0$, а якщо нема дійсних коренів, то m — парне і $l = m/2$. Отож, ми припускаємо, що $0 \leqslant 2l \leqslant m$ і рівняння (3.4) має l пар комплексно спряжених (або немає жодного, коли $l = 0$) і $m - 2l$ дійсних коренів (або нема жодного, коли $l = m/2$). Кратність кореня λ_j будемо позначати через $k_j,\ j = \overline{1, m}$.

На підставі леми 3.4 і формули Ейлера маємо, що функції

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,1}(t) := e^{\lambda_1 t} = e^{\mu_1 t}(\cos\nu_1 t + i\sin\nu_1 t), \dots, \psi_{1,k_1}(t) := t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} = t^{k_1-1}e^{\mu_1 t}(\cos\nu_1 t + i\sin\nu_1 t),\\
&\psi_{2,1}(t) := e^{\lambda_2 t} = e^{\mu_1 t}(\cos\nu_1 t - i\sin\nu_1 t), \dots, \psi_{2,k_1}(t) := t^{k_1-1}e^{\lambda_2 t} = t^{k_1-1}e^{\mu_1 t}(\cos\nu_1 t - i\sin\nu_1 t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\psi_{2l+1,1}(t) := e^{\lambda_{2l+1} t}, \dots, \psi_{2l+1,k_{2l+1}}(t) := t^{k_{2l+1}-1}e^{\lambda_{2l+1} t},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\psi_{m,1} := e^{\lambda_m t}, \dots, \psi_{m,k_m}(t) := t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків в просторі (комплексних) розв'язків рівняння (3.1). Трансфомуємо систему розв'язків (3.20) у ФСР (3.1), яка складається тільки з дійсних розв'язків, в такий спосіб.

Очевидно, що

$$\psi_{2j-1,s}(t) = \overline{\psi_{2j,s}(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, l},\ s = \overline{1, k_{2j-1} = k_{2j}}\,.$$

Покладемо

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}_{2j-1,s}(t) := \frac{1}{2}\big(\psi_{2j-1,s}(t) + \psi_{2j,s}(t)\big) \equiv t^{s-1}e^{\mu_{2j-1}t}\cos\nu_{2j-1}t, \quad t \in \mathbb{R},\\
&\widetilde{\psi}_{2j,s}(t) := \frac{1}{2i}\big(\psi_{2j-1,s}(t) - \psi_{2j,s}(t)\big) \equiv t^{s-1}e^{\mu_{2j-1}t}\sin\nu_{2j-1}t, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$j = \overline{1, l},\ s = \overline{1, k_{2j-1} = k_{2j}}\,.$

Функції $\widetilde{\psi}_{r,s},\ r = \overline{1, 2l},\ s = \overline{1, k_r}$, є дійсними розв'язками рівняння (3.1). Це випливає з того, що лінійна комбінація розв'язків ЛОР (3.1) є знову розв'язком цього рівняння і $\widetilde{\psi}_{2j-1,s}$ та $\widetilde{\psi}_{2j,s}$ є відповідно дійсною та уявною частиною $\psi_{2j-1,s}$ для кожних $j \in \{1, \dots, l\},\ s \in \{1, \dots, k_{2j-1} = k_{2j}\}$.

Лема 3.5. *Система функцій*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}_{1,1}(t), \dots, \widetilde{\psi}_{1,k_1}(t), \widetilde{\psi}_{2,1}(t), \dots, \widetilde{\psi}_{2,k_1}(t), \dots,\\
&\widetilde{\psi}_{2l-1,1}(t), \dots, \widetilde{\psi}_{2l-1,k_{2l-1}}(t), \widetilde{\psi}_{2l,1}(t), \dots, \widetilde{\psi}_{2l,k_{2l-1}}(t),\\
&\psi_{2l+1,1}(t), \dots, \psi_{2l+1,k_{2l+1}}(t), \dots, \psi_{m,1}(t), \dots, \psi_{m,k_m}(t), \qquad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

які визначені в (3.20) *і* (3.21)*, утворює фундаментальну систему дійсних розв'язків рівняння* (3.1) *в просторі* $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Доведення. Те, що функції із системи (3.22) є дійсними розв'язками рівняння (3.1), показано вище.

Нам залишається довести, що вони лінійно незалежні. Для цього розглянемо значення визначника Вронського в точці $t = 0$

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\psi}_{1,1}(0) & \cdots & \widetilde{\psi}_{2,1}(0) & \cdots & \psi_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi_{m,k_m}(0) \\ \widetilde{\psi}'_{1,1}(0) & \cdots & \widetilde{\psi}'_{2,1}(0) & \cdots & \psi'_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi'_{m,k_m}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\psi}^{(n-1)}_{1,1}(0) & \cdots & \widetilde{\psi}^{(n-1)}_{2,1}(0) & \cdots & \psi^{(n-1)}_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi^{(n-1)}_{m,k_m}(0) \end{vmatrix}.$$

Очевидними елементарними перетворенями (домноженням на ненульові числа і додаванням стовпчиків) з цього визначника можна отримати визначник

$$\begin{vmatrix} \psi_{1,1}(0) & \cdots & \psi_{2,1}(0) & \cdots & \psi_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi_{m,k_m}(0) \\ \psi'_{1,1}(0) & \cdots & \psi'_{2,1}(0) & \cdots & \psi'_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi'_{m,k_m}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^{(n-1)}_{1,1}(0) & \cdots & \psi^{(n-1)}_{2,1}(0) & \cdots & \psi^{(n-1)}_{2l+1,1}(0) & \cdots & \psi^{(n-1)}_{m,k_m}(0) \end{vmatrix},$$

який відмінний від нуля, оскільки розв'язки, з яких він утворюється, є лінійно незалежними. Звідси випливає те, що нам потрібно. □

Вправа 3.1. Довести, що елементарними перетвореннями визначники, які фігурують у доведенні леми 3.5, можна перетворити один в другого. Для спрощення міркувань розгляньте випадок $n = m,\ \lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1,\ \lambda_2 = \mu_1 - i\nu_1$.

З тверджень 3.1 і 3.5 безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 3.2. *Якщо коефіцієнти рівняння* (3.1) *— дійсні і корені характеристичного рівняння* (3.4) *мають вигляд* (3.19), *то повний загальний дійсний розв'язок рівняння* (3.1) *можна записати у вигляді*

$$\begin{aligned} x &= C_{1,1}e^{\mu_1 t}\cos\nu_1 t + \cdots + C_{1,k_1}t^{k_1-1}e^{\mu_1 t}\cos\nu_1 t + C_{2,1}e^{\mu_1 t}\sin\nu_1 t + \cdots + \\ &+ C_{2,k_1}t^{k_1-1}e^{\mu_1 t}\sin\nu_1 t + \cdots + C_{m,1}e^{\lambda_m t} + \cdots + C_{m,k_m}t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \equiv \\ &\equiv (C_{1,1} + \cdots + C_{1,k_1}t^{k_1-1})e^{\mu_1 t}\cos\nu_1 t + (C_{2,1} + \cdots + C_{2,k_1}t^{k_1-1})e^{\mu_1 t}\sin\nu_1 t + \cdots + \\ &+ (C_{m,1} + \cdots + C_{m,k_m}t^{k_m-1})e^{\lambda_m t}, \\ t &\in \mathbb{R}, \qquad C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 3.2. Розв'язати рівняння:

$$x^{(5)} + 8x''' + 16y' = 0.$$

Розв'язання. Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$x = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де λ — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - (2i)^2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 0)(\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2 = 0.$$

Отже, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ — характеристичні числа кратності 2, а $\lambda_1 = 0$ — характеристичне число кратності 1. Запишемо ФСР даного рівняння, складену з комплексних розв'язків:

$$\psi_1(t) := e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t, \quad \psi_2(t) := e^{-2it} = \cos 2t - i \sin 2t,$$

$$\psi_3(t) := te^{2it} = t \cos 2t + it \sin 2t, \quad \psi_4(t) := te^{-2it} = t \cos 2t - it \sin 2t,$$

$$\psi_5(t) := 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Трансформуємо пари комплексно спряжених розв'язків в пари дійсних розв'язків даного рівняння:

$$\widetilde{\psi}_1(t) := \mathrm{Re}\{\psi_1(t)\} = \cos 2t, \quad \widetilde{\psi}_2(t) := \mathrm{Im}\{\psi_1(t)\} = \sin 2t,$$

$$\widetilde{\psi}_3(t) := \mathrm{Re}\{\psi_3(t)\} = t \cos 2t, \quad \widetilde{\psi}_4(t) := \mathrm{Im}\{\psi_3(t)\} = t \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отож, повний загальний дійсний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + C_3 t \cos 2t + C_4 t \sin 2t + C_5, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R} \text{ —довільні сталі.}$$

□

Лекція № 18

3.2. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

3.2.1. Частковий комплексний розв'язок ЛНР. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР) (2.1) зі сталими коефіцієнтами в полі комплексних чисел, тобто випадок $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

Отож, маємо рівняння вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t), \tag{3.23}$$

де $t \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна, що пробігає всі дійсні значення, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$, $f = f_1 + if_2 \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $x = u_1 + iu_2$ — невідома функція (f_1, f_2, u_1, u_2 — дійсні функції від змінної $t \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця).

Покладемо

$$Lx := x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x, \quad x \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Тоді рівняння (3.23) можна компактно записати у вигляді

$$Lx = f. \tag{3.24}$$

Як випливає із загальної теорії лінійних рівнянь (див. §2), повний загальний розв'язок рівняння (3.23) має вигляд

$$x = \overset{\circ}{x}(t, C_1, \ldots, C_n) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C},$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t, C_1, \ldots, C_n),\ t \in \mathbb{R}, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C},$ — повний загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Lx = 0, \tag{3.25}$$

а $x = \overset{*}{x}(t),\ t \in \mathbb{R},$ — який-небудь частковий розв'язок рівняння (3.23).

Спосіб знаходження повного загального розв'язку рівняння (3.25) було запропоновано в підпункті 3.1.1. Якщо ж повний загальний розв'язок однорідного рівняння (3.25) відомий, то частковий розв'язок рівняння (3.23) можна знайти методом варіації сталих. Проте у випадку, коли вільний член f рівняння (3.23) є *квазімногочленом*, то частковий розв'язок рівняння (3.23) шукають простішим способом — *методом неозначених коефіцієнтів*. Він базується на такому твердженні.

Теорема 3.3. *Нехай в рівнянні (3.23)*

$$f(t) = \big(b_0 t^l + b_1 t^{l-1} + \cdots + b_l\big)e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.26}$$

де $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_0, \ldots, b_l, \mu \in \mathbb{C}$.

Тоді рівняння (3.23) має частковий розв'язок вигляду

$$x = t^k\big(c_0 t^l + c_1 t^{l-1} + \cdots + c_l\big)e^{\mu t} \equiv \big(c_0 t^{l+k} + c_1 t^{l+k-1} + \cdots + c_l t^k\big)e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.27}$$

де $c_0, \ldots, c_l \in \mathbb{C}$, *а* $k = 0$, *якщо* μ *не є характеристичним числом рівняння (3.25), і якщо* μ *є характеристичним числом, то* k *дорівнює його кратності.*

Доведення. Припустимо, що μ — корінь характеристичного рівняння кратності $k \in \{1, \ldots, n\}$, і використаємо метод математичної індукції за показником $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $l = 0$. Тоді

$$f(t) = b_0 e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.28}$$

Покажемо, що існує частковий розв'язок рівняння (3.24) у вигляді

$$x = c_0 t^k e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.29}$$

де $c_0 \in \mathbb{C}$.

Для цього спочатку обчислимо вираз $L\big(c_0 t^k e^{\mu t}\big)$ з поки що неозначеною сталою c_0. За лемою 3.2 пункту 3.1 маємо

$$\begin{aligned} L\big(c_0 t^k e^{\mu t}\big) &= c_0 L\big(t^k e^{\mu t}\big) = c_0 e^{\mu t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(t^k)^{(j)} D^{(j)}(\mu)}{j!} = \\ &= c_0 e^{\mu t}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t^k)^{(j)} D^{(j)}(\mu)}{j!} + \frac{k! D^{(k)}(\mu)}{k!} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(t^k)^{(j)} D^{(j)}(\mu)}{j!}\right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Оскільки μ — корінь рівняння $D(\lambda) = 0$ кратності k, то

$$D(\mu) = D'(\mu) = \cdots = D^{(k-1)}(\mu) = 0, \qquad D^{(k)}(\mu) \neq 0. \tag{3.31}$$

Очевидно, що

$$\big(t^k\big)^{(j)} = 0, \qquad \text{при} \quad j \geqslant k+1. \tag{3.32}$$

З (3.30)–(3.32) випливає, що

$$L\big(c_0 t^k e^{\mu t}\big) = c_0 e^{\mu t} D^{(k)}(\mu).$$

Звідси та з (3.24), (3.28) випливає, що, взявши

$$c_0 = \frac{b_0}{D^{(k)}(\mu)},$$

матимемо

$$L\big(c_0 t^k e^{\mu t}\big) = b_0 e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

тобто функція (3.29) є розв'язком рівняння (3.23), коли його вільний член має вигляд (3.28).

Тепер припустимо, що $l \geqslant 0$ — яке-небудь натуральне число таке, що для будь-яких сталих $b_0, \ldots, b_l \in \mathbb{C}$ можна знайти сталі $c_0, \ldots, c_l \in \mathbb{C}$ такі, що

$$L\big(t^k(c_0 t^l + \cdots + c_l)e^{\mu t}\big) = \big(b_0 t^l + \cdots + b_l\big)e^{\mu t}. \tag{3.33}$$

Покажемо, що для будь-яких сталих $\widetilde{b}_0, \ldots, \widetilde{b}_{l+1}$ знайдуться сталі $\widetilde{c}_0, \ldots, \widetilde{c}_{l+1}$ такі, що

$$L\big(t^k(\widetilde{c}_0 t^{l+1} + \cdots + \widetilde{c}_{l+1})e^{\mu t}\big) = \big(\widetilde{b}_0 t^{l+1} + \cdots + \widetilde{b}_{l+1}\big)e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Маємо

$$\begin{aligned} &L\big(t^k(\widetilde{c}_0 t^{l+1} + \cdots + \widetilde{c}_{l+1})e^{\mu t}\big) = \\ =&L\big(\widetilde{c}_0 t^{l+k+1} e^{\mu t}\big) + L\big(t^k(\widetilde{c}_1 t^l + \cdots + \widetilde{c}_{l+1})e^{\mu t}\big), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

де $\widetilde{c}_0, \ldots, \widetilde{c}_{l+1}$ — які-небудь сталі.

За лемою 3.2, зважаючи на (3.31), маємо

$$\begin{aligned} L\big(\widetilde{c}_0 t^{l+k+1} e^{\mu t}\big) &= \widetilde{c}_0 e^{\mu t}\Bigg[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t^{l+k+1})^{(j)} \cdot D^{(j)}(\mu)}{j!} + \\ &+ \frac{(t^{l+k+1})^{(k)} \cdot D^{(k)}(\mu)}{k!} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(t^{l+k+1})^{(j)} \cdot D^{(j)}(\mu)}{j!}\Bigg] = \\ &= \Bigg[\widetilde{c}_0 \frac{(l+k+1)(l+k)\cdots(l+2) \cdot D^{(k)}(\mu)}{k!} \cdot t^{l+1} + \\ &+ \widetilde{c}_0 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(t^{l+k+1})^{(j)} \cdot D^{(j)}(\mu)}{j!}\Bigg] e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Виберемо значення $\widetilde{c}_0$ таким, щоби виконувалась рівність

$$\widetilde{c}_0 \frac{(l+k+1)(l+k)\cdots(l+2)D^{(k)}(\mu)}{k!} = \widetilde{b}_0. \tag{3.37}$$

Отже, з (3.34)–(3.37) випливає, що нам потрібно довести існування значень $\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_{l+1}$ таких, що

$$L\big(t^k(\widetilde{c}_1 t^l + \cdots + \widetilde{c}_{l+1})e^{\mu t}\big) = \big(\widehat{b}_1 t^l + \cdots + \widehat{b}_{l+1}\big)e^{\mu t}, \tag{3.38}$$

де $\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_{l+1}$ — сталі, що визначаються тотожністю

$$\begin{aligned} \widehat{b}_1 t^l + \cdots + \widehat{b}_{l+1} \equiv \widetilde{b}_1 t^l + \cdots + \widetilde{b}_{l+1} - \\ - \widetilde{c}_0 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(l+k+1)(l+k)\cdots(l+k-j+2)D^{(j)}(\mu)}{j!} t^{l+k-j+1} \end{aligned}$$

(ми тут враховуємо, що $(t^{l+k+1})^{(j)} = (l+k+1)(l+k)\cdots(l+k-j+2)t^{l+k-j+1}$ і $l+k-j+1 \leqslant l$ при $j \geqslant k+1$). Але за нашим припущенням такі значення $\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_{l+1}$ існують. Отож, на підставі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження теореми є правильним. □

Висновок. Якщо вільний член f рівняння (3.23) має вигляд (3.26), то частковий розв'язок цього рівняння можна шукати *методом неозначених коефіцієнтів*:

1) Записуємо проект розв'язку рівняння (3.23) у вигляді (3.27), де $c_0, \dots, c_l$ — сталі, значення яких нам потрібно знайти (неозначені коефіцієнти).

2) Підставляємо вираз (3.27) у рівняння (3.23), зводимо подібні члени і прирівнюємо коефіцієнти при виразах вигляду $t^j e^{\mu t}$ $(j = \overline{0, k+l})$ в лівій і правій частинах отриманої рівності. У результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів $c_0\,, \dots,\, c_l$.

3) Розв'язуємо здобуту систему рівнянь і знайдені значення підставляємо у вираз (3.27). У результаті отримаємо частковий розв'язок рівняння (3.23).

Область дії методу неозначених коефіцієнтів можна розширити за рахунок такого твердження.

Лема 3.6 (принцип суперпозиції)**.** *Нехай*

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_s(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

де $s \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_s \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, *а* $x = \varphi_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, s}$, *— часткові розв'язки відповідно рівнянь*

$$Lx = f_j, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Тоді функція

$$x = \varphi_1(t) + \dots + \varphi_s(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

є розв'язком рівняння

$$Lx = f, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Справді, легко переконатися, що

$$L(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_s) = L\varphi_1 + L\varphi_2 + \dots + L\varphi_s = f_1 + f_2 + \dots + f_s.$$

□

Зауваження 3.3. Коли вільний член рівняння (3.24) є сумою квазімногочленів, то це рівняння на підставі леми 3.6 та теореми 3.3 матиме частковий розв'язок у вигляді суми квазімногочленів.

3.2.2. Частковий дійсний розв'язок ЛНР (випадок $\mathbb{P} = \mathbb{R}$). Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнти та вільний член рівняння (3.23) – *дійсні* і нас цікавлять тільки *дійсні розв'язки*.

Спочатку доведемо правильність такого твердження.

Лема 3.7. *Нехай коефіцієнти рівняння (3.23) — дійсні, а* $f = f_1 + if_2$, *де* f_1, f_2 *— дійсні функції від змінної* t, i *— уявна одиниця. Тоді, якщо* $x = u_1 + iu_2$, *де* u_1, u_2 *— дійсні функції від змінної* t, *— розв'язок рівняння (3.23), то функції*

$$x = u_1(t) \qquad i \qquad x = u_2(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

є розв'язками відповідно рівнянь

$$Lx = f_1 \quad \text{та} \quad Lx = f_2.$$

Доведення. Очевидно, що $Lx = Lu_1 + iLv_2$. Оскільки $Lu_1 + iLu_2 = f_1 + if_2$, то з означення рівності двох комплексних чисел випливає, що $Lu_1 = f_1$ і $Lu_2 = f_2$. $\square$

Наслідок 3.3. *Якщо коефіцієнти рівняння (3.23) — дійсні числа, f — дійсна функція, а φ — розв'язок рівняння* (3.23), *то функція $Re\,\varphi$ ($Re\,\varphi$ — дійсна частина φ) є також розв'язком цього рівняння.*

Основним результатом цього підпункту є таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай коефіцієнти рівняння (3.23) — дійсні, а його вільний член має вигляд*

$$f(t) = e^{\alpha t}\big[(b_0t^r + \cdots + b_r)\cos\beta t + (c_0t^s + \cdots + c_s)\sin\beta t\big], \tag{3.39}$$

де
- $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\alpha, \beta, b_0, \ldots, b_r, c_0, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$

(таку функцію називають дійсним квазімногочленом).

Тоді рівняння (3.23) має частковий розв'язок вигляду

$$x = t^k e^{\alpha t}\big[(d_0t^l + \cdots + d_l)\cos\beta t + (\widetilde{d}_0t^l + \cdots + \widetilde{d}_l)\sin\beta t\big], \tag{3.40}$$

де
- $l = \max\{r, s\}$,
- $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l \in \mathbb{R}$,
- $k = 0$, *якщо число $\mu = \alpha + i\beta$ не є характеристичним для рівняння* (3.25), *а якщо μ є характеристичним числом, то k дорівнює кратності цього числа.*

Доведення. З формули Ейлера маємо

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}(e^{\mu t} + e^{\overline{\mu}\,t}), \qquad e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2i}(e^{\mu t} - e^{\overline{\mu}\,t}).$$

Підставивши ці вирази у (3.39), прийдемо до зображення $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = (\widetilde{b}_0t^l + \cdots + \widetilde{b}_l)e^{\mu t} + (\widetilde{c}_0t^l + \cdots + \widetilde{c}_l)e^{\overline{\mu}\,t},$$

де $l = \max\{r, s\}$, $\widetilde{b}_0, \ldots, \widetilde{b}_l, \widetilde{c}_0, \ldots, \widetilde{c}_l \in \mathbb{C}$. Звідси і теореми 3.3, враховуючи лему 3.6, отримаємо, що рівняння (3.23) має частковий розв'язок у вигляді

$$x = t^k\big[(g_0t^l + \cdots + g_l)e^{\mu t} + (\widetilde{g}_0t^l + \cdots + \widetilde{g}_l)e^{\overline{\mu}\,t}\big], \tag{3.41}$$

де $g_0, \ldots, g_l, \widetilde{g}_0, \ldots, \widetilde{g}_l \in \mathbb{C}$, а k таке ж, як у формулюванні теореми 3.3.

На підставі наслідку 3.3 і формули Ейлера з (3.41) отримаємо наше твердження. $\square$

Зауваження 3.4. Для знаходження часткового розв'язку рівняння (3.23), коли права частина має вигляд (3.39), можна використати *метод неозначених коефіцієнтів*:

1) Записуємо проєкт часткового розв'язку у вигляді (3.40) при умові, що коефіцієнти $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l$ поки що неозначені.

2) Підставляємо вираз часткового розв'язку в рівняння (3.23), проводимо відповідні спрощення і прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах вигляду $t^je^{\alpha t}\cos\beta t$, $t^je^{\alpha t}\sin\beta t$, $j \in \overline{0, l}$, які знаходяться в різних частинах отриманої рівності. У результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l$.

3) Здобуту систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо одним із способів, наприклад, методом Гаусса.

4) Знайдені значення $d_0, \dots, d_l, \widetilde{d}_0, \dots, \widetilde{d}_l$ підставляємо у (3.40). Це і буде шуканий частковий розв'язок рівняння (3.23).

Лекція № 19

3.3. Рівняння Ейлера.

Рівнянням Ейлера називається лінійне диференціальне рівняння, яке можна записати у вигляді

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_k t^{n-k} x^{(n-k)} + \dots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t), \tag{3.42}$$

де $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{P}$, $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{P})$, x – невідома функція від змінної t зі значеннями в полі $\mathbb{P}$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

При $t = 0$ коефіцієнти рівняння (3.42) при похідних шуканої функції перетворюються в нуль, тобто рівняння (3.42) вироджується. Це тягне за собою особливості розв'язків даного рівняння, зокрема, можливу їх розривність або розривність їх деяких похідних в точці $t = 0$. Тому варто розглянути рівняння (3.42) окремо на променях $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$. Оскільки при заміні t на $-t$ диференціальний вираз в лівій частині рівняння (3.42) не змінюється, а промінь $(-\infty, 0)$ переходить в промінь $(0, +\infty)$, то достатньо розглядати рівняння (3.42) на $(0, +\infty)$, що ми надалі й робитимемо, використавши позначення $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$.

Перетворимо рівняння (3.42), зробивши в ньому заміну змінних

$$t = e^\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

Нехай

$$y(\tau) := x(t)|_{t=e^\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Оскільки згідно з (3.44) маємо

$$x(t) = y(\tau)|_{t=e^\tau},$$

то за правилом диференціювання складених функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
&x'(t) = y'(\tau) \cdot \tau'_t = y'(\tau) \cdot \frac{1}{t'_\tau} = y'(\tau) e^{-\tau}, \\
&x''(t) = \big(y''(\tau) e^{-\tau} - y'(\tau) e^{-\tau}\big) \cdot \tau'_t = \big(y''(\tau) - y'(\tau)\big) e^{-2\tau}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x^{(k)}(t) = \big(y^{(k)}(\tau) + \cdots\big) e^{-k\tau}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x^{(n)}(t) = \big(y^{(n)}(\tau) + \cdots\big) e^{-n\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази похідних $x, x', \dots, x^{(n)}$ в рівняння (3.42). У результаті здобуваємо рівняння

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = g(\tau), \tag{3.45}$$

де $g(\tau) := f(e^\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Рівняння (3.45) є лінійним диференціальними рівнянням зі сталими коефіцієнтами, які вивчені в попередніх двох пунктах. Як відомо, повний загальний розв'язок рівняння (3.45) є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = 0 \tag{3.46}$$

та деякого (часткового) розв'язку рівняння (3.45).

Для знаходження повного загального розв'язку рівняння (3.45) запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0. \tag{3.47}$$

Тепер окремо розглянемо випадок $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Тоді рівняння (3.47) можна подати у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — різні числа (з $\mathbb{C}$), $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_m \geqslant 1$ — цілі, причому $k_1 + \cdots + k_m = n$. Тоді повний загальний комплексний розв'язок рівняння (3.46) (як випливає з пункту 3.1) має вигляд

$$y = \big(C_1 + \cdots + C_{k_1} \tau^{k_1 - 1}\big) e^{\lambda_1 \tau} + \cdots + \big(C_{n-k_m+1} + \cdots + C_n \tau^{k_m - 1}\big) e^{\lambda_m \tau}, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}. \tag{3.48}$$

Нехай $y = \overset{*}{y}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, — (частковий) розв'язок рівняння (3.45), який може бути знайдений або методом варіації сталих, або, коли $g(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, є квазіполіномом, — методом неозначених коефіцієнтів. Тоді, записавши повний загальний розв'язок рівняння (3.45) і повертаючись до змінної t та враховуючи (3.44), отримаємо повний загальний розв'язок рівняння (3.42)

$$\begin{aligned} x = {} & \big(C_1 + \cdots + C_{k_1} (\ln t)^{k_1 - 1}\big) t^{\lambda_1} + \cdots + \\ & + \big(C_{n-k_m+1} + \cdots + C_n (\ln t)^{k_m - 1}\big) t^{\lambda_m} + \overset{*}{x}(t), \\ & t \in \mathbb{R}_+, \qquad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

де

$$\overset{*}{x}(t) := \overset{*}{y}(\ln t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Випадок $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ розглядаємо, використовуючи відповідні результати пункту 3.2.

Зауваження 3.5. Зазначимо, що для будь-якої n раз неперервно диференційовної функції $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, маємо

$$\begin{aligned} & t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t)|_{t=e^\tau} = \\ & = y^{(n)}(\tau) + b_1 y^{(n-1)}(\tau) + \cdots + b_n y(\tau), \end{aligned}$$

де

$$x(t)|_{t=e^\tau} = y(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Зокрема, для функції

$$x = t^\lambda, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

яка при вказаній заміні змінних переходить у функцію

$$y = e^{\lambda \tau}, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

маємо

$$\big[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n\big]t^\lambda\Big|_{t=e^\tau}=$$
$$=\big[\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n\big]e^{\lambda\tau},\qquad \tau\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

звідки

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n=$$
$$=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n,\qquad \lambda\in\mathbb{C},$$

Отже, коефіцієнти $b_1,\ldots,b_n$ рівняння (3.45) отримаємо як відповідні коефіцієнти многочлена

$$\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_n,$$

який отримується зведенням до стандартного (канонічного) вигляду многочлена

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n.$$

Таким чином, рівняння (3.47) збігається з рівнянням

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n=0. \tag{3.50}$$

Звідси випливає такий ***спосіб зведення рівняння (3.42) до рівняння (3.45)*** і, фактично, розв'язування рівняння (3.42):

1) Записуємо рівняння (3.50) і зводимо многочлен, що знаходиться в лівій частині цього рівняння, до стандартного (канонічного) вигляду. У результаті отримаємо рівняння (3.47). Знаходимо його розв'язки $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ разом з кратностями $k_1,\ldots,k_m$.

2) Записуємо рівняння (3.45), ліва частина якого легко відтворюється за рівнянням (3.47), а права — результат заміни змінної t на τ.

3) Знаючи характеристичні числа рівняння (3.46) та їх кратності, записуємо повний загальний розв'язок (3.48) однорідного рівняння (3.46), відповідного рівнянню (3.45).

4) Далі шукаємо частковий розв'язок рівняння (3.45) (методом варіації сталих чи, якщо це можна, методом неозначених коефіцієнтів).

5) Записуємо повний загальний розв'язок рівняння (3.45) і повертаємося до змінної t. У результаті отримаємо повний загальний розв'язок рівняння (3.42).

Приклад 3.3. Розв'язати рівняння

$$t^2x''+tx'+x=2t. \tag{3.51}$$

Розв'язування. Роглянемо це рівняння на $\mathbb{R}_+$. Робимо заміну змінних

$$t=e^\tau,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{3.52}$$

Рівняння, яке отримується в результаті такої заміни, знайдемо так. Записуємо характеристичне рівняння заданого рівняння

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda+1=0,$$

звідки
$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$
Отже, задане рівняння вказаною заміною змінних зведеться до рівняння
$$y'' + y = 2e^\tau. \tag{3.53}$$
Загальний дійсний розв'язок відповідного однорідного рівняння
$$y'' + y = 0$$
має вигляд
$$y = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.54}$$
Частковий розв'язок рівняння (3.53) шукаємо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді
$$y = ae^\tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$
де $a \in \mathbb{R}$.

Маємо
$$y' = ae^\tau, \qquad y'' = ae^\tau.$$
Підставляючи ці вирази в рівняння (3.53), отримаємо
$$2ae^\tau = 2e^\tau \quad \Longrightarrow \quad a = 1,$$
і, отже, функція
$$y = e^\tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$
є розв'язком рівняння (3.53).

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (3.53) запишеться у вигляді
$$y = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau + e^\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
звідки, враховуючи (3.52), маємо
$$x = C_1 \cos\ln|t| + C_2 \sin\ln|t| + t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
— повний загальний дійсний розв'язок рівняння (3.51). □

Лекція № 20

§4. Лінійні рівняння з поліноміальними коефіцієнтами

4.1. Метод степеневих рядів

Розглянемо рівняння
$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \tag{4.1}$$
де $t \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна, a_0, a_1, a_2 — поліноми (многочлени) від змінної t, коефіцієнти яких належать полю $\mathbb{P} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, причому $a_0 \not\equiv 0$, x — невідома функція від змінної t зі значеннями в полі $\mathbb{P}$.

Відомий такий факт (див. пункт 2.3 §2 теми 2): коли для деякого $t_0 \in \mathbb{R}$ маємо $a_0(t_0) \neq 0$, то в точці t_0 будь-який розв'язок рівняння (4.1) є аналітичним, тобто довільний розв'язок $x = \varphi(t),\ t \in (a, b)$, рівняння (4.1) в околі $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точки t_0 можна подати як суму степеневого ряду за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тобто

$$x = \varphi(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \quad t \in (t_0 - \delta,\, t_0 + \delta), \tag{4.2}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ — елементи поля $\mathbb{P}$, $\delta > 0$ — деяке дійсне число. Очевидно, що ряд (4.2) є рядом Тейлора функції φ і, зокрема,

$$c_k = \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

На підставі сказаного можна запропонувати такий спосіб знаходження загального розв'язку рівняння (4.1) в околі точки t_0.

1. Записуємо коефіцієнти рівняння (4.1) у вигляді полінома за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (для цього можна використати формулу Тейлора).

2. Записуємо проєкт розв'язку рівняння (4.1) у вигляді ряду (4.2) з неозначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ і підставляємо його в рівняння (4.1) замість x. Після відповідних спрощень та зведення подібних членів в лівій частині отримаємо ряд за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, коефіцієнти якого є лінійними комбінаціями коефіцієнтів $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ ряду (4.2).

   Оскільки сума степеневого ряду тотожньо дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли його коефіцієнти дорівнюють нулю, то з отриманої рівності матимемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$. Ця система, очевидно, має дві вільні змінні. Це можуть бути c_0 і c_1. Поклавши $c_0 = C_1$, $c_1 = C_2$ і виразивши решту коефіцієнтів через C_1 і C_2, знайдемо загальний розв'язок рівняння (4.1) у вигляді степеневого ряду з коефіцієнтами, які залежать від параметрів C_1 і C_2.

Описаний вище метод знаходження розв'язків рівняння (4.1) називається *методом степеневих рядів.*

Приклад 4.1. Нехай потрібно знайти загальний розв'язок рівняння

$$x'' - 2tx = 0$$

та розв'язок задачі Коші для цього рівняння з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1.$$

Шукаємо розв'язки заданого рівняння у вигляді степеневого ряду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Вважаючи, що цей ряд є рівномірно і абсолютно збіжним в деякому околі точки 0, підставимо його в рівняння. У результаті отримаємо рівність

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) t^{k-2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0.$$

В першому члені зробимо заміну $k-2=m$, а в другому заміну $k+1=n$. У результаті отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)t^m - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}t^n = 0.$$

Звідси маємо

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\big[(k+1)(k+2)c_{k+2} - 2c_{k-1}\big]t^k = 0.$$

Отже, прирівнюючи коефіцієнти при степенях t^k, $k \geqslant 0$, до нуля, отримаємо

$$\begin{aligned} &c_2 = 0, \\ &c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Звідси випливає, що значення c_0 і c_1 можна вибирати довільними, $c_2 = 0$, а значення решти коефіцієнтів знаходяться з рекурентного співвідношення (4.3):

$$c_3 = \frac{2c_0}{2\cdot 3}; \quad c_4 = \frac{2c_1}{3\cdot 4}; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{2c_3}{5\cdot 6} = \frac{2^2 c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}; \quad c_7 = \frac{2c_4}{6\cdot 7} = \frac{2^2 c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}; \cdots .$$

Отже, маємо

$$c_0 = C_1, \qquad c_1 = C_2, \qquad c_2 = 0,$$

$$c_{3m} = \frac{2^m C_1}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j-1)(3j)}, \qquad c_{3m+1} = \frac{2^m C_2}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j)(3j+1)}, \qquad c_{3m+2} = 0, \qquad m \geqslant 1,$$

і, значить, загальний розв'язок заданого рівняння запишеться у вигляді

$$x = C_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m t^{3m}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j-1)(3j)}\right) + C_2\left(t + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m t^{3m+1}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j)(3j+1)}\right).$$

Розв'язок заданої задачі Коші матимемо із цієї формули при $C_1 = x_0$, $C_2 = x_1$. $\square$

4.2. Метод узагальнених степеневих рядів. Рівняння Бесселя.

Коли $a_0(t_0) = 0$, то розв'язки рівняння (4.1) можуть не бути аналітичними в точці t_0. Це означає, що не завжди можна знайти розв'язок рівняння (4.1) в околі точки t_0 у вигляді степеневого ряду. В такому випадку, як правило, розв'язки заданого рівняння шукають у вигляді *узагальненого степеневого ряду*

$$x = (t-t_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k, \qquad t \in (t_0-\delta, t_0)\cup(t_0, t_0+\delta) \;\text{ або }\; t \in (t_0,\, t_0+\delta),$$

де ρ — деяке дійсне число, $\delta > 0$ — якесь додатне число.

Продемонструємо цей спосіб розв'язування лінійного рівняння на прикладі одного важливого рівняння — рівняння Бесселя.

Рівнянням Бесселя називають рівняння вигляду

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0, \tag{4.4}$$

де $\nu = \mathrm{const} \geqslant 0$, t — незалежна змінна, що приймає значення в $\mathbb{R}$, x — невідома функція від змінної t зі значеннями в полі $\mathbb{P}$.

Оскільки коефіцієнт рівняння (4.4) при x'' в точці $t = 0$ перетворюється в нуль, то його розв'язки можуть мати особливості при $t = 0$. Враховуючи це, а також те, що ліва частина рівняння (4.4) не змінюється при заміні t на $-t$, приходимо до висновку, що нам достатньо розглядати це рівняння на промені $(0, +\infty)$. Тому далі вважатимемо, що $t \in (0, +\infty)$, і займатимемося знаходженням загального дійсного розв'язку заданого рівняння.

Розв'язки рівняння (4.4) шукатимемо, враховуючи його виродживаність при $t = 0$, у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$x = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}, \qquad t \in (0, +\infty), \tag{4.5}$$

де $\rho \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Припустивши, що такі розв'язки існують, знайдемо їх явне зображення. Для цього підставимо ряд (4.5) з поки що неозначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ і показником ρ у рівняння (4.4) замість x

$$t^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k+\rho-1) t^{k+\rho-2} + t \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho) t^{k+\rho-1} + (t^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho} = 0.$$

Звідси маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \big[(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho)\big] t^{k+\rho} + (t^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho} = 0. \tag{4.6}$$

Оскільки $(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) = (k+\rho)^2$ і

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho+2} = \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} t^{m+\rho} \equiv \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{k+\rho}$$

(тут зроблена заміна $m = k + 2$, $k \geqslant 0$, $m \geqslant 2$), то рівність (4.6) можемо записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \big[(k+\rho)^2 - \nu^2\big] t^{k+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{k+\rho} = 0. \tag{4.7}$$

З рівності (4.7), прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $t^{k+\rho}$, $k \geqslant 0$, отримаємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} & c_0 \big[\rho^2 - \nu^2\big] = 0, \\ & c_1 \big[(\rho+1)^2 - \nu^2\big] = 0, \\ & c_k \big[(\rho+k)^2 - \nu^2\big] + c_{k-2} = 0, \quad k \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Аналізуючи систему (4.8), бачимо, що, коли $(\rho + k)^2 - \nu^2 \neq 0$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+ := \{z \in \mathbb{Z} \colon z \geqslant 0\}$, то $c_0 = c_1 = \cdots = c_k = \cdots = 0$, що нас не влаштовує. Отже, має бути $(\rho+k)^2-\nu^2=0$ хоча б для одного значення $k\in\mathbb{Z}_+$. Як легко переконатися, нам досить розглядати випадок, коли

$$\rho^2-\nu^2=0,$$

бо випадок, коли

$$(\rho+k)^2-\nu^2=0 \quad \text{для деякого } k\in\mathbb{N},$$

дає той самий результат.

Отож, маємо

$$\rho=\pm\nu. \tag{4.9}$$

Спочатку розглянемо випадок

$$\rho=\nu\geqslant 0.$$

Очевидно, що

$$(\nu+k)^2-\nu^2=k^2+2k\nu=k(k+2\nu)>0, \qquad k\geqslant 2.$$

Тоді легко бачити, що

$$c_0 \quad \text{— довільне,} \qquad c_1=0, \qquad c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \qquad k\geqslant 2. \tag{4.10}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$c_{2m-1}=0 \quad \text{для всіх} \ \ m\in\mathbb{N}, \tag{4.11}$$

і

$$c_{2m}\neq 0 \quad \text{для всіх} \ \ m\in\mathbb{N}, \quad \text{якщо} \ \ c_0\neq 0. \tag{4.12}$$

Далі будемо вважати, що $c_0\neq 0$ і знайдемо для кожного $m\in\mathbb{N}$ вираз c_{2m} через c_0. З (4.10) маємо

$$c_{2m}=-\frac{c_{2m-2}}{2^2m(m+\nu)}, \qquad m\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2\cdot 1\cdot(\nu+1)}, \qquad c_4=-\frac{c_2}{2^2\cdot 2\cdot(\nu+2)}=\frac{c_0}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot(\nu+1)(\nu+2)},$$

$$c_6=-\frac{c_4}{2^4\cdot 3\cdot(\nu+3)}=-\frac{c_0}{2^6\cdot 3!\cdot(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

Отож, можна висунути гіпотезу, що

$$c_{2m}=\frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}, \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Цю гіпотезу легко обґрунтувати методом математичної індукції.

Спростимо одержаний вираз c_{2m}, $m\in\mathbb{N}$, вибравши відповідним чином c_0 і скориставшись властивостями Г-функції.

Але спершу нагадаємо означення Г-*функції* та її властивості. Як відомо, Г-функція задається за правилом

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{\alpha-1}\,ds, \quad \alpha>0.$$

За допомогою формули інтегрування частинами легко переконатися у справедливості рівності
$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \qquad \alpha>0. \tag{4.14}$$
Довизначимо Γ із збереженням властивості (4.14). Це робиться так. З (4.14) маємо
$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \qquad \alpha>0. \tag{4.15}$$
Покладемо
$$\Gamma(\alpha):=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \qquad \alpha\in(-1;0).$$
Тоді
$$\Gamma(\alpha):=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\equiv\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}, \qquad \alpha\in(-2;-1).$$
Продовжуючи робити аналогічно, одержимо значення $\Gamma(\alpha)$ для будь-яких від'ємних нецілих значень α і при цьому для них будемо мати рівність (4.14). Стосовно цілих недодатніх значень α зауважимо таке. Оскільки рівність (4.15) виконується для будь-яких $\alpha\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $\lim\limits_{\alpha\to0}\Gamma(\alpha)=\infty$. Отже, можемо вважати, що $\Gamma(0)=\infty$. Звідси на підставі (4.15) робимо висновок, що природно покласти $\Gamma(\alpha)=\infty$, якщо $\alpha\in\mathbb{Z}\_=\{z\in\mathbb{Z}\colon z\leqslant0\}$.

Таким чином, значення $\Gamma(\alpha)$ є визначеними для всіх $\alpha\in\mathbb{R}$, причому $\Gamma(\alpha)=\infty$, якщо α — ціле недодатне число, і виконується рівність (4.14) для всіх $\alpha\in\mathbb{R}$ (для цілих недодатніх α ця рівність є формальною).

З рівності (4.14), зокрема, випливає, що
$$\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)=m(m-1)\Gamma(m-1)=\cdots=m(m-1)\cdots2\cdot1\cdot\Gamma(1)=m!, \tag{4.16}$$
$$\begin{aligned}\Gamma(\nu+m+1)&=(\nu+m)\Gamma(\nu+m)=(\nu+m)(\nu+m-1)\Gamma(\nu+m-1)=\cdots=\\&=(\nu+m)(\nu+m-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1).\end{aligned} \tag{4.17}$$
Поклавши у (4.13)
$$c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$
та врахувавши (4.16) і (4.17), отримаємо
$$c_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}, \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{4.18}$$
З (4.5) на підставі (4.12), (4.18), згадуючи, що $\rho=\nu$, отримаємо функцію
$$x=J_\nu(t):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2m+\nu}, \qquad t\in(0,+\infty). \tag{4.19}$$
Зі сказаного вище випливає, що функція $x=J_\nu(t),\ t\in(0,+\infty)$ є розв'язком рівняння (4.4).

Тепер розглянемо випадок, коли
$$\rho=-\nu \qquad \text{і} \;\; \nu \text{ — не ціле.}$$

Міркуючи аналогічно, як в попередньому випадку, приходимо до висновку, що функція

$$x = J_{-\nu}(t) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\nu+m+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu}, \qquad t \in (0, +\infty), \tag{4.20}$$

теж є розв'язком рівняння (4.4).

Функції J_ν та $J_{-\nu}$, визначені формулами (4.19) і (4.20), коли ν — не ціле, є лінійно незалежними. Це видно хоча б з того, що $\lim\limits_{t\to 0+} J_\nu(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} J_{-\nu}(t) = \infty$. Перша з них називається *функцією Бесселя ν-го порядку першого роду*, а друга — *функцією Бесселя ν-го порядку другого роду*.

Отже, коли ν — не ціле, то загальний розв'язок рівняння (4.4) при $t \in (0, +\infty)$ має вигляд

$$x = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t), \qquad t \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.} \tag{4.21}$$

Тепер розглянемо випадок, коли

$$\nu = n, \quad \text{де} \ \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді (див. (4.19)) функція

$$x = J_n(t) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}, \qquad t \in (0, +\infty), \tag{4.22}$$

— розв'язок рівняння (4.4).

Знайдемо вираз $J_{-n}(\cdot)$. Спочатку зауважимо, що $\Gamma(-n+m+1) = \infty$, коли $-n+m+1 \leqslant 0$, тобто $m \leqslant n-1$. Тоді з (4.20) формально отримаємо функцію

$$J_{-n}(t) := \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(-n+m+1)\Gamma(m+1)}, \qquad t \in (0, +\infty). \tag{4.23}$$

Вираз (4.23) функції $J_{-n}(\cdot)$ також можна легко отримати безпосередньо із системи (4.8) при $\nu = n$ і $\rho = -n$.

Зробимо в ряді (4.23) заміну $k = m - n$ $(m = k + n)$ і порівняємо з виразом J_n в на (4.22). У результаті отримаємо

$$J_{-n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \equiv (-1)^n J_n(t), \qquad t \in (0, +\infty). \tag{4.24}$$

Отож, функції J_n та J_{-n} є лінійно залежними. Інших розв'язків рівняння (4.4) у вигляді узагальнених степеневих рядів вигляду (4.5) немає. Тому при $\nu = n$, де $n \in \mathbb{Z}_+$, другий розв'язок, крім J_n, рівняння (4.4) визначаємо так.

Спочатку зауважимо, що для $\nu \in (n-1; n) \cup (n; n+1)$ функція

$$x = Y_\nu(t) := \frac{J_\nu(t)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}, \qquad t \in (0, +\infty),$$

є розв'язком рівняння (4.4) (як лінійна комбінація розв'язків цього рівняння; до речі, функція Y_ν є лінійно незалежною з функцією J_ν). Тепер залишається показати, що існує границя

$$Y_n(t) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(t), \qquad t \in (0, +\infty), \tag{4.25}$$

і функція $x = Y_n(t)$, $t \in (0, +\infty)$, є розв'язком заданого рівняння при $\nu = n$.

Для знаходження границі (4.25) використовується правило Лопіталя (невизначеність типу $\frac{0}{0}$). У результаті відповідних перетворень отримаємо

$$Y_n(t) = \frac{2}{\pi} J_n(t) \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \Big(\frac{t}{2}\Big)^{-n+2k} - \tag{4.26}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)} \right) \Big(\frac{t}{2}\Big)^{n+2k}, \qquad t \in (0, +\infty).$$

З виразу Y_n видно, що функції J_n та Y_n є лінійно незалежними (на це вказує, зокрема, наявність виразу $\ln \frac{t}{2}$).

Доведення правильності рівності (4.26) та того, що функція Y_n є розв'язком рівняння (4.4) при $\nu = n$, технічно досить складне та громіздке і тут його не будемо наводити.

Функція Y_ν називається *функцією Вебера ν-го порядку.*

Зі сказаного вище випливає, що загальний розв'язок рівняння (4.4) можна записати у вигляді

$$x = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \qquad t \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі,}$$

де J_ν, Y_ν — функції відповідно Бесселя та Вебера ν-го порядку.

Зауваження 4.1. Сім'я функцій Бесселя J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, володіє, зокрема, такими властивостями:

$$1^\circ. \qquad J'_\rho(t) = -\frac{\rho}{t} J_\rho(t) + J_{\rho-1}(t), \qquad t \in (0, +\infty);$$

$$2^\circ. \qquad J'_\rho(t) = \frac{\rho}{t} J_\rho(t) - J_{\rho+1}(t), \qquad t \in (0, +\infty);$$

$$3^\circ. \qquad J_{\rho+1}(t) = \frac{2\rho}{t} J_\rho(t) - J_{\rho-1}(t), \quad t \in (0, +\infty).$$

Доводяться ці властивості безпосередньо, виходячи із зображення функцій J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, у вигляді сум відповідних рядів. Покажемо це на прикладі доведення властивості 1°.

Оскільки $\Gamma(\rho + m + 1) = (\rho + m)\Gamma(\rho + m)$, то з (4.19),(4.20),(4.22) і (4.23) маємо

$$\frac{d}{dt}\big(t^\rho J_\rho(t)\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2(m+\rho) t^{2m+2\rho-1}}{2^{2m+\rho}\Gamma(\rho+m+1)\Gamma(m+1)} =$$

$$= t^\rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Big(\dfrac{t}{2}\Big)^{2m+(\rho-1)}}{\Gamma((\rho-1)+m+1)\Gamma(m+1)} = t^\rho J_{\rho-1}(t), \qquad t \in (0, +\infty).$$

Звідси здобуваємо рівність

$$t^\rho J'_\rho(t) + \rho t^{\rho-1} J_\rho(t) = t^\rho J_{\rho-1}(t), \qquad t \in (0, +\infty),$$

після ділення якої на t^ρ отримуємо 1°.

Властивість 2° виводиться з рівності

$$\frac{d}{dt}\big(t^{-\rho} J_\rho(t)\big) = -t^{-\rho} J_{\rho+1}(t), \qquad t \in (0, +\infty),$$

яка перевіряється безпосередньо. Важливим для практики наслідком властивості 2° є рівність

$$J_0'(t) = -J_1(t), \qquad t \in (0, +\infty),$$

а властивості 1° —

$$\big(tJ_1(t)\big)' = tJ_0(t), \qquad t \in (0, +\infty).$$

Відмітимо, що

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots ,$$

$$J_1(t) = \frac{t}{2}\Big(1 - \frac{t^2}{2 \cdot 4} + \frac{t^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{t^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots\Big), \qquad t \in (0, +\infty).$$

Зауважимо, що рекурентне співвідношення 3° дає можливість знайти значення $J_{\nu+1}(t)$, знаючи значення $J_{\nu-1}(t)$ і $J_\nu(t)$ при $t \in (0, +\infty)$.

Також, враховуючи, що $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$, і використовуючи ряди Тейлора для функцій $\sin t$ та $\cos t$, можна показати, що

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\sin t, \qquad J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\cos t, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Коментар

Велика кількість найрізноманітніших задач, що стосуються практично всіх найважливіших розділів математичної фізики та покликаних відповісти на актуальні технічні питання, пов'язана із застосуванням функцій Бесселя. Функції Бесселя широко використовуються при розв'язуванні задач акустики, радіофізики, гідродинаміки, атомної та ядерної фізики. Численні застосування функцій Бесселя до теорії теплопровідності та теорії пружності (задачі про коливання пластинок, задачі теорії оболонок, задачі визначення концентрації напруги поблизу тріщин). Така популярність функцій Бесселя пояснюється тим, що розв'язування задач для рівнянь математичної фізики, що містять оператор Лапласа в циліндричних координатах, класичним методом Фур'є призводить до рівняння Бесселя, що служить для визначення цих функцій.

Функції Бесселя названі на ім'я німецького астронома Фрідріха Бесселя, який у роботі 1824 року, вивчаючи рух планет навколо сонця, вивів рекурентні співвідношення для функцій Бесселя J_ν , отримав для цілих ν інтегральне подання функції J_ν , довів наявність незліченного множини нулів функції J_0 і склав перші таблиці для функцій J_0, J_1 та J_2.

Однак вперше одна з функцій Бесселя, а саме J_0, була розглянута ще в 1732 році Данилом Бернуллі у роботі, присвяченій дослідженню коливань важких ланцюгів. Д. Бернуллі знайшов зображення функції J_0 у вигляді степеневого ряду і зауважив (без доведення), що рівняння $J_0(x) = 0$ має нескінченну множину дійсних коренів. Наступною роботою, в якій зустрічаються функції Бесселя, була робота Леонарда Ейлера (1738 рік), присвячена вивченню коливань круглої мембрани. У цій роботі Л. Ейлер знайшов для цілих значень ν вираз функції Бесселя J_ν у вигляді степеневого ряду, а в подальших роботах поширив це зображення на випадок довільних значень

ν. Крім того, Л. Ейлер довів, що для ν , що дорівнює цілій кількості з половиною, функції J_ν виражаються через елементарні функції. Він помітив (без доказу), що за дійсних ν функції J_ν мають безліч дійсних нулів і дав інтегральне зображення J_ν. Деякі дослідники вважають, що основні результати, пов'язані з функціями Бесселя та їх застосуваннями в математичній фізиці, пов'язані з ім'ям Л. Ейлера.

Лекція № 21

§5. Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку.

5.1. Формулювання крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку, єдиність її розв'язку.

Нехай a і b — дійсні числа, $a < b$, а $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел. Розглянемо рівняння

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \qquad t \in (a, b). \tag{5.1}$$

Припускаємо, що функції a_0, a_1, a_2, f належать простору $C\big([a, b]; \mathbb{P}\big)$ і $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$. З результатів §2 випливає, що довільний розв'язок рівняння (5.1), який не визначений на (a, b), можна продовжити так, що його продовження буде визначеним на (a, b). Виявляється, що при наших припущеннях на коефіцієнти і вільний член рівняння (5.1) будь-який його розв'язок (визначений на (a, b)), можна довизначити в точках a і b за неперервністю. Точніше, правильним є таке твердження.

Лема 5.1. *Якщо $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок рівняння (5.1), то є визначеною функція $x = \widetilde{\varphi}(t)$, $t \in [a, b]$, за правилом: $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, коли $t \in (a, b)$, та $\widetilde{\varphi}(a) = \lim\limits_{t \to a+0} \varphi(t)$, $\widetilde{\varphi}(b) = \lim\limits_{t \to b-0} \varphi(t)$, причому $\widetilde{\varphi} \in C^2\big([a, b]\big)$ і при підстановці цієї функції в рівняння (5.1) замість x отримаємо тотожність на $[a, b]$.*

Доведення. Продовжимо коефіцієнти і вільний член рівняння (5.1) за межі відрізка $[a, b]$ так, щоб вони були неперервними на деякому інтервалі (a_1, b_1), який містить відрізок $[a, b]$ і продовження коефіцієнта a_0 ніде не перетворювалося б в нуль. Це, очевидно, можна зробити. Нехай $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{f}$, — вказані продовження коефіцієнтів і вільного члена рівняння (5.1) на інтервал (a_1, b_1), на якому вони визначені і неперервні ($\widehat{a}_0(t) \neq 0$ $\forall t \in (a_1, b_1)$). Оскільки будь-який розв'язок рівняння (5.1) є розв'язком рівняння

$$\widehat{a}_0(t)x'' + \widehat{a}_1(t)x' + \widehat{a}_2(t)x = \widehat{f}(t), \qquad t \in (a_1, b_1), \tag{5.1*}$$

і довільний розв'язок рівняння (5.1*) можна продовжити так, що отримане продовження буде визначеним на (a_1, b_1), то, очевидно, наше твердження є справедливим. □

Виходячи зі сказаного, далі будемо завжди в цьому параграфі під *розв'язком рівняння* (5.1) розуміти функцію $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, з простору $\varphi \in C^2\big([a, b]\big)$, яка при її підстановці в рівняння (5.1) перетворює його в тотожність.

З тих же самих міркувань, що наведені вище, випливає такий факт: якщо x_1 та x_2 — довільні лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \qquad t \in (a, b), \tag{5.1$_0$}$$

а $\overset{*}{x}$ – розв'язок рівняння (5.1), то повний загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in [a, b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}.$$

Перейдемо до розгляду крайових задач для рівняння (5.1).

Регулярною крайовою задачею для рівняння (5.1) називають задачу на знаходження розв'язку цього рівняння, який задовольняє такі *крайові умови*

$$\begin{cases} \alpha_1 x'(a) + \beta_1 x(a) = \gamma_1, & (5.2_1) \\ \alpha_2 x'(b) + \beta_2 x(b) = \gamma_2, & (5.2_2) \end{cases} \tag{5.2}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{P}$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.

Далі сформульовану задачу коротко називатимемо задачею (5.1) – (5.2).

Зауваження 5.1. Якщо в умові (5.2_1) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, то ця умова називається *першою крайовою умовою* або *крайовою умовою першого роду*, коли ж $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, то — *другою крайовою умовою* або *крайовою умовою другого роду*, а якщо $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$, то — *третьою крайовою умовою* або *крайовою умовою третього роду*. Аналогічно класифікують крайові умови вигляду (5.2_2).

Якщо в умовах (5.2) маємо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, тобто ці умови мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x'(a) + \beta_1 x(a) = 0, \qquad & (5.2_{0,1}) \\ \alpha_2 x'(b) + \beta_2 x(b) = 0, \qquad & (5.2_{0,2}) \end{aligned} \right\} \tag{5.2_0}$$

то вони називаються *однорідними*, а в протилежному випадку — *неоднорідними.*

Зауваження 5.2. Відмітимо, що коли крайові умови є неоднорідними, то відповідною заміною залежної змінної в задачі (5.1) – (5.2) можна здобути задачу, аналогічну до задачі (5.1) – (5.2), але з однорідними крайовими умовами.

Справді, нехай $\gamma_1 \neq 0$ або $\gamma_2 \neq 0$. Виберемо яку-небудь функцію $w \in C^2\big([a, b]\big)$, що задовольняє умови (5.2). Цю функцію можна, наприклад, шукати у вигляді квадратичної функції

$$w(t) = pt^2 + qt + r,$$

де p, q, і r — сталі з відповідними значеннями, тобто розв'язки системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(2ap + q) + \beta_1(pa^2 + qa + r) = \gamma_1, \\ \alpha_2(2bp + q) + \beta_2(pb^2 + qb + r) = \gamma_2. \end{cases}$$

Маючи функцію w, робимо в задачі (5.1)–(5.2) заміну змінних

$$x = y + w(t), \qquad t \in [a, b]\,.$$

Легко бачити, що в результаті отримаємо задачу

$$\begin{cases} a_0(t) y'' + a_1(t) y' + a_2(t) y = \widetilde{f}(t), \quad t \in (a, b), \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \qquad\qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases}$$

де $\widetilde{f}(t) := f(t) - a_0(t) w''(t) - a_1(t) w'(t) - a_2(t) w(t)$, $t \in [a, b]$.

Отож, звідси випливає, що нам достатньо розглядати тільки ті крайові задачі для рівняння (5.1), в яких крайові умови є однорідними. Тому далі будемо вивчати задачу (5.1), (5.2_0).

Легко переконатися, що коли $f(t) = 0$, $t \in [a, b]$, тобто рівняння (5.1) має вигляд (5.1_0), то задана задача (задача (5.1_0), (5.2_0)) має нульовий розв'язок ($x = 0, t \in [a, b]$).

Означення 5.1. Скажемо, що задача (5.1), (5.2_0) задовольняє умову (T), якщо відповідна їй однорідна задача (5.1_0), (5.2_0) має тільки нульовий розв'язок.

Лема 5.2. *Правильні такі два твердження:*
1°. *Якщо задача* (5.1), (5.2_0) *задовольняє умову* (T)*, то вона має не більше одного розв'язку.*
2°. *Якщо задача* (5.1), (5.2_0) *не задовольняє умову* (T)*, то вона або не має розв'язку, або має безліч розв'язків.*

Доведення. Спочатку доведемо твердження 1°. Якщо задача (5.1), (5.2_0) не має розв'язку, то дане твердження правильне. Припустимо, що дана задача має і не один розв'язок. Нехай $x = \varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$, і $x = \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$, — які-небудь (різні) розв'язки задачі (5.1), (5.2_0). Підставимо їх по черзі в рівняння (5.1) та крайові умови (5.2_0) і відповідно віднімемо отримані рівності. У результаті для різниці $\varphi(t) := \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$, отримаємо рівності, з яких безпосередньо випливає, що функція $x = \varphi(t), t \in [a, b]$, є розв'язком однорідної крайової задачі (5.1_0), (5.2_0). Звідси та умови (T) випливає, що $\varphi(t) = 0$ для всіх $t \in [a, b]$, тобто $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для всіх $t \in [a, b]$, а це протирічить нашому припущенню. Отож, твердження 1° доведено.

Тепер доведемо твердження 2°. Якщо задача (5.1), (5.2_0) не має розв'язку, то дане твердження правильне. Припустимо, що дана задача має хоча б один розв'язок. Позначимо через $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, один з можливих розв'язків нашої задачі. Оскільки не виконується умова (T), то існує хоча б один ненульовий розв'язок задачі (5.1_0)–(5.2_0). Нехай $x = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, — ненульовий розв'язок задачі (5.1_0)–(5.2_0). Легко переконатися, що функція $x = C\psi(t)$, $t \in [a, b]$, де C — яка-небудь стала (C), теж є розв'язком задачі (5.1_0)–(5.2_0). Безпосередньо можна перевірити, що сім'я функцій $x = \varphi(t) + C\psi(t)$, $t \in [a, b]$, $C \in \mathbb{P}$, володіє властивістю: для кожного конкретного значення C функція із вказаної сім'ї є розв'язком задачі (5.1), (5.2_0), тобто задача (5.1), (5.2_0) має безліч розв'язків. Отож, твердження 2° є правильним. □

5.2. Існування розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку. Функція Гріна.

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (5.1), (5.2_0) та його зображення.

Теорема 5.1. *Якщо задача* (5.1), (5.2_0) *задовольняє умову* (T)*, то вона має розв'язок і тільки один.*

Доведення. Ідея методу доведення існування розв'язку задачі (5.1), (5.2_0) та його єдиності полягає в його побудові, використовуючи повний загальний розв'язок рівняння (5.1). При цьому фундаментальна система розв'язків рівняння (5.1_0) вибирається відповідною крайовим умовам.

Нехай $x = x_1(t)$, $t \in [a, b]$, — ненульовий розв'язок (однорідного) рівняння (5.1_0), що задовольняє умову ($5.2_{0,1}$), а $x = x_2(t)$, $t \in [a, b]$, — ненульовий розв'язок цього ж рівняння, що задовольняє умову ($5.2_{0,2}$). Ці розв'язки є лінійно незалежними.

Справді, якщо б це було не так, то існувала б стала $C \neq 0$ така, що

$$x_1(t) = Cx_2(t), \qquad t \in [a,b].$$

А це означає, що, наприклад, функція $x = x_1(t)$, $t \in [a,b]$, є розв'язком задачі (5.1_0),(5.2_0). Отже, в цьому випадку не виконується умова (T), що протирічить нашому припущенню.

Отже, функції x_1 та x_2 утворюють ФСР(5.1_0), тобто повний загальний розв'язок рівняння (5.1_0) має вигляд

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \qquad t \in [a,b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}.$$

Знайдемо (частковий) розв'язок рівняння (5.1) методом варіації сталих, тобто підбираючи функції $\psi_1, \psi_2 \in C^2\big([a,b]\big)$ так, щоб функція

$$x = \psi_1(t)x_1(t) + \psi_2(t)x_2(t), \qquad t \in [a,b],$$

була розв'язком рівняння (5.1). Як відомо з §2 функції ψ_1, ψ_2 шукаються із системи

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \\ \psi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}, \qquad t \in [a,b]. \tag{5.3}$$

Розглядаючи співвідношення (5.3) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходимо

$$\psi_1'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(t)}, \qquad \psi_2'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(t)}, \qquad t \in [a,b],$$

звідки

$$\psi_1(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds, \qquad \psi_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds, \qquad t \in [a,b], \tag{5.4}$$

де $t_0 \in [a,b]$ — яке-небудь фіксоване число.

Отож, функція

$$x = \big(C_1 + \psi_1(t)\big)x_1(t) + \big(C_2 + \psi_2(t)\big)x_2(t), \qquad t \in [a,b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}, \tag{5.5}$$

де ψ_1, ψ_2 визначені співвідношеннями (5.4), є повним загальним розв'язком рівняння (5.1).

Виберемо значення C_1 і C_2 такими, щоби функція вигляду (5.5) при цих значеннях змінних C_1 і C_2 задовольняла умови (5.2_0).

Підставимо вираз (5.5) в умову $(5.2_{0,1})$, врахувавши, що

$$x' = \psi_1'(t)x_1(t) + \big(C_1 + \psi_1(t)\big)x_1'(t) + \psi_2'(t)x_2(t) + \big(C_2 + \psi_2(t)\big)x_2'(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{5.6}$$

У результаті отримаємо рівність

$$\begin{aligned} &\alpha_1\Big[\psi_1'(a)x_1(a) + \big(C_1 + \psi_1(a)\big)x_1'(a) + \psi_2'(a)x_2(a) + \big(C_2 + \psi_2(a)\big)x_2'(a)\Big] + \\ &+ \beta_1\Big[\big(C_1 + \psi_1(a)\big)x_1(a) + \big(C_2 + \psi_2(a)\big)x_2(a)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Оскільки
$$\psi_1'(a)x_1(a)+\psi_2'(a)x_2(a)=-\frac{x_2(a)x_1(a)}{a_0(a)W(a)}+\frac{x_1(a)x_2(a)}{a_0(a)W(a)}=0$$
і
$$\alpha_1x_1'(a)+\beta_1x_1(a)=0,$$
то з (5.7) маємо
$$\big(C_2+\psi_2(a)\big)\big(\alpha_1x_2'(a)+\beta_1x_2(a)\big)=0. \tag{5.8}$$
Так як виконується умова (T), то другий множник лівої частини рівності (5.8) не дорівнює нулю, а отже, мусить бути
$$C_2+\psi_2(a)=0,$$
тобто
$$C_2=-\psi_2(a). \tag{5.9}$$

Аналогічно, підставивши вираз (5.5) в умову ($5.2_{0,2}$), отримаємо
$$C_1=-\psi_1(b). \tag{5.10}$$

З (5.4), (5.9), (5.10) маємо
$$C_1=\int\limits_{t_0}^{b}\frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds,\qquad C_2=-\int\limits_{t_0}^{a}\frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds.$$
Звідси та з (5.5) здобудемо розв'язок задачі (5.1), (5.2_0)
$$\begin{aligned}x=&\Bigg[\int\limits_{t_0}^{b}\frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\Bigg]x_1(t)+\\&+\Bigg[-\int\limits_{t_0}^{a}\frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\Bigg]x_2(t)\equiv\\&\equiv x_1(t)\Bigg[\int\limits_{t}^{b}\frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\Bigg]+x_2(t)\Bigg[\int\limits_{a}^{t}\frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\Bigg],\qquad t\in[a,b].\end{aligned} \tag{5.11}$$

Із самої побудови розв'язку заданої задачі видно, що він єдиний. □

Дамо таке

Означення 5.2. Функцію
$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & a\leqslant t\leqslant s,\\[2ex] \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)}, & s\leqslant t\leqslant b,\end{cases}$$
де x_1, x_2 — розв'язки рівняння (5.1_0), які задовольняють відповідно умови ($5.2_{0,1}$) та ($5.2_{0,2}$), називають *функцією Гріна* задачі (5.1), (5.2_0).

Наслідок 5.1. *Якщо задача* (5.1), (5.2_0) *задовольняє умову* (T), *то її єдиний розв'язок можна записати у вигляді*

$$x(t) = \int\limits_a^b G(t,s)f(s)\,ds, \qquad t \in [a,b], \tag{5.12}$$

де $G(t,s)$, $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, *— функція Гріна задачі* (5.1), (5.2_0).

Доведення. Легко бачити, що

$$\int\limits_a^b G(t,s)f(s)\,ds = \int\limits_a^t G(t,s)f(s)\,ds + \int\limits_t^b G(t,s)f(s)\,ds =$$

$$= x_2(t)\left[\int\limits_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\right] + x_1(t)\left[\int\limits_t^b \frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\right], \qquad t \in [a,b].$$

Звідси та з (5.11) і (5.12) отримаємо потрібне твердження. □

Зауваження 5.3. Функція Гріна $G(t,s)$, $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, задовольняє умови

1) функція G є неперервною на $[a,b] \times [a,b]$;

2) $\forall s \in (a,b)$ функція $t \to G(t,s)$, $t \in [a,b]$, задовольняє рівняння (5.1_0) на проміжках (a,s) і (s,b);

3) $\forall s \in (a,b)$ функція $t \to G(t,s)$, $t \in [a,b]$, задовольняє умови (5.2_0);

4) $\forall s \in (a,b)\colon G'_t(s+0,s) - G'_t(s-0,s) = \dfrac{1}{a_0(s)}$.

Справді, виконання умов 1)–3) перевіряється безпосередньо. Покажемо справедливість умови 4).

Для $t > s$ маємо

$$G(t,s) = \frac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)},$$

а для $t < s$ —

$$G(t,s) = \frac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}$$

Отже, для $s \in (a,b)$ отримаємо

$$G'_t(s+0,s) - G'_t(s-0,s) = \lim_{t\to s+0} G'_t(t,s) - \lim_{t\to s-0} G'_t(t,s) =$$

$$= \frac{x_1(s)x_2'(s)}{a_0(s)W(s)} - \frac{x_1'(s)x_2(s)}{a_0(s)W(s)} = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Можна переконатися, що умови 1)–4) однозначно визначають функцію Гріна $G(t,s)$, $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, задачі (5.1),($5.2_0$).

Приклад 5.1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$x'' + x = f(t), \qquad t \in [0, \pi], \tag{5.13}$$
$$x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0. \tag{5.14}$$

Розв'язування. Спочатку перевіримо виконання умови (T). Для цього розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$x'' + x = 0. \tag{5.15}$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \qquad t \in [0, \pi], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Підставимо отриманий вираз в першу і другу крайові умови

$$x(0) = C_2 = 0, \tag{5.17}$$
$$x'(\pi) = -C_1 = 0. \tag{5.18}$$

Отже, відповідна однорідна крайова задача має тільки нульовий розв'язок, тобто умова (T) виконується.

Знайдемо (частковий) розв'язок рівняння (5.15), що задовольняє першу з крайових умов. Для цього підставляємо вираз повного загального розв'язку (5.16) в першу умову. Тоді отримаємо рівність (5.17), з якої видно, що нам потрібно покласти у виразі загального розв'язку $C_2 = 0$, а значення C_1 можна взяти будь-яке відмінне від нуля, наприклад, $C_1 = 1$. Отож, функція $x = x_1(t)$, де

$$x_1(t) = \sin t, \qquad t \in [0; \pi],$$

є шуканим розв'язком рівняння (5.15).

Тепер аналогічно шукаємо розв'язок рівняння (5.15), який задовольняє другу з крайових умов (5.14). Підставивши вираз (5.16) у другу крайову умову, отримаємо (5.18). Звідси випливає, що $C_1 = 0$, а C_2 — будь-яке відмінне від нуля. Взявши $C_2 = 1$, із зображення загального розв'язку (5.16) отримаємо $x = x_2(t)$, де

$$x_2(t) = \cos t, \qquad t \in [0; \pi],$$

— другий шуканий розв'язок.

Маємо

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1.$$

Отож, зі сказаного вище випливає таке зображення функції Гріна

$$G(t,s) = \begin{cases} -\sin t \cdot \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ -\sin s \cdot \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

а значить, розв'язок задачі (5.13),(5.14) має зображення

$$x(t) = \int\limits_0^\pi G(t,s) f(s)\, ds \equiv \left(\int\limits_0^t \sin s \cdot f(s)\, ds \right) \cos t + \left(\int\limits_t^\pi \cos s \cdot f(s)\, ds \right) \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

$\square$

§6. Нормальні лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

6.1. Повний загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами

6.1.1. Повний загальний комплексний розв'язок НЛОС

Розглянемо НЛОС у випадку, коли $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ і коефіцієнти — сталі, тобто систему

$$x' = Ax, \tag{6.1}$$

де $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$ – натуральне), $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ – невідома функція від незалежної змінної t. Як випливає із загальної теорії нормальних лінійних систем, викладеної в §1, будь-який розв'язок даної системи можна продовжити на всю числову вісь $\mathbb{R}$, а тому розглядаємо тільки ті розв'язки цієї системи, які визначені на $\mathbb{R}$.

На підставі твердження теореми 1.7 повний загальний розв'язок системи (6.1) має вигляд

$$x = C_1\varphi^1(t) + \cdots + C_n\varphi^n(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C},$$

де $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — фундаментальна система розв'язків системи (6.1) (коротко, ФСР (6.1)), тобто яка-небудь система з n (часткових) лінійно незалежних розв'язків системи (6.1).

Для знаходження ФСР (6.1) нам будуть потрібні деякі факти з ***теорії матриць***. Нагадаємо їх. Нехай $A \in M_n(\mathbb{C})$ — яка-небудь матриця. Число λ називається *власним значенням* матриці A, якщо існує ненульовий вектор $v \in \mathbb{C}^n$ такий, що виконується рівність

$$Av = \lambda v. \tag{6.2}$$

Згаданий вектор v називається *власним вектором*, який відповідає власному значенню λ. Відшукання власних значень і власних векторів матриці A зводиться (як випливає з (6.2)) до знаходження таких значень λ, за яких система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\big(A - \lambda I\big)v = 0 \tag{6.3}$$

має ненульові розв'язки (тут і далі I — одинична матриця, 0 — нульовий вектор). Це означає, що власні значення матриці A є розв'язками рівняння

$$\det\big(A - \lambda I\big) = 0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

Рівняння (6.4) можна записати у вигляді

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

яке згідно з основною теоремою алгебри можна переписати так:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0, \tag{6.5}$$

де $1 \leqslant m \leqslant n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — різні (загалом, комплексні) числа, $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_m \geqslant 1$ — натуральні, $k_1 + \cdots + k_m = n$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ є власними значеннями матриці A і тільки вони. Значення $k_1, \ldots, k_m$ називають *алгебраїчними кратностями* відповідних власних значень.

Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ власному значенню λ_j відповідає власний підпростір $B(\lambda_j)$, який складається з власних векторів, відповідних цьому власному значенню, та нульового вектора. Розмірність цього власного підпростору $B(\lambda_j)$ позначимо через l_j. Значення l_j називається *геометричною кратністю* власного значення λ_j і, як відомо, $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Фактично, число l_j — це максимальна кількість лінійно незалежних власних векторів, які відповідають власному значенню λ_j. Значення l_j можна визначити як *кількість вільних змінних* у системі (6.3).

Далі всюди вважатимемо, що для матриці A системи (6.1) рівняння (6.4) можна записати у вигляді (6.5), $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — власні значення матриці A, а $k_1, \ldots, k_m$ та $l_1, \ldots, l_m$ — відповідно, алгебраїчні та геометричні кратності цих власних значень.

Лема 6.1. *Функція вигляду*

$$x = ve^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.6}$$

де $v \in \mathbb{C}^n$ і $v \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, є (частковим) розв'язком системи (6.1) тоді і тільки тоді, коли λ — власне значення матриці A, а v — відповідний йому власний вектор.

Доведення. Підставивши вираз (6.6) в (6.1) та врахувавши, що $x' = \lambda v^* e^{\lambda t}$, отримаємо рівність

$$\lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $e^{\lambda t} \neq 0$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$, то звідси випливає, що λ і v обов'язково повинні задовольняти рівність $Av = \lambda v$, тобто λ — власне значення матриці A, а v — власний вектор, який відповідає цьому значенню. Отож, наше твердження є правильним. □

Вправа 6.1. Доведіть, що у випадку $l_1 = k_1, \ldots, l_m = k_m$ повний загальний розв'язок рівняння (6.1) має вигляд

$$x = [C_{1,1}v^{1,1} + \cdots + C_{1,k_1}v^{1,k_1}]e^{\lambda_1 t} + \cdots + [C_{m,1}v^{m,1} + \cdots + C_{m,k_m}v^{m,k_m}]e^{\lambda_m t},$$
$$t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C}, \tag{6.7}$$

де для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\quad v^{j,1}, \ldots, v^{j,k_j}$ — лінійно незалежні власні вектори, які відповідають власному значенню λ_j.

Введемо ще деякі потрібні поняття. Векторну функцію

$$p(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

компонентами якої є многочлени, назвемо *векторним многочленом*, а найбільший з степенів компонент — *степенем* векторного многочлена. *Векторним (комплексним) квазімногочленом* називають векторну функцію вигляду $x = p(t)\, e^{\mu t}$, $t \in \mathbb{R}$, де p — векторний многочлен, а μ — комплексне число. Число μ називають *показником* квазімногочлена.

Тепер повернемося до питання про вигляд повного загального розв'язку системи (6.1) у загальному випадку.

Теорема 6.1. *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — всі власні значення матриці A, а $k_1, \ldots, k_m$ та $l_1, \ldots, l_m$ — відповідно, алгебраїчні та геометричні кратності цих власних значень $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Тоді повний загальний розв'язок системи* (6.1) *можна записати у вигляді*

$$x = [C_{1,1}p^{1,1}(t) + \cdots + C_{1,k_1}p^{1,k_1}(t)]e^{\lambda_1 t} + \cdots + [C_{m,1}p^{m,1}(t) + \cdots + C_{m,k_m}p^{m,k_m}(t)]e^{\lambda_m t},$$
$$t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C}, \quad (6.8)$$

де для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ функції $p^{j,1}, \ldots, p^{j,k_j}$ є лінійно незалежними векторними многочленами степеня $\leqslant k_j - l_j$, причому, якщо $k_j - l_j = 0$, то $p^{j,1}(t) = v^{j,1}, \ldots, p^{j,k_j}(t) = v^{j,k_j}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $v^{j,1} \ldots, v^{j,k_j}$ — лінійно незалежні власні вектори, які відповідають власному значенню λ_j.

Доведення. З лінійної алгебри випливає, що для матриці A знайдеться невироджена матриця H $(\det H \neq 0)$ така, що матриця $J \overset{\text{def}}{=} H^{-1}AH$ має жорданову форму, тобто

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & J_{1,l_1} & & & & \\ & 0 & & \ddots & & & \\ & & & & J_{j,s} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{m,l_m} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

де для кожного $j \in \{1, \cdots, m\}$ та $s \in \{1, \cdots, l_j\}$ жорданів блок $J_{j,s}$ є або $J_{j,s} = (\lambda_j)$ – одноелементна матриця, або

$$J_{j,s} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

— жорданова клітка, яка відповідає власному значенню λ_j. Позначимо через $\mu_{j,s}$ — розмірність блоку $J_{j,s}$, $j = \overline{1,m}, s = \overline{1,l_j}$. Відомо, що $\mu_{j,1} + \cdots + \mu_{j,l_j} = k_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$. Легко переконатися, що максимальна розмірність жорданової клітки, що відповідає власному значенню λ_j, не перевищує числа $k_j - l_j + 1$, тобто

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant l_j} \mu_{j,s} \leqslant k_j - l_j + 1, \quad j = \overline{1,m}.$$

Зробимо в системі (6.1) заміну змінних

$$x = Hy. \quad (6.10)$$

Тоді отримаємо $Hy' = AHy$, звідки випливає $y' = H^{-1}AH$. Отож, для нової шуканої векторної функції y маємо систему

$$y' = Jy. \tag{6.11}$$

Введемо ще такі позначення:

$$k_0 := 0, \qquad \mu_{j,0} := 0, \qquad r_{j,s} := k_0 + \cdots + k_{j-1} + \mu_{j,0} + \cdots + \mu_{j,s-1},$$

$$y_{j,s} := \begin{pmatrix} y_{r_{j,s}+1} \\ \vdots \\ y_{r_{j,s+1}} \end{pmatrix}, \qquad j = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,l_j}.$$

Тоді

$$y = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ \vdots \\ y_{m,l_m} \end{pmatrix}$$

і на підставі (6.9) легко бачимо, що система (6.11) розпадається на систему $l := l_1 + \cdots + l_m$ незалежних між собою підсистем

$$y'_{j,s} = J_{j,s}y_{j,s}, \quad j = \overline{1,m}, \ s = \overline{1,l_j}. \tag{6.12}$$

Ці підсистеми однотипні і досить розв'язати одну із них, щоб зрозуміти як виглядатиме розв'язок цілої системи. Розв'яжемо, наприклад, першу з цих підсистем, прийнявши $\mu := \mu_{1,1}$.

Отож, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_{\mu-1} = \lambda_1 y_{\mu-1} + y_\mu, \\ y'_\mu = \lambda_1 y_\mu. \end{cases} \tag{6.13}$$

Перенесемо перші члени правих частин рівнянь системи (6.13) в ліві частини і домножимо кожне рівняння на $e^{-\lambda_1 t}$. Звідси, використовуючи рівність

$$y'_j e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 y_j e^{-\lambda_1 t} = (y_j e^{-\lambda_1 t})', \qquad j = \overline{1,\mu},$$

отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y'_{1,*} = y_{2,*}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y'_{\mu-1,*} = y_{\mu,*}, \\ y'_{\mu,*} = 0, \end{cases} \tag{6.14}$$

де тут маємо

$$y_{j,*}(t) := y_j(t)e^{-\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,\mu}. \tag{6.15}$$

Розв'яжемо систему (6.14), починаючи з μ-го рівняння:

$$
\begin{aligned}
&y_{\mu,*} = C_{1,\mu},\\
&y_{\mu-1,*} = C_{1,\mu}t + C_{1,\mu-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{1,*} = C_{1,\mu}\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + C_{1,\mu-1}\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} + \dots + C_{1,1}.
\end{aligned}
$$

Звідси, враховуючи позначення (6.15), одержимо

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \Big(C_{1,1} + C_{1,2}t + \dots + C_{1,\mu}\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\Big)e^{\lambda_1 t},\\
&y_2 = \Big(C_{1,2} + \dots + C_{1,\mu}\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\Big)e^{\lambda_1 t},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_\mu = C_{1,\mu}e^{\lambda_1 t},
\end{aligned}
$$

тобто

$$
y_{1,1} = \left[C_{1,1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + C_{1,2}\begin{pmatrix}t\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + C_{1,\mu}\begin{pmatrix}\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\\\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right]e^{\lambda_1 t},
$$

$$
t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \dots, C_{1\mu} \in \mathbb{C}.
$$

Розв'язуючи аналогічно інші підсистеми системи (6.12), одержимо

$$
y_{j,s} = \left[C_{j,\mu_{j,0}+\dots+\mu_{j,s-1}+1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + C_{j,\mu_{j,0}+\dots+\mu_{j,s-1}+\mu_{j,s}}\begin{pmatrix}\frac{t^{\mu_{j,s}-1}}{(\mu_{j,s}-1)!}\\\frac{t^{\mu_{j,s}-2}}{(\mu_{j,s}-2)!}\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right]e^{\lambda_j t},
$$

$$
j = \overline{1,m}, \qquad s = \overline{1,l_j}.
$$

Отож, повний загальний розв'язок системи (6.11) можемо записати у вигляді

$$
y = \left[C_{1,1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + C_{1,2}\begin{pmatrix}t\\1\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + C_{1,\mu_{1,1}}\begin{pmatrix}\frac{t^{\mu_{1,1}-1}}{(\mu_{1,1}-1)!}\\\frac{t^{\mu_{1,1}-2}}{(\mu_{1,1}-2)!}\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots\right]e^{\lambda_1 t} + \dots \equiv
$$

$$\equiv \big[C_{1,1}q^{1,1}(t)+\dots+C_{1,k_1}q^{1,k_1}(t)\big]e^{\lambda_1 t}+\dots+$$

$$+\big[C_{m,1}q^{m,1}(t)+\dots+C_{m,k_m}q^{m,k_m}(t)\big]e^{\lambda_m t}, \tag{6.16}$$

$$t\in\mathbb{R}, \qquad C_{1,1},\dots,C_{1,k_1},\dots,C_{m,1},\dots,C_{m,k_m}\in\mathbb{C},$$

де для кожного $j\in\{1,\cdots,m\}$ та $k\in\{1,\cdots,k_j\}$ функція $q^{j,k}$ — векторний многочлен степеня $\leqslant k_j-l_j$.

Очевидно, що функції

$$x=q^{j,k}(t)e^{\lambda_j t},\quad t\in\mathbb{R},\qquad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,k_j}, \tag{6.17}$$

є частковими розв'язками системи (6.11). Легко бачити, що вектори $q^{1,1}(0),\dots,q^{m,k_m}(0)$ утворюють стандартну базу в $\mathbb{C}^n$, а отже, — лінійно незалежні. Це на підставі леми 1.3 доводить, що система розв'язків (6.17) є ФСР (6.11).

Приймемо

$$p^{j,k}:=Hq^{j,k},\quad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,k_j}.$$

Тоді, врахувавши сказане про систему функцій (6.17) і співвідношення (6.10), отримаємо, що функції

$$x=p^{j,k}(t)e^{\lambda_j t},\quad t\in\mathbb{R},\quad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,k_j}, \tag{6.18}$$

є (частковими) лінійно незалежними розв'язками системи (6.1). Отож, цей набір функцій є ФСР (6.1). Зауважимо, що на підставі леми 6.1 для тих значень $j\in\{1,\dots,m\}$, для яких $k_j=l_j$, значення векторних многочленів $p^{j,k}$ ($k=\overline{1,k_j}$) нульового степеня є рівними власним векторам, які відповідають власному значенню λ_j. □

Позначимо

$$(a^1,\dots,a^k)^\top=\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^k\end{pmatrix}$$

— вектор-стовпчик, складений з векторів $a^1,\dots,$ a^k з $\mathbb{C}^n$ (що є фактично вектор-стовпчиком з простору $\mathbb{C}^{kn}$), де $k\in\mathbb{N}$.

Наслідок 6.1. *Повний загальний розв'язок системи* (6.1) *можна записати у вигляді*

$$x=\sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{l=1}^{k_j}C_{j,l}\Big(\sum_{s=0}^{k_j-l_j}a^{j,s,l}t^{k_j-l_j-s}\Big)\Big]e^{\lambda_j t}\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{s=0}^{k_j-l_j}\Big(\sum_{l=1}^{k_j}C_{j,l}a^{j,s,l}\Big)t^{k_j-l_j-s}\Big]e^{\lambda_j t}\equiv$$

$$\equiv[a^{1,0}t^{k_1-l_1}+\dots+a^{1,k_1-l_1}]e^{\lambda_1 t}+\dots+$$

$$+[a^{m,0}t^{k_m-l_m}+\dots+a^{m,k_m-l_m}]e^{\lambda_m t}, \tag{6.19}$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \dots, C_{1,k_1}, \dots, C_{m,1}, \dots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C},$$

де для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$

$$(a^{j,0,l}, \dots, a^{j,k_j-l_j,l})^\top \equiv \Big(\big(a_1^{j,0,l}, \dots, a_n^{j,0,l}\big)^\top, \dots$$
$$\dots, \Big(a_1^{j,k_j-l_j,l}, \dots, a_n^{j,k_j-l_j,l}\Big)^\top\Big)^\top \in \mathbb{C}^{n(k_j-l_j+1)}, \quad l = \overline{1, k_j},$$

— база (будь-яка) в просторі розв'язків системи

$$\begin{cases} (A - \lambda_j I)a^{j,0} = 0, \\ (A - \lambda_j I)a^{j,1} = (k_j - l_j)a^{j,0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,s} = (k_j - l_j - s + 1)a^{j,s-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,k_j-l_j} = a^{j,k_j-l_j-1}, \end{cases} \tag{6.20}$$

$C_{j,1}, \dots, C_{j,k_j}$ *— довільні сталі, а*

$$(a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j})^\top = \left(\sum_{l=1}^{k_j} C_{j,l}a^{j,0,l}, \dots, \sum_{l=1}^{k_j} C_{j,l}a^{j,k_j-l_j,l}\right)^\top \equiv$$
$$\equiv \left(\begin{pmatrix} a_1^{j,0,1}C_{j,1} + \dots + a_1^{j,0,k_j}C_{j,k_j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^{j,0,1}C_{j,1} + \dots + a_n^{j,0,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix}, \dots, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} a_1^{j,k_j-l_j,1}C_{j,1} + \dots + a_1^{j,k_j-l_j,k_j}C_{j,k_j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^{j,k_j-l_j,1}C_{j,1} + \dots + a_n^{j,k_j-l_j,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix}\right)^\top \equiv \tag{6.21}$$

$$= C_{j,1}(a^{j,0,1}, \dots, a^{j,k_j-l_j,1})^\top + \dots + C_{j,k_j}(a^{j,0,k_j}, \dots, a^{j,k_j-l_j,k_j})^\top$$

— загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь (6.20)(*якщо* $l_j = k_j$*, то* $a^{j,0}$ *— загальний власний вектор матриці* A *для власного значення* λ_j).

Доведення. Використаємо твердження теореми 6.1 і введені там позначення. Спочатку для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ векторні многочлени $p^{j,l}$, $l = \overline{1, k_j}$, степені яких, як відомо, не перевищують числа $k_j - l_j$, запишемо у вигляді

$$p^{j,l}(t) = \sum_{s=0}^{k_j-l_j} a^{j,s,l}t^{k_j-l_j-s}, \qquad t \in (-\infty, +\infty), \quad l = \overline{1, k_j},$$

де $a^{j,s,l}$, $s = \overline{0, k_j - l_j}$, $l = \overline{1, k_j}$, — сталі вектори з $\mathbb{C}^n$. Тоді згідно з твердженням теореми 6.1 повний загальний розв'язок системи (6.1) можемо записати у вигляді (6.19), де для кожних $j \in \{1, \dots, m\}$, $s \in \{0, \dots, k_j - l_j\}$ вектори

$$a^{j,s} := \sum_{l=1}^{k_j} C_{j,l}a^{j,s,l}$$

— лінійні комбінації векторів $a^{j,s,l} \in \mathbb{C}^n$, коефіцієнтами яких є довільні сталі $C_{j,l}$, $l = \overline{1, k_j}$.

Залишається довести, що для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ система векторів

$$(a^{j,0,l}, \dots, a^{j,k_j-l_j,l})^\top, \quad l = \overline{1, k_j},$$

— (довільна) база в просторі розв'язків системи (6.20), а $(a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j})^\top$ — загальний розв'язок системи (6.20).

Насамперед зауважимо, що для довільних $j \in \{1, \dots, m\}$ та $l \in \{1, \dots, k_j\}$ векторна функція

$$x = (a^{j,0,l}\, t^{k_j-l_j} + \dots + a^{j,k_j-l_j,l})\, e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.22}$$

яку отримуємо з (6.19) при $C_{j,l} = 1$ і $C_{k,s} = 0$, якщо $k \neq j$ або $s \neq l$, є розв'язком системи (6.1). Підставивши функцію (6.22) у систему (6.1) замість x, отримаємо рівність

$$\big[(k_j - l_j)a^{j,0,l}t^{k_j-l_j-1} + \dots + a^{j,k_j-l_j-1,l}\big]e^{\lambda_j t} + \lambda_j\big[a^{j,0,l}t^{k_j-l_j} + \dots + a^{j,k_j-l_j,l}\big]e^{\lambda_j t} =$$

$$= \big[(Aa^{j,0,l})t^{k_j-l_j} + \dots + (Aa^{j,k_j-l_j,l})\big]e^{\lambda_j t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Після ділення на $e^{\lambda_j t}$ і зведення подібних членів одержимо рівність двох векторних многочленів, а це означає, що коефіцієнти при однакових степенях t^k в лівій і правій частинах цієї рівності — рівні. Звідси легко випливає, що вектор

$$(a^{j,0,l}, \dots, a^{j,k_j-l_j,l})^\top \in \mathbb{C}^{n(k_j-l_j+1)}$$

— розв'язок системи (6.20).

Тепер виберемо і зафіксуємо яке-небудь число j з множини $\{1, \dots, m\}$. Спочатку покажемо таке: якщо вектор

$$(a^{j,0,*}, \dots, a^{j,k_j-l_j,*})^\top \in \mathbb{C}^{n(k_j-l_j+1)} \tag{6.23}$$

є розв'язком системи (6.20), то векторна функція

$$x = (a^{j,0,*}\, t^{k_j-l_j} + \dots + a^{j,k_j-l_j,*})\, e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.24}$$

є розв'язком системи (6.1). Справді, підставивши функцію (6.24) у ліву та праву частини системи (6.1) замість x і врахувавши рівності, які одержують з рівнянь системи (6.20), коли туди підставити її розв'язок (6.23), отримаємо тотожність. Правильним є і обернене твердження, що легко перевіряється підстановкою функції (6.24) у систему (6.1) і (після скорочення на $e^{\lambda_j t}$ та зведення подібних членів) прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях t^k, $0 \le k \le k_j - l_j$, в лівій та правій частинах отриманої тотожності.

Нехай маємо систему розв'язків

$$x = (\tilde{a}^{j,0,l}\, t^{k_j-l_j} + \dots + \tilde{a}^{j,k_j-l_j,l})\, e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l = \overline{1, r}, \tag{6.25}$$

системи (6.1) і розглянемо відповідну їй систему векторів

$$(\tilde{a}^{j,0,l}, \dots, \tilde{a}^{j,k_j-l_j,l})^\top \in \mathbb{C}^{n(k_j-l_j+1)}, \quad l = \overline{1, r}, \tag{6.26}$$

які, як ми вже знаємо, є розв'язками системи рівнянь (6.20). Легко переконатися, що системи векторних функцій (6.25) і векторів (6.26) є одночасно лінійно залежними або незалежними.

Тепер розглянемо систему векторних функцій

$$x = (a^{j,0,l}\, t^{k_j-l_j} + \cdots + a^{j,k_j-l_j,l})\, e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l = \overline{1,k_j}, \tag{6.27}$$

яку отримуємо з (6.19) при відповідних значеннях $C_{r,s}$, $r = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,k_r}$, наприклад, для кожного заданого l прийнявши $C_{j,l} = 1$ і $C_{r,s} = 0$, якщо $r \neq j$ або $s \neq l$. Оскільки ці функції є лінійно незалежними розв'язками системи (6.1) (це випливає з доведення теореми 6.1), то відповідна їй система векторів

$$(a^{j,0,l}, \ldots, a^{j,k_j-l_j,l})^\top, \quad l = \overline{1,k_j}, \tag{6.28}$$

є лінійно незалежною системою розв'язків системи (6.20). Покажемо, що який-небудь розв'язок $(d^0, \ldots, d^{k_j-l_j})^\top$ системи (6.20) можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів системи (6.28). Справді, оскільки функція $x = (d^0 t^{k_j-l_j} + \cdots + d^{k_j-l_j})\, e^{\lambda_j t}$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком системи (6.1), то на підставі зображення (6.19) повного загального розв'язку системи (6.1) одержуємо тотожність

$$\begin{gathered}[d^0 t^{k_j-l_j} + \cdots + d^{k_j-l_j}]e^{\lambda_j t} = \big[\tilde{a}^{1,0} t^{k_1-l_1} + \cdots + \tilde{a}^{1,k_1-l_1}\big]e^{\lambda_1 t} + \\ + \big[\tilde{a}^{j,0} t^{k_j-l_j} + \cdots + \tilde{a}^{j,k_j-l_j}\big]e^{\lambda_j t} + \cdots + \\ + \big[\tilde{a}^{m,0} t^{k_m-l_m} + \cdots + \tilde{a}^{m,k_m-l_m}\big]e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{6.29}$$

де $\tilde{a}^{l,s}$ — значення $a^{l,s}$ при відповідних значеннях $C_{1,1}, \ldots, C_{m,k_m}$.

З (6.29) на підставі леми 1.1 отримаємо рівності

$$d^0 = \tilde{a}^{j,0}, \ \ldots, \ d^{k_j-l_j} = \tilde{a}^{j,k_j-l_j}, \ \tilde{a}^{r,s} = 0,$$

коли $r \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\}$, $s \in \{0, \ldots, k_r - l_r\}$. Звідси випливає те, що нам треба. Отож, ми, зокрема, показали, що простір розв'язків системи (6.20) є k_j вимірним, система векторів (6.28) утворює базу в цьому просторі і лінійні функції $a^{j,0}, \ldots, a^{j,k_j-l_j}$ від довільних сталих $C_{j,1}, \ldots, C_{j,k_j}$ є загальним розв'язком системи (6.20).

Тепер покажемо, що для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ систему векторів (6.28), які фігурують у зображенні (6.19) повного загального розв'язку системи (6.1), можна вибрати довільно, аби тільки вона утворювала базу в просторі розв'язків системи (6.20). Справді, нехай для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ система векторів (6.28) є довільною базою в просторі розв'язків системи (6.20). Розглянемо систему векторних функцій

$$x = \Big(\sum_{s=0}^{k_j-l_j} a^{j,s,l} t^{k_j-l_j-s}\Big)e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad j = \overline{1,m}, \ l = \overline{1,k_j}.$$

Вони є розв'язками системи (6.1) і, як легко переконатися, опираючись на лему 1.1, лінійно незалежними векторними функціями, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6.1). Отож, повний загальний розв'язок системи (6.1) має вигляд (6.19) з урахуванням (6.21). □

Зауваження 6.1. Як випливає з доведення теореми 6.1, коли $l_j < k_j$ для деякого $j \in \{1, ..., m\}$, то степені векторних многочленів $p^{j,l}$ $(l = \overline{1,k_j})$ не перевищують числа $k_j - l_j$, але не обов'язково йому дорівнюють. Отож, може бути, що перших кілька компонент розв'язків системи (6.20) дорівнюють нулю.

Зауваження 6.2. Якщо для деякого $j \in \{1, \ldots, m\}$ маємо $k_j - l_j = 0$, то $a^{j,0} = C_{j,1}v^{j,1} + \cdots + C_{j,k_j}v^{j,k_j}$, де $\{v^{j,1}, \ldots, v^{j,k_j}\}$ — база власного підпростору $B(\lambda_j)$ для власного значення λ_j. Очевидно, що $a^{j,0}$ є загальним розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda_j I)v = 0, \tag{6.30}$$

ненульові часткові розв'язки якої, очевидно, є власними векторами, які відповідають власному значенню λ_j.

Означення 6.1. *Загальним власним вектором* (з.в.в.), відповідним власному значенню λ_j, називаємо загальний розв'язок системи (6.30).

Означення 6.2. Функції

$$x = \left[a^{1,0}t^{k_1-l_1} + a^{1,1}t^{k_1-l_1-1} + \cdots + a^{1,k_1-l_1}\right]e^{\lambda_1 t}, \quad \ldots,$$
$$x = \left[a^{m,0}t^{k_m-l_m} + a^{m,1}t^{k_m-l_m-1} + \cdots + a^{m,k_m-l_m}\right]e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

назвемо (див.(6.19)) *неповними загальними розв'язками*, які відповідають власним значенням, відповідно, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Отож, згідно з (6.19) повний загальний розв'язок системи (6.1) можна подати у вигляді суми неповних загальних розв'язків, які відповідають власним значенням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ матриці A.

Враховуючи сказане, можна запропонувати такий **спосіб розв'язування нормальних лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами.**

1. *Виписуємо матрицю A системи* (6.1) *та характеристичне рівняння* (6.4). *Розв'язуємо рівняння* (6.4). *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \le n)$ – різні його корені (тобто власні значення матриці A), а $k_1, \ldots, k_m$ – їхні (відповідні) кратності (тобто алгебраїчні кратності власних значень).*

2. *Шукаємо для кожного власного значення відповідний йому неповний загальний розв'язок.*

   Як це робити покажемо на прикладі власного значення λ_1 (з алгебраїчною кратністю k_1). Спочатку запишемо систему рівнянь для знаходження власних векторів, відповідних власному значенню λ_1:

   $$(A - \lambda_1 I)v = 0.$$

   Знайдемо загальний розв'язок цієї системи, тобто загальний власний вектор, відповідний власному значенню λ_1:

   $$v = \begin{pmatrix} b_1^1\,\tau_1 + \cdots + b_1^{l_1}\,\tau_{l_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n^1\,\tau_1 + \cdots + b_n^{l_1}\,\tau_{l_1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1^1 \\ .. \\ b_n^1 \end{pmatrix} \tau_1 + \cdots + \begin{pmatrix} b_1^{l_1} \\ .. \\ b_n^{l_1} \end{pmatrix} \tau_{l_1}, \qquad \tau_1, \ldots, \tau_{l_1} \in \mathbb{C}, \tag{6.31}$$

   де $l_1 \in \mathbb{N}$ – геометрична кратність власного значення λ_1, а b_l^s, $l = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,l_1}$, — деякі сталі.

   Як відомо, $1 \leqslant l_1 \leqslant k_1$. Можливі два випадки: 1) $l_1 = k_1$; 2) $l_1 < k_1$.

   У першому випадку ($l_1 = k_1$) приймемо в (6.31)

   $$\tau_1 = C_1, \ldots, \tau_{k_1} = C_{k_1}$$

і, ввівши позначення

$$a^0 := \begin{pmatrix} b_1^1 C_1 + \cdots + b_1^{k_1} C_{k_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n^1 C_1 + \cdots + b_n^{k_1} C_{k_1} \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

запишемо

$$x = a^0 e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.33}$$

— неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_1.

У другому випадку, тобто коли $l_1 < k_1$, записуємо проект неповного загального розв'язку, відповідного власному значенню λ_1, у вигляді

$$x = (a^0 t^{k_1 - l_1} + a^1 t^{k_1 - l_1 - 1} + \cdots + a^{k_1 - l_1})\, e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.34}$$

де $a^s = \begin{pmatrix} a_1^s \\ \vdots \\ a_n^s \end{pmatrix}$, $s = \overline{0, k_1 - l_1}$, — вектори з неозначеними компонентами, значення яких шукають за умови, що векторна функція, задана формулою (6.34), є розв'язком системи (6.1).

Підставляючи вираз (6.34) замість x в систему (6.1), отримаємо

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (a^0 t^{k_1 - l_1} + a^1 t^{k_1 - l_1 - 1} + \cdots + a^{k_1 - l_1}) e^{\lambda_1 t} + \\ &+ ((k_1 - l_1) a^0 t^{k_1 - l_1 - 1} + (k_1 - l_1 - 1) a^1 t^{k_1 - l_1 - 2} + \cdots + \\ &+ a^{k_1 - l_1 - 1}) e^{\lambda_1 t} = ((A a^0) t^{k_1 - l_1} + (A a^1) t^{k_1 - l_1 - 1} + \cdots + \\ &+ A a^{k_1 - l_1}) e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t, одержимо

$$\begin{cases} t^{k_1 - l_1}: & A a^0 = \lambda_1 a^0; \\ t^{k_1 - l_1 - 1}: & A a^1 = \lambda_1 a^1 + (k_1 - l_1) a^0; \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t^0: & A a^{k_1 - l_1} = \lambda_1 a^{k_1 - l_1} + a^{k_1 - l_1 - 1}, \end{cases}$$

звідки, після простих перетворень, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (6.20) при $j = 1$, а точніше

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 I) a^0 = 0; \\ (A - \lambda_1 I) a^1 = (k_1 - l_1) a^0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda_1 I) a^{k_1 - l_1} = a^{k_1 - l_1 - 1}. \end{cases} \tag{6.35}$$

Розв'язуємо цю систему, починаючи з першого векторного рівняння. Його загальний розв'язок a^0 уже знайдено у вигляді (6.31). Підставляючи його вираз у друге рівняння системи (6.35), знайдемо a^1. Можливо, що для розв'язності другої системи треба накласти певні зв'язки між параметрами $\tau_1, \dots, \tau_{l_1}$. Далі робимо аналогічно. Як випливає з наслідку 6.1, компоненти векторів $a^0, \dots, a^{k_1-l_1}$ виражаються через k_1 параметрів, які позначаємо через $C_1, \dots, C_{k_1}$. Знайдені вирази $a^0, \dots, a^{k_1-l_1}$ підставляємо в (6.34). В результаті одержимо неповний загальний розв'язок, який відповідає власному значенню λ_1.

3. *Записуємо загальний розв'язок системи* (6.1) *як суму неповних загальних розв'язків, які відповідають власним значенням* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

6.1.2. Повний загальний дійсний розв'язок НЛОС

Розглянемо НЛОС у випадку, коли $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ і коефіцієнти є сталими, тобто систему (6.1), коли *елементи матриці A — дійсні* і нас цікавлять *дійсні розв'язки* цієї системи. Під *дійсним розв'язком* системи (6.1) розумітимемо його розв'язок, який набуває дійсних значень. Означення повного загального дійсного розв'язку даємо аналогічно як повного загального комплексного розв'язку.

На підставі теореми 1.7 маємо таке твердження.

Наслідок 6.2. *Нехай $x = \varphi^1(t), \dots, x = \varphi^n(t),\ t \in \mathbb{R},$ — дійсні лінійно незалежні розв'язки системи* (6.1)*, коефіцієнти якої є дійсні сталі. Тоді її повний загальний дійсний розв'язок має вигляд*

$$x = C_1\varphi^1(t) + \dots + C_n\varphi^n(t), \quad t \in \mathbb{R},\ C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

З наслідків 6.1 і 6.2 випливає таке твердження.

Наслідок 6.3. *Нехай елементи матриці A та її власні значення — дійсні. Тоді повний загальний дійсний розв'язок системи* (6.1) *має вигляд*

$$x = [a^{1,0}t^{k_1-l_1} + \dots + a^{1,k_1-l_1}]e^{\lambda_1 t} + \dots + [a^{m,0}t^{k_m-l_m} + \dots + a^{m,k_m-l_m}]e^{\lambda_m t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ $(a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j})^\top$ — загальний дійсний розв'язок системи (6.20)*, зокрема, якщо $l_j = k_j$, то $a^{j,0}$ — загальний дійсний власний вектор, відповідний власному значенню λ_j.*

Тепер розглянемо випадок, коли елементи матриці A — дійсні, а серед її власних значень є комплексні. Спочатку доведемо таке твердження.

Лема 6.2. *Нехай елементи матриці A системи* (6.1) *— дійсні і $x = u(t) + iv(t),\ t \in \mathbb{R},$ — розв'язок системи* (6.1)*, де u, v — дійсні функції, i — уявна одиниця. Тоді функції $x = u(t),\ t \in \mathbb{R},$ та $x = v(t),\ t \in \mathbb{R},$ — теж розв'язки системи* (6.1) *(тобто дійсна та уявна частини комплексного розв'язку теж є розв'язками цієї системи).*

Доведення. Підставимо вираз $u(t) + iv(t)$ у (6.1) замість x. У результаті отримаємо рівність

$$u'(t) + iv'(t) = Au(t) + iAv(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси та умови рівності двох комплексних чисел одержимо

$$u'(t) = Au(t), \quad v'(t) = Av(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

□

Зауважимо таке: коли матриця A — дійсна і деяке її власне значення — комплексне (коли кажемо, що число є комплексним, то маємо на увазі, що його уявна частина відмінна від нуля), то, як випливає з системи (6.4), існує власне значення, яке є комплексно спряженим із заданим. З лінійної алгебри відомо, що алгебричні та геометричні кратності комплексно спряжених власних значень дійсної матриці (відповідно) збігаються.

Лема 6.3. *Нехай коефіцієнти системи* (6.1) *— дійсні, а λ_1 і λ_2 — комплексно спряжені власні значення матриці A, алгебрична кратність яких — k_1, а геометрична — l_1. Тоді суму неповних загальних розв'язків системи* (6.1)*, які відповідають λ_1 та λ_2, можна записати у вигляді*

$$
\begin{aligned}
x = C_{1,1}\,\mathrm{Re}\,(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \dots + C_{1,k_1}\,\mathrm{Re}\,(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \\
+ C_{2,1}\,\mathrm{Im}\,(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \dots + C_{2,k_1}\,\mathrm{Im}\,(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t}), \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

де $p^{1,l}(t) = \sum\limits_{s=0}^{k_1-l_1} a^{1,s,l}t^{k_1-l_1-s}$, $l = \overline{1,k_1}$, *а* $(a^{1,0,l}, \dots, a^{1,k_1-l_1,l})^\top$, $l = \overline{1,k_1}$, *— база в просторі розв'язків системи* (6.20)*, причому функції*

$$
\begin{aligned}
&x = \mathrm{Re}\,(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}), \quad \dots, \quad x = \mathrm{Re}\,(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t}), \\
&x = \mathrm{Im}\,(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}), \quad \dots, \quad x = \mathrm{Im}\,(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t}), \ \ t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

лінійно незалежні дійсні розв'язки системи (6.1).

Доведення. Нехай $\omega^l{:=}(a^{1,0,l}, \dots, a^{1,k_1-l_1,l})^\top$, $l = \overline{1,k_1}$, — часткові розв'язки системи (6.20) при $j = 1$, які утворюють базу в просторі розв'язків цієї системи.

Оскільки $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, то $\overline{\omega^l} = \left(\overline{a^{1,0,l}}, \dots, \overline{a^{1,k_1-l_1,l}}\right)^\top$, $l = \overline{1,k_1}$, як легко переконатися, є базою в просторі розв'язків рівняння (6.20) при $j = 2$. Тому

$$
\begin{aligned}
x = \widetilde{C}_{1,1}p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + \widetilde{C}_{1,k_1}p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t} + \\
+ \widetilde{C}_{2,1}\overline{p^{1,1}(t)}e^{\overline{\lambda}_1 t} + \dots + \widetilde{C}_{2,k_1}\overline{p^{1,k_1}(t)}e^{\overline{\lambda}_1 t}, \\
t \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{C}_{1,1}, \dots, \widetilde{C}_{1,k_1}, \widetilde{C}_{2,1}, \dots, \widetilde{C}_{2,k_1} \in \mathbb{C},
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

— сума неповних загальних розв'язків, відповідних власним значенням λ_1 та λ_2. Приймемо в (6.37)

$$
\widetilde{C}_{1,l} = \frac{1}{2}(C_{1,l} - iC_{2,l}), \quad \widetilde{C}_{2,l} = \frac{1}{2}(C_{1,l} + iC_{2,l}), \quad l = \overline{1,k_1},
$$

і, звівши подібні члени, одержимо (6.36). Лінійна незалежність функцій

$$
x = \mathrm{Re}\,(p^{1,l}(t)e^{\lambda_1 t}), \quad x = \mathrm{Im}\,(p^{1,l}(t)e^{\lambda_1 t}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l = \overline{1,k_1},
$$

випливає з лінійної незалежності функцій

$$
x = p^{1,l}(t)e^{\lambda_1 t}, \quad x = \overline{p^{1,l}(t)}e^{\overline{\lambda_1} t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l = \overline{1,k_1}.
$$

Щоб довести це, достатньо використати прийом, за допомогою якого з (6.37) перейшли до (6.36). □

Наслідок 6.4. *Нехай елементи матриці A — дійсні, а її власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такі, що $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_{2\nu-1} = \overline{\lambda_{2\nu}}, \lambda_{2\nu+1} = \overline{\lambda_{2\nu+1}}, \ldots, \lambda_m = \overline{\lambda_m}$, де $\nu \in \{1; [m/2]\}$ (є ν пар комплексно спряжених і $m - 2\nu$ дійсних). Тоді повний загальний дійсний розв'язок системи* (6.1) *має вигляд*

$$\begin{aligned} x = &\Big[C_{1,1} \operatorname{Re}(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \cdots + C_{1,k_1} \operatorname{Re}(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t})\Big] + \\ &+\Big[C_{2,1} \operatorname{Im}(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \cdots + C_{2,k_1} \operatorname{Im}(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t})\Big] + \cdots + \\ &+\Big[C_{2\nu-1,1} \operatorname{Re}(p^{2\nu-1,1}(t)e^{\lambda_{2\nu-1} t}) + \cdots + C_{2\nu-1,k_{2\nu-1}} \operatorname{Re}(p^{2\nu-1,k_{2\nu-1}}(t)e^{\lambda_{2\nu-1} t})\Big] + \\ &+\Big[C_{2\nu,1} \operatorname{Im}(p^{2\nu-1,1}(t)e^{\lambda_{2\nu-1} t}) + \cdots + C_{2\nu,k_{2\nu-1}} \operatorname{Im}(p^{2\nu-1,k_{2\nu-1}}(t)e^{\lambda_{2\nu-1} t})\Big] + \\ &+\Big[a^{2\nu+1,0}t^{k_{2\nu+1}-l_{2\nu+1}} + \cdots + a^{2\nu+1,k_{2\nu+1}-l_{2\nu+1}}\Big]e^{\lambda_{2\nu+1} t} + \cdots + \\ &+\Big[a^{m,0}t^{k_m-l_m} + \cdots + a^{m,k_m-l_m}\Big]e^{\lambda_m t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

де

1) *для кожного $r \in \{1, \ldots, \nu\}$ маємо*

$$p^{2r-1,\mu}(t) = \sum_{s=0}^{k_{2r-1}-l_{2r-1}} a^{2r-1,s,\mu} t^{k_{2r-1}-l_{2r-1}-s}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu = \overline{1, k_{2r-1}},$$

   а $\{(a^{2r-1,0,\mu}, \ldots, a^{2r-1,k_{2r-1}-l_{2r-1},\mu})^\top : \quad \mu = \overline{1, k_{2r-1}}\}$, — база в просторі розв'язків системи (6.20) *при $j = 2r - 1$, зокрема, коли $l_{2r-1} = k_{2r-1}$, то $\{a^{2r-1,0,\mu} : \mu = \overline{1, k_{2r-1}}\}$ — база у власному підпросторі $B(\lambda_{2r-1})$;*

2) *для кожного $j \in \{2\nu{+}1, \ldots, m\}$ $(a^{j,0}, \ldots, a^{j,k_j-l_j})^\top$ — загальний дійсний розв'язок системи* (6.20), *причому, якщо $l_j = k_j$, то $a^{j,0}$ — загальний дійсний власний вектор, відповідний власному значенню λ_j (якщо $2\nu = m$, то членів відповідних $j > 2m$ немає).*

Доведення. Згідно з наслідком 6.1 повний загальний розв'язок системи (6.1) можна подати як суму неповних загальних розв'язків цієї системи відповідним власним значенням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Звідси на підставі наведених вище тверджень отримаємо потрібне твердження. □

Лекція № 23

6.2. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткового розв'язку нормальної лінійної неоднорідної системи (НЛНС)

6.2.1. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткового комплексного розв'язку НЛНС

Розглянемо нормальну лінійну неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

де n — натуральне число, t — незалежна змінна, що пробігає всі значення з $\mathbb{R}$, $a_{kl} \in \mathbb{C}$, $f_k \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $k,l = \overline{1,n}$, — задані, відповідно, коефіцієнти і вільні члени, $x_k \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $k = \overline{1,n}$, — невідомі функції від змінної t.

Задану систему можна записати у векторному вигляді

$$x' = Ax + f(t), \tag{6.39}$$

де t — незалежна змінна, яка пробігає всі значення з $\mathbb{R}$,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad f(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$

— задані, відповідно, матриця та векторна функція, а

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

— невідома векторна функція від змінної t.

На підставі наслідку 1.6 повний загальний розв'язок системи (6.39) має вигляд

$$x = \overset{\circ}{x}(t,C) + \overset{*}{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{C}^n,$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t,C)$, $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}^n$, — повний загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$x' = Ax, \tag{6.40}$$

а $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — частковий розв'язок системи (6.39).

Зауважимо, що метод знаходження повного загального розв'язку системи (6.40) описано у попередньому пункті цього параграфа. Частковий розв'язок системи (6.39), якщо відомо повний загальний розв'язок системи (6.40), можна знайти *методом варіації сталих*. У випадку, коли вільний член системи (6.39) є *векторним квазімногочленом*, то частковий розв'язок системи (6.39) можна знайти простішим способом, який називається *методом неозначених коефіцієнтів*. Цей метод ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 6.2. *Нехай вільний член системи* (6.39) *має вигляд*

$$f(t) = \begin{pmatrix} b_1^0 t^l + \dots + b_1^l \\ \vdots \\ b_n^0 t^l + \dots + b_n^l \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv (b^0 t^l + \dots + b^l) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.41}$$

де $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mu \in \mathbb{C}$; $b_s^j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,l}$, $s = \overline{1,n}$; $b_s(t) := b_s^0 t^l + \dots + b_s^l$, $t \in \mathbb{R}$, $s = \overline{1,n}$; $b^j =: \begin{pmatrix} b_1^j \\ \vdots \\ b_n^j \end{pmatrix}$, $j = \overline{0,l}$.

Тоді система (6.39) *має* (*частковий*) *розв'язок вигляду*

$$x = \begin{pmatrix} d_1^0 t^{k+l} + \dots + d_1^{k+l} \\ \vdots \\ d_n^0 t^{k+l} + \dots + d_n^{k+l} \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv (d^0 t^{k+l} + \dots + d^{k+l}) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.42}$$

де $k = 0$, якщо μ не є власним значенням матриці A, і k дорівнює алгебраїчній кратності μ, якщо μ є власним значенням матриці A; $d_s^j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, k+l}$, $s = \overline{1, n}$;

$$d_s(t) := d_s^0 t^{k+l} + \dots + d_s^{k+l}, \ t \in \mathbb{R}, \ s = \overline{1, n}; \quad d^j =: \begin{pmatrix} d_1^j \\ \vdots \\ d_n^j \end{pmatrix}, \, j = \overline{0, k+l}.$$

Доведення. Нехай H — невироджена матриця така, що матриця $J = H^{-1}AH$ має жорданову форму, тобто

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{1,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m,l_m} \end{pmatrix}.$$

Тут будемо використовувати позначення $\lambda_j, \ k_j, \ l_j, \ J_{j,s}, \ \mu_{j,s}, \ r_{j,s}, \ j = \overline{1, m}, \ s = \overline{1, l_j}$, такі самі, як у попередньому пункті.

Зробимо в рівнянні (6.39) заміну змінних

$$x = Hy.$$

Тоді

$$Hy' = AHy + f(t) \quad \Rightarrow \quad y' = H^{-1}AHy + H^{-1}f(t).$$

У результаті прийдемо до системи

$$y' = Jy + g(t), \tag{6.43}$$

де $g(t) := H^{-1}f(t), \quad t \in \mathbb{R}$.

Якщо ввести позначення $y_{j,s}, \ j = \overline{1, m}, \ s = \overline{1, l_j}$, частин вектора y такі самі, як у попередньому пункті, то систему (6.43) можна подати у вигляді системи рівнянь

$$y'_{j,s} = J_{j,s} y_{j,s} + g_{j,s}(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, l_j}, \tag{6.44}$$

де

$$g_{j,s}(t) = \begin{pmatrix} g_{r_{j,s}+1}(t) \\ \vdots \\ g_{r_{j,s+1}}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Підсистеми системи (6.44) є незалежними, а їхні розв'язування принципово не відрізняються. Тому достатньо показати, як шукаються розв'язки однієї з них. Розглянемо підсистему системи (6.44) при $j = 1$, $s = 1$, поклавши $\nu := \mu_{1,1}$ тобто систему

$$\begin{cases} y'_1 &= \lambda_1 y_1 + y_2 + g_1(t), \\ y'_2 &= \lambda_1 y_2 + y_3 + g_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_{\nu-1} &= \lambda_1 y_{\nu-1} + y_\nu + g_{\nu-1}(t), \\ y'_\nu &= \lambda_1 y_\nu + g_\nu(t), \end{cases} \tag{6.45}$$

де для кожного $j \in \{1, \dots, \nu\}$ маємо $g_j(t) = h_j(t)e^{\mu t}$, $h_j(t)$ — многочлен степеня $\leqslant l$, $t \in \mathbb{R}$.

Домножимо кожне рівняння системи (6.45) на $e^{-\lambda_1 t}$ і перенесемо перші члени правих частин у ліві. Звідси, врахувавши що

$$(y_j e^{-\lambda_1 t})' = y_j' e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 y_j e^{-\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; j = \overline{1, \nu},$$

і ввівши позначення

$$y_{j,*}(t) := y_j(t) e^{-\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, \nu},$$

отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{1,*}' & = y_{2,*} + h_1(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \\ y_{2,*}' & = y_{3,*} + h_2(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_{\nu-1,*}' & = y_{\nu,*} + h_{\nu-1}(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \\ y_{\nu,*}' & = h_\nu(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}. \end{array} \right. \tag{6.46}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\mu \neq \lambda_1$; 2) $\mu = \lambda_1$.

Спочатку дослідимо випадок: $\mu \neq \lambda_1$. Зауважимо, що для довільного ненульового многочлена p і будь-якого (назагал, комплексного) числа $\nu \neq 0$ правильна рівність

$$\int p(t) e^{\nu t}\, dt = \tilde{p}(t) e^{\nu t} + C, \quad t \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{C},$$

де $\tilde{p}$ — многочлен того самого степеня, що і p, а C — довільна стала. Це легко показати, застосовуючи метод інтегрування частинами. Використовуючи це, розв'яжемо систему (6.46), починаючи з $\mu_{1,1}$-го рівняння. Оскільки нас цікавить тільки частковий розв'язок, то довільні сталі, які виникатимуть при інтегруванні, вважатимемо рівними нулеві.

Отже, отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{\nu,*} & = \tilde{h}_\nu(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \\ y_{\nu-1,*} & = \tilde{h}_{\nu-1}(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_{1,*} & = \tilde{h}_1(t) e^{(\mu - \lambda_1)t}, \end{array} \right.$$

де $\tilde{h}_j$ — многочлен степеня $\leqslant l$ для кожного $j \in \{1, \dots, \nu\}$. Звідси знаходимо

$$y_1 = \tilde{h}_1(t) e^{\mu t}, \quad \dots, \quad y_\nu = \tilde{h}_\nu(t) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.47}$$

Тепер розглянемо випадок: $\mu = \lambda_1$. Розв'яжемо систему (6.46), починаючи з $\mu_{1,1}$-го рівняння

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_{\nu,*} & = \tilde{\tilde{h}}_\nu(t), & \deg \tilde{\tilde{h}}_\nu \leqslant l + 1, \\ y_{\nu-1,*} & = \tilde{\tilde{h}}_{\nu-1}(t), & \deg \tilde{\tilde{h}}_{\nu-1} \leqslant l + 2, \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_{1,*} & = \tilde{\tilde{h}}_1(t), & \deg \tilde{\tilde{h}}_1 \leqslant l + \nu. \end{array} \right.$$

Оскільки $\nu \leqslant k_1 - l_1 + 1$, то $\nu \leqslant k_1$. Отож, враховуючи, що $\lambda_1 = \mu$, отримаємо

$$y_1 = \tilde{\tilde{h}}_1(t) e^{\mu t}, \quad \dots, \quad y_\nu = \tilde{\tilde{h}}_\mu(t) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.48}$$

де $\tilde{\tilde{h}}_j$ — многочлен степеня $\leqslant l + k_1$ для кожного $j \in \{1, \dots, \nu\}$.

Аналогічно розв'язуються інші підсистеми системи (6.44). У результаті (див. (6.47) і (6.48)) одержуємо частковий розв'язок системи (6.43) вигляду

$$y = \big[\tilde{d}^0 t^{k+l} + \dots + \tilde{d}^{k+l}\big] e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де $\tilde{d}^0, \dots, \tilde{d}^{k+l} \in \mathbb{C}^n$.

Звідси, повертаючись до змінних x, отримуємо частковий розв'язок рівняння (6.39) вигляду

$$x = \big[d^0 t^{k+l} + \dots + d^{k+l}\big] e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де $d^j = H\tilde{d}^j$, $j = \overline{0, k+l}$, що і треба було довести. □

Доведена теорема є підставою для обґрунтування *методу неозначених коефіцієнтів* знаходження часткових розв'язків системи (6.39), коли вільний член має вигляд (6.41), тобто системи

$$x' = Ax + (b^0 t^l + \dots + b^l) e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6.49}$$

Суть цього методу така.

1. Визначаємо, чи число μ є власним значенням матриці A, і, якщо так, знаходимо його алгебраїчну кратність. На підставі цього записуємо проєкт шуканого часткового розв'язку

$$x = (d^0 t^{k+l} + \dots + d^{k+l}) e^{\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.50}$$

   де k — таке саме, як у формулюванні теореми 6.2, а $d^0, \dots, d^{k+l}$ — неозначені поки що векторні коефіцієнти з $\mathbb{C}^n$.

2. Підставляємо вираз (6.50) у систему (6.49). Після відповідних спрощень, зведення подібних членів та ділення на $e^{\mu t}$, приходимо до рівності двох (векторних) многочленів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $d^0, \dots, d^{k+l}$.

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь. Зауважимо таке: коли μ не є власним значенням матриці A, то вона матиме єдиний розв'язок, а в протилежному випадку — безліч. Нам достатньо мати який-небудь один її частковий розв'язок.

4. Підставляємо знайдені значення $d^0, \dots, d^{k+l}$ у зображення розв'язку (6.50) і отримуємо шуканий розв'язок.

Розширити дію цього методу можна за рахунок принципу суперпозиції, який формулюється так.

Лема 6.4. *Нехай* $f = f^1 + \dots + f^s$, *де* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $f^k \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$, $k = \overline{1, s}$, *а*

$$x = x^1(t), \ \dots, \ x = x^s(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

— часткові розв'язки відповідно систем

$$x' = Ax + f^1(t), \ \dots, \ x' = Ax + f^s(t).$$

Тоді функція

$$x = x^1(t) + \dots + x^s(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

є частковим розв'язком системи (6.39).

Доведення. Маємо

$$\big(x^1(t)+\cdots+x^s(t)\big)'=\big(x^1(t)\big)'+\cdots+\big(x^s(t)\big)'=$$
$$=Ax^1(t)+\cdots+Ax^s(t)=f^1(t)+\cdots+f^s(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

□

Отже, якщо вільний член f системи (6.39) можна подати як суму кількох векторних квазімногочленів, то частковий розв'язок цього рівняння можна шукати у вигляді суми часткових розв'язків системи типу (6.39), вільними членами яких є відповідні квазімногочлени.

6.2.2. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткового дійсного розв'язку НЛНС

Спочатку зауважимо, що

$$\operatorname{Re}\big[(b^0t^l+\cdots+b^l)e^{\mu t}\big]\equiv\big[(\tilde{b}^0t^r+\cdots+\tilde{b}^r)\cos\beta t+ \\ +(\tilde{\tilde{b}}^0t^s+\cdots+\tilde{\tilde{b}}^s)\sin\beta t\big]e^{\alpha t},\ \ t\in\mathbb{R}, \tag{6.51}$$

де $\mu=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $l,r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\max\{r,s\}=l$; $b^0,\dots,b^l\in\mathbb{C}^n$, $\tilde{b}^0,\dots,\tilde{b}^r,\tilde{\tilde{b}}^0,\dots,\tilde{\tilde{b}}^s\in\mathbb{R}^n$.

Тому природно векторну функцію

$$f(t)=\big[(g^0t^r+\cdots+g^r)\cos\beta t+(h^0t^s+\cdots+h^s)\sin\beta t\big]e^{\alpha t},\quad t\in\mathbb{R}, \tag{6.52}$$

де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

$$g^0=\begin{pmatrix}g_1^0\\ \vdots\\ g_n^0\end{pmatrix},\quad\dots,\quad g^r=\begin{pmatrix}g_1^r\\ \vdots\\ g_n^r\end{pmatrix},\quad h^0=\begin{pmatrix}h_1^0\\ \vdots\\ h_n^0\end{pmatrix},\quad\dots,\quad h^s=\begin{pmatrix}h_1^s\\ \vdots\\ h_n^s\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,$$

назвати *дійсним векторним квазімногочленом.*

Тепер розглянемо систему (6.39), коли матриця A — ***дійсна***, а її вільний член — ***дійсний векторний квазімногочлен***.

Спочатку доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 6.5. *Нехай матриця A в рівнянні* (6.39) *— дійсна, а $f=f^1+if^2$, $f^1,f^2\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. Якщо $x=u+iv$ — розв'язок системи* (6.39) *(u, v — дійсні векторні функції від змінної $t\in\mathbb{R}$, i — уявна одиниця), то функції $x=u(t)$, $x=v(t)$, $t\in\mathbb{R}$, є розв'язками відповідно рівнянь*

$$x'=Ax+f^1(t),\qquad x'=Ax+f^2(t).$$

Доведення. Підставимо вираз $u+iv$ замість x в (6.39)

$$u'(t)+iv'(t)=Au(t)+iAv(t)+f^1(t)+if^2(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Звідси та умови рівності двох комплексних чисел отримуємо потрібне твердження.

□

Тепер можемо довести таке твердження.

Теорема 6.3. *Нехай в рівнянні* (6.39) *матриця* A *— дійсна, а вільний член* f *має вигляд* (6.52). *Тоді система* (6.39) *має дійсний* (*частковий*) *розв'язок вигляду*

$$x = \big[(\tilde{d}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{d}^{k+l}) \cos \beta t + (\tilde{\tilde{d}}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{\tilde{d}}^{k+l}) \sin \beta t\big] e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.53}$$

де $l = \max\{r, s\}$; $k = 0$, *якщо число* $\mu{:=}\alpha + i\beta$ *не є власним значенням матриці* A, *і* k *дорівнює алгебраїчній кратності числа* μ, *якщо воно є власним значенням матриці* A;

$$\tilde{d}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{d}_n^0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \tilde{d}^{k+l} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^{k+l} \\ \vdots \\ \tilde{d}_n^{k+l} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{d}}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{d}}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{d}}_n^0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \tilde{\tilde{d}}^{k+l} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{d}}_1^{k+l} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{d}}_n^{k+l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. За формулою Ейлера маємо

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}(e^{\mu t} + e^{\overline{\mu} t}), \quad e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2i}(e^{\mu t} - e^{\overline{\mu} t}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.54}$$

Підставимо ці вирази в (6.52). У результаті отримаємо вільний член системи (6.39) у вигляді

$$f(t) = (b^0 t^l + \cdots + b^l) e^{\mu t} + (\hat{b}^0 t^l + \cdots + \hat{b}^l) e^{\overline{\mu}\, t}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6.55}$$

Звідси, на підставі теореми 6.2, одержуємо існування часткового розв'язку рівняння (6.39) вигляду

$$x = (d^0 t^{k+l} + \cdots + d^{k+l}) e^{\mu t} + (\hat{d}^0 t^{k+l} + \cdots + \hat{d}^{k+l}) e^{\overline{\mu}\, t}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6.56}$$

Враховуючи це, на підставі леми 6.5, отримаємо, що дійсна частина цього розв'язку, яка має вигляд (6.53), є розв'язком системи (6.39). □

Для знаходження дійсних (часткових) розв'язків системи з дійсними коефіцієнтами, вільними членами яких є дійсні векторні квазімногочлени, а точніше, системи, яка у векторній формі має вигляд (див. (6.39),(6.52))

$$x' = Ax + \big[(g^0 t^r + \cdots + g^r) \cos \beta t + (h^0 t^s + \cdots + h^s) \sin \beta t\big] e^{\alpha t}, \tag{6.57}$$

можна використати метод неозначених коефіцієнтів, який ґрунтується на твердженні теореми 6.3. Його називають *методом неозначених коефіцієнтів* і суть цього методу така.

1. З'ясовуємо, чи число $\mu = \alpha + i\beta$ є власним значенням матриці A і, якщо це так, знаходимо його алгебраїчну кратність. На підставі цього і висновку теореми 6.3, записуємо проєкт шуканого розв'язку у вигляді (6.3), тобто

$$x = \big[(\tilde{d}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{d}^{k+l}) \cos \beta t + (\tilde{\tilde{d}}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{\tilde{d}}^{k+l}) \sin \beta t\big] e^{\alpha t}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{6.58}$$

   де l і k — такі самі, як у формулюванні теореми 6.3, $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l}, \tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l}$ — поки що неозначені сталі вектори з $\mathbb{R}^n$.

2. Підставляємо вираз (6.58) у систему (6.57). Після відповідних спрощень приходимо до рівності двох векторних квазімногочленів. Прирівнявши коефіцієнти, які стоять зліва і справа при однакових виразах вигляду $t^j e^{\alpha t} \cos \beta t$, $t^j e^{\alpha t} \sin \beta t$ $(j = \overline{0, k+l})$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l}$, $\tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l} \in \mathbb{R}^n$.

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь. Вона може мати безліч розв'язків. Вибираємо який-небудь один з її розв'язків.

4. Підставляємо знайдені значення $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l}, \tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l}$ у проєкт розв'язку (6.58) і отримуємо те, що шукали.

Лекція № 24

Колоквіум №4

Тема 4
Динамічні (автономні) системи

§1. Основні поняття теорії динамічних систем

Динамічною (автономною) системою називається система вигляду

$$\begin{cases} x_1' = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = v_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

де $n \geq 2$, $v_1, \dots, v_n$ — задані функції в області Ω простору $\mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ — шукані функції від дійсної змінної t.

Іншими словами, динамічною системою називається нормальна система звичайних диференціальних рівнянь, праві частини якої явно не залежать від незалежної змінної t.

Динамічні системи виникають при моделюванні різних процесів в природі. *Для прикладу*, розглянемо рух матеріальної точки по прямій під дією сили, яка залежить від положення точки та її швидкості.

Виберемо на прямій додатній напрям, початок координат і одиницю вимірювання відстані. Позначимо через $x(t)$ положення точки на координатній прямій в момент часу t, m — масу точки, а $F(x, x')$ — силу, що діє на точку. Тоді, за другим законом Ньютона, функція $x = x(t)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$x'' = f(x, x'),$$

де $f(x, x') = \frac{F(x,x')}{m}$ — сила, віднесена до одиниці маси.

Перейдемо до нормальної системи, еквівалентної даному рівнянню, поклавши $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Вона матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = f(x_1, x_2). \end{cases}$$

Отримана система є динамічною.

Поклавши

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad v(x) := \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

задану систему можна записати у векторному вигляді, або іншими словами, у вигляді векторного рівняння

$$x' = v(x), \tag{1.1}$$

де $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — задана векторна функція, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, x — шукана векторна функція від змінної t зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Виходячи із основ теорії нормальних систем (тема 2, §1), припустимо, що v задовольняє умову Ліпшиця за всіма змінними (тоді, зокрема, $v \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$). Звідси випливає, що для будь-якої точки (t_0, x^0), де $x^0 \in \Omega$, існує єдиний непродовжуваний розв'язок $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, b_{t_0,x^0})$, системи (1.1), який задовольняє умову

$$x(t_0) = x^0.$$

Далі переважно будемо розглядати динамічні системи, записані у векторному вигляді (1.1).

При вивченні динамічних систем використовується термінологія, пов'язана з їх фізичним змістом. Точка x називається *фазою*, простір $\mathbb{R}^n$ — *фазовим простором*, а x' — *фазовою швидкістю*. Як відомо, графіки розв'язків системи (1.1) називаються її *інтегральними лініями*. Проекції інтегральних ліній системи (1.1) на простір $\mathbb{R}^n$ називаються *траєкторіями* цієї системи. Уточнимо ці поняття. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, — який-небудь розв'язок системи (1.1). Тоді лінія

$$\Gamma = \big\{(t, x)\colon t \in (a, b),\, x = \varphi(t)\big\} \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

називається *графіком розв'язку* або *інтегральною лінією*, а лінія

$$\gamma = \{x\colon x = \varphi(t),\, t \in (a, b)\} \subset \mathbb{R}^n$$

— *траєкторією* системи (1.1).

Далі ми покажемо, що *різні* траєкторії, задані непродовжуваними розв'язками системи (1.1), *не перетинаються*. Враховуючи це і те, що з фізичної точки зору траєкторії динамічної системи мають важливе практичне значення, далі особливу увагу будемо звертати на властивості траєкторій динамічних систем.

Кажуть, що в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано *векторне поле*, якщо в D визначена векторна функція

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Іншими словами, якщо кожній точці $x \in \Omega$ поставити у відповідність деякий вектор $v(x)$ з векторного простору $\mathbb{R}^n$, то отримаємо так зване векторне поле, задане в області Ω, яке коротко позначається через $v(x)$, $x \in \Omega$.

Розглянемо векторне поле $v(x)$, $x \in \Omega$, де v — векторна функція, яка фігурує в правій частині системи (1.1). Воно називається *векторним полем, відповідним системі* (1.1).

Як відомо з диференціальної геометрії, для заданої гладкої векторної функції $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, вектор $\varphi'(t_0)$, де t_0 — яка-небудь фіксована точка з $(a,\ b)$, є напрямним вектором дотичної до лінії в $\mathbb{R}^n$, заданої рівнянням $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$. Отже, зі сказаного вище випливає, що в кожній точці довільної траєкторії відповідний вектор векторного поля $v(x)$, $x \in \Omega$, є напрямним вектором дотичної до цієї траєкторії в заданій точці. Можна показати, що довільна гладка лінія, яка володіє вказаною властивістю траєкторій, є траєкторією рівняння (1.1).

Вияснимо зв'язок між системою (1.1) і векторним полем $v(x)$, $x \in D$, з фізичної точки зору. Легко бачити, що фізична система, рух якої описується динамічною системою (1.1), в кожному положенні $x \in \Omega$ має швидкість, яка дорівнює $v(x)$. Як відомо, рух фізичної системи відбувається по траєкторії, в кожній точці якої вектор швидкості є дотичним до цієї траєкторії (є напрямним вектором дотичної). Отже, траєкторія руху фізичної системи у векторному полі (полі фазових швидкостей) $v(x)$, $x \in \Omega$, — це є траєкторія системи (1.1) і навпаки.

§2. Властивості розв'язків та траєкторій динамічних систем

Тут використовуватимемо позначення і припущення, які введені в §1.

Лема 2.1. *Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — розв'язок системи (1.1). Тоді для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ функція $x = \varphi(t + c)$, $t \in \langle a - c, b - c\rangle$, теж є розв'язком системи (1.1).*

Доведення леми. Нехай c — яке-небудь дійсне число. Ясно, що коли $t + c \in \langle a, b\rangle$, то $t \in \langle a - c, b - c\rangle$. Покладемо $\psi(t) := \varphi(t + c)$, $t \in \langle a - c, b - c\rangle$. Маємо $\psi'(t) = \varphi'(t + c)$, $t \in \langle a - c, b - c\rangle$. Оскільки $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$, то замінивши t на $t + c$, одержимо $\varphi'(t+c) = v(\varphi(t+c))$, $t \in \langle a-c, b-c\rangle$. Зрозуміло, що $v(\varphi(t+c)) = v(\psi(t))$, $t \in \langle a-c, b-c\rangle$.

Зі сказаного маємо ланцюжок рівностей

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = v(\varphi(t + c)) = v(\psi(t)), \qquad t \in \langle a - c, b - c\rangle,$$

звідки випливає наше твердження. □

Лема 2.2. *Нехай $x = \varphi^1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$, і $x = \varphi^2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$, — розв'язки системи (1.1) і $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$. Тоді*

$$\varphi^1(t) = \varphi^2(t + c), \qquad t \in \langle a_1, b_1\rangle \cap \langle a_2 - c, b_2 - c\rangle,$$

де $c{:=}t_2 - t_1$.

Доведення. За лемою 2.1 функція $x = \varphi^2(t + c)$, $t \in \langle a_2 - c, b_2 - c\rangle$, є розв'язком системи (1.1). Згідно з нашим припущенням

$$\varphi^1(t)|_{t=t_1} = \varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2) = \varphi^2(t + c)|_{t=t_1}.$$

Звідси, на підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші для нормальних систем, маємо

$$\varphi^1(t) = \varphi^2(t + c), \qquad t \in \langle a_1, b_1\rangle \cap \langle a_2 - c, b_2 - c\rangle.$$

□

Наслідок 2.1. *Будь-які дві різні траєкторії системи (1.1), що задані його непродовжувальними розв'язками, не мають спільних точок.*

Доведення. Припустимо, що $x = \varphi^1(t)$, $t \in (a_1, b_1)$, і $x = \varphi^2(t)$, $t \in (a_2, b_2)$, — непродовжувані розв'язки системи (1.1), які задають дві різні траєкторії цієї системи. Припустимо, що ці траєкторії перетинаються в деякій точці, тобто $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$ і $t_1 \neq t_2$. Поклавши $c := t_2 - t_1$, за лемою 2.2 отримаємо

$$\varphi^1(t) = \varphi^2(t + c), \qquad t \in (a_1, b_1) \cap (a_2 - c, b_2 - c), \tag{2.1}$$

і
$$\varphi^2(t) = \varphi^1(t - c), \qquad t \in (a_1 + c, b_1 + c) \cap (a_2, b_2). \tag{2.2}$$
Покажемо, що $a_1 = a_2 - c$, $b_1 = b_2 - c$. Справді, нехай $a_1 \neq a_2 - c$. Якщо $a_2 - c < a_1$, то розв'язок φ^1 можна продовжити вліво на проміжок $(a_2 - c, a_1]$, використовуючи рівність (2.1) і те, що функція $x = \varphi^2(t+c)$ визначена на $(a_2 - c, b_2 - c)$ і є розв'язком системи (1.1). А це протирічить припущенню, що φ^1 непродовжуваний розв'язок. Якщо ж $a_1 < a_2 - c$, то $a_1 + c < a_2$ і розв'язок φ^2 можна продовжити вліво на проміжок $(a_1 + c, a_2]$, використовуючи рівність (2.2) і те, що функція $x = \varphi^1(t - c)$, $t \in (a_1 + c, b_1 + c)$, є розв'язком системи (1.1). Аналогічно розглядається випадок $b_1 \neq b_2 - c$. Зі сказаного випливає, що множини точок $\Gamma_1 = \{x\colon x = \varphi^1(t),\ t \in \langle a_1,\, b_1\rangle\}$, $\Gamma_2 = \{x\colon x = \varphi^2(t),\ t \in \langle a_2,\, b_2\rangle\}$ простору $\mathbb{R}^n$ збігаються. □

Позначимо через $x = \psi(t; x^0)$, $t \in I$ (I — проміжок числової осі), розв'язок системи (1.1), який задовольняє умову
$$x(0) = x^0 \qquad (x^0 \in D \quad \text{— задано}).$$

Лема 2.3. *Справедлива рівність*
$$\psi(t; \psi(s; x^0)) = \psi(t + s; x^0) \tag{2.3}$$
для будь-яких t і s таких, що $s \in I$, $t + s \in I$.

Доведення. Нехай $s \in I$ — довільне фіксоване значення, $x^1{:=}\psi(s; x^0)$. Розглянемо розв'язки $x = \psi(t; x^1)$, $t \in I_1$, і $x = \psi(t + s; x^0)$, $t \in I_2$, системи (1.1). Очевидно, що згідно з вибором x^1 маємо
$$\psi(t; x^1)|_{t=0} = \psi(t + s; x^0)|_{t=0}.$$
Звідси та теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо $\psi(t; x^1) = \psi(t + s; x^0)$ для допустимих значень t. □

Далі в цьому параграфі будемо розглядати тільки траєкторії, що задаються непродовжуваними розв'язками. Покажемо, що будь-яка траєкторія динамічної системи потрапляє до одного з класів, які ми визначимо нижче.

Означення 2.1. Точка $x^0 \in \Omega$ називається *точкою спокою* або *положенням рівноваги* для системи (1.1), якщо (стала) функція $x = x^0$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком цієї системи.

Лема 2.4. *Точка $x^0 \in \Omega$ є точкою спокою (положенням рівноваги) системи (1.1) тоді і лише тоді, коли $v(x^0) = 0$.*

Справедливість цього твердження перевіряється безпосередньо.

Зауваження 2.1. Точка спокою системи (1.1) очевидно є траєкторією цієї ж системи. На підставі наслідку з леми 2.2 можна стверджувати, що траєкторія системи (1.1), яка не є точкою спокою, не містить точок спокою.

Означення 2.2. Точка x^0 області Ω, для якої $v(x^0) = 0$, називається особливою точкою векторного поля $v(x)$, $x \in \Omega$.

Отже, особливі точки векторного поля $v(x)$, $x \in \Omega$, — це точки спокою системи (1.1).

Означення 2.3. Траєкторія системи (1.1) називається замкненою або циклом, якщо розв'язок $x = \varphi(t)$, який задає цю траєкторію є періодичним, а точніше, визначений на $\mathbb{R}$ і для деякого $T > 0$ задовольняє умови:

1) $\varphi(t+T) = \varphi(t) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$;

2) $\forall t_1, t_2,\ |t_1 - t_2| < T\colon \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$

(такий розв'язок називається періодичним).

Означення 2.4. Траєкторія системи (1.1) називається незамкненою, якщо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, який її задає, володіє властивістю: для довільних $t_1, t_2 \in (a,\, b)$ таких, що $t_1 \neq t_2$, виконується нерівність $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Теорема 2.1. *Будь-яка траєкторія системи (1.1) належить до одного з таких класів:*

1) *точка спокою (положення рівноваги);*

2) *замкнені траєкторії (цикли);*

3) *незамкнені траєкторії.*

Підкреслимо, що вказані в теоремі класи траєкторій не мають спільних елементів.

Доведення. Нехай γ — траєкторія, задана розв'язком $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, системи (1.1). Можливі три випадки:

(*i*) $\varphi(t) = x^0$, $t \in (-\infty, +\infty)$;

(*ii*) $\exists t_1, t_2,\ t_1 \neq t_2\colon \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, але $\exists \widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2,\ \widetilde{t}_1 \neq \widetilde{t}_2\colon \varphi(\widetilde{t}_1) \neq \varphi(\widetilde{t}_2)$;

(*iii*) $\forall t_1, t_2,\ t_1 \neq t_2\colon \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

У випадку (*i*) маємо точку спокою, а у випадку (*iii*) — незамкнену траєкторію.

Розглянемо випадок (*ii*). Спочатку покажемо, що $a = -\infty$, $b = +\infty$. З леми 2.2 маємо, що $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, $t \in (a, b) \cap (a - c, b - c)$, де $c{:=}|t_2 - t_1| > 0$. Звідси та з леми 2.1 випливає, що φ можна продовжити на проміжок $(a - c, a]$, поклавши $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, $t \in (a - c, a]$, що суперечить припущенню про непродовжувальність розв'язку $x = \varphi(t)$. Аналогічно розглядається випадок $b < +\infty$. Отже, приходимо до висновку, що даний розв'язок визначений на $(-\infty, +\infty)$ і задовольняє умову

$$\varphi(t + c) = \varphi(t), \qquad \forall\ t \in (-\infty, +\infty), \tag{2.4}$$

тобто є періодичною функцією, визначеною на всій числовій осі.

Покажемо, що існує $T > 0$ таке, як в означенні замкненої траєкторії. Розглянемо множину

$$F = \{c \in \mathbb{R}\colon \varphi(t + c) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Вона має такі властивості.
1°. $c \in F \Rightarrow -c \in F$.

*Доведення властивості **1**$^\circ$.* Оскільки $\varphi(t + c) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}$, то, поклавши $t := \tau - c$, матимемо $\varphi(\tau) = \varphi(\tau - c),\ \tau \in \mathbb{R}$. □

2°. $c_1, c_2 \in F \Rightarrow c_1 \pm c_2 \in F$.

Доведення властивості 2°. Маємо $\varphi(t + (c_1 + c_2)) = \varphi((t + c_1) + c_2) = \varphi(t + c_1) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. $\square$

3°. F — замкнена множина.

Доведення властивості 3°. Нехай $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність чисел з F така, що $c_k \to c_0$ при $k \to +\infty$. Тоді $\varphi(t) = \varphi(t + c_k)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, і, отже, в силу неперервності функції

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t + c_k) = \varphi(t + c_0) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

звідки випливає, що $c_0 \in F$. $\square$

Покладемо

$$T := \inf \{c > 0 \colon c \in F\}$$

і покажемо, що $T > 0$. Припустимо, що це не так. Тоді існує послідовність $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів з F така, що $c_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$. Відмітимо, що $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Справді, якщо б це було не так, то, існувало б значення $t_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $\varphi'(t_0) = 0$. А звідси, врахувавши, що тоді $v(\varphi(t_0)) = 0$, прийшли б до висновку, що стала функція $x = \varphi(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком системи (1.1), тобто, точка $x^0 := \varphi(t_0)$ — точка спокою. Але цього не може бути. Отже, існує l з множини $\{1, \ldots, n\}$ і $t_* \in \mathbb{R}$ такі, що $\varphi_l'(t_*) \neq 0$. Маємо за теоремою Лагранжа

$$0 = \varphi_l(t_* + c_k) - \varphi_l(t_*) = \varphi_l'(\xi_k) c_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

де $\xi_k \in (t_*, t_* + c_k)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ поділимо (2.5) на c_k і в отриманій рівності перейдемо до границі при $k \to +\infty$. Тоді отримаємо $\varphi_l'(t_*) = 0$, що протирічить нашому припущенню. Отже, маємо $T > 0$ і, в силу властивості 3°, $T \in F$. Це, зокрема, означає, що

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Покажемо, що $\forall \widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2$ таких, що $|\widetilde{t}_1 - \widetilde{t}_2| < T$, маємо $\varphi(\widetilde{t}_1) \neq \varphi(\widetilde{t}_2)$. Справді, якщо б $\varphi(\widetilde{t}_1) = \varphi(\widetilde{t}_2)$, то, як випливає з вищесказаного, число $c = |\widetilde{t}_1 - \widetilde{t}_2| > 0$ є елементом множини F, причому $0 < c < T$, що протирічить означенню T. Залишається довести, що $\forall c \in F$ $\exists m \in \mathbb{Z} \colon c = mT$. Справді, нехай це не так. Тоді існує $l \in \mathbb{Z}$ таке, що $0 < |c - lT| < T$. Оскільки $|c - lT| \in F$ (за властивостями 1° і 2°), то знову отримали протиріччя. $\square$

§3. Типи фазових портретів двовимірних НЛОС

Розглянемо двовимірну НЛОС зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

де $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,2})$. Поклавши

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

перепишемо дану систему у вигляді системи

$$x' = Ax. \tag{3.1}$$

Виясним вигляд траєкторій рівняння (3.1), або так званий *фазовий портрет*, в залежності від відповідних співвідношень між коефіцієнтами системи (3.1). Ці співвідношення визначаються відповідними умовами на власні значення матриці A.

Як відомо, власні значення матриці A знаходяться з рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Можливі три варіанти:

а) існує два (різних) дійсних власних значення матриці A;

б) існує одне дійсне власне значення матриці A;

в) існує два комплексно-спряжені власні значення матриці A.

Власні значення матриці A позначатимемо через λ_1 і λ_2, якщо їх два, і λ_1, якщо — одне. Поділимо всеможливі випадки якісної характеристики власних значень матриці A на дві групи:

I група — невироджені випадки: матриця A має два власні значення і обидва відмінні від нуля.

II група — вироджені випадки: матриця A має або два різні власні значення, але одне з них дорівнює нулю, або тільки одне власне значення.

Розглянемо спочатку першу групу. Зазначимо, що тоді точка (0;0) — єдина точка спокою.

I група.

A: Власні значення λ_1, λ_2 матриці A дійсні і відмінні від нуля (тобто, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$).

Тоді існує два лінійно незалежні власні вектори h^1 і h^2 з $\mathbb{R}^2$, які відповідають власним значенням λ_1 та λ_2, і загальний розв'язок системи (3.1) можна записати у вигляді

$$x = C_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h^2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Виберемо в $\mathbb{R}^2$ нову базу, взявши за базові вектори h^1 і h^2. Тоді, якщо $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — нові координати точки x, то

$$x = y_1 h^1 + y_2 h^2. \tag{3.3}$$

З (3.2) і (3.3) випливає, що в новій системі координат траєкторії системи (3.1) задаються рівняннями

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in (-\infty; +\infty),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Оскільки $e^{\lambda_k t} > 0$, $t \in (-\infty; +\infty)$, $k = \overline{1,2}$, то нам досить зобразити траєкторії для довільних $C_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$, а потім, використавши симетрію фазового портрету стосовно осей координат, — для інших значень C_1, C_2. Зауважимо, що у всіх розглядуваних випадках при $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ отримаємо точку спокою (0; 0). Тому надалі вважатимемо, що $|C_1| + |C_2| > 0$. Для уточнення вигляду траєкторій системи (3.1) конкретизуємо ситуацію із значеннями λ_1, λ_2, вважаючи при цьому, що $\lambda_1 < \lambda_2$. Нехай

1) λ_1, λ_2 — одного знаку, тобто, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
Можливі два випадки:

а) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; б) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
Розглянемо випадок а). Нехай $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Тоді траєкторії системи (3.1) лежать в I чверті. Оскільки

$$\begin{aligned}
&y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0, && y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad \text{і} \\
&y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to +\infty, && y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to -\infty \quad \text{та} \\
&\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 \lambda_1}{C_2 \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \to 0 \text{ при } t \to +\infty,
\end{aligned}$$

то траєкторії системи (3.1) при зростанні t "наближаються"до початку координат, причому, знаходяться ближче до осі Oy_2 (притискаються до цієї осі), ніж до осі Oy_1, а при спаданні t — віддаляються від початку та осей координат.

При $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ траєкторія збігається з додатнім променем осі Oy_1, а при $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ — з додатнім променем осі Oy_2.

Таким чином, фазовий портрет в цьому випадку має вигляд, вказаний на рис.1.

В цьому випадку точка спокою (0;0) називається *стійким вузлом.*

Випадок б) досліджується аналогічно. Нехай $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Тоді траєкторії лежать в I чверті. Оскільки

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to +\infty, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty \quad \text{і}$$
$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1\lambda_1}{C_2\lambda_2} e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \to +\infty \text{ при } t \to -\infty,$$

то маємо подібну ситуацію, як у випадку а), з тією лише різницею, що, рухаючись по траєкторії при необмеженому спаданні значень t, ми необмежено наближаємося до початку координат, причому, "притискаючись"до осі Oy_1, а при необмеженому зростанні значень t — необмежено віддаляємося від початку та осей координат.

При $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ траєкторія збігається з додатньою піввіссю Oy_1, а при $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ — з додатньою піввіссю Oy_2.

Фазовий портрет в цьому випадку зображено на рис.2.

Точка спокою (0;0) називається *нестійким вузлом.*

Тепер нехай

2) λ_1, λ_2 — різні за знаком, тобто, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, що рівносильно виконанню нерівностей $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Нехай $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Тоді

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to +\infty, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \to 0 \quad \text{при} t \to -\infty.$$

При $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ траєкторія збігається з додатньою піввіссю, яка проходиться від початку координат, а при $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ — з додатньою піввіссю, яка проходиться до початку координат.

Фазовий портрет зображено на рис.3.

В цьому випадку точка спокою (0;0) називається *сідлом.*

Розглянемо тепер ще одну підгрупу I групи.

B: Власні значення λ_1, λ_2 матриці A — комплексно-спряжені (тобто, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$).

Нехай $\lambda_1 = \mu + i\nu$, де $\nu \neq 0$. Тоді $\lambda_2 = \mu - i\nu$. Як відомо, загальний дійсний розв'язок системи (3.1) запишеться у вигляді

$$x = \mathrm{Re}\big(C_1 h e^{\lambda_1 t} + C_2 \overline{h} e^{\overline{\lambda}_1 t}\big), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

де h — власний вектор матриці A, відповідний власному значенню $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$ ($\mathrm{Re}z$ — дійсна частина числа $z \in \mathbb{C}$). Отже, враховуючи, що $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $z \in \mathbb{C}$,

$$x = \frac{1}{2}(C_1 + \overline{C}_2) h e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{2}(\overline{C}_1 + C_2)\overline{h} e^{\overline{\lambda}_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Покладемо $C{:=}C_1 + \overline{C}_2$, тоді

$$x = \frac{1}{2} C h e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{2}\overline{C}\,\overline{h} e^{\overline{\lambda}_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{C},$$

— загальний дійсний розв'язок. Перепишемо його дещо в іншому вигляді.

Нехай $C = Re^{i\alpha}$, $h = h^1 - ih^2$. Тут $\alpha, R \in \mathbb{R}$, $h^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Re}\, h$, $h^2 \overset{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{Im}\, h$ ($\mathrm{Im}z$ — уявна частина числа $z \in \mathbb{C}$). Тоді

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} C h e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{2}\overline{C}\,\overline{h} e^{\overline{\lambda}_1 t} &= \frac{1}{2} R e^{(\mu + i\nu)t + i\alpha}(h^1 - ih^2) + \frac{1}{2} R e^{(\mu - i\nu)t + i\alpha}(h^1 + ih^2) = \\
&= \frac{1}{2} R e^{\mu t}\Big[(h^1 - ih^2)\cdot\big(\cos(\nu t + \alpha) + i\sin(\nu t + \alpha)\big) + \\
&\qquad + (h^1 + ih^2)\cdot\big(\cos(\nu t + \alpha) - i\sin(\nu t + \alpha)\big)\Big] = \\
&= \frac{1}{2} R e^{\mu t}\Big[h^1 \cos(\nu t + \alpha) + ih^1 \sin(\nu t + \alpha) - ih^2 \cos(\nu t + \alpha) + h^2 \sin(\nu t + \alpha) + \\
&\qquad + h^1 \cos(\nu t + \alpha) - ih^1 \sin(\nu t + \alpha) + ih^2 \cos(\nu t + \alpha) + h^2 \sin(\nu t + \alpha)\Big] = \\
&= R e^{\mu t}\Big[h^1 \cos(\nu t + \alpha) + h^2 \sin(\nu t + \alpha)\Big] = \\
&= \big(R e^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha)\big) h^1 + \big(R e^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha)\big) h^2.
\end{aligned}$$

Таким чином, отримаємо

$$x = \big(R e^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha)\big) h^1 + \big(R e^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha)\big) h^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha, R \in \mathbb{R}$$

— загальний дійсний розв'язок.

Тут h^1, h^2 — лінійно незалежні вектори. Візьмемо їх за нові базові вектори. Тоді в новій системі координат Oy_1y_2 траєкторії системи (3.1) задаються рівняннями

$$y_1 = Re^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha), \ \ y_2 = Re^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha), \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad \text{де } \alpha, R \in \mathbb{R}, R \geq 0. \tag{3.4}$$

Звідси, зокрема, маємо

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2 e^{2\mu t}. \tag{3.5}$$

Розглянемо два випадки

1) $\mu \neq 0$; 2) $\mu = 0$.

Спочатку нехай маємо випадок 1). Припустимо, що

а) $\mu < 0$.

Тоді згідно з (3.5) маємо

$$y_1^2 + y_2^2 \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ і } y_1^2 + y_2^2 \to +\infty \text{ при } t \to -\infty$$

Траєкторії системи (3.1) в цьому випадку зображені на рис.4а, якщо $\nu < 0$ і 4б, якщо $\nu > 0$.

В цьому випадку точка спокою (0;0) називається *стійким фокусом.*

Нехай маємо випадок

б) $\mu > 0$.

Тоді

$$y_1^2 + y_2^2 \to +\infty \text{ при } t \to +\infty \text{ і } y_1^2 + y_2^2 \to 0 \text{ при } t \to -\infty$$

Траєкторії системи (3.1) мають вигляд, вказаний на рис.5а і 5б.

В цьому випадку точка спокою (0;0) називається *нестійким фокусом.*

Розглянемо випадок 2), тобто випадок, коли $\mu = 0$. Тоді траєкторії системи (3.1) — еліпси (див. рис.6а і 6б).

В цьому випадку точка спокою (0;0) називається *центром.*

Перейдемо до розгляду II групи — групи вироджених випадків. Виділимо дві підгрупи за кількістю власних значень.

C: Власні значення λ_1, λ_2 матриці A — дійсні і одне з них дорівнює нулю.

Загальний розв'язок системи (3.1) має вигляд

$$x = C_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h^2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

де h^1, h^2 — власні вектори матриці A, відповідні власним значенням λ_1 та λ_2.

Перейдемо до нової бази (h^1, h^2). В новій системі координат Oy_1y_2 траєкторії матимуть рівняння

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in (-\infty; +\infty), \tag{3.6}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Розглянемо можливі варіанти:

а) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$; б) $0 = \lambda_1 < \lambda_2$.

Нехай маємо варіант а). Тоді з (3.6) отримаємо рівняння траєкторій

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2, \quad t \in (-\infty; +\infty), \tag{3.7}$$

Очевидно, що $y_1 \to 0$ при $t \to +\infty$ і $y_1 \to +\infty$ при $t \to -\infty$, а y_2 — стала.

Отже, в цьому випадку траєкторії матимуть вигляд, вказаний на рис.7.

Очевидно, що тут множина точок спокою збігається з віссю Oy_2.

У варіанті б), проводячи аналогічні міркування, отримаємо фазовий портрет, схематично зображений на рис.8.

Тут множина точок спокою збігається з віссю Oy_1.

Тепер розглянемо випадки, відповідні ситуації, коли матриця A має тільки одне власне значення.

D: Власне значення λ_1 алгебраїчної кратності 2.

Спочатку проведемо відповідні дослідження, коли

1) алгебраїчна та геометрична кратності збігаються (=2).

Нехай h^1, h^2 — лінійно незалежні власні вектори, відповідні власному значенню λ_1. Переходячи до нової бази (h^1, h^2), в новій системі координат Oy_1y_2 отримаємо рівняння траєкторій у вигляді

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_1 t}, \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо три випадки

а) $\lambda_1 < 0$; б) $\lambda_1 > 0$; в) $\lambda_1 = 0$.

У випадках а) і б) траєкторіями є промені з початком у початку системи координат. Рух в додатньому напрямку по траєкторіях у випадку а) — до початку координат (див. рис.9) і єдина точка спокою (0;0) називається *стійким дикритичним вузлом*, а у випадку б) — від початку координат (див. рис.10) і єдина точка спокою (0;0) називається *нестійким дикритичним вузлом*.

У випадку в) система (3.1) має вигляд

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = 0,$$

а отже, $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, — загальний розв'язок цієї системи. Таким чином, будь-яка точка площини Ox_1x_2 є точкою спокою, а значить, траєкторіями даної системи і вони заповнюють всю площину.

Тепер дослідимо фазовий портрет, коли

2) алгебраїчна і геометрична кратності власного значення λ_1 не збігаються ($k_1 = 2$, $l_1 = 1$).

Спочатку покажемо, що знайдуться лінійно незалежні вектори h^1 і h^2 такі, що

$$Ah^1 = \lambda_1 h^1, \qquad Ah^2 = \lambda_1 h^2 + h^1. \tag{3.8}$$

Справді, жорданова форма матриці A в даному випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $H = (h^1,\, h^2)$ — невироджена матриця, така що

$$A = H \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot H^{-1}.$$

Звідси

$$A(h^1,\, h^2) = (h^1,\, h^2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

тобто,

$$(Ah^1,\, Ah^2) = (\lambda_1 h^1,\, h^1 + \lambda_1 h^2),$$

що і треба було показати.

Вектор h^1, очевидно, є власним вектором, а вектор h^2 називається приєднаним вектором. Пару векторів $(h^1,\, h^2)$ виберемо за нову базу. Тоді будь-який розв'язок $x = x(t)$ системи (3.1) можна записати у вигляді

$$x(t) = y_1(t)h^1 + y_2(t)h^2, \qquad t \in (-\infty; +\infty), \tag{3.9}$$

де $y_1(t)$, $y_2(t)$ — деякі неперервно-диференційовні функції. Їх вирази знайдемо з умови, що $x = x(t)$ — розв'язок системи (3.1), тобто, на підставі (3.9), як розв'язки рівняння

$$y_1' h^1 + y_2' h^2 = y_1 A h^1 + y_2 A h^2.$$

Звідси, враховуючи (3.8), отримаємо

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ y_2' = \lambda_1 y_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Розв'яжемо цю систему. Домножимо кожне з рівнянь на $e^{-\lambda_1 t}$, перенесемо перші члени правих частин в ліві і, використавши рівності

$$(y_j e^{-\lambda_1 t})' = y_j' e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 y_j e^{-\lambda_1 t}, \qquad j = \overline{1, 2},$$

отримуємо

$$(y_1 e^{-\lambda_1 t})' = y_2 e^{-\lambda_1 t}, \qquad (y_2 e^{-\lambda_1 t})' = 0.$$

Звідси знаходимо

$$y_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_1 t} \qquad t \in (-\infty; +\infty), \tag{3.11}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі — загальний розв'язок системи (3.10)

Припустимо спочатку, що $C_2 \neq 0$. Тоді (3.11) можна записати у вигляді

$$y_1 = C_2\Big(\frac{C_1}{C_2} + t\Big)e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Покладемо тут $\tau{:=}t + \frac{C_1}{C_2}$ (тоді $t = \tau - \frac{C_1}{C_2}$), $k = C_2 e^{-\lambda_1 \frac{C_1}{C_2}}$. В результаті отримаємо

$$y_1 = k\tau e^{\lambda_1 \tau}, \qquad y_2 = k e^{\lambda_1 \tau}, \qquad \tau \in (-\infty; +\infty), \quad k \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

— рівняння траєкторій системи (3.1) (для даного випадку).

Якщо ж $C_2 = 0$, то рівняння траєкторій (див.(3.11)) має вигляд

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = 0, \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

і при $C_1 \neq 0$ є півосями осі Oy_1, а при $C_1 = 0$ — точкою спокою (0;0).

Уважніше роздивимося траєкторії, задані рівностями (3.12). Для цього розгляннеио три випадки:

а) $\lambda_1 < 0$; б) $\lambda_1 > 0$; в) $\lambda_1 = 0$.

Нехай маємо випадок а). Графіки функцій $y_1 = k\tau e^{\lambda_1 \tau}$ і $y_2 = ke^{\lambda_1 \tau}$, коли $k > 0$, схематично показані відповідно на рис.11а і 11б.

Бачимо, що $y_1 \to 0$ при $\tau \to +\infty$ і $y_1 \to -\infty$ при $\tau \to -\infty$, а $y_2 \to 0$ при $\tau \to +\infty$ та $y_1 \to +\infty$ при $\tau \to -\infty$, причому $y_1 > 0$, коли $\tau > 0$, і $y_1 < 0$, коли $\tau < 0$, а $y_2 > 0$ для всіх значень τ.

Отже, в даному випадку фазовий портрет системи (3.1) матиме вигляд, схематично зображений на рис.12.

Єдина точка спокою (0;0) називається *стійким виродженим вузлом.*

У випадку б) функції, задані в (3.12), мають графіки, схематично показані відповідно на рис.13а і 13б.

Звідси легко отримати фазовий портрет системи (3.1) (див. рис.14).

Єдина точка спокою (0;0) називається *нестійким виродженим вузлом.*

Нарешті, розглянемо випадок в), тобто, випадок, коли власне значення λ_1 дорівнює 0. Тоді рівняння траєкторій в системі координат Oy_1y_2 мають вигляд

$$y_1 = C_1 + C_2 t, \qquad y_2 = C_2, \qquad t \in (-\infty; +\infty) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, в цьому випадку траєкторіями є прямі ($C_2 \neq 0$), паралельні до осі Oy_1, але не збігаються з нею, або точками спокою ($C_2 = 0$) (вони заповнюють всю вісь Oy_1). Фазовий портрет схематично зображено на рис.15.

Зауваження 3.1. Викладену вище теорію для нормальних однорідних лінійних систем другого порядку можна використати для дослідження нормальних нелінійних систем вигляду

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + q_1(x_1, x_2), \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + q_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

в припущенні, що матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

має два різних власних значення, кожне з яких має відмінну від нуля дійсну частину, і $|q_1(x_1, x_2)|^2 + |q_2(x_1, x_2)|^2 = o(x_1^2 + x_2^2)$ при $(x_1, x_2) \to (0, 0)$. Можна показати, що в околі точки (0;0) фазовий портрет даної системи є подібним до фазового портрету лінійної системи

$$x' = Ax.$$

Тема 5

Перші інтеграли нормальних систем

§1. Поняття першого інтеграла $\left(\mathbf{I}\int\right)$ нормальної системи та повна система перших інтегалів

1.1. Поняття першого інтеграла динамічної системи та його критерій.

Нехай $n \geq 2$ – натуральне число, а Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — елемент простору $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо динамічну систему

$$\begin{cases} x_1' = v_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = v_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $v_1, \ldots, v_n$ – задані в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функції, $(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \Omega$,

Запишемо динамічну систему (1.1) у векторній формі. Для цього елементи простору $\mathbb{R}^n$ записуватимемо у вигляді вектор-стовпчиків, тобто, якщо x належить $\mathbb{R}^n$, то $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv (x_1, \ldots, x_n)^\top$, де $x_k \in \mathbb{R}$, $\quad k = \overline{1, n}$. На просторі $\mathbb{R}^n$, як було сказано вище, розглядаємо норму, визначену за правилом $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ для будь-якого елемента $x \in \mathbb{R}^n$ з компонентами $x_1, ..., x_n$. Компоненти векторів простору $\mathbb{R}^n$ нумеруватимемо індексами знизу, самі вектори — індексами зверху; наприклад, записи x_3, x^3, x_2^5 означатимуть відповідно третю компоненту вектора x, третій вектор із деякої сім'ї векторів x та другу компоненту вектора x^5.

Нехай

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad v(x) := \begin{pmatrix} v_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Отже, динамічну систему (1.1) можна записати у вигляді

$$x' = v(x), \tag{1.2}$$

де t – незалежна дійсна змінна, x – векторна функція від змінної t зі значеннями в просторі $\mathbb{R}^n$, $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – задана неперервна векторна функція, Ω – область в $\mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $v \in \left[C^1(\Omega)\right]^n$, тобто $v_i \in C^1(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$. Звідси, зокрема, випливає, що для будь-якого значення $t_0 \in \mathbb{R}$ і довільного значення $x^0 \in \Omega$ система (1.2) має єдиний непродовжуваний розв'язок, який задовольняє умову

$$x(t_0) = x^0. \tag{1.3}$$

Такий розв'язок позначатимемо, як і раніше, через $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0}, b_{t_0,x^0})$.

Введемо поняття першого інтеграла системи (1.2).

Означення 1.1. Неперервно диференційовну функцію $u(x)$, $x \in \Omega_0$, де Ω_0 — підобласть області Ω, називають *першим інтегралом* системи (1.2), якщо вона не є сталою і для будь-якого розв'язку $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, системи (1.2), траєкторія якого лежить в Ω_0, виконується рівність

$$u(\varphi(t)) = C_\varphi, \qquad t \in \langle a, b\rangle, \tag{1.4}$$

де C_φ — стала, значення якої залежить від заданого розв'язку.

Зауваження 1.1. Нагадаємо, що *лінією рівня* функції $u(x)$, $x \in \Omega_0$, називається множина

$$L_C = \{x \colon u(x) = C\}\,, \text{ де } C = \text{const}.$$

Як випливає із означення першого інтеграла (див. (1.4)), якщо $u(x)$, $x \in \Omega_0$, — перший інтеграл системи (1.2), то траєкторії розв'язків системи (1.2), які лежать в Ω_0, є частинами ліній рівня функції u.

Доведемо твердження, яке приймається за критерій $\mathrm{I}\!\int(1)$.

Теорема 1.1. *Нехай функція u належить простору $C^1(\Omega_0)$ (Ω_0 — підобласть області Ω) і не є сталою. Тоді u є першим інтегралом системи (1.2) ($u \in \mathrm{I}\!\int(1.2)$) в тому і лише в тому випадку, коли виконується тотожність*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v_i(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0. \tag{1.5}$$

Доведення. (*Необхідність* $\Rightarrow$) Припустимо, що u є першим інтегралом системи (1.2), а ξ — довільна точка з Ω_0. Нехай $x = \psi(t;\xi)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — який-небудь розв'язок системи (1.2), який задовольняє початкову умову

$$x(0) = \xi.$$

Тоді згідно з означенням першого інтеграла системи (1.2) маємо

$$u\bigl(\psi(t;\xi)\bigr) = C, \quad t \in \langle a, b\rangle, \quad \text{де } \; C = \text{const}.$$

Продиференціюємо цю рівність, використовуючи формулу диференціювання складених функцій від багатьох змінних, і покладемо в отриманій рівності $t = 0$. У результаті здобудемо

$$0 = \frac{u\bigl(\psi(t;\xi)\bigr)}{dt}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial u\bigl(\psi(t;\xi)\bigr)}{\partial x_i} \frac{d\psi_i(t;\xi)}{dt}\right]\bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(\psi(0;\xi)\big)}{\partial x_i} v_i\big(\psi(0;\xi)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} v_i(\xi).$$

Звідси та в силу довільності вибору ξ маємо (1.5).

(*Достатність* $\Leftarrow$) Нехай виконується умова (1.5), а $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — розв'язок (1.2), траєкторія якого лежить в Ω_0. Покладемо $\Phi(t){:=}u\big(\varphi(t)\big)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Очевидно, що функція $\Phi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, є диференційовною і, враховуючи (1.5), маємо

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(\varphi(t)\big)}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(\varphi(t)\big)}{\partial x_i} v_i\big(\varphi(t)\big) = 0.$$

Звідси випливає, що $\Phi(t) = C_0$, $t \in \langle a, b\rangle$, де $C_0 = \text{const}$, тобто

$$u\big(\varphi(t)\big) = C_0, \quad t \in \langle a, b\rangle.$$

□

Приклад 1.1. Розглянемо рух матеріальної точки масою m по прямій, на якій введена декартова система координат, під дією сили, проекція якої на цю координатну пряму дорівнює $F(x)$, де x — координата точки на прямій. Закон руху визначається рівнянням Ньютона

$$mx'' = F(x), \tag{1.6}$$

початковим положенням

$$x(0) = x_0$$

та початковою швидкістю

$$x'(0) = x_1.$$

Рівняння (1.6), як відомо, рівносильне системі

$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = F(x_1)/m, \tag{1.7}$$

де $x_1 = x$, $x_2 = x'$.

Покладемо $E(x_1, x_2){:=}V(x_1) + \dfrac{(x_2)^2}{2}$, де $V(x_1){:=} -\displaystyle\int_c^{x_1} F(s)\,ds$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $c = \text{const}$. Тут $V(x_1)$ — потенціальна енергія, $\dfrac{(x_2)^2}{2}$ — кінетична енергія, $E(x_1, x_2)$ — повна енергія матеріальної точки. Як легко переконатися, функція $u = E(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є першим інтегралом системи (1.7), а запис $E(x_1, x_2) = E_0$, де E_0 — стала, значенням якої є початкова енергія матеріальної точки, виражає закон збереження повної енергії. Це означає, що рух відбувається за законом $x = x(t)$, $t \in [0, T]$, таким, що $E(x(t), x'(t)) = E(x(0), x'(0))$, $t \in [0, T]$.

1.2. Повна система перших інтегралів динамічних систем.

Нехай

$$u_1(x), \quad \ldots, \quad u_k(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{1.8}$$

— перші інтеграли системи (1.2).

Означення 1.2. Скажемо, що перші інтеграли (1.8) є *незалежними* (в Ω_0), якщо

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix} = k, \qquad x\in\Omega_0. \tag{1.9}$$

Теорема 1.2. *Нехай a — неособлива точка системи* (1.2), *тобто $v(a)\neq 0$. Тоді в деякому околі точки a визначена система $n-1$ незалежних перших інтегралів системи* (1.2).

Доведення. Припустимо, що $v_n(a)\neq 0$. В протилежному випадку можна, перенумерувавши змінні $x_1,\dots,x_n$, добитися потрібного. Нехай $\delta>0$ таке, що $V_\delta(a)=\big\{x\colon |x_i-a_i|<\delta,\ i=\overline{1,n}\big\}$ — окіл точки a, що лежить в Ω. Позначимо через ξ точку з околу $V_\delta(a)$ вигляду $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}$, де ξ_i, $i=\overline{1,n}$, — довільні, a_n — n-та координата точки a.

Розглянемо непродовжуваний розв'язок системи (1.2), який задовольняє початкову умову

$$x(0)=\xi.$$

Цей розв'язок запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}),\\ x_2=\varphi_2(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n=\varphi_n(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}),\end{cases} \tag{1.10}$$

$t\in(a_\xi,\,b_\xi)$, $\xi_i\in(a_i-\delta,\,a_i+\delta)$, $i=\overline{1,n-1}$, де $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — неперервно-диференційовні функції своїх аргументів. Коротше співвідношення (1.10) записуватимемо у вигляді

$$x=\varphi(t,\xi'),$$

де $\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$.

Покажемо, що існує окіл V точки $\widehat{a}:=(0,a_1,\dots,a_{n-1})$ такий, що співвідношення (1.10) задають відображення цього околу на деякий окіл W точки a, причому взаємно однозначно. Для цього досить перевірити, що визначник матриці

$$B(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial\xi_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial\xi_{n-1}} & \dfrac{\partial\varphi_1(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial t}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_n(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial\xi_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial\xi_{n-1}} & \dfrac{\partial\varphi_n(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\partial t}\end{pmatrix}$$

відмінний від нуля в точці $\widehat{a}$.

За означенням функцій $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ маємо рівності

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})=\xi_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\varphi_{n-1}(0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})=\xi_{n-1},\\ &\varphi_n(0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})=a_n,\end{aligned} \tag{1.11}$$

$a_1-\delta<\xi_1<a_1+\delta,\dots,a_{n-1}-\delta<\xi_{n-1}<a_{n-1}+\delta$.

Звідси випливає

$$\frac{\partial\varphi_i(\widehat{a})}{\partial\xi_j}=\delta_{ij}\equiv\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad \text{— символ Кронекера, } i,j\in\{1,\dots,n-1\}\,,$$
$$\frac{\partial\varphi_n(\widehat{a})}{\partial\xi_n}=0,\qquad j=\overline{1,n-1},$$
$$\frac{\partial\varphi_i(\widehat{a})}{\partial t}=v_i(a),\quad i=\overline{1,n},$$

а це означає, що

$$B(\widehat{a})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&v_1(a)\\0&1&\cdots&0&v_2(a)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&v_{n-1}(a)\\0&0&\cdots&0&v_n(a)\end{pmatrix},$$

тобто $\det B(\widehat{a})=v_n(a)\neq0$.

Отже, за теоремою про неявну функцію співвідношення (1.10) задають бієктивне відображення деякого околу $V=\{(t,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\colon -\sigma<t<\sigma,\ a_1-\sigma<\xi_1<a_1+\sigma,\ \dots,a_{n-1}-\sigma<\xi_{n-1}<a_{n-1}+\sigma\}$ (тут $\sigma>0$) точки $\widehat{a}$ у відповідний окіл U точки a, причому обернене відображення

$$\begin{aligned}&t=w(x_1,\dots,x_n),\\&\xi_1=u_1(x_1,\dots,x_n),\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\xi_{n-1}=u_{n-1}(x_1,\dots,x_n),\qquad (x_1,\dots,x_n)\in U,\end{aligned}\tag{1.12}$$

є неперервно-диференційовним. Крім того, маємо

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_n}\\\\\dfrac{\partial w(a)}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial w(a)}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1(\widehat{a})}{\partial\xi_1}&\cdots&\dfrac{\partial\varphi_1(\widehat{a})}{\partial\xi_{n-1}}&\dfrac{\partial\varphi_1(\widehat{a})}{\partial t}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\\dfrac{\partial\varphi_n(\widehat{a})}{\partial\xi_1}&\cdots&\dfrac{\partial\varphi_n(\widehat{a})}{\partial\xi_{n-1}}&\dfrac{\partial\varphi_n(\widehat{a})}{\partial t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-\dfrac{v_1(a)}{v_n(a)}\\\\0&1&\cdots&0&-\dfrac{v_2(a)}{v_n(a)}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0-\dfrac{v_{n-1}(a)}{v_n(a)}\\\\0&0&\cdots&0&0-\dfrac{1}{v_n(a)}\end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

Звідси, зокрема випливає, що

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial u_i(a)}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n-1}\\ j=\overline{1,n-1}}} = n-1 \tag{1.14}$$

і

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Отже, функції $u_1, \dots, u_{n-1}$ незалежні в деякому околі точки a.

Покажемо, що для кожного $i \in \{1, \dots, n-1\}$ функція $u_i(x)$, $x \in U$, є першим інтегралом системи (1.2). Нехай $\xi^0 = \operatorname{colon}(\xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, a_n)$, $a_1 - \sigma < \xi_1^0 < a_1 + \sigma, \dots,$ $a_{n-1} - \sigma < \xi_{n-1}^0 < a_{n-1} + \sigma$, і $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — розв'язок системи (1.2), який задовольняє умову $\psi(0) = \xi^0$ і траєкторія якого лежить в U. В силу єдиності розв'язку задачі Коші маємо

$$\langle a, b\rangle \subset (-\sigma, \sigma) \quad \text{і} \quad \psi(t) = \varphi(t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0), \quad t \in \langle a, b\rangle.$$

Звідси, враховуючи співвідношення (1.12), отримаємо

$$u_i(\psi(t)) = u_i(\varphi(t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0)) = \xi_i^0 \quad \forall t \in \langle a, b\rangle, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тепер нехай $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — який-небудь розв'язок системи (1.2), траєкторія якого лежить в U, а $t_0 \in \langle a, b\rangle$ — довільна фіксована точка. Покладемо $x^0 := \psi(t_0)$. Оскільки $x^0 \in U$, то існує точка $(t_*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*) \in V$ така, що $\varphi(t_*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*) = x^0$. Отже, $\psi(t_0) = \varphi(t_*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*)$. Звідси та з властивості 2° розв'язків динамічних систем (див. §2 теми 4) маємо рівність $\psi(t) = \varphi(t+C, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*)$, $t \in \langle a, b\rangle$, де $C \in \mathbb{R}$, причому $-\sigma < t+C < \sigma$, коли $t \in \langle a, b\rangle$. Отже, $u_i(\psi(t)) = u_i(\varphi(t+C, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*)) = \xi_i^*$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$, $i = \overline{1, n-1}$. Таким чином, ми показали, що функції $u_1, \dots, u_{n-1}$ є першими інтегралами системи (1.2), причому незалежними. □

Зауваження 1.2. Якщо $u_1(x), \dots, u_k(x)$, $x \in \Omega_0$, – перші інтеграли системи (1.2) і $F(\xi_1, \dots, \xi_k)$, $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$, — довільна неперервно-диференційовна функція, то функція

$$u(x) = F\big(u_1(x), \dots, u_k(x)\big), \qquad x \in \Omega_0,$$

теж є першим інтегралом системи (1.2).

Теорема 1.3. *Нехай a — неособлива точка системи* (1.2), *тобто* $v(a) \neq 0$, Ω_0 *— її окіл і*

$$u_1(x), \quad \dots, \quad u_{n-1}(x), \qquad x \in \Omega_0,$$

— незалежні I$\int$(1). *Тоді для довільного першого інтеграла* $u(x)$, $x \in \Omega_1$ (Ω_1 *— окіл точки* a), *системи* (1.2) *знайдуться окіл* $\Omega_2 \subset \Omega_0 \cap \Omega_1$ *точки a і неперервно-диференційовна функція* $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (G *— область*), *такі, що*

$$u(x) = F\big(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)\big), \qquad x \in \Omega_2. \tag{1.16}$$

Доведення. Оскільки перші інтеграли $u_1, \dots, u_{n-1}$ системи (1.2) є незалежними в околі точки a, то можна вважати, без втрати загальності, що

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

За теоремою 1.1 маємо

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} v_j(x) = 0, \qquad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n},$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} v_j(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0 \cap \Omega_1.$$

Отже, маємо рівність

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{n-1}(a)}{\partial x_n} \\ \\ \dfrac{\partial u(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u(a)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \qquad x \in \Omega_0 \cap \Omega_1.$$

Звідси та з відомих результатів математичного аналізу про залежність системи функцій випливає співвідношення (1.16).

□

1.3. Перші інтеграли нединамічних систем.

Розглянемо нормальну (нединамічну) систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \in D, \end{cases} \tag{1.17}$$

де D — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, $f_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1, n}$.

Зауважимо, що систему (1.17) можна трактувати як динамічну систему порядку $n + 1$ вигляду

$$\begin{cases} x_0' = 1, \\ x_1' = f_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{1.18}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in D$.

Очевидно, що інтегральні лінії системи (1.17) є траєкторіями системи (1.18) і, навпаки, траєкторії системи (1.18) є інтегральними лініями системи (1.17). Відмітимо також, що задача Коші для системи (1.17) з початковими умовами

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{1.19}$$

еквівалентна задачі Коші для системи (1.18) з початковими умовами

$$x_0(t_0) = t_0, \quad x_1(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{1.20}$$

в тому сенсі, що, якщо

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle a, b \rangle,$$

— розв'язок задачі (1.17)–(1.19), то

$$x_0 = t, \quad x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle a, b \rangle,$$

— розв'язок задачі (1.18)–(1.20), і, навпаки, якщо

$$x_0 = t, \quad x_1 = \psi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_n(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle,$$

— розв'язок задачі (1.18)–(1.20), то

$$x_1 = \psi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_n(t), \qquad t \in \langle c, d \rangle,$$

— розв'язок задачі (1.17)–(1.19).

Виходячи зі сказаного, можна дати таке означення першого інтеграла системи (1.17).

Означення 1.3. Неперервно диференційовну функцію $u(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, де D_0 — підобласть області D, називають *першим інтегралом* системи (1.17), якщо вона не є сталою і для будь-якого її розв'язку

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle a, b \rangle,$$

графік якого лежить в D_0, виконується рівність

$$u(t, \varphi_1(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t)) = C_\varphi \quad \forall t \in \langle a, b \rangle,$$

де C_φ — стала, яка може залежати від заданого розв'язку.

Теорема 1.4. *Нехай функція $u(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, де D_0 — підобласть області D, належить простору $C^1(D_0)$ і не є сталою. Тоді u буде першим інтегралом системи* (1.17) *в тому і лише тому випадку, коли виконується рівність*

$$\frac{\partial u(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in D_0.$$

Означення 1.4. Перші інтеграли $u_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, називають *незалежними*, якщо

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k, \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \in D_0.$$

Теорема 1.5. *Для довільної точки $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ знайдеться її окіл, в якому визначені n незалежні перші інтеграли системи* (1.17) *і будь-який інший перший інтеграл цієї системи функціонально залежний від них.*

§2. Застосування перших інтегралів до знаходження розв'язків нормальних систем

2.1. Пониження порядку нормальної системи за допомогою її перших інтегралів.

Розглянемо динамічну систему

$$x' = v(x), \tag{2.1}$$

де Ω — область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, x — невідома векторна функція від змінної $t \in \mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Нехай Ω_0 — підобласть області Ω, а $u_1(x), \ldots, u_k(x)$, $x \in \Omega_0$, — незалежні перші інтеграли системи (2.1) для деякого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Припустимо, що відображення

$$\begin{cases} y_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = u_k(x_1, \ldots, x_n), \\ y_{k+1} = x_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = x_n, \qquad\qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_1 \subset \Omega_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

взаємно однозначно переводить область Ω_1 в область $\widehat{\Omega}_1$ простору змінних $y \in \mathbb{R}^n$. Для цього достатньо, щоб виконувалась умова

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(x^0)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_k(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_k(x^0)}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.3}$$

де x^0 — яка-небудь точка з Ω_0, Ω_1 — деякий окіл точки x^0. Зауважимо, що умова (2.3) з точністю до перенумерації є наслідком означення незалежності перших інтегралів.

Також вважатимемо, що обернене до (2.2) відображення

$$\begin{cases} x_1 = w_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = w_k(y_1, \ldots, y_n), \\ x_{k+1} = y_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n, \qquad\qquad (y_1, \ldots, y_n) \in \widehat{\Omega}_1, \end{cases} \tag{2.4}$$

є неперервно-диференційовним.

Зробимо перетворення залежних змінних в системі (2.1) за правилом (2.2). При цьому множина розв'язків системи (2.1) взаємно-однозначно відображається на множину розв'язків деякої динамічної системи зі змінними $t, y_1, \ldots, y_n$. Покажемо це.

Нехай $x = x(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — розв'язок системи (2.1), траєкторія якого лежить в Ω_*, а $y = y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — його образ при перетворенні змінних (2.2). Маємо

$$y_i'(t) = \frac{d}{dt} u_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0, \qquad t \in \langle a, b\rangle, \quad i = \overline{1, k},$$

оскільки u_i, $i = \overline{1, k}$, — перші інтеграли системи (2.1). Далі для $i = \overline{k+1, n}$ отримаємо

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= x_i'(t) = v_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \\ &= v_i(w_1(y_1(t), \ldots, y_n(t)), \ldots, w_k(y_1(t), \ldots, y_n(t)), y_{k+1}(t), \ldots, y_n(t)), \quad t \in \langle a, b\rangle. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\begin{gathered} g_i(y_1, \ldots, y_n) := v_i(v_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, v_k(y_1, \ldots, y_n), y_{k+1}, \ldots, y_n), \\ (y_1, \ldots, y_n) \in \widehat{\Omega}_1, \quad i = \overline{k+1, n}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Таким чином, ми показали, що функція $y = y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_k' = 0, \\ y_{k+1}' = g_{k+1}(y_1, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = g_n(y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{2.6}$$

зокрема, траєкторії системи (2.1), які лежать в Ω_*, переходять при відображенні (2.2) у траєкторії системи (2.6), які лежать в $\widehat{\Omega}$. Оскільки через кожну точку області Ω_* проходить траєкторія системи (2.1), то через кожну точку області $\widehat{\Omega}$ проходить траєкторія системи (2.6), яка є образом деякої траєкторії системи (2.6) при відображенні (2.2). Покажемо, що будь-яка траєкторія системи (2.6) має прообразом при відображенні (2.2) траєкторію системи (2.1) (що лежить в Ω_*). Справді, нехай γ — деяка траєкторія системи (2.6), яка задається розв'язком $y = \psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, цієї системи. Розглянемо функцію $x = \varphi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, де $\varphi(t)$ є прообразом $\psi(t)$ при відображенні (2.2) для кожного $t \in \langle c, d\rangle$. Нехай $t_0 \in \langle c, d\rangle$ — довільна точка. Побудуємо розв'язок системи (2.1) з початковою умовою $x(t_0) = \varphi(t_0)$; нехай це буде функція $x = x(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Образом цієї функції при відображенні (2.2) буде розв'язок $y = \widetilde{x}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, з початковою умовою $y(t_0) = \psi(t_0)$. В силу єдиності розв'язку задачі Коші для системи (2.6), маємо $\widetilde{x}(t) = \psi(t)$ для всіх значень t з деякого околу $U(t_0)$ точки t_0. Отже, $\varphi(t) = x(t)$ $\forall t \in U(t_0)$, а це, враховуючи довільність t_0, означає, що $x = \varphi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, — розв'язок системи (2.1).

Тепер зауважимо, що систему (2.6) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = C_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_k = C_k, \\ y_{k+1}' = g_{k+1}(C_1, \ldots, C_k, y_{k+1}, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = g_n(C_1, \ldots, C_k, y_{k+1}, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{2.7}$$

Отримана система складається з $n-k$ диференціальних рівнянь, що, зрозуміло, є спрощенням даної системи (2.1). Розв'язавши цю систему, за допомогою відображення (2.4) знайдемо розв'язки системи (2.1). Можна зробити по-іншому. Враховуючи (2.2) і (2.4), на підставі (2.7) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u_1(x_1,\ldots,x_n)=C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k(x_1,\ldots,x_n)=C_k, \\ x'_{k+1}=g_{k+1}(C_1,\ldots,C_k,x_{k+1},\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n=g_n(C_1,\ldots,C_k,x_{k+1},\ldots,x_n). \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2. Повний загальний інтеграл нормальної системи при наявності повної системи її перших інтегралів.

Розглянемо випадок $k=n-1$ (як відомо, максимальна кількість незалежних перших інтегралів системи (2.1) дорівнює $n-1$). Тоді система (2.8) матиме вигляд

$$\begin{cases} u_1(x_1,\ldots,x_n)=C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)=C_{n-1}, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$x'_n=g_n(C_1,\ldots,C_{n-1},x_n), \qquad (x_1,\ldots,x_n)\in\Omega_*. \tag{2.10}$$

Рівняння (2.9) є рівнянням з відокремлювальними змінними. Його загальний інтеграл можна записати у вигляді

$$\int\limits_{x_n^\circ}^{x_n}\frac{ds}{g_n(C_1,\ldots,C_{n-1},s)}=t+C_n \tag{2.11}$$

(за умови, що даний інтеграл існує).

Отже, система співвідношень (2.9), (2.11) задає множину всеможливих розв'язків (інтегральних ліній) системи (2.1), тобто є її повним загальним інтегралом.

Легко переконатися, що система співвідношень (2.9) визначає сім'ю траєкторій системи (2.1) в Ω_1. Справді, з наших припущень стосовно відображення (2.2) (див. (2.4)), випливає, що система (2.9) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1=w_1(C_1,\ldots,C_{n-1},x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}=w_{n-1}(C_1,\ldots,C_{n-1},x_n), \end{cases} \tag{2.12}$$

де $(C_1,\ldots,C_{n-1})\in\widehat{C}$ — образ множини Ω_1 при відображенні

$$\begin{cases} y_1=u_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}=u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

Це означає, що система рівнянь (2.9) однозначно задає сім'ю ліній в Ω_1. Нехай $x_1=x_1(t),\ldots,x_n=x_n(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$, — розв'язок системи (2.1), γ — траєкторія, яка ним визначається, причому γ лежить в Ω_1. В силу означення першого інтеграла системи (2.1) маємо

$$\begin{cases} u_1(x_1(t),\dots,x_n(t)) = C_1^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1}(x_1(t),\dots,x_n(t)) = C_{n-1}^0, \end{cases} \tag{2.13}$$

де $C_1^0 = u_1(x_1^0,\dots,x_n^0),\dots,C_{n-1}^0 = u_{n-1}(x_1^0,\dots,x_n^0)$, а $x_1^0{:=}x_1(t_0),\dots,x_n^0{:=}x_n(t_0)$, $t_0 \in \langle a,b\rangle$ — довільно вибрана і зафіксована точка. Із (2.13), враховуючи (2.12), маємо

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1(C_1^0,\dots,C_{n-1}^0,x_n(t)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}(t) = v_{n-1}^0(C_1^0,\dots,C_{n-1}^0,x_n(t)), \qquad t \in \langle a,b\rangle, \end{cases} \tag{2.14}$$

тобто траєкторія γ є частиною лінії, визначеної системою (2.12) при $C_1 = C_1^0,\dots,$ $C_{n-1} = C_{n-1}^0$.

Зі сказаного легко зробити висновок: якщо яка-небудь траєкторія системи (2.1), що лежить в Ω_1, має спільну точку з деякою лінією сім'ї (2.9) (чи (2.12)), то ця траєкторія є частиною деякої лінії. Оскільки через кожну точку множини Ω_1 проходить як лінія сім'ї (2.9), так і траєкторія системи (2.1), то тим самим наше твердження доведено.

Тепер розглянемо довільну нормальну систему (може бути нединамічною)

$$x' = f(t,x), \qquad (t,x) \in D, \tag{2.15}$$

де D — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, $f \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$. Нехай $u_1(t,x),\dots,u_n(t,x)$, $(t,x) \in D_0$ (D_0 — підобласть області D), незалежні перші інтеграли системи (2.15). Візьмемо $D_* \subset D_0$ — підобласть області D_0 таку, що відображення

$$\begin{cases} \tau = t, \\ y_1 = u_1(t,x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = u_n(t,x), \qquad (t,x) \in D_*, \end{cases}$$

взаємно-однозначно переводить область D_* в деяку область $\widetilde{D}$ простору $\mathbb{R}^{1+n}$ змінних (τ,y). В якості D_* можна взяти окіл точки $(t_0,x^0) \in D_0$ такий, що

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(t_0,x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(t_0,x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n(t_0,x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n(t_0,x^0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.16}$$

Відмітимо, що умова (2.16) виконується для будь-якої точки $(t_0,x^0) \in D_0$, бо це є наслідок незалежності перших інтегралів $u_1,\dots,u_n$.

Зауважимо, (див. §1 п.1.3), що функції $u_1(x_0,x),\dots,u_n(x_0,x)$, $(x_0,x) \in D_*$, є першими інтегралами динамічної системи

$$\begin{cases} x_0' = 1, \\ x_1' = f_1(x_0,x_1,\dots,x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(x_0,x_1,\dots,x_n), \qquad (x_0,x_1,\dots,x_n) \in D_*, \end{cases} \tag{2.17}$$

причому траєкторії системи (2.17) є інтегральними лініями системи (2.15) і навпаки.

Звідси та з вищесказаного випливає, що система рівнянь

$$\begin{cases} u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n \end{cases}$$

при різних значеннях $(C_1, \ldots, C_n)$ з множини, яка є образом множини D_* при відображенні

$$\begin{cases} y_1 = u_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = u_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

задає сім'ю всеможливих інтегральних ліній системи (2.15), що лежать в D_*. Це, зокрема, означає, що розв'язок задачі Коші для системи (2.15) з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \tag{2.18}$$

визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n^0, \end{cases}$$

де $C_1^0 := u_1(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $\ldots$, $C_n^0 := u_n(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Тема 6

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

§1. Загальний розв'язок диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) першого порядку

1.1. Класифікація ДРЧП першого порядку

Нехай $n \geqslant 2$ — довільне натуральне число.

Означення 1.1. *Диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку* називають співвідношення вигляду

$$\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{1.1}$$

яке зв'язує незалежні змінні $x_1, \ldots, x_n$, функцію $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ від них та її частинні похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Під *розв'язком* диференціального рівняння (1.1) будемо розуміти функцію u, яка визначена в деякій області Ω простору $\mathbb{R}^n$ і задовольняє такі три умови:

1) $u \in C^1(\Omega)$;

2) вираз $\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\Big)$ визначений для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$;

3) $\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\Big) = 0,$
$(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Якщо рівняння (1.1) має вигляд

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{1.2}$$

то його називають *лінійним однорідним рівнянням.*

Рівняння (1.1) вигляду

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=c_1(x_1,\dots,x_n)u+c_2(x_1,\dots,x_n) \tag{1.3}$$

називають *лінійним рівнянням*, а рівняння (1.1) вигляду

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=c(x_1,\dots,x_n,u) \tag{1.4}$$

— *майже лінійним рівнянням.*

Рівняння (1.1), яке можна записати у вигляді

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=c(x_1,\dots,x_n,u) \tag{1.5}$$

називають *квазілінійним рівнянням.*

1.2. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \qquad (x_1,\dots,x_n)\in\Omega, \tag{1.6}$$

яке ще можна записати у вигляді

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \qquad x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega,$$

де Ω — область в $\mathbb{R}^n$.

Будемо вважати, що $a_1,\dots,a_n\in C^1(\Omega)$. Під розв'язком рівняння (1.6) будемо розуміти функцію $u\in C^1(\Omega_0)$, де Ω_0 – підобласть області Ω, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність, тобто

$$\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=0, \qquad x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0. \tag{1.7}$$

Поряд з рівнянням (1.6) розглянемо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_1(x_1,\dots,x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_n(x_1,\dots,x_n).\end{cases} \tag{1.8}$$

Нагадаємо, що першим інтегралом системи (1.8) називають неперервно диференційовну функцію $u(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0$ (Ω_0 — підобласть області Ω), яка не є сталою і для будь-якого розв'язку $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in I$ (I — числовий проміжок) маємо тотожність $u(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = C$, $t \in I$, де C — деяка стала. Часто перший інтеграл системи (1.8) будемо записувати у формі

$$u(x_1, \ldots, x_n) = C.$$

Відмітимо, що перші інтеграли системи (1.8) зручно шукати використовуючи метод інтегровних комбінацій до системи рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{1.9}$$

Між розв'язками рівняння (1.6) і першими інтегралами системи (1.8) існує тісний зв'язок, який описується такими твердженнями.

Лема 1.1. *Функція $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, де Ω_0 — підобласть області Ω, є першим інтегралом системи* (1.8) *тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком рівняння* (1.6).

Доведення. Нехай $u \in C^1(\Omega_0)$ — перший інтеграл системи (1.8). Тоді згідно з критерієм першого інтеграла (теорема 1.1 теми 5) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} a_i(x) = 0, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_0. \tag{1.10}$$

Це означає (див. (1.13)), що функція u є розв'язком рівняння (1.6).

Тепер припустимо, що $u = u(x)$, $x \in \Omega_0$, — розв'язок рівняння (1.6), тобто маємо тотожність (1.13). Звідси та з критерію першого інтеграла нормальної системи диференціальних рівнянь випливає, що $u(x)$, $x \in \Omega_0$, — перший інтеграл системи (1.8), що і потрібно було довести. □

Теорема 1.1. *Нехай точка $x^0 \in \Omega$ така, що $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i(x^0)| \neq 0$, тобто x^0 є неособлива точка системи (1.8), і $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — незалежні перші інтеграли системи (1.8) в деякому околі точки x^0. Тоді будь-який розв'язок u рівняння (1.6) в деякому околі точки x^0 можна записати у вигляді композиції неперервно-диференційовної функції $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ і функцій $u_1, \ldots, u_{n-1}$, а точніше*

$$u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)), \qquad x \in \Omega_0, \tag{1.11}$$

де Ω_0 – окіл точки x^0.

Доведення. Нехай u – який-небудь розв'язок рівняння (1.6). На підставі леми 1.1 маємо, що u — перший інтеграл системи (1.8). Тоді, як відомо (див. тему 5, §1), існує окіл Ω_0 точки x^0 та неперервно-диференційовна функція своїх аргументів $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ такі, що правильна рівність (1.11). □

З теореми 1.1 випливає коректність такого означення.

Означення 1.2. Загальним розв'язком рівняння (1.6) називають

$$u = F(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)),$$

де $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — незалежні перші інтеграли системи (1.8), а $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

1.3. Загальний розв'язок квазілінійного рівняння.

Розглянемо квазілінійне рівняння

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=c(x_1,\dots,x_n,u), \qquad (x_1,\dots,x_n,u)\in G, \tag{1.12}$$

де G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Будемо вважати, що $a_1,\dots,a_n\in C^1(G)$. Під розв'язком рівняння (1.12) будемо розуміти функцію $u\in C^1(\Omega_0)$, де Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, таку, що $(x,u(x))\in G$ і при підстановці її в рівняння отримуємо тотожність, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=c(x,u(x)), \qquad x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0. \tag{1.13}$$

Розв'язок рівняння (1.12) шукатимемо як функцію $u=u(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0$, неявно задану деяким рівнянням

$$F(x_1,\dots,x_n,u)=0. \tag{1.14}$$

Справедливе таке твердження.

Лема 1.2. *Якщо $v=F(x_1,\dots,x_n,u)$, $(x_1,\dots,x_n,u)\in G_0\subset G$ (G_0 — область в $\mathbb{R}^{n+1}$), — розв'язок рівняння*

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+c(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0 \tag{1.15}$$

(*тут u трактується як незалежна змінна поряд з $x_1,\dots,x_n$*) *і*

$$\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\neq 0, \quad (x_1,\dots,x_n,u)\in G_0,$$

то будь-яка неперервно-диференційовна функція $u=w(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0$, неявно задана рівнянням (1.14)*, тобто, для якої виконується рівність*

$$F(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))=0, \qquad (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0, \tag{1.16}$$

є розв'язком рівняння (1.12)*.*

Доведення. Нехай виконуються умови леми, зокрема, справедлива рівність (1.16). Продиференціювавши її по x_j, $j=\overline{1,n}$, в результаті отримаємо

$$\left.\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial x_j}\right|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}+\left.\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\right|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}\frac{\partial w(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}=0, \qquad (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0, \quad j=\overline{1,n}. \tag{1.17}$$

Підставивши вираз $F(x_1,\dots,x_n,u)$ замість v в (1.15), а потім $w(x_1,\dots,x_n)$ замість u, отримаємо

$$\begin{aligned}&a_1(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))\left.\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial x_1}\right|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}+\dots+\\&+a_n(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))\left.\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial x_n}\right|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}+\\&+c(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))\left.\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\right|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}=0, \qquad (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Із (1.17) маємо

$$\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial x_j}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} = -\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} \frac{\partial w(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j},$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Підставивши ці вирази для $\dfrac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial x_j}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}$, $j=\overline{1,n}$, в (1.18) і поділивши отриману рівність на $-\dfrac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}$, прийдемо до рівності

$$a_1(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))\frac{\partial w(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1}+\dots+$$
$$+a_n(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n))\frac{\partial w(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n} = c(x_1,\dots,x_n,w(x_1,\dots,x_n)),$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0,$$

яка означає, що функція $u=w(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_0$, є розв'язком рівняння (1.12). □

Зауваження 1.1. Як випливає з леми 1.1, будь-який розв'язок рівняння (1.15) є першим інтегралом нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1,\dots,x_n,u), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_1,\dots,x_n,u), \\ \\ \dfrac{du}{dt} = c(x_1,\dots,x_n,u), \end{cases} \tag{1.19}$$

і навпаки, будь-який перший інтеграл системи (1.19) задовольняє рівняння (1.12). Отже, по іншому лему 1.2 можна сформулювати так:

якщо $F(x_1,\dots,x_n,u)$, $(x_1,\dots,x_n,u)\in G_0$, — перший інтеграл системи (1.19) і $\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n,u)}{\partial u}\neq 0$, то неявно задана рівнянням (1.14) функція $u=w(x_1,\dots,x_n)$ є розв'язком рівняння (1.12).

Виникає питання: якщо $u=w(x_1,\dots,x_n)$ — розв'язок рівняння (1.12), то чи знайдеться перший інтеграл $F(x_1,\dots,x_n,u)$ системи (1.19) такий, що цей розв'язок неявно задається рівнянням (1.14)? Відповідь на це питання при додаткових обмеженнях на коефіцієнти $a_1,\dots,a_n,c$ дає таке твердження.

Лема 1.3. *Нехай*

$$|a_1(x_1^0,\dots,x_n^0,u_0)|^2+\dots+|a_n(x_1^0,\dots,x_n^0,u_0)|^2>0$$

(тобто, існує $j\in\{1,\dots,n\}$ таке, що $a_j(x_1^0,\dots,x_n^0,u_0)\neq 0$) для деякої точки $(x_1^0,\dots,x_n^0,u_0)\in G$. Припустимо, що

$$u=w(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_*, \quad —$$

розв'язок рівняння (1.12), *визначений в околі* Ω_* *точки* $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, *причому* $u_0 = w(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Тоді існує перший інтеграл $F(x_1, \dots, x_n, u)$, $x_1, \dots, x_n \in G_0$, *системи* (1.19), *визначений в околі* G_0 *точки* $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_0)$ *і такий, що*

$$F(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) = 0, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_0 \subset \Omega_*,$$

де Ω_0 *— певний окіл точки* $(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Доведення. Нехай $F_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n, u)$ — незалежні перші інтеграли системи (1.19), визначені в околі G_0 точки $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_0)$. Покладемо

$$u_k(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} F_k(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)), \qquad k = \overline{1, n}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega},$$

де $\widetilde{\Omega}$ — область в $\mathbb{R}^n$ така, що $w(x_1, \dots, x_n)$ визначена і $(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) \in G_0$ для кожного $(x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega}$. Маємо

$$\frac{\partial u_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_j}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} + \\ + \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} \frac{\partial w(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.20}$$

Оскільки $F_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n, u)$ — перші інтеграли системи (1.19), то згідно з критерієм першого інтегралу виконуються рівності

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_j} a_j(x_1, \dots, x_n, u) + \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u} c(x_1, \dots, x_n, u) = 0, \\ (x_1, \dots, x_n, u) \in G_0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Візьмемо в цих рівностях $u = w(x_1, \dots, x_n)$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_j}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} a_j(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) + \\ + \frac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)} c(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) = 0, \\ (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega}, \qquad k = \overline{1, n}. \tag{1.21}$$

Оскільки $u = w(x_1, \dots, x_n)$ — розв'язок рівняння (1.12), то виконується рівність

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} a_j(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) - c(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) = 0, \\ (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.22}$$

Для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ домножимо (1.22) на $\dfrac{\partial F_k(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u}\bigg|_{u=w(x_1,\dots,x_n)}$ і додамо відповідну рівність із сукупності (1.21). Тоді, враховуючи (1.20), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \dots, x_n, w(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial u_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.23}$$

Для кожної фіксованої точки $(x_1, \ldots, x_n)$ з околу точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ систему (1.23) можна трактувати як лінійну алгебраїчну однорідну систему стосовно невідомих $a_1(x_1, \ldots, x_n, w(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, a_n(x_1, \ldots, x_n, w(x_1, \ldots, x_n))$. Оскільки ця система має ненульові розв'язки (для кожного x з деякого околу точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, як це випливає з умови, що $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_0)$ — неособлива точка, тобто $a_1^2(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_0) + \cdots + a_n^2(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_0) > 0)$, то

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in O(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

де $O(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — деякий окіл точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Але це означає, що функції $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)$ — залежні в деякому околі точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, тобто, існує неперервно-диференційовна функція $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ своїх аргументів така, що

$$\Phi(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_0,$$

де Ω_0 — деякий окіл точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Звідси та з означення $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)$ випливає, що рівняння

$$\Phi(F_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0$$

неявно задає функцію $w(x_1, \ldots, x_n)$ в деякому околі точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Взявши

$$F(x_1, \ldots, x_n, u) := \Phi(F_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n, u),$$

легко отримуємо потрібне твердження. $\square$

§2. Задача Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

2.1. Задача Коші для майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо рівняння

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u), \qquad (x,y,u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

де $a, b \in C^1(\Omega)$, $c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

Нагадаємо, що під розв'язком рівняння (2.1) розуміється функція $u = w(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_0$ (Ω_0 — підобласть області Ω), з простору $C^1(\Omega_0)$ така, що

$$a(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = c(x,y,w(x,y)), \qquad (x,y) \in \Omega_0.$$

Якщо функція $z = w(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_0$, є розв'язком рівняння (2.1), то її графік (поверхня в $\mathbb{R}^3$) називають *інтегральною поверхнею* даного рівняння.

Задача Коші для рівняння (2.1) ставиться так: знайти розв'язок рівняння (2.1), який задовольняє умову

$$u(x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \gamma, \tag{2.2}$$

де γ і u_0 — задані відповідно лінія в Ω і визначена на γ функція.

Вияснимо геометричний зміст задачі Коші для рівняння (2.1). Нехай

$$\Gamma = \big\{(x,y,u) \,\big|\, (x,y) \in \gamma,\ u = u_0(x,y)\big\}$$

— лінія в $\mathbb{R}^3$. Задача Коші для рівняння (2.1) полягає у знаходженні інтегральної поверхні цього рівняння, що проходить через криву Γ (тобто містить криву Γ). Далі поставлену задачу Коші для рівняння (2.1) коротко називатимемо задачею (2.1), (2.2).

Вияснимо умови на вихідні дані, при яких задача (2.1), (2.2) має єдиний розв'язок. З цією метою уточнимо постановку задачі (2.1), (2.2), зробивши деякі додаткові припущення на лінію γ і функцію u_0.

Нехай крива γ задана параметрично рівняннями

$$x = p(\tau), \quad y = q(\tau), \qquad \tau \in I := (\tau_1, \tau_2),$$

де $p, q \in C^1(I)$. Покладемо $s(\tau) := u_0(p(\tau), q(\tau))$, $\tau \in I$, і припустимо, що $s \in C^1(I)$.

Тоді, як легко бачити, умову (2.2) можна сформулювати у вигляді

$$u(p(\tau), q(\tau)) = s(\tau), \qquad \tau \in I. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Нехай*
$$\begin{vmatrix} a(x_0,y_0) & p'(\tau_0) \\ b(x_0,y_0) & q'(\tau_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.4}$$
де τ_0 *— яке-небудь число з* I*,* $x_0 = p(\tau_0)$*,* $y_0 = q(\tau_0)$*. Тоді в деякому околі точки* (x_0, y_0) *визначений єдиним чином розв'язок рівняння* (2.1)*, що задовольняє умову* (2.3)*, коли* τ *пробігає всі значення з відповідного околу точки* τ_0*.*

Доведення. Розглянемо задачу Коші для нормальної (динамічної) системи з параметром τ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y), \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y), \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x(0) = p(\tau), \quad y(0) = q(\tau), \qquad \tau \in I. \tag{2.6}$$

З наших припущень на функції a, b, p і q та відомих результатів (тема 2, §1) стосовно коректності задачі Коші для НС і диференційовної залежності її розв'язків від параметрів випливає, що задача (2.5),(2.6) має єдиний непродовжуваний розв'язок

$$x = \varphi(t,\tau), \quad y = \psi(t,\tau), \qquad (t,\tau) \in D := \{(t,\tau) \,|\, \tau \in I, \ t \in (a_\tau, b_\tau)\}. \tag{2.7}$$

Крім того, множина D є областю в $\mathbb{R}^2$ і співвідношення (2.7) задають неперервно-диференційовне відображення D в $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}$.

Покажемо, що звуження відображення (2.7) на деякий окіл V точки $(0,\tau_0)$ є взаємно однозначним відображенням цього околу на відповідний окіл W точки (x_0,y_0). Для цього нам досить довести, що

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Оскільки функції φ і ψ є розв'язками задачі (2.5),(2.6), то

$$\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial t} = a\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big), \quad \frac{\partial\psi(t,\tau)}{\partial t} = b\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big), \qquad (t,\tau) \in D, \tag{2.9}$$

$$\varphi(0,\tau) = p(\tau), \qquad \psi(0,\tau) = q(\tau), \qquad \tau \in I. \tag{2.10}$$

Поклавши у (2.9) $t = 0$, $\tau = \tau_0$ та використавши (2.10), отримаємо

$$\frac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial t} = a\big(p(\tau_0),q(\tau_0)\big) \equiv a(x_0,y_0), \quad \frac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial t} = b\big(p(\tau_0),q(\tau_0)\big) \equiv b(x_0,y_0). \tag{2.11}$$

Тепер продиференціюємо рівності (2.10) та покладемо $\tau = \tau_0$. У результаті матимемо

$$\frac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial \tau} = p'(\tau_0), \qquad \frac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial \tau} = q'(\tau_0). \tag{2.12}$$

Отже, на підставі (2.11) і (2.12) з (2.4) отримаємо (2.8). Звідси та з відомих результатів математичного аналізу випливає існування чисел $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$ таких, що область $V = \{(t,\tau)\colon \tau_0 - \delta_1 < \tau < \tau_0 + \delta_1,\ -\delta_2 < t < \delta_2\}$, яка є околом точки $(0,\tau_0)$, переводиться відображенням (2.7) на деяку область W, що є околом точки (x_0,y_0), взаємно однозначно, причому обернене відображення

$$t = \widetilde{\varphi}(x,y), \quad \tau = \widetilde{\psi}(x,y), \qquad (x,y) \in W, \tag{2.13}$$

є гладким.

Тепер розглянемо задачу Коші для рівняння з параметром τ

$$\frac{du}{dt} = c\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau),u\big), \qquad (t,\tau) \in V, \tag{2.14}$$

$$u|_{t=0} = s(\tau), \qquad \tau \in (\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1). \tag{2.15}$$

Ця задача має єдиний непродовжувальний розв'язок

$$u = v(t,\tau), \quad (t,\tau) \in V^* = \{(t,\tau)\colon \tau \in (\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1),\ t \in (c_\tau, d_\tau) \subset (-\delta_2, \delta_2)\}.$$

Зауважимо, що оскільки $V^* \subset V$, то звуження відображення (2.7) на V^* переводить V^* взаємно однозначно на область $W^* \subset W$.

Покладемо

$$w(x,y) := v\big(\widetilde{\varphi}(x,y), \widetilde{\psi}(x,y)\big), \qquad (x,y) \in W^*.$$

Покажемо, що функція $z = w(x,y)$, $(x,y) \in W^*$, є розв'язком задачі (2.1),(2.3).

Справді, оскільки $v(t,\tau) = w\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)$, $(t,\tau) \in V^*$, то, враховуючи (2.9), маємо

$$\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial w\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial w\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)}{\partial y}\,\frac{\partial \psi(t,\tau)}{\partial t} =$$

$$= a\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)\frac{\partial w\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)}{\partial x} + \tag{2.16}$$

$$+ b\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)\frac{\partial w\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\big)}{\partial y}, \qquad (t,\tau) \in V^*.$$

З другого боку, оскільки v — розв'язок задачі (2.14),(2.15), то маємо

$$\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} = c\big(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau),v(t,\tau)\big), \qquad (t,\tau) \in V^*. \tag{2.17}$$

З (2.16),(2.17) і (2.7) випливає, що

$$a(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = c(x,y,w(x,y)), \qquad (x,y) \in W^*,$$

тобто функція $z = w(x,y)$, $(x,y) \in W^*$, є розв'язком рівняння (2.1).

Умова (2.3) безпосередньо випливає з того, що $v(0,\tau) = s(\tau)$ (умова (2.15)) і $v(0,\tau) = w(p(\tau),q(\tau))$, $\tau \in (\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1)$.

Покажемо, що розв'язок задачі (2.1), (2.3) в околі точки (x_0, y_0) визначається єдиним чином, тобто для будь-яких двох розв'язків даної задачі визначених у відповідних околах точки (x_0, y_0), знайдеться такий окіл цієї точки, в якому вони збігаються.

Для цього достатньо показати, що коли $z = \widetilde{w}(x, y)$, $(x, y) \in \widetilde{W}$, — ще один розв'язок задачі (2.1), (2.3), крім побудованого вище, то існує окіл W_0 точки (x_0, y_0), такий, що $W_0 \subset W^* \cap \widetilde{W}$ і

$$w(x, y) = \widetilde{w}(x, y), \qquad (x, y) \in W_0.$$

Справді, нехай $\delta_3 > 0$ і $\delta_4 > 0$ такі, що множина $V_0 = \big\{(t, \tau) : \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3), -\delta_4 < t < \delta_4\big\}$ лежить у V, а її образ W_0 при відображенні (2.7) знаходиться у $W^* \cap \widetilde{W}$. Покладемо

$$\widetilde{v}(t, \tau) = \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big), \qquad (t, \tau) \in V_0.$$

В силу того, що функція $z = \widetilde{w}(x, y)$, $(x, y) \in W_0$, є розв'язком рівняння (2.1), тобто виконується рівність

$$a(x, y)\frac{\partial \widetilde{w}(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial \widetilde{w}(x, y)}{\partial y} = c(x, y, \widetilde{w}(x, y)), \qquad (x, y) \in W_0,$$

то

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{v}(t, \tau)}{\partial t} &= \frac{\partial \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)}{\partial y}\,\frac{\partial \psi(t, \tau)}{\partial t} = \\
&= a\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)\frac{\partial \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)}{\partial x} + \\
&+ b\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)\frac{\partial \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)}{\partial y} = \\
&= c\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau), \widetilde{w}\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)\big)\big) = c\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau), \widetilde{v}(t, \tau)\big), \\
&\qquad (t, \tau) \in V_0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Крім того, з умови (2.3) маємо

$$\widetilde{v}(0, \tau) = \widetilde{w}\big(\varphi(0, \tau), \psi(0, \tau)\big) = \widetilde{w}\big(p(\tau), q(\tau)\big) = s(\tau), \quad \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3). \tag{2.19}$$

Отже, на підставі (2.18) та (2.19) можна зробити висновок, що функція $u = \widetilde{v}(t, \tau)$, $(t, \tau) \in V_0$, є розв'язком задачі Коші

$$\frac{du}{dt} = c\big(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau), u\big), \qquad (t, \tau) \in V_0, \tag{2.20}$$

$$u|_{t=0} = s(\tau), \qquad \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3). \tag{2.21}$$

Але, враховуючи (2.14), (2.15), легко бачити, що функція $u = v(t, \tau)$, $(t, \tau) \in V_0$, теж є розв'язком задачі (2.20), (2.21). В силу єдиності розв'язку задачі Коші маємо $v(t, \tau) = \widetilde{v}(t, \tau)$, $(t, \tau) \in V_0$, тобто $w(x, y) = \widetilde{w}(x, y)$, $(x, y) \in W_0$. □

Зауваження 2.1. З доведення теореми безпосередньо випливає, що розв'язок задачі (2.1),(2.3) можна знайти таким чином. Спочатку розв'язуємо задачу Коші для нормальної (динамічної) системи

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x,y), \quad \frac{du}{dt} = c(x,y,u), \qquad (x,y,u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

$$x(0) = p(\tau), \quad y(0) = q(\tau), \quad u(0) = s(\tau), \qquad \tau \in I. \tag{2.23}$$

Знаходимо розв'язок

$$x = \varphi(t,\tau), \quad y = \psi(t,\tau), \quad u = v(t,\tau), \qquad (t,\tau) \in G \text{ — область в } \mathbb{R}^2, \tag{2.24}$$

цієї задачі.

Співвідношення (2.24), до речі, є параметричним заданням деякої поверхні в $\mathbb{R}^3$. Якщо цю поверхню можна подати як графік функції $z = w(x,y)$, $(x,y) \in W$, то вона буде шуканою інтегральною поверхнею. Це можливо зробити, якщо перші два рівняння з (2.24) однозначно розв'язуються стосовно (t,τ), тобто їх можна записати у вигляді

$$t = \widetilde{\varphi}(x,y), \quad \tau = \widetilde{\psi}(x,y), \qquad (x,y) \in W.$$

Тоді функція $z = w(x,y)$, $(x,y) \in W$, де

$$w(x,y) := v\big(\widetilde{\varphi}(x,y), \widetilde{\psi}(x,y)\big), \qquad (x,y) \in W,$$

є шуканою.

Оскільки для будь-якого фіксованого значення $\tau' \in I$ лінія, задана рівняннями

$$x = \varphi(t,\tau'), \quad y = \psi(t,\tau'), \quad z = v(t,\tau'), \qquad t \in (a_{\tau'}, b_{\tau'}),$$

в просторі $\mathbb{R}^3$ є траєкторією розв'язку системи (2.22), яка проходить через точку $p(\tau'), q(\tau'), s(\tau')$, то, очевидно, поверхня, задана рівняннями (2.24), складається з траєкторій системи (2.22), що проходять через точки лінії Γ. Тому траєкторії системи (2.22) називаються *характеристиками* або *харатеристичними лініями* рівняння (2.1).

Отже, шукана в задачі Коші для рівняння (2.1) інтегральна поверхня складається з всеможливих характеристик рівняння (2.1), що проходять через точки кривої Γ. Відмітимо також, що проекції цих характеристик на площину Oxy заповнюють деяку область в цій площині, що є областю визначення шуканого розв'язку задачі Коші для рівняння (2.1).

З вищесказаного випливає такий спосіб знаходження розв'язку задачі (2.1),(2.3), який називається *методом характеристик.*

Спочатку випишемо нормальну систему для знаходження характеристик (див. (2.22)) у симетричній формі

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} = \frac{du}{c(x,y,u)}. \tag{2.25}$$

Вигляд (2.25) системи (2.22) отримується, якщо рівняння системи (2.22) подати так

$$\frac{dx}{a(x,y)} = dt, \qquad \frac{dy}{b(x,y)} = dt, \qquad \frac{dz}{c(x,y,u)} = dt.$$

Далі шукаємо два незалежні перші інтеграли системи (2.25). При цьому варто будувати інтегровні комбінації, скориставшись такою властивістю пропорцій:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots k_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

для будь-яких чисел $k_1, \ldots k_n$, відмінних від нуля.

2.2. Задача Коші для квазілінійних рівнянь у випадку двох незалежних змінних.

Розглянемо рівняння

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u), \qquad (x,y,u)\in D, \tag{2.26}$$

де D — область в $\mathbb{R}^3$, $a,b,c\in C^1(D)$.

Означення розв'язку та інтегральної поверхні рівняння (2.26) вводяться аналогічно до того, як це робиться у випадку майже лінійного рівняння.

Задача Коші для рівняння (2.26) полягає у знаходженні інтегральної поверхні цього рівняння, яка містить деяку наперед задану криву Γ.

Якщо крива Γ задається параметрично

$$x=p(\tau),\quad y=q(\tau),\quad u=s(\tau),\qquad \tau\in I:=(\tau_1,\tau_2),\quad -\infty\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant+\infty,$$

то сформульовану задачу можна поставити і таким чином: знайти розв'язок рівняння (2.26), який задовольняє умову

$$u(p(\tau),q(\tau))=s(\tau),\qquad \tau\in I. \tag{2.27}$$

Далі задачу Коші для рівняння (2.26) будемо розглядати саме в такій постановці і просто називати задачею (2.26), (2.27).

З'ясуємо умови на вихідні дані задачі (2.26), (2.27), при яких вона має єдиний розв'язок.

Теорема 2.2. *Нехай*

$$\begin{vmatrix} a(x_0,y_0,u_0) & p'(\tau_0)\\ b(x_0,y_0,u_0) & q'(\tau_0)\end{vmatrix}\neq 0, \tag{2.28}$$

де τ_0 — яке-небудь число з I, $x_0=p(\tau_0)$, $y_0=q(\tau_0)$,$u_0=s(\tau_0)$. Тоді в околі точки (x_0,y_0) визначений единим чином розв'язок рівняння (2.26)*, що задовольняє умову (2.27), коли τ пробігає всі значення з відповідного околу точки τ_0.*

Доведення. В основному доведення даної теореми є повторенням доведення теореми 2.1, але є деякі технічні відмінності.

Розглянемо задачу Коші для нормальної (динамічної) системи з параметром τ

$$\frac{dx}{dt}=a(x,y,u),\quad \frac{dy}{dt}=b(x,y,u),\quad \frac{du}{dt}=c(x,y,u), \tag{2.29}$$

$$x(0)=p(\tau),\quad y(0)=q(\tau),\quad u(0)=s(\tau),\qquad \tau\in I. \tag{2.30}$$

Нехай

$$x=\varphi(t,\tau),\ y=\psi(t,\tau),\ u=v(t,\tau),\quad (t,\tau)\in G:=\{(t,\tau)\colon \tau\in I,\ t\in(a_\tau,b_\tau)\}, \tag{2.31}$$

— непродовжуваний розв'язок задачі (2.29),(2.30). Аналогічно, як при доведенні теореми 2.1, показується, що з (2.28) випливає умова

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi(0,\tau_0)}{\partial\tau}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial t} & \dfrac{\partial\psi(0,\tau_0)}{\partial\tau}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Звідси маємо існування значень $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$ таких, що звуження відображення (2.31) на окіл $V = \{(t,\tau)\colon \tau_0 - \delta_1 < \tau < \tau_0 + \delta_1,\ -\delta_2 < t < \delta_2\} \subset G$ точки $(0,\tau_0)$ переводить V взаємно однозначно на деякий окіл W точки (x_0, y_0) і обернене відображення

$$t = \varphi^{-1}(x,y), \quad \tau = \psi^{-1}(x,y), \qquad (x,y) \in W, \tag{2.32}$$

є неперервно-диференційовним.

Покладемо

$$w(x,y) := v\big(\varphi^{-1}(x,y), \psi^{-1}(x,y)\big), \qquad (x,y) \in W.$$

Цілком аналогічно, як в п.2.1, показується, що функція $z = w(x,y)$, $(x,y) \in W$, є розв'язком рівняння (2.26) і задовольняє умову (2.27), коли $\tau \in (\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1)$.

Покажемо, що знайдений розв'язок в околі точки (x_0, y_0) визначається єдиним чином. Нехай $u = \widetilde{w}(x,y)$, $(x,y) \in \widetilde{W}$, — який-небудь інший розв'язок задачі (2.26),(2.27), визначений в околі точки (x_0, y_0). Розглянемо задачу Коші для системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, \widetilde{w}(x,y)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, \widetilde{w}(x,y)), \qquad (x,y) \in \widetilde{W}, \tag{2.33}$$

$$x(0) = p(\tau), \quad y(0) = q(\tau), \qquad \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3), \tag{2.34}$$

де $\delta_3 > 0$ — таке, що лінія $\big\{\big(p(\tau), q(\tau)\big)\colon \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3)\big\}$ лежить в $\widetilde{W}$.

Нехай

$$\begin{aligned} &x = \widetilde{\varphi}(t,\tau), \qquad y = \widetilde{\psi}(t,\tau), \\ &(t,\tau) \in \widetilde{V} = \{(t,\tau)\colon \tau \in (\tau_0 - \delta_3, \tau_0 + \delta_3),\ c_\tau < t < d_\tau)\}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

— непродовжувальний розв'язок задачі (2.33),(2.34). З умови (2.28) випливає, що існують числа $\delta_4 > 0$ і $\delta_5 > 0$ такі, що звуження відображення (2.35) на множину $\widetilde{V}^* = \big\{(t,\tau)\colon \tau \in (\tau_0 - \delta_4, \tau_0 + \delta_4),\ -\delta_5 < t < \delta_5\big\} \subset \widetilde{V}$ взаємно однозначно переводить $\widetilde{V}^*$ на деякий окіл $\widetilde{W}^*$ точки (x_0, y_0), причому $\widetilde{W}^* \subset \widetilde{W} \cap W^*$.

Покладемо

$$\widetilde{v}(t,\tau) = \widetilde{w}\big(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)\big), \qquad (t,\tau) \in \widetilde{V}^*,$$

і покажемо, що функція $z = \widetilde{v}(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \widetilde{V}^*$, є розв'язком задачі Коші

$$\frac{du}{dt} = c\big(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau), u\big), \qquad (t,\tau) \in \widetilde{V}^*, \tag{2.36}$$

$$u|_{t=0} = s(\tau), \qquad \tau \in (\tau_0 - \delta_4, \tau_0 + \delta_4). \tag{2.37}$$

Справді, оскільки

$$a(x,y)\frac{\partial \widetilde{w}(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \widetilde{w}(x,y)}{\partial y} = c(x, y, \widetilde{w}(x,y)), \qquad (x,y) \in \widetilde{W},$$

то

$$\frac{\partial\widetilde{v}(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial\widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)}{\partial x}\,\frac{\partial\widetilde{\varphi}(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial\widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)}{\partial y}\,\frac{\partial\widetilde{\psi}(t,\tau)}{\partial t} =$$

$$= a\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)\frac{\partial\widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)}{\partial x} +$$

$$+ b\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)\frac{\partial\widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)}{\partial y} =$$
$$= c\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau),\widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau)\big)\big) = c\big(\widetilde{\varphi}(t,\tau),\widetilde{\psi}(t,\tau),\widetilde{v}(t,\tau)\big),$$
$$(t,\tau)\in\widetilde{V}^*.$$

Маємо також

$$\widetilde{v}(0,\tau) = \widetilde{w}\big(\widetilde{\varphi}(0,\tau),\widetilde{\psi}(0,\tau)\big) = \widetilde{w}\big(p(\tau),q(\tau)\big) = s(\tau), \quad \tau\in(\tau_0-\delta_4,\tau_0+\delta_4).$$

Отже, ми переконалися, що функція $\widetilde{v}$ є розв'язком задачі (2.36),(2.37).

З (2.33)–(2.37) легко випливає, що функції

$$x = \widetilde{\varphi}(t,\tau), \quad y = \widetilde{\psi}(t,\tau), \quad u = \widetilde{v}(t,\tau), \qquad (t,\tau)\in\widetilde{V}^*,$$

є розв'язком задачі Коші (2.29),(2.30), коли $\tau\in(\tau_0-\delta_4,\tau_0+\delta_4)$. В силу єдиності розв'язку задачі Коші маємо $\widetilde{\varphi}(t,\tau)=\varphi(t,\tau)$, $\widetilde{\psi}(t,\tau)=\psi(t,\tau)$, $\widetilde{v}(t,\tau)=v(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\widetilde{V}^*$, що доводить наше твердження. □

Тема 7

Стійкість за Ляпуновим розв'язків нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь

§1. Поняття стійкості за Ляпуновим розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь (НС).

Нехай $n \in \mathbb{N}$, D — область в $\mathbb{R}^{1+n} := \big\{(t,x) \,|\, t \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n\big\}$ така, що для деякого $a \in \mathbb{R}$ перетин $D \cap \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \,|\, t = \tau\}$ непорожній для будь-якого $\tau > a$ (тобто область D — необмежена за змінною t в напрямку $+\infty$).

Розглянемо НС

$$x' = f(t,x), \tag{1.1}$$

де f – функція, яка належить простору $C(D; \mathbb{R}^n)$ та задовольняє умову Ліпшиця локально за всіма аргументами, крім першого. Тоді для кожної точки $(t_0, x^0) \in D$ існує єдиний непродовжуваний розв'язок системи (1.1), який задовольняє початкову умову: $x(t_0) = x^0$. Цей розв'язок позначаємо через $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, b_{t_0,x^0})$.

Припустимо, що $(t_0, x^0) \in D$ — яка-небудь фіксована точка і $b_{t_0,x^0} = +\infty$.

Означення 1.1. Скажемо, що розв'язок $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, +\infty)$, системи (1.1) є *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-якого, як завгодно малого, значення $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$ таке, що для будь-якої точки $(t_0, x^1) \in D$ такої, що $|x^1 - x^0| < \delta$, виконуються умови:

1) $b_{t_0,x^1} = +\infty$ (тобто область визначення непродовжуваного розв'язку системи (1.1) з початковими даними $(t_0,\, x^1)$ має вигляд $(a_{t_0,x^1},\, +\infty)$);

2) $|\varphi(t, t_0, x^1) - \varphi(t, t_0, x^0)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_0,\, +\infty)$.

Зауваження 1.1. Умова 1) в означенні 1.1 є суттєвою. Покажемо це. Для цього розглянемо рівняння
$$x' = x^2. \tag{1.2}$$
Нехай $t_0 = 0$, $x^0 = 0$. Тоді досліджуваним на стійкість за Ляпуновим буде нульовий розв'язок: $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $x^1 > 0$. Розв'язавши рівняння (1.2) (це є рівняння з відокремлювальними змінними), знайдемо, що

$$\varphi(t, 0, x^1) = \frac{1}{x^1 - t}, \qquad t \in (-\infty, x^1).$$

Звідси випливає, що при як завгодно малих значеннях $x^1 > 0$ функція $x = \varphi(t, 0, x^1)$ не є визначеною на всьому промені $[0, +\infty)$.

Означення 1.2. Скажемо, що розв'язок $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, +\infty)$, є *асимптотично стійким за Ляпуновим*, якщо він є стійким за Ляпуновим та існує $\sigma > 0$ таке, що для будь-якої точки $(t_0, x^1) \in D$ такої, що $|x^1 - x^0| < \sigma$, виконується умова

$$\lim_{t\to+\infty} \left|\varphi(t, t_0, x^1) - \varphi(t, t_0, x^0)\right| = 0.$$

Зауваження 1.2. З *геометричної точки зору* стійкість за Ляпуновим розв'язку

$$x = \varphi(t, t_0, x^0), \quad t \in (a_{t_0,x^0}, +\infty),$$

означає, що яке б мале число $\varepsilon > 0$ ми не взяли, знайдеться число $\delta \in (0, \varepsilon]$ таке, що інтегральні лінії системи (1.1), які проходять через точки $(t_0, x^1) \in D$, коли $|x^1 - x^0| < \delta$, не виходять за межі поверхні $S_\varepsilon = \big\{(t, x) \,\big|\, t \in [t_0, +\infty),\ |x - \varphi(t, t_0, x^0)| = \varepsilon\big\}$. Поверхню S_ε можна трактувати, як бічну поверхню напівобмеженого "криволінійного" циліндра, "основою" якого є круг з радіусом $\varepsilon > 0$, а "віссю" — інтегральна лінія, визначена рівнянням $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \geqslant t_0$.

Означення 1.3. Розв'язок $x = \varphi(t, t_0, x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, +\infty)$, системи (1.1) *нестійкий за Ляпуновим*, якщо він не є стійким за Ляпуновим.

Зауваження 1.3. Проілюструємо сказане на такому простому *прикладі*.

Нехай маємо рівняння
$$x' = kx, \tag{1.3}$$
де $k \in \mathbb{R}$ — параметр.

Очевидно, що функція $f(t, x) := kx,\ (t, x) \in \mathbb{R}^2$, задовольняє вище вказані умови. Як легко переконатися, повний загальний розв'язок рівняння (1.3) має вигляд

$$x = Ce^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала.}$$

Нехай $t_0 = 0$, $x^0 = 0$. Тоді $\varphi(t, 0, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, і для будь-якого $x^1 \in \mathbb{R}$ маємо $\varphi(t, 0, x^1) = x^1 e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Розглянемо три випадки: 1) $k < 0$; 2) $k = 0$; 3) $k > 0$.

У випадку 1) маємо

$$\left|\varphi(t, 0, x^1) - \varphi(t, 0, 0)\right| = \left|x^1\right| e^{kt} \leqslant \left|x^1\right|, \qquad t \geqslant 0,$$

оскільки $e^{kt} \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$. Отже, в означенні 1.1 для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна взяти $\delta = \varepsilon$, тобто нульовий розв'язок рівняння (1.3) є стійким за Ляпуновим. Крім того, легко переконатися, що

$$\left|\varphi(t, 0, x^1) - \varphi(t, 0, 0)\right| = \left|x^1\right| e^{kt} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Це разом зі сказаним раніше означає, що нульовий розв'язок є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо випадок 2). Тоді $\varphi(t,0,x^1) = x^1$, $t \in \mathbb{R}$. Отже, в означенні 1.1 для довільного значення $\varepsilon > 0$ можна взяти $\delta = \varepsilon$, тобто нульовий розв'язок рівняння (1.3) є стійким за Ляпуновим. Але, очевидно, в даному випадку нульовий розв'язок не є асимптотично стійким за Ляпуновим.

У випадку 3) маємо

$$\left|\varphi(t,0,x^1) - \varphi(t,0,0)\right| = \left|x^1\right| e^{kt} \to +\infty$$

при $t \to +\infty$, якщо $x^1 \neq 0$. Це означає, що нульовий розв'язок рівняння (1.3) не є стійким за Ляпуновим. □

В теорії стійкості за Ляпуновим розв'язків НС зручніше досліджувати на стійкість нульовий розв'язок. Якщо ж із самого початку досліджуваний розв'язок $x = \varphi(t,t_0,x^0)$, $t \in (a_{t_0,x^0},\, +\infty)$, не є таким, то, розглядаючи систему (1.1) на області $D_0 := D \cap \{t > a_{t_0,x^0}\}$, зробимо в ній заміну змінних

$$s = t - t_0, \quad y(s) = x(t) - \varphi(t,t_0,x^0), \qquad (t,x) \in D_0. \tag{1.4}$$

У результаті прийдемо до системи вигляду

$$y' = g(s,y), \tag{1.5}$$

де функція $g(s,y) := f(s+t_0, y+\varphi(s+t_0,t_0,x^0)) - f(s+t_0, \varphi(s+t_0,t_0,x^0))$, $(s,y) \in \widetilde{D_0} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ ($\widetilde{D_0}$ – образ області D_0 при відображенні (1.4)), належить простору $C(\widetilde{D_0};\mathbb{R}^n)$ та задовольняє умову Ліпшиця локально за всіма аргументами, крім першого, причому $g(s,0) = 0$ при $s > a_{t_0,x^0} - t_0$.

Очевидно, що при вказаній заміні змінних розв'язок

$$x = \varphi(t,t_0,x^0), \quad t \in (a_{t_0,x^0},\, +\infty),$$

системи (1.1) перейде у розв'язок

$$y = 0, \quad s \in (a_{t_0,x^0} - t_0,\, +\infty),$$

системи (1.5).

Оскільки система (1.5) є абсолютно аналогічною до системи (1.1), то надалі, для зручності, будемо вважати, що в системі (1.1)

1) $D := (a,\, +\infty) \times \Omega$, де $a < 0$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$;

2) $f(t,0) = 0$ при $t > a$.

Тоді функція $x = 0$, $t \in (a\,,+\infty)$, є розв'язком системи (1.1). Через $x = \varphi(t,x^1)$, $t \in (a_{x^1}, b_{x^1})$, позначатимемо єдиний непродовжуваний розв'язок системи (1.1), який задовольняє початкову умову: $x(0) = x^1$, де $x^1 \in \Omega$.

Переформулюємо наведені вище означення стійкості за Ляпуновим для нульового розв'язку системи (1.1).

Означення 1.4. Розв'язок $x = 0$, $t \in (a\,,+\infty)$, системи (1.1) є *стійким за Ляпуновим*,коли для будь-якого значення $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,\varepsilon]$ таке, що для будь-якої точки $x^1 \in \Omega$, $|x^1| < \delta$, виконуються умови:

1) $b_{x^1} = +\infty$;

2) $|\varphi(t, x^1)| < \varepsilon \ \ \forall\, t \geqslant 0$.

Означення 1.5. Розв'язок $x = 0$, $t \in (a, +\infty)$, системи (1.1) називається *асимптотично стійким за Ляпуновим*, якщо він є стійким за Ляпуновим і знайдеться значення $\sigma > 0$ таке, що для будь-якої точки $x^1 \in D$, $|x^1| < \sigma$, маємо

$$\lim_{t \to +\infty} \left|\varphi(t, x^1)\right| = 0.$$

Означення 1.6. Розв'язок $x = 0$, $t \in (a, +\infty)$, системи (1.1) *нестійкий за Ляпуновим*, якщо він не є стійким за Ляпуновим.

§2. Стійкість нульового розв'язку НЛОС зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо НЛОС
$$x' = Ax, \tag{2.1}$$
де $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $x \in (\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ – невідома функція від змінної $t \in \mathbb{R}$.

Через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, як і раніше, позначатимемо власні значення матриці A.

Теорема 2.1. *Правильні такі твердження:*

1°. *Якщо*
$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{2.2}$$
то нульовий розв'язок системи (2.1) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

2°. *Якщо*
$$\operatorname{Re} \lambda_k \leqslant 0, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{2.3}$$
і для тих $j \in \{1, \ldots, n\}$, для яких $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, маємо співпадіння алгебраїчних та геометричних кратностей, тобто $k_j = l_j$, то нульовий розв'язок системи (2.1) *є стійким за Ляпуновим.*

3°. *Якщо*
$$\exists j \in \{1, \ldots, n\}: \ \operatorname{Re} \lambda_j > 0 \quad \textit{або} \quad \operatorname{Re} \lambda_j = 0 \ \textit{і} \ k_j \neq l_j, \tag{2.4}$$
то нульовий розв'язок системи (2.1) є нестійким за Ляпуновим.

Для доведення цієї теореми використаємо дві допоміжні леми.

Лема 2.1. *Нехай виконується умова* (2.2) *і $\alpha > 0$ – яке-небудь число таке, що правильні нерівності*
$$\operatorname{Re} \lambda_k < -\alpha, \qquad k = \overline{1,m}. \tag{2.5}$$
Тоді для будь-якого розв'язку $x = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, системи (2.1) *знайдеться стала $R_\varphi \geqslant 0$ така, що*
$$|\varphi(t)| \leqslant R_\varphi e^{-\alpha t}, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{2.6}$$

Доведення. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – який-небудь розв'язок системи (2.1). Як випливає з §6 теми 3, маємо
$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} p^k(t) e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$
де $p^k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$, — векторні многочлени, $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$, $k = \overline{1,m}$. Звідси отримаємо
$$|\varphi(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left| p^k(t) \right| e^{\mu_k t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$
де $\mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k$, $k = \overline{1,m}$, оскільки за формулою Ейлера $e^{\lambda_k t} = e^{\mu_k t}(\cos \nu_k t + i \sin \nu_k t)$, а отже, $|e^{\lambda_k t}| = e^{\mu_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Нехай $\alpha > 0$ таке, як у формулюванні леми, тобто
$$\mu_k + \alpha < 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.8}$$

Помножимо обидві частини нерівності (2.7) на $e^{\alpha t}$. У результаті отримаємо

$$|\varphi(t)|\, e^{\alpha t} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left|p^k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Враховуючи (2.8), легко показати, що

$$\lim_{t\to+\infty} \left|p^k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t} = 0,$$

а отже,

$$\sup_{t\geqslant 0} \left|p^k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t} < \infty, \qquad k = \overline{1,m}.$$

Звідси та з (2.9), якщо покласти

$$R_\varphi := \sum_{k=1}^{m} \sup_{t\geqslant 0} |p^k(t)| e^{(\mu_k+\alpha)t},$$

здобудемо (2.6). □

Лема 2.2. *Нехай виконується умова леми 2.1. Тоді існує стала $M > 0$ така, що*

$$\left|\varphi(t, x^0)\right| \leqslant M \left|x^0\right| e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.10}$$

де $x = \varphi(t, x^0)$, $t \in \mathbb{R}$, — непродовжуваний розв'язок системи (2.1)*, що задовольняє початкову умову $x(0) = x^0$.*

Доведення. Очевидно, що

$$x^0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 e^j,$$

де e^j — вектор-стовпчик, j-та компонента якого дорівнює 1, а решта — нулі, $j = \overline{1,n}$. Отож, маємо

$$\varphi(0, x^0) = x^0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 e^j = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \varphi(0, e^j),$$

звідки згідно з теоремою єдиності розв'язку задачі Коші отримаємо

$$\varphi(t, x^0) = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \varphi(t, e^j), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Значить,

$$\left|\varphi(t, x^0)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|x_j^0\right| \left|\varphi(t, e^j)\right|, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

На підставі леми 2.1 маємо

$$\left|\varphi(t, e^j)\right| \leqslant R_j e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.12}$$

де $R_j > 0$ — стала, що може залежати тільки від j.

Отже, з (2.11) на підставі (2.12) здобуваємо

$$\left|\varphi(t, x^0)\right| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^0\right| R_j\Big) e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Оскільки на підставі нерівності Коші-Буняковського маємо

$$\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^0\right| R_j \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^0\right|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 \Big)^{1/2},$$

то з (2.13), поклавши $M := \Big(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 \Big)^{1/2}$ і, врахувавши, що $|x^0| = \Big(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^0\right|^2 \Big)^{1/2}$, матимемо (2.10). □

Доведення теореми. 1°. Нехай $x^1 \neq 0$. Тоді за лемою 2.2

$$\left|\varphi(t, x^1)\right| \leqslant M \left|x^1\right| e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.14}$$

де M, α — додатні сталі, які від x^1 не залежать (очевидно, що $M \geq 1$).

Оскільки $\alpha > 0$, то $e^{-\alpha t} \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, а значить, на підставі (2.14) маємо

$$\left|\varphi(t, x^1)\right| \leqslant M \left|x^1\right|, \qquad t \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Покладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. З (2.15) випливає, що коли $|x^1| < \delta$, то $|\varphi(t, x^1)| < \varepsilon$ для всіх $t \geqslant 0$, тобто нульовий розв'язок системи (2.1) стійкий за Ляпуновим. З (2.14) безпосередньо отримуємо, що

$$\lim_{t \to +\infty} \left|\varphi(t, x^1)\right| = 0.$$

А це значить, що нульовий розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

2°. Доведення проводиться за схемою доведення твердження 1° (довести самостійно).

3°. Покажемо, що коли серед власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ матриці A є хоча б одне, дійсна частина якого — додатня, то нульовий розв'язок системи (2.1) не є стійким за Ляпуновим.

Справді, припустимо, що, наприклад, $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$. Як відомо, функція

$$x = C h^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де C — яка-небудь стала, h^1 — власний вектор, відповідний власному значенню λ_1, є розв'язком системи (2.1). Звідси та з теореми єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що $\varphi(t, 0, Ch^1) = Ch^1 e^{\lambda_1 t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що за рахунок малості $C \neq 0$ можна зробити як завгодно малим значення $|\varphi(0, Ch^1)| = |Ch^1|$. Але також очевидно, що

$$\lim_{t \to \infty} \left|\varphi(t, Ch^1)\right| = \lim_{t \to \infty} \left|Ch^1\right| \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_1 \cdot t} = +\infty.$$

Коли ж для деякого $j \in \{1, \ldots, m\}$ маємо $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ і $k_j > l_j$, то нестійкість за Ляпуновим нульового розв'язку системи (2.1) можна довести, використовуючи міркування, наведені вище. □

§3. Функція Ляпунова і теореми Ляпунова про стійкість розв'язку нормальної системи (НС)

Розглянемо НС
$$x' = f(t, x), \tag{3.1}$$
де t – незалежна дійсна змінна, x – невідома функція від змінної t, що приймає значення в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задана векторна функція, $D = (a, +\infty) \times \Omega$, $a < 0$ – дійсне число і Ω – область з простору $\mathbb{R}^n$, яка містить 0.

Будемо вважати, що функція f є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця за всіма аргументами, крім першого, причому $f(t, 0) = 0$ для всіх $t > a$. Це, зокрема, означає, що для довільної точки $x^* \in \Omega$ існує єдиний непродовжуваний розв'язок $x = \varphi(t, x^*)$, $t \in (a_{x^*}, b_{x^*})$, системи (3.1), який задовольняє початкову умову $x(0) = x^*$, і $\varphi(t, 0) = 0$ $\forall t \in (a, +\infty)$, тобто нульова функція $x = 0$, $t \in (a, +\infty)$, є непродовжуваним розв'язком системи (3.1), який задовольняє початкову умову $x(0) = 0$.

Далі будемо досліджувати на стійкість за Ляпуновим нульовий розв'язок $x = 0$, $t \in (a, +\infty)$, системи (3.1) за допомогою функції Ляпунова.

Означення 3.1. *Функцією Ляпунова* для системи (3.1) називають функцію $V \in C^1(\Omega_0)$, де Ω_0 — підобласть області Ω, $0 \in \Omega_0$, таку, що

1) $V(x) \geqslant 0,\ x \in \Omega_0; \qquad V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \leqslant 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega_0.$

Теорема 3.1 (Ляпунов)**.** *Якщо існує функція Ляпунова для системи* (3.1)*, то нульовий розв'язок цієї системи є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Нехай $V(x)$, $x \in \Omega_0$, — функція Ляпунова для системи (3.1), а $\rho > 0$ — таке число, що замкнена куля $\overline{K_\rho} = \{x \colon |x| \leqslant \rho\}$ лежить в Ω_0. Покажемо, що для довільного $\varepsilon \in (0,\rho]$ знайдеться $\delta \in (0,\varepsilon]$ таке, що для будь-якого $x^1 \in \Omega_0$, $|x^1| < \delta$, непродовжувальний розв'язок $x = \varphi(t,x^1)$ системи (3.1) визначений, зокрема, на промені $[0,+\infty)$ і $|\varphi(t,x^1)| < \varepsilon\ \forall t \in [0;+\infty)$.

Справді, зафіксуємо довільним чином вибране значення $\varepsilon \in (0,\rho]$. Нехай $S_\varepsilon := \{x : |x| = \varepsilon\}$ — сфера радіуса ε. Очевидно, що S_ε є межею замкненої кулі $\overline{K_\varepsilon}$. Покладемо

$$V_\varepsilon := \min_{x \in S_\varepsilon} V(x).$$

Оскільки за теоремою Вейєрштраса існує $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$ таке, що $V(x_\varepsilon) = \min\limits_{x \in S_\varepsilon} V(x)$, то, згідно з означенням функції Ляпунова, маємо $V_\varepsilon > 0$.

Виберемо $\delta \in (0,\varepsilon]$ настільки малим, щоби

$$\max_{x \in \overline{K}_\delta} V(x) < V_\varepsilon. \tag{3.2}$$

Це можна зробити, оскільки $V(0) = 0$ і $V(x)$, $x \in \Omega_0$, — неперервна функція. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in (a_1,b_1)$ $(0 \in (a_1,b_1))$, — розв'язок системи (3.1), що задовольняє початкову умову

$$x(0) = x^1,$$

де $x^1 \in K_\delta$, і траєкторія якого лежить в Ω_0. Покладемо

$$\psi(t) := V(\varphi(t)), \qquad t \in (a_1,b_1).$$

З формули диференціювання складних функцій, системи (3.1) і означення функції Ляпунова випливає, що

$$\psi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t))}{\partial x_j} f_j(t,\varphi(t)) \leqslant 0, \qquad t \in [0,b_1).$$

Отже, функція $\psi(t)$, $t \in (a_1,b_1)$, — незростаюча на $[0,b_1)$. Покажемо, що звідси випливає нерівність:

$$|\varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,b_1).$$

Справді, припустимо, що це не так, і нехай t_1 — найменше з тих значень $t \in (0,b_1)$, для яких $|\varphi(t)| = \varepsilon$, тобто $\varphi(t) \in S_\varepsilon$ (оскільки $|\varphi(0)| = |x^1| < \varepsilon$, то $t_1 > 0$). На підставі (3.2) маємо

$$V_\varepsilon > V(x^1) = V(\varphi(0)) \geqslant V(\varphi(t_1)) \geqslant V_\varepsilon,$$

що є суперечністю ($V_\varepsilon > V_\varepsilon$?).

Отже, $|\varphi(t)| < \varepsilon\ \forall t \in [0,b_1)$. Якщо $b_1 = +\infty$, то ми отримаємо наше твердження, а в протилежному випадку достатньо зауважити, що тоді розв'язок можна продовжити на промінь $[b_1,+\infty)$ із збереженням даної нерівності. Це випливає із наслідку теореми про існування непродовжуваного розв'язку і вже доведеного вище. $\square$

Приклад 3.1. Розглянемо систему рівнянь

$$x' = xy^4, \qquad y' = -x^2y.$$

Покажемо, що функція

$$V(x,y) = x^2 + y^4, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є функцією Ляпунова для даної системи.

Справді, очевидно, що $V(x,y) \geqslant 0$ для будь-яких $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ і $V(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = 0$ та $y = 0$. Також маємо

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} xy^4 + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}(-x^2y) = 2x^2y^4 - 4y^4x^2 = -2x^2y^2 \leqslant 0$$

для будь-яких $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Отже, в силу теореми 3.1 нульовий розв'язок даної системи є стійким за Ляпуновим.

Тепер сформулюємо і доведемо твердження про асимптотичну стійкість розв'язку НС (3.1), використовуючи функцію Ляпунова.

Теорема 3.2 (Ляпунов)**.** *Нехай для системи* (3.1) *існують функція Ляпунова* $V(x)$, $x \in \Omega_0$, *і неперервна функція* $W(x)$, $x \in \Omega_0$, *яка задовольняє умови*

1) $W(x) \geqslant 0$, $x \in \Omega_0$; $\quad W(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \leqslant -W(x)$, $\quad t \in [0, +\infty)$, $x \in \Omega_0$.

Тоді нульовий розв'язок системи (3.1) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Як випливає з теореми 3.1 нульовий розв'язок системи (3.1) в даному випадку є стійким за Ляпуновим. Нехай $\rho > 0$ таке, що $\overline{K_\rho} \subset \Omega_0$. Виберемо довільним чином значення $\varepsilon \in (0, \rho]$ і зафіксуємо його. Нехай $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$ таке, що коли $|x^1| < \delta$, то функція $x = \varphi(t, x^1)$ визначена для всіх $t \geqslant 0$ і $|\varphi(t, x^1)| < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$.

Розглянемо функцію $x = \psi(t)$, $t \geqslant 0$, де $\psi(t){:=}V(\varphi(t, x^1))$, $t \geqslant 0$. Покажемо, що

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = 0. \tag{3.3}$$

Справді, припустимо, що це не так. Оскільки, як було показано при доведенні теореми 3.1, ψ — монотонно незростаюча функція, то існує $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = A > 0$ і $\psi(t) \geqslant A$ $\forall t \geqslant 0$. Отож, знайдеться значення $\sigma > 0$ таке, що $|\varphi(t, x^1)| \geqslant \sigma$ при $t \geqslant 0$ (нагадаємо, що $V(0) = 0$ і $V(x) > 0$ при $x \neq 0$), бо інакше існувала б послідовність додатніх чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\lim t_k = +\infty$ і $|\varphi(t_k, x^1)| \to 0$ при $k \to +\infty$, а це б в свою чергу означало, що

$$\lim_{k\to+\infty} \psi(t_k) = \lim_{k\to+\infty} V(\varphi(t_k, x^1)) = V(0) = 0,$$

тобто отримали б протиріччя з нашим припущенням.

Отже, маємо

$$\sigma < \left|\varphi(t, x^1)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad t \geqslant 0.$$

За умовою теореми функція W на множині $M_{\sigma,\varepsilon} = \{x \colon \sigma \leqslant |x| \leqslant \varepsilon\}$ строго додатня та існує $\alpha > 0$ таке, що $W(x) \geqslant \alpha$, $x \in M_{\sigma,\varepsilon}$, і

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x^1)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t, x^1))}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i(t, x^1)}{dt} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t, x^1))}{\partial x_i} f_i(t, \varphi_i(t, x^1)) \leqslant -W(\varphi_i(t, x^1)) \leqslant -\alpha, \qquad t \geqslant 0.$$

Інтегруючи нерівність

$$\psi'(t) \leqslant -\alpha, \quad t \geqslant 0,$$

по t від 0 до $\tau > 0$, отримаємо

$$\psi(\tau) - \psi(0) \leqslant -\alpha\tau. \tag{3.4}$$

Спрямуємо τ до $+\infty$ і отримаємо протиріччя, оскільки ліва частина нерівності (3.4) прямує до $A - \psi(0)$, а права — до $-\infty$. Отже, $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$. Покажемо, що звідси випливає

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t, x^1) = 0. \tag{3.5}$$

Справді, нехай це не так. Тоді існує послідовність $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ невід'ємних чисел така, що $|\varphi(t_k, x^1)| \geqslant b = \mathrm{const} > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Але ж тоді

$$\lim_{k\to\infty} \psi(t_k) = \lim_{k\to\infty} V(\varphi(t_k, x^1)) > 0,$$

що протирічить (3.3). Отже, маємо (3.5), що нам і треба було довести. □

§4. Теорема Ляпунова про стійкість розв'язку нелінійної нормальної системи за першим наближенням

Розглянемо НС

$$x' = f(t, x), \tag{4.1}$$

де f і D такі ж, як в §3.

Нехай

$$f(t, x) = Ax + g(t, x), \qquad (t, x) \in D, \tag{4.2}$$

де A — стала квадратна матриця порядку n з дійсними елементами, а g — дійсна функція, яка володіє такими ж властивостями, що і f, та, крім того, задовольняє умову

$$|g(t, x)| \leqslant C_0 \, |x|^{1+\beta}, \qquad t \geqslant 0, \quad |x| < \sigma, \tag{4.3}$$

де $C_0 \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$ — деякі сталі.

Тоді система

$$x' = Ax \tag{4.4}$$

називається *першим наближенням* системи (4.1).

Виявляється, що дослідження стійкості нульового розв'язку системи (4.1) при виконанні умов (4.2) і (4.3) можна звести до вивчення стійкості нульового розв'язку системи (4.4).

Сформулюємо і доведемо твердження про визначення стійкості за Ляпуновим нульового розв'язку нелінійної нормальної системи 4.1, використовуючи її перше наближення.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови (4.2),(4.3) на f і, крім того,*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \qquad k = \overline{1, m}, \tag{4.5}$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — власні значення матриці A. Тоді нульовий розв'язок системи (4.1) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Для спрощення викладок припустимо, що $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — дійсні і їхні алгебраїчні та геометричні кратності співпадають. Тоді існує невироджена дійсна матриця B така, що

$$B^{-1}AB = J \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}, \text{ тобто } J \text{ — діагональна матриця.} \tag{4.6}$$

Зробимо в системі (4.1) заміну змінних

$$x = By. \tag{4.7}$$

В результаті отримаємо систему

$$y' = Jy + \widetilde{g}(t, y), \tag{4.8}$$

де $\widetilde{g}(t, y) = B^{-1}g(t, By)$.

Покажемо, що з асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (4.8) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (4.1). Спочатку зауважимо, що оскільки B — невироджена матриця, то

$$C_1 |y| \leqslant |x| \leqslant C_2 |y|, \quad \text{якщо} \quad x = By, \tag{4.9}$$

де C_1, C_2 — const > 0.

Також відмітимо, що коли $y = \psi(t, y^1)$, $t \in (a_1, b_1)$, — непродовжувальний розв'язок системи (4.8), то $x = \varphi(t, x^1)$, $t \in (a_1, b_1)$, де $x^1 = By^1$, $\varphi(t, x^1) = B\psi(t, B^{-1}x^1)$, $t \in (a_1, b_1)$, — непродовжувальний розв'язок системи (4.1). Це легко випливає із співвідношення (4.7) та теореми єдиності розв'язку задачі Коші для НС. Справедливе і обернене твердження: якщо $x = \varphi(t, x^1)$, $t \in (a_1, b_1)$, — непродовжувальний розв'язок системи (4.1), то функція $y = \psi(t, y^1)$, $t \in (a_1, b_1)$, де $y^1 = B^{-1}x^1$, $\psi(t, y^1) = B^{-1}\varphi(t, By^1)$, — непродовжувальний розв'язок системи (4.8). Отже, між множинами непродовжувальних розв'язків систем (4.1) і (4.8) існує взаємно-однозначна відповідність.

Тепер нехай для деякого значення $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що коли $y^1 \in \mathbb{R}^n$ і $|y^1| < \frac{\delta}{C_1}$, то

1) непродовжувальний розв'язок $y = \psi(t, y^1)$ системи (4.8) визначений, зокрема, для всіх $t \geqslant 0$;

2) $|\psi(t, y^1)| < \dfrac{\varepsilon}{C_2}$, $t \geqslant 0$.

Тоді зі сказаного вище (зокрема, див. (4.9)) випливає, що, коли x^1 — будь-яке таке, що $|x^1| < \delta$, то $|y^1| < \frac{\delta}{C_1}$, а отже, функція $y = \psi(t, y^1)$ визначена для всіх $t \geqslant 0$ і $|\psi(t, y^1)| < \frac{\varepsilon}{C_2}$, коли $t \geqslant 0$, звідки випливає, що вираз $\varphi(t, x^1) \equiv B\psi(t, B^{-1}x^1)$ теж визначена для всіх $t \geqslant 0$ і $|\varphi(t, x^1)| < \varepsilon$, коли $t \geqslant 0$.

Отже, ми прийшли до висновку, що нам досить дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи (4.8). Зробимо це, використовуючи теорему 3.2 (див. §3).

Нехай

$$\|y\|^2 := \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2, \quad y = (y_1, ..., y_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Покладемо $V(y) = \|y\|^2$, $W(y) = \alpha \|y\|^2$, $y \in \mathbb{R}^n$, де $\alpha > 0$ — стала така, що $\lambda_k + \alpha < 0$, $k = \overline{1, m}$ (нагадаємо, що $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — дійсні), і покажемо, що для функцій V і W виконуються умови теореми 3.2.

Справді, легко переконатися, що V і W належать простору $C^1(\mathbb{R}^n)$, $V(y) \geqslant 0$, $W(y) \geqslant 0$ для будь-яких $y \in \mathbb{R}^n$ і

$$V(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0, \qquad W(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Залишається довести, що для деякої сталої $\sigma_0 > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \widetilde{f}_j(t, y) \leqslant -W(y), \qquad t \geqslant 0, \quad y \in K_{\sigma_0} := \{y \colon \|y\| < \sigma_0\}, \tag{4.10}$$

де $\widetilde{f}(t,y) := Jy + \widetilde{g}(t,y)$, тобто $\widetilde{f}(t,y) = (\widetilde{f}_1(t,y), ..., \widetilde{f}_n(t,y))^\top$, де $(\widetilde{f}_j(t,y) = \lambda_{k(j)} y_j + + \widetilde{g}_j(t,y)$, $\lambda_{k(j)}$ — власне значення матриці A, що стоїть в j-му рядку матриці J, $j = \overline{1,n}$, $(t,y) \in [0,+\infty) \times K_{\sigma_0}(0)$.

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \widetilde{f}_j(t,y) &= \sum_{j=1}^{n} 2y_j \big(\lambda_{k(j)} y_j + \widetilde{g}_j(t,y)\big) = \\ =& 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_{k(j)} y_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \widetilde{g}_j(t,y) y_j \leqslant -2\alpha \|y\|^2 + 2\|\widetilde{g}(t,y)\| \|y\| . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Тут ми використали нерівність Коші-Буняковського

$$\sum_{j=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Враховуючи умову (4.3) і означення $\widetilde{g}$, маємо

$$\begin{gathered} \|\widetilde{g}(t,y)\| = \left\|B^{-1} g(t,By)\right\| \leqslant C_3 \|g(t,By)\| \leqslant C_4 \|By\|^{1+\beta} \leqslant C_5 \|y\|^{1+\beta}, \\ t \geqslant 0, \quad y \in K_{\sigma_*} = \{y \colon \|y\| < \sigma_*\}, \end{gathered} \tag{4.12}$$

де C_3, C_4, C_5, σ_* — деякі додатні сталі. Тут ми також врахували, що

$$\widetilde{C}_1 \|x\| \leqslant |x| \leqslant \widetilde{C}_2 \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ — деякі додатні сталі.

З (4.11) і (4.12) маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \widetilde{f}_j(t,y) &\leqslant -2\alpha \|y\|^2 + 2C_5 \|y\|^{2+\beta} = \\ &= -\alpha \|y\|^2 + (-\alpha + 2C_5 \|y\|^{\beta}) \|y\|^2, \qquad t \geqslant 0, \quad \|y\| < \sigma_*. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Виберемо значення $\sigma_0 \in (0, \sigma_*]$ таким, щоби виконувалася нерівність

$$-\alpha + 2C_5 \sigma_0^{\beta} \leqslant 0.$$

Тоді

$$-\alpha + 2C_5 \|y\|^{\beta} \leqslant 0, \qquad \text{коли} \qquad \|y\| \leqslant \sigma_0. \tag{4.14}$$

З (4.13) і (4.14) маємо (4.10).

Отож, на підставі теореми 3.2 нульовий розв'язок системи (4.8) є асимптотично стійким за Ляпуновим, а отже, нульовий розв'язок системи (4.1) є асимптотично стійким. Теорема доведена. □

Лекція № 32

Колоквіум №5