Диференціальні рівняння

М. М. Бокало

8 лютого 2024 р.

Практичне заняття № 1

Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Довідкова інформація

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція від змінної x, y' – її похідна, а $F(x, y, p)$, $(x, y, p) \in \Omega$, — задана неперервна функція, Ω — область в $\mathbb{R}^3$.

Розв'язком рівняння (1) називають функцію $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1(\langle a, b\rangle)$ (тобто φ — неперервно-диференційовна на $\langle a, b\rangle$);

2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$;

3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Загальним розв'язком рівняння (1) називають функцію $y = \psi(x, C)$ від незалежної змінної x і параметра C, якщо при довільному допустимому значенні C_* параметра C функція $y = \psi(x, C_*)$ від змінної x є розв'язком рівняння (1).

Повним загальним розв'язком рівняння (1) називають загальний розв'язок $y = \psi(x, C)$ цього рівняння, якщо він володіє властивістю: для будь-якого розв'язку рівняння () $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, знайдеться допустиме значення C_φ параметра C таке, що $\varphi(x) = \psi(x, C_\varphi)\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle$.

Інтегралом рівняння (1) називається співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{2}$$

якщо будь-яка неявно задана ним неперервно-диференційовна функція є розв'язком рівняння (1).

Загальним інтегралом рівняння (1) називають співвідношення вигляду

$$G(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

яке зав'язує змінні x, y і параметр C так, що для довільного фіксованого значення C_0 параметра C співвідношення $G(x, y, C_0) = 0$ є інтегралом рівняння (1).

Повним загальним інтегралом рівняння (1) називають загальний інтеграл (3) цього рівняння, який володіє властивістю: для довільного інтеграла (2) рівняння (1) знайдеться значення C_Φ таке, що $G(x, y, C_\Phi) = \Phi(x, y)$ для всіх точок (x, y) з області визначення Φ.

Рівняння вигляду (1) називають *не розв'язаним стосовно похідної*. Рівняння вигляду

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

називають *розв'язаним стосовно похідної*. Якщо рівняння (1) можна записати у вигляді (4), то його називають *розв'язним стосовно похідної*, а в іншому випадку — *нерозв'язним стосовно похідної*.

Рівняння вигляду

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

де M, N задані на області $D \subset \mathbb{R}^2$, називають *рівнянням в симетричній формі*, оскільки змінні x і y входять в рівняння "симетрично": зокрема, можна вважати, що x — незалежна, а y — залежна змінна, або, навпаки, y – незалежна, а x – залежна змінна.

Звичайні диференціальні рівняння, розв'язки яких можна задати аналітично, називаються *інтегровними рівняннями.* Далі розглянемо кілька класів інтегровних рівнянь. Перший з них — *рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.*

Рівнянням з відокремленними змінними називають рівняння вигляду

$$M_0(x)\,dx + N_0(y)\,dy = 0, \tag{6}$$

де $M_0 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R},\ \ N_0 : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ — задані функції $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty,\ -\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty)$.

Теорема 1. *Нехай $M_0 \in C(\alpha, \beta)$, $N_0 \in C(\gamma, \delta)$. Тоді повний загальний інтеграл рівняння (6) має вигляд*

$$\widetilde{M_0}(x) + \widetilde{N}_0(y) = C,$$

де $\widetilde{M_0}$ і $\widetilde{N}_0$ — первісні відповідно функцій M_0 та N_0, $(x, y) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, а C — довільна стала.

Рівнянням з відокремлюваними змінними називають рівняння вигляду

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0, \tag{7}$$

де $M_1, N_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, M_2, N_2 : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Після ділення рівняння на вираз $M_2(y)N_1(x)$ приходимо до еквівалентної рівнянню (7) сукупності рівнянь:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0, \quad M_2(y) = 0, \quad N_1(x) = 0. \tag{8}$$

Множина всеможливих розв'язків сукупності (8) має вигляд

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C, \quad y = y_i,\ i \in I \subset \mathbb{N}, \quad x = x_j,\ j \in J \subset \mathbb{N}, \tag{9}$$

тобто множина всеможливих розв'язків рівняння (7) визначається сукупністю співвідношень (9).

Розглянемо *рівняння, які зводяться певною заміною змінних до рівнянь з відокремлюваними змінними.* До таких належать рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \tag{10}$$

де a, b, c — сталі, $f(z)$, $z \in (\alpha, \beta)$, — задана функція.

Зробимо заміну змінних

$$z = ax + by + c. \tag{11}$$

Тут x — незалежна змінна, $y = y(x)$ — "стара" шукана функція, а $z = z(x)$ — "нова" шукана функція.

Маємо $z' = a + by'$, звідки $y' = (z' - a)/b$. Враховуючи це та (11), із (10) отримаємо

$$z' = bf(z) + a.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Контрольні питання

1. Що таке ЗДР першого порядку розв'язне і нерозв'язне стосовно похідної?

2. Що називається загальним розв'язком, інтегралом, загальним інтегралом ЗДР першого порядку?

3. Які рівняння називають інтегровними? Що таке рівняння в симетричній формі, рівняння з відокремленими, відокремлюваними змінними? Який вигляд має повний загальний інтеграл рівняння з відокремленими змінними?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння: $y' = -\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$.

◀ Дане рівняння визначене тільки для $y > 0$ і його можна записати так:

$$y' = \begin{cases} 0, & x \le 0, y > 0 \\ -\frac{x}{y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

У першій чверті квадратної площини Oxy вихідне рівняння набирає вигляду: $y\,dy + x\,dx = 0$, або $\frac{1}{2}\,d(y^2 + x^2) = 0$. Звідси маємо $y^2 + x^2 = C^2$.

У другій чверті координатної площини Oxy маємо: $y' = 0$, тобто $y = C$. ▶

2. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

◀ Спочатку розв'яжемо рівняння. Для цього, врахувавши співвідношення $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишемо його у вигляді

$$(x^2-1)\,dy + 2xy^2\,dx = 0. \tag{12}$$

Розділивши обидві частини рівняння (12) на добуток $(x^2-1)y^2$, одержимо сукупність рівнянь

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2x}{x^2-1}\,dx = 0, \quad y^2 = 0,$$

перше з яких є рівнянням з відокремленими змінними (тут врахували, що з вигляду даного рівняння випливає, що x — незалежна змінна, а y — функція від x).

Розв'язавши ці рівняння, знаходимо

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C, \quad y = 0.$$

Очевидно, цю сукупність можна переписати у вигляді

$$y = \frac{1}{\ln|x^2-1| - C}, \quad y = 0.$$

Ці співвідношення задають всеможливі розв'язки вихідного рівняння.

Тепер серед цих розв'язків знайдемо той, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$. Для цього у вираз загального розв'язку підставимо 0 замість x і 1 замість y:

$$1 = \frac{1}{\ln|-1| - C} \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Підставивши знайдене значення C у вираз загального розв'язку, отримаємо розв'язок задачі Коші для даного рівняння:

$$y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + 1}.$$

►

3. Розв'язати рівняння $y' = \sqrt{x-y} + 1$.

◄ Очевидно, що права частина даного рівняння є композицією функцій $u = f(z) = \sqrt{z} + 1$ і $z = x - y$. Відмітимо також, що змінна x є незалежною, а змінна y є шуканою функцією від x. Замінимо в даному рівнянні функцію y на функцію z (від змінної x) за правилом $z = x - y$. Звідси, враховуючи, що змінні y та z залежать від x та взявши похідну за змінною x, маємо $y' = 1 - z'$. У результаті одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$1 - z' = \sqrt{z} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\sqrt{z} \;\Big|\; \times \frac{1}{\sqrt{z}}, \frac{dz}{\sqrt{z}} = -dx,\ z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{z} = -x + C,\ z = 0.$$

Звідси маємо сукупність всеможливих розв'язків "нового"рівняння:

$$z = ((-x + C)/2)^2, \quad z = 0.$$

Вертаючись до змінної y, знаходимо сукупність всеможливих розв'язків вихідного рівняння:

$$y = x - ((-x + C)/2)^2, \quad y = x.$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати (аналітично) рівняння з відокремлюваними змінними або задачу Коші для них:

1*. $x' = 2t$; **2*.** $xy' - y = 0$.
3*. $2xx' = 3t^2$; **4*.** $y' - y(x+1) = 0$; **5*.** $(x+1)dx - y\sqrt{1-x^2}dy = 0,\ y(0) = 1$;
22. $xydx + (x+1)dy = 0$; **25.** $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = -1$.

Розв'язати рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними:
42. $y' = \cos(y - x)$. **45.** $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$. **86.** $(x + 2y + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$.

Домашні завдання:

Розв'язати (аналітично) рівняння з відокремлюваними змінними або задачу Коші для них:

7*. $x' = 3t^2$; **8*.** $xy' + y = 0$.
23. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$; **26.** $y' = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0$; **28.** $2x^2yy' + y^2 = 2$; **31.** $z' = 10^{x+z}$;
36. $x^2y' - \cos 2y = 1$, $y(+\infty) = \dfrac{9\pi}{4}$; **37.** $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, $y(x)$ – обмежена при $x \to \infty$;
39. $(1 + x^2)y' - \dfrac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, $y(-\infty) = \dfrac{7\pi}{2}$.
Розв'язати рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними:
43. $y' - y = 2x - 3$. **44.** $(x + 2y)y' = 1$; $y(0) = -1$. **46.** $y' = \sin(x - y)$. **47.** $(x + y)^2y' = a^2$.

Додаткові завдання:

Розв'язати рівняння:

30. $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1.$

Відповіді:

1*. $x=t^2+C.$ **2*.** $y=Cx.$ **3*.** $x^2=t^3+C.$ **4*.** $\ln|y|-\dfrac{x^2}{2}-x=C.$
5*. $-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-y^2=-2.$ **6*.** $\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+y^2=C.$ **7*.** $x=t^3+C.$
8*. $y=\dfrac{C}{x}.$ **22.** $y=C(x+1)e^{-x},\ x=-1.$ **23.** $\ln|x|=C\sqrt{y^2+1},\ x=0.$
25. $y=2+C\cos x;\ y=2-3\cos x.$ **26.** $y=(x-C)^3,\ y=0;\ y=(x-2)^3,\ y=0.$
28. $y^2-2=Ce^{1/x}.$ **30.** $e^{-s}=1+Ce^t.$ **31.** $z=-\lg(C-10^x).$
36. $y=\operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)+2\pi.$ **37.** $y=2.$ **39.** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)+\dfrac{7}{2}\pi.$
42. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)=x+C,\ y-x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ **43.** $2x+y-1=Ce^x.$ **44.** $x+2y+2=0.$
45. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+C.$ **46.** $x+C=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right).$
47. $x+y=a\ \operatorname{tg}\left(C+\dfrac{y}{a}\right),\ x-y=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Практичне заняття № 2

Геометричні та фізичні задачі, розв'язування яких приводить до диференціальних рівнянь

Довідкова інформація

Математичні моделі різноманітних процесів і явищ, в яких присутні елементи "руху", містять диференціальні рівняння, тобто співвідношення, що визначають певний зв'язок між різними величинами (одні з яких є залежними від інших) та швидкостями змін залежних величин стосовно незалежних. Вивчення таких рівнянь привело до створення самостійного розділу математики — теорії диференціальних рівнянь. В наш час ця теорія посідає чільне місце серед інших математичних дисциплін. В ній гармонійно поєднуються суто математичний і прикладний аспекти. Це робить цю теорію привабливою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань, бо, подібно до мікроскопа вченого або скальпеля хірурга, математичний апарат диференціальних рівнянь дає змогу проникнути в мікросвіт детермінованих явищ і процесів, описати механізм їх розвитку і тим самим передбачити їх майбутнє.

Контрольні питання

1. Що називають звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) першого порядку?
2. Що таке розв'язне і нерозв'язне стосовно похідної рівняння?
3. Що таке рівняння з відокремлюваними змінними? Які рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти криву, яка проходить через точку $(4;3)$ та кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює потрійній абсцисі точки дотику.

◀ Розглянемо координатну площину Oxy. Нехай (x_0, y_0) — довільна точка на шуканій кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці (x_0, y_0) має вигляд

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x),$$

де (x, y) — біжучі координати точок дотичної. Оскільки відомо, що дотична перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою $3x_0$, то одержуємо співвідношення між значеннями $x_0, y_0 = y(x_0)$ та $y'(x_0)$:

$$1 = y(x_0) + y'(x_0)(3x_0 - x_0),$$

звідки, замінивши x_0 на x, бо значення x_0 є довільним, отримаємо диференціальне рівняння, графік розв'язку якого є шуканою кривою

$$2xy' + y = 1.$$

Відокремивши змінні та проінтегрувавши це рівняння, знаходимо сім'ю кривих

$$y = 1 + \frac{C}{\sqrt{|x|}}.$$

Оскільки шукана крива проходить через точку $(4, 3)$, то, підставивши координати цієї точки в знайдений розв'язок, матимемо $C = 4$. Отже, графік функції

$$y = 1 + \frac{4}{\sqrt{|x|}}$$

є шуканою кривою. ▶

2. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною до пройденого шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 10 см від початку відліку шляху і мала швидкість $v_0 = 40$ см/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 20 с після початку руху.

◀ Нехай $s = s(t)$ — відстань точки від початку відліку в момент часу t. Тоді $s(0) = 10$. За умовою задачі зміна величини s від часу описується диференціальним рівнянням

$$s' = \frac{k}{s},$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{s} \quad \Leftrightarrow \quad s\,ds = k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = 2(kt + C).$$

Звідси, врахувавши, що s — відстань, а отже, величина додатна, знаходимо

$$s = \sqrt{2(kt + C)}\,.$$

З умови $s(0) = 10$ випливає, що $10 = \sqrt{2C}$, тобто $C = 50$. Отже,

$$s(t) = \sqrt{2(kt + 50)}$$

— шлях, який проходить точка за час t.

Продиференціювавши це рівняння по змінній t, знайдемо швидкість руху точки в момент часу t:

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{2(kt + 50)}}\,.$$

З умови $v(0) = v_0 = 40$ знаходимо коефіцієнт пропорційності k:

$$v(0) = \frac{k}{10} = 40 \quad \Rightarrow \quad k = 400.$$

Отже, швидкість матеріальної точки змінюється за законом

$$v(t) = \frac{400}{\sqrt{2(400t + 50)}}.$$

Через 20 с після початку руху

$$s(20) = \sqrt{2(400 \cdot 20 + 50)} \approx 127,$$

$$v(20) = \frac{400}{\sqrt{2(400 \cdot 20 + 50)}} \approx 3,15.$$

Отже, через 20 с після початку руху швидкість точки становила $3,15$ см/с. За цей час точка пройшла відстань

$$s(20) - s(0) = (127 - 10)\text{см} = 117\text{см}.$$

▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання

48. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величиною сталою, рівною a^2 (a — деяка стала).

52. У посудині об'ємом 20 л є повітря (80% азоту і 20% кисню). В посудину вливається 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту ?

55. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря. Температура повітря $20^\circ C$, тіло протягом 20 хв охолоджується від $100^\circ C$ до $60^\circ C$. Знайти залежність температури від часу та через який час температура тіла знизиться до $30^\circ C$.

Домашні завдання

49. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величиною сталою і рівною b .

51. Знайти криві, які володіють такою властивістю: якщо через довільну точку кривої провести прямі, паралельні осям координат, до зустрічі з цими осями, то площа одержаного прямокутника ділиться кривою у відношенні $1:2$.

54. У повітрі кімнати об'ємом $200\,\text{м}^3$ є $0,15\,\%$ вуглекислого газу. Вентилятор подає $20\,\text{м}^3$ повітря за хвилину, в якому є $0,04\,\%$ вуглекислого газу (така ж кількість повітря за хвилину виходить з кімнати). Через який час кількість вуглекислого газу в кімнаті зменшиться втроє?

56. Встановлений вертикально чан циліндричної форми має отвір у дні. Відомо, що швидкість витікання води з чана дорівнює $0,6\sqrt{2gh}$, де $g = 10$ м/с^2 — прискорення сили тяжіння, h — висота рівня води над отвором; а також те, що половина води з повного чана витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

Додаткові завдання

57. У прямокутний чан розміром 60 см$\times$75 см і висотою 80 см вливається вода зі швидкістю 1,8 л за секунду. У дні є отвір площею 2,5 см^2. За який час наповниться чан?

58. Куля входить у дошку, товщина якої 10 см, зі швидкістю $v_0 = 200$ м/с, а вилітає з дошки, пробиваючи її, зі швидкістю $v_1 = 80$ м/с. Знайти час руху кулі через дошку, вважаючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху.

Відповіді

48. $(C \pm x)y = 2a^2$; **49.** $b\ln y - y = C \pm x$, $0 < y < b$;
51. $y = Cx^2$, $y^2 = Cx$;
52. $x(t) = 20 - 4e^{-t/200}$ — кількість азоту (в літрах); $x(t) = 19,8$ при $t = 200\ln 20 \approx 10\,\text{хв}$;
54. $x(t) = 0,08 + 0,22e^{-t/10}$ — об'єм вуглекислого газу; $x(t) = 0,1$ при $t = 10\ln 11 \approx 24\,\text{хв}$;
55. $T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$, $t = 60\,\text{хв}$; **56.** Приблизно $17,06\,\text{хв}$;
57. $260\,\text{с}$; **58.** $\dfrac{3}{40\ln 2,5}$ с.

Практичне заняття № 3
Однорідні рівняння та звідні до них

Довідкова інформація

Наведемо деякі поняття і факти, потрібні для розв'язування однорідних рівнянь та звідних до них.

Означення 1. *Функція $F(x,y)$, $(x,y) \in G$, — **однорідна порядку** $m \in \mathbb{R}$, якщо для будь-яких точок $(x,y) \in G$ і чисел $k > 0$ маємо $(kx,ky) \in G$ і*

$$F(kx,ky) = k^m F(x,y).$$

Означення 2. ***Однорідним рівнянням*** *називається рівняння, яке можна записати або у вигляді*

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0, \tag{13}$$

або

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{14}$$

де M і N — однорідні функції одного і того ж порядку, визначені в деякій області D площини $\mathbb{R}^2$.

Якщо рівняння має вигляд (розв'язане стосовно похідної)

$$y' = f(x,y), \tag{15}$$

де f — функція, яка задана в деякій області D площини $\mathbb{R}^2$, то воно є однорідним тоді і лише тоді, коли f — однорідна функція нульового порядку.

Однорідні рівняння заміною змінних

$$y \rightsquigarrow z: \quad z = \frac{y}{x} \qquad \Leftrightarrow \quad y = xz$$

зводяться до рівнянь з відокремлювальними змінними. При цьому пишемо $y' = z + xz'$, якщо маємо рівняння (13), і $dy = z\,dx + x\,dz$, якщо маємо рівняння (14).

Увага! Перед проведенням заміни змінних рекомендовано поділити рівняння на x^m, де m – порядок однорідності функцій M, N.

Тепер розглянемо **рівняння, які зводяться до однорідних.**

1) *Рівняння вигляду*

$$M_*\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)\,dx + N_*\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)\,dy = 0, \tag{16}$$

де $M_*(v)$, $N_*(v)$, $v \in (a,b)$, — задані функції, $|c_1| + |c_2| > 0$ *і*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{17}$$

зводяться до однорідних заміною змінних

$$\begin{cases} x = t + x_0, \\ y = z + y_0, \end{cases} \tag{18}$$

де (x_0, y_0) — розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Відмітимо, що у результаті, врахувавши ще рівності $dx = dt,\ dy = dz$, отримаємо однорідне рівняння

$$M_*\Big(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\Big)\, dt + N_*\Big(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\Big)\, dz = 0, \tag{20}$$

яке заміною змінних

$$z \rightsquigarrow u: \quad u = \frac{z}{t} \ \Leftrightarrow\ z = ut$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо випадок, коли не виконується умова (17), тобто система (19) або не має розв'язку, або має безліч розв'язків. Тоді, якщо $b_1 = 0$, то або $a_1 = 0$, або $b_2 = 0$ і, отже, рівняння (16) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а якщо $b_1 \neq 0$, то рівняння (16) належить до рівнянь (безпосередньо) звідних до рівнянь з відокремлюваними змінними, оскільки тоді існує число $\lambda \neq 0$ таке, що $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, і в рівнянні треба робити заміну змінних: $z = a_1x + b_1y$.

2) *Узагальнено однорідні рівняння* — це рівняння вигляду

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{21}$$

які заміною змінних

$$x = s^k, \quad y = z^l,$$

де $k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — деякі числа, зводяться до однорідних.

Контрольні питання

1. Яка функція називається однорідною? Що таке однорідне рівняння? Якою заміною однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?

2. Які класи рівнянь зводяться до однорідних? Що таке узагальнено однорідні рівняння?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$(y^2 - 2xy)\, dx + x^2\, dy = 0\,.$$

◀ Функції $M(x, y) = y^2 - 2xy$ та $N(x, y) = x^2$ – однорідні другого порядку. Тому ділимо дане рівняння на x^2:

$$\Big(\Big(\frac{y}{x}\Big)^2 - 2\frac{y}{x}\Big)\, dx + dy = 0.$$

В цьому рівнянні робимо заміну змінних

$$y \rightsquigarrow z: \quad z = \frac{y}{x}.$$

Звідси маємо

$$y = zx, \quad \text{а отже} \quad dy = z\, dx + x\, dz.$$

У результаті отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(z^2 - z)\,dx + x\,dz = 0.$$

Поділивши його на $x(z^2 - z)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z^2 - z} = 0.$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини матимемо

$$\ln\left|x \cdot (1 - \frac{1}{z})\right| = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad x \cdot (1 - \frac{1}{z}) = C.$$

Повертаючись до змінних x та y одержуємо розв'язок рівняння

$$x(1 - \frac{x}{y}) = C \quad \Rightarrow \quad (y - x) \cdot x = Cy.$$

Оскільки ми ділили рівняння на $x(z^2 - z)$, то потрібно перевірити чи серед $x = 0$, $z^2 - z = 0$ не буде розв'язків вихідного рівняння. Підставивши $x = 0$ у вихідне рівняння, одержуємо тотожність $0 = 0$ (так як $d0 = 0$, $0^2 = 0$).

Розв'яжемо рівняння $z^2 - z = 0 \Rightarrow z = 0$ або $z = 1$, тобто $y = 0$ або $y = x$. Підставивши $y = 0$, а потім $y = x$ у вихідне рівняння, одержуємо тотожність $0 = 0$.

Зауважимо, що при $C = 0$ розв'язки $x = 0$ та $y = x$ входять в загальний розв'язок рівняння, знайдений вище.

Отже, розв'язками даного рівняння є

$$(y - x)x = Cy, \quad y = 0.$$

▶

2. Розв'язати рівняння

$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$(x + 4y)\,dy - (2x + 3y - 5)\,dx = 0.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

знаходимо $x_0 = 4$, $y_0 = -1$.

Зробимо у даному рівнянні заміну змінних:

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = u - 1 \end{cases}.$$

У результаті, врахувавши, що $\begin{cases} dx = dt \\ dy = du \end{cases}$, одержуємо однорідне рівняння

$$(t + 4u)\,du - (2t + 3u)\,dt = 0.$$

Поділимо його на t, оскільки функції

$$M(t, u) = t + 4u, \quad N(t, u) = 2t + 3u$$

однорідні першого порядку:

$$\big(1+4\frac{u}{t}\big)\,du-\big(2+3\frac{u}{t}\big)\,dt=0.$$

Далі робимо заміну змінних

$$z=\frac{u}{t}\quad\Rightarrow u=zt\quad\Rightarrow\quad du=z\,dt+t\,dz.$$

У результаті отримаємо рівняння

$$2(2z^2-z-1)\,dt+t(1+4z)\,dz=0.$$

Ділимо останнє рівняння на $t(2z^2-z-1)$ та одержуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{2}{t}\,dt+\frac{1+4z}{2z^2-z-1}\,dz=0.$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини матимемо

$$2\ln|t|+\frac{1}{3}(\ln|z-1|^5+\ln|2z+1|)=\frac{1}{3}\ln|C|\quad\Rightarrow\quad t^6(z-1)^5(2z+1)=C.$$

Тепер згадаємо, що $t=x-4$, $z=\frac{u}{t}=\frac{y+1}{x-4}$ і в отриманому співвідношенні повернемося до змінних x та y. У результаті одержуємо загальний інтеграл даного рівняння

$$(x-4)^6\Big(\frac{y+1}{x-4}-1\Big)^5\Big(2\frac{y+1}{x-4}+1\Big)=C.$$

Далі перевіряємо чи серед $t=0$, $2z^2-z-1=0$ ($z=1$ або $z=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ u=t$ або $u=-\frac{t}{2}$), тобто $y=x-5$ або $y=1-\frac{x}{2}$ не буде розв'язків вихідного рівняння. Ці розв'язки входять в загальний інтеграл даного рівняння при $C=0$.

Відповідь:
$(x-4)^6\Big(\frac{y+1}{x-4}-1\Big)^5\Big(2\frac{y+1}{x-4}+1\Big)=C$ — повний загальний інтеграл вихідного рівняння. ▶

3. Розв'язати рівняння

$$(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0\,.$$

◀ Оскільки система рівнянь

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\4x+2y-3=0\end{cases}$$

не має розв'язку, то це рівняння безпосередньо зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною змінних:

$$z=2x+y\quad\Rightarrow\quad dy=dz-2dx.$$

У результаті цієї заміни змінних отримаємо

$$5(z-1)\,dx-(2z-3)\,dz=0.$$

Поділивши це рівняння на $z-1$ та проінтегрувавши його, одержуємо розв'язок рівняння $5x-2z+\ln|z-1|=C$. Повертаючись до змінних x та y, матимемо розв'язок вихідного рівняння

$$x-2y+\ln|2x+y-1|=C\quad\Rightarrow\quad 2x+y-1=Ce^{2y-x}.$$

Зауважимо, що при $C=0$ розв'язок $y=1-2x$, який виникає при діленні рівняння на $z-1$, тобто $z-1=0$ або $2x+y=1$, входить в загальний розв'язок рівняння. ►

4. Розв'язати рівняння

$$x^3(y'-x)=y^2.$$

◄ Запишемо дане рівняння у симетричному вигляді

$$x^3y'=x^4+y^2 \quad \Rightarrow \quad x^3\,dy-(x^4+y^2)\,dx=0.$$

Дане рівняння не є однорідним, оскільки функції $M=x^3$ та $N=x^4+y^2$ не є однорідними. Робимо формальну заміну $y=z^m$, де m — поки що невідоме число, яке знайдемо з умови однорідності. Підставляємо заміну у рівняння, матимемо

$$x^3mz^{m-1}\,dz-(x^4+z^{2m})\,dx=0.$$

Оскільки функції

$$\widehat{M}(x,z)=x^3mz^{m-1}, \quad \widehat{N}(x,z)=x^4+z^{2m}$$

мають бути однорідними одного і того ж порядку, а тому підставляємо kx замість x, а замість z підставляємо kz та прирівнюємо показники степенів k у кожному доданку:

$$3+(m-1)=4=2m.$$

Звідси маємо $m=2$.

Отже, зробивши заміну $y=z^2$, ми вихідне рівняння зведемо до однорідного

$$2x^3z\,dz-(x^4+z^4)\,dx=0.$$

Ділимо рівняння на x^4 і робимо заміну

$$u=\frac{z}{x} \Rightarrow z=ux \Rightarrow dz=u\,dx+x\,du.$$

Тоді одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$2ux\,du-(u^2-1)^2\,dx=0.$$

Поділивши останнє рівняння на $x(u^2-1)^2$ та проінтегрувавши його, одержуємо розв'язок рівняння

$$-\frac{1}{u^2-1}=\ln|xC|.$$

Повертаючись до змінних x та z, а потім до – x та y матимемо розв'язок вихідного рівняння

$$\frac{x^2}{x^2-y}=\ln|xC| \quad \Rightarrow \quad x^2=(x^2-y)\ln|xC|.$$

Оскільки ми ділили рівняння на $x(u^2-1)^2$, то треба перевірити чи ми не втратили розв'язки. Маємо

$$u^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=\pm1 \quad \Rightarrow \quad z=\pm\,x \quad \Rightarrow \quad y=x^2.$$

Підставляючи функцію $y=x^2$ у вихідне рівняння, у результаті отримаємо рівність, тобто ця функція є розв'язком даного рівняння.

Відповідь: $x^2=(x^2-y)\ln|xC|, \quad y=x^2$ — сім'я всеможливих розв'язків даного рівняння. ►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:

62. $(x\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x} - y)\,dx + x\,dy = 0$;

86. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$;

89. $(y' + 1)\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3}$;

102. $(2x - 3y + 1)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0$; **118.** $2x^2y' = y^3 + xy$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння:

60. $(x - y - \sqrt{xy})\,dx + \sqrt{xy}\,dy = 0$; **65.** $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$;

72. $(13x + y)\,dx + (y - 5x)\,dy = 0$;

81. $(x + y + y\cos\dfrac{y}{x})\,dx - (x\cos\dfrac{y}{x} + x)\,dy = 0$;

84. $(x - 2y - 1)\,dx + (3x - 6y + 2)\,dy = 0$;

94. $(2y - 1)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0$;

100. $(1 - 2x - 2y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$;

103. $(2x + y + 1)^2\,dx + (x - 1)^2\,dy = 0$; **116.** $4xy^2 + (x^2y + 1)y' = 0$;

121. $2y' + x = 4\sqrt{y}$; **132.** $y(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1})\,dx + 2x\,dy = 0$.

142. Знайти криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки кривої є середнє арифметичне між координатами точки.

Додаткові завдання:

Розв'язати рівняння:

59. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})\,dx - x\,dy = 0$;

69. $(3y - 2x)\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$;

92. $(2y + 3)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$;

130. $2xy^3\,dx + (x^2y^2 + 1)\,dy = 0$.

Відповіді:

59. $\arcsin\dfrac{y}{x} - \ln|x| = C$;

60. $(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 e^{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}} = C$, $x = 0$;

62. $\cos\frac{y}{x} = Cx$, $x = 0$; **65.** $\ln\dfrac{x + y}{x} = Cx$;

69. $(y + 2x)^4 = C(y - x)$;

72. $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y - 2x}{3x} = \ln C(y^2 - 4xy + 13x^2)$;

81. $\ln|x| + \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x} = C$; **84.** $x + 3y - \ln|x - 2y| = C$;

86. $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$; **89.** $\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = 1 + \dfrac{C}{x + y}$;

92. $(2y + 3)(3x + y - 12)^2 = C$; **94.** $(2y - 1)(2y + 8x + 5) = C$;

100. $(y - x)^4 = C(4y + 8x - 3)$, $4y + 8x - 3 = 0$;

102. $\ln[(5y - 3)^2 - 2(5y - 3)(5x - 2) + 2(5x - 2)^2] +$
$+ 4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{5y - 5x - 1}{5x - 2} = C$;

103. $(x - 1)^3(y + x + 2) = C(y + 4x - 1)$, $y = 1 - 4x$;

116. $1 - x^2y^4 = Cy^2$, $y = 0$; **118.** $x = -y^2\ln Cx$, $y = 0$;

121. $(2\sqrt{y} - x)\ln C(2\sqrt{y} - x) = x$, $2\sqrt{y} = x$;

130. $\sqrt{y}-x^2\sqrt{y^3}=C$; **132.** $x^2(\sqrt{x^4y^2+1}-x^2y)=C$;
142. $y=\dfrac{1}{2}\left(Cx^2-\dfrac{1}{C}\right)$.

Практичне заняття № 4

Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них (I)

Довідкова інформація

Тут розглянемо дуже важливий клас рівнянь першого порядку.

Означення 1. *Лінійним рівнянням (ЛР) першого порядку називається рівняння, яке можна записати у вигляді*

$$y' + a_1(x)y = f(x), \tag{22}$$

де a_1 *і* f *– задані і неперервні на інтервалі* (a, b) *функції.*

Функція a_1 називається *коефіцієнтом*, а функція f — *вільним членом* рівняння (43). Якщо в рівнянні (43) маємо $f = 0$, тобто воно має вигляд

$$y' + a_1(x)y = 0, \tag{23}$$

то це рівняння називають *лінійним однорідним рівнянням* (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР).

Якщо в рівняннях (43) та (44) коефіцієнти однакові, то рівняння (44) називається лінійним однорідним рівнянням *відповідним* лінійному неоднорідному рівнянню (43).

Твердження 1. *Нехай*

$$y = \overset{\circ}{y}(x, C), \quad x \in (a, b), \ C \in \mathbb{R},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (44)*, а*

$$y = \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a, b),$$

— частковий розв'язок рівняння (43)*. Тоді*

$$y = \overset{\circ}{y}(x, C) + \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a, b), \ C \in \mathbb{R},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (43)*.*

Алгоритм розв'язування лінійного рівняння першого порядку

Розглянемо рівняння (43). Згідно з твердженням 2 повний загальний розв'язок рівняння (43) є сумою повного загального розв'язку рівняння (44) і часткового розв'язку рівняння (43). Отож, нам треба робити три кроки.

1-ий крок: *Знаходимо повний загальний розв'язок рівняння (44).*

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Отож, маємо

$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x)y \quad \Big| \times \frac{dx}{y}. \tag{24}$$

Помножимо це рівняння на dx і поділимо на y. У результаті отримаємо еквівалентну рівнянню (44) сукупність рівнянь

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\,dx; \qquad y = 0.$$

Отож, всеможливі розв'язки (45) задаються співвідношеннями

$$\ln|y| = -\int a_1(x)\,dx + \ln|C|, \quad C \neq 0; \qquad y = 0.$$

Звідси випливає вираз повного загального розв'язку рівняння (44):

$$y = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

2-ий крок: *Знаходимо частковий розв'язок рівняння (43).*

Для знаходження часткового розв'язку $y = \overset{*}{y}(x)$, $x \in (a,b)$, рівняння (43) використаємо *метод варіації сталої.* Суть цього методу полягає в тому, що, маючи зображення загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння, частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо як функцію, зображення якої відрізняється від зображення загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння тільки тим, що замість сталої C стоїть певна функція від незалежної змінної. Точніше, частковий розв'язок рівняння (43) шукаємо у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx}, \tag{25}$$

де $\varphi \in C^1(a,b)$ така, що виписана функція є розв'язком рівняння (43).

Для знаходження виразу φ підставляємо вираз (46) в (43). Тоді отримаємо

$$\varphi'(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} - a_1(x)\varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} + a_1(x)\varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Звідси маємо

$$\varphi'(x) = f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}.$$

Отже

$$\varphi(x) = \int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx. \tag{26}$$

Із (46) та (47) отримуємо зображення часткового розв'язку рівняння (43)

$$y = e^{-\int a_1(x)\,dx}\int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx. \tag{27}$$

3-ий крок: *Записуємо повний загальний розв'язок рівняння (43) у вигляді суми повного загального розв'язку рівняння (44) і часткового розв'язку рівняння (43).*

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$y = Ce^{-\int a_1(x)\,dx} + e^{-\int a_1(x)\,dx}\int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx, \quad x \in (a,b), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Тепер розглянемо **рівняння, які зводяться до лінійних**.

1) ***Рівняння Бернуллі***, тобто рівняння, які можна записати у вигляді

$$y' + \widetilde{a}(x)y = \widetilde{b}(x)y^n, \tag{28}$$

де $n \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ — задані на інтервалі (a,b) функції.

Очевидно, що коли $n > 0$, то задане рівняння має частковий розв'язок $y \equiv 0$, а якщо $n < 0$, то такого розв'язку дане рівняння не має. Знайдемо інші розв'язки рівняння (49). Для цього поділимо його на y^n:

$$y^{-n}y' + \widetilde{a}(x)y^{1-n} = \widetilde{b}(x). \tag{29}$$

Зробимо тут заміну змінних

$$z = y^{1-n}.$$

Тоді

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Leftrightarrow \quad y'y^{-n} = \frac{1}{1-n}z'.$$

У результаті прийдемо до лінійного рівняння

$$\frac{1}{1-n}z' + \widetilde{a}(x)z = \widetilde{b}(x).$$

2) *Рівняння, які можна записати у вигляді*

$$\big(h(y)x + g(y)\big)y' = q(y). \tag{30}$$

Ці рівняння розв'язують таким чином. Шукаємо не функції $y = y(x)$, які є розв'язками заданого рівняння, а обернені до них функції $x = x(y)$. Враховуючи зв'язок між похідними взаємно обернених функцій, маємо рівність

$$y' = \frac{1}{x'}\,.$$

Враховуючи це, з рівняння (51) отримаємо лінійне рівняння з невідомою функцією x від незалежної змінної y:

$$q(y)x' = h(y)x + g(y). \tag{31}$$

Множина всеможливих розв'язків рівняння (51) неявно визначається загальним розв'язком рівняння (52), до якого треба долучити сталі функції

$$y = y_i, \qquad i \in I \subset \mathbb{N},$$

де y_i, $i \in \mathbb{S}$, — розв'язки рівняння

$$q(y) = 0, \tag{32}$$

з області визначення функцій h і g , в чому легко переконатися безпосередньо.

3) *Рівняння вигляду*

$$\big(m(y)x^n + h(y)x\big)y' = q(y),$$

переходом до відшукання функцій $x = x(y)$, обернених до розв'язків $y = y(x)$ даного рівняння, зводиться до рівняння Бернуллі (стосовно x)

$$q(y)x' - h(y)x = m(y)x^n.$$

4) *Рівняння вигляду*

$$c(x)\psi'(y)y' + d(x)\psi(y) = g(x)$$

зводяться до лінійного

$$c(x)z' + d(x)z = g(x)$$

заміною змінних

$$z = \psi(y) \qquad (\text{тоді} \;\; z' = \psi'(y)y').$$

5) *Рівняння Рікатті*, тобто, рівняння, які можна записати у вигляді

$$y' + c(x)y + d(x)y^2 = g(x),$$

де c, $d \not\equiv 0$, g — задані функції.

Це рівняння зводиться до рівняння Бернуллі таким чином. Нехай нам відомо частковий розв'язок $y = y_1(x)$ цього рівняння. Тоді робимо в заданому рівнянні заміну змінних

$$y = z + y_1(x).$$

У результаті отримаємо

$$z' + y_1'(x) + c(x)(z + y_1(x)) + d(x)(z + y_1(x))^2 = g(x),$$

звідки

$$z' + \big[c(x) + 2d(x)y_1(x)\big]z + d(x)z^2 = g(x) - (y_1'(x) + c(x)y_1(x) + d(x)y_1^2(x)).$$

Оскільки $y = y_1(t)$ — розв'язок рівняння Рікатті, то звідси маємо рівняння Бернуллі

$$z' + \widetilde{a}(x)z = \widetilde{d}z^2,$$

де $\widetilde{a}(x) := c(x) + 2d(x)y_1(x)$, $\widetilde{d}(x) := -d(x)$, $x \in (a, b)$.

Контрольні питання

1. Що таке лінійне рівняння першого порядку? Що називається коефіцієнтом, вільним членом лінійного рівняння першого порядку? Що називається лінійним однорідним, неоднорідним рівнянням? Що таке лінійне однорідне рівняння відповідне лінійному неоднорідному рівнянню?

2. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння? Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, якщо відомий один його ненульовий частковий розв'язок?

3. Як знайти загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння, якщо відомий його частковий розв'язок і загальний розв'язок відповідного йому лінійного однорідного рівняння?

4. В чому полягає суть методу варіації сталої для знаходження часткового розв'язку лінійного рівняння? Який вигляд має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?

5. Які класи рівнянь зводяться до лінійних рівнянь? Що таке рівняння Бернуллі, Рікатті? Як знайти загальний розв'язок рівняння Рікатті? У якому випадку це можна зробити?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$2x(x^2+y)\,dx = dy.$$

◀ Запишемо дане рівняння у стандартному вигляді

$$y' - 2xy = 2x^3. \tag{33}$$

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' - 2xy = 0. \tag{34}$$

Маємо

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Big| \times \frac{dx}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2x\,dx,\ y=0 \ \Leftrightarrow\ \ln|y| = x^2 + \ln|C|,\ C \neq 0,\ y = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$y = Ce^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (34).

2-ий крок. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (33) шукаємо методом варіації сталої, тобто у виразі (500) міняємо сталу C на функцію φ і отримуємо проект розв'язку рівняння (33) у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{x^2}, \tag{36}$$

де φ визначаємо з умови, що функція, задана в (36), є розв'язком рівняння (33).

Отож, підставляємо вираз (36) у рівняння (33):

$$\varphi'(x)e^{x^2} + 2x\varphi(x)e^{x^2} - 2x\varphi(x)e^{x^2} = 2x^3.$$

Звідси маємо

$$\varphi'(x) = 2x^3e^{-x^2} \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int 2x^3e^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}(x^2+1).$$

Підставивши вираз φ проект розв'язку (36), отримаємо

$$y = -(x^2+1)$$

– частковий розв'язок рівняння (33).

3-ий крок. Оскільки повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння та часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, то

$$y = Ce^{x^2} - (x^2+1)$$

– повний загальний розв'язок рівняння (33). ▶

2. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{y}{3x-y^2}.$$

◄ Дане рівняння не є лінійним. Будемо шукати замість функцій $y = y(x)$ обернені до них $x = x(y)$. Тоді, врахувавши зв'язок між похідними взаємно обернених функцій

$$y' = \frac{1}{x'}$$

отримаємо з вихідного таке рівняння

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{3x - y^2} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{3x - y^2}{y} \quad \Rightarrow$$

$$x' - \frac{3}{y}x = -y, \tag{37}$$

тобто ми одержали рівняння, яке є лінійним відносно змінної x (в даному випадку незалежною змінної виступає y, а функція x залежить від y). Зауважимо, що $y = 0$ є розв'язком вихідного рівняння.

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійно однорідного рівняння

$$x' - \frac{3}{y}x = 0.$$

Робимо відповідні перетворення

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{x} = \frac{3}{y}\,dy \;\Leftrightarrow\; \ln|x| = 3\ln|y| + \ln|C|,\; c \neq 0,\;\; y = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$x = Cy^3$$

– повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння.

2-ий крок. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (37) шукаємо у вигляді

$$x = \varphi(y)y^3, \tag{38}$$

де φ шукаємо з умови, що визначена в (436) функція є розв'язком рівняння (37).

Підставимо вираз (436) у вихідне рівняння

$$\varphi'(y)y^3 + 3y^2\varphi(y) - 3y^2\varphi(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{1}{y}.$$

Підставляючи знайдений вираз у проект часткового розв'язку (436), знаходимо

$$x = y^2$$

– частковий розв'язок рівняння (37).

3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (37) є

$$x = Cy^3 + y^2.$$

Отож, сім'я всеможливих розв'язків вихідного рівняння є

$$x = Cy^3 + y^2, \quad y = 0.$$

. ►

3. Розв'язати рівняння

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

◀ Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Поділимо його на y^3 :

$$xy^{-3}y' + 2y^{-2} + x^5e^x = 0, \quad y = 0. \tag{39}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$z = y^{-2}, \quad z' = -2y^{-3}y',$$

отримаємо лінійне рівняння

$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4e^x. \tag{40}$$

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' - \frac{4}{x}z = 0. \tag{41}$$

Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4}{x}z \ \Leftrightarrow \ \frac{dz}{z} = \frac{4}{x}\,dx \ \Leftrightarrow \ \ln|z| = 4\ln|x| + \ln|C|, \ C \neq 0, \ \Leftrightarrow$$

$$z = Cx^4$$

– повний загальний розв'язок рівняння (41).

2-ий крок. Частковий розв'язок рівняння (40) шукаємо у вигляді

$$z = \varphi(x) \cdot x^4, \tag{42}$$

де φ шукаємо з умови, що функція, визначена в (42), є розв'язком рівняння (40).

Підставимо вираз (42) у рівняння (40):

$$4x^3\varphi(x) + x^4\varphi'(x) - 4x^3\varphi(x) = 2x^4e^x,$$

звідки маємо

$$\varphi(x) = 2e^x.$$

Тоді

$$z = 2x^4e^x$$

– частковий розв'язок рівняння (40).

3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (40):

$$z = Cx^4 + 2x^4e^x.$$

Повертаючись до старих змінних, записуємо розв'язок вихідного рівняння (39):

$$\frac{1}{y^2} = Cx^4 + 2x^4e^x, \quad y = 0.$$

▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:
149. $xy' - 2y = 2x^4$; **156.** $(xy' - 1)\ln x = 2y$;
159. $(2e^y - x)y' = 1$; **170.** $y\,dx + (2x - e^y)\,dy = 0$;
189. $y' + 2y = y^2e^x$; **197.** $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$;
204. $y'x = 2\sqrt{y}(\ln x - \sqrt{y})$.

Домашнє завдання:

Розв'язати рівняння:
151. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; **154.** $y = x(y' - x\cos x)$;
158. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$; **163.** $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$;
172. $xy' = 3 - (2x + 3)y$; **191.** $y' = y^4 \cos x + y\operatorname{tg} x$;
194. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$; **198.** $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$;
203. $y'(1 - x^2) = xy(1 - by)$; **215.** $1 = 4x\sqrt{y}(1 - \sqrt{y}y')$;
220. $dx = \left(8xy + 4(y+1)e^{y^2}x^{3/4}\right)\,dy$.

227. Відрізок на осі OX, який відтинається нормаллю до деякої кривої, дорівнює $\dfrac{y^2}{x}$. Знайти цю криву.

Відповіді:

149. $y = Cx^2 + x^4$; **151.** $y = \sin x + C\cos x$;
154. $y = x(C + \sin x)$; **156.** $y = C\ln^2 x - \ln x$;
158. $x = y^2 + Cy$, $y = 0$; **159.** $x = e^y + Ce^{-y}$;
163. $(y-1)^2 x = y - \ln Cy$, $y = 0$, $y = 1$;
170. $x = [C + (+y-)e^y]y^{-2}$;
172. $y = \left[Ce^{-2x} + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right]x^{-3}$;
189. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$, $y = 0$;
191. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$, $y = 0$;
194. $y = x^4 \ln^2 Cx$, $y = 0$; **197.** $x^2(C - \cos y) = y$, $y = 0$;
198. $xy(C - \ln^2 y) = 1$; **203.** $(b + C\sqrt{1 - x^2})y = 1$, $y = 0$;
204. $2x\sqrt{y} = \ln^2 x + C$, $y = 0$; **215.** $\sqrt{y} = 1 + Ce^{-x^2}$;
220. $x^{1/4} = \dfrac{(y+1)^2}{2}e^{y^2} + Ce^{y^2}$, $x = 0$; **227.** $y^2 = 2x^2(C - \ln x)$.

Практичне заняття № 5

Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них (II)

Довідкова інформація

Нагадаємо відомі факти щодо лінійних рівнянь першого порядку.

Означення 2. *Лінійним рівнянням (ЛР) першого порядку називають рівняння, яке можна записати у вигляді*
$$y' + a_1(x)y = f(x), \tag{43}$$
де a_1 і f – задані і неперервні на інтервалі (a,b) функції (тут і далі $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Функція a_1 називається *коефіцієнтом*, а функція f — *вільним членом* рівняння (43). Якщо в рівнянні (43) маємо $f = 0$, тобто воно має вигляд
$$y' + a_1(x)y = 0, \tag{44}$$
то його називають *лінійним однорідним рівнянням* (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР).

Якщо в рівняннях (43) та (44) коефіцієнти однакові, то рівняння (44) називають лінійним однорідним рівнянням *відповідним* лінійному неоднорідному рівнянню (43).

Твердження 2. *Нехай*
$$y = \overset{\circ}{y}(x, C), \quad x \in (a,b), \ C \in \mathbb{R},$$
– повний загальний розв'язок рівняння (44), *а*
$$y = \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a,b),$$
— частковий розв'язок рівняння (43).

Тоді
$$y = \overset{\circ}{y}(x, C) + \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a,b), \ C \in \mathbb{R},$$
– повний загальний розв'язок рівняння (43).

Алгоритм розв'язування лінійного рівняння першого порядку

Розглянемо алгоритм розв'язування рівняння (43). Згідно з твердженням 2 повний загальний розв'язок рівняння (43) є сумою повного загального розв'язку рівняння (44) і часткового розв'язку рівняння (43). Тому для знаходження повного загального розв'язку рівняння (43) потрібно робити такі три кроки.

1-ий крок: *Знаходимо повний загальний розв'язок рівняння (44).*

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Отож, маємо
$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x)y \quad \Big| \times \frac{dx}{y}. \tag{45}$$
Помножимо це рівняння на dx і поділимо на y. У результаті отримаємо еквівалентну рівнянню (44) сукупність рівнянь
$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\,dx \quad \text{або} \quad y = 0.$$

Отож, всеможливі розв'язки (45) задаються співвідношеннями

$$\ln|y| = -\int a_1(x)\,dx + \ln|C|, \quad C \neq 0, \quad \text{або} \quad y = 0,$$

де $\int a_1(x)\,dx$ — яка-небудь первісна функції a_1. Звідси отримуємо вираз повного загального розв'язку рівняння (44):

$$y = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

2-ий крок: *Знаходимо частковий розв'язок рівняння (43).*

Для знаходження часткового розв'язку $y = \overset{*}{y}(x)$, $x \in (a,b)$, рівняння (43) використаємо *метод варіації сталої*. Суть цього методу полягає в тому, що, маючи зображення повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння, частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо як функцію, зображення якої відрізняється від зображення повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння тільки тим, що замість сталої C стоїть певна функція від незалежної змінної. А точніше, частковий розв'язок рівняння (43) шукаємо у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx}, \tag{46}$$

де $\varphi \in C^1(a,b)$ така, що виписана функція є розв'язком рівняння (43).

Для знаходження виразу φ підставляємо вираз (46) в рівняння (43). Тоді отримаємо

$$\varphi'(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} - a_1(x)\varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} + a_1(x)\varphi(x)e^{-\int a_1(x)\,dx} = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Звідси маємо

$$\varphi'(x) = f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}.$$

Отже

$$\varphi(x) = \int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx \tag{47}$$

— яка-небудь первісна функції $f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}$, $x \in (a,b)$. Із (46) та (47) отримуємо зображення часткового розв'язку рівняння (43)

$$y = e^{-\int a_1(x)\,dx}\int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx. \tag{48}$$

3-ий крок: *Записуємо повний загальний розв'язок рівняння (43) у вигляді суми повного загального розв'язку рівняння (44) і часткового розв'язку рівняння (43).*

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$y = Ce^{-\int a_1(x)\,dx} + e^{-\int a_1(x)\,dx}\int f(x)e^{\int a_1(x)\,dx}\,dx, \quad x \in (a,b), \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Тепер розглянемо **рівняння, які зводяться до лінійних**.

1) ***Рівняння Бернуллі***, тобто рівняння, які можна записати у вигляді

$$\widetilde{a}(x)y' + \widetilde{b}(x)y + \widetilde{c}(x)y^n = 0, \tag{49}$$

де $n \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ — задані на інтервалі (a,b) функції.

Очевидно, що коли $n > 0$, то задане рівняння має частковий розв'язок $y \equiv 0$, а якщо $n < 0$, то такого розв'язку дане рівняння не має. Знайдемо інші розв'язки рівняння (49). Для цього поділимо його на y^n:

$$\widetilde{a}(x)y^{-n}y' + \widetilde{b}(x)y^{1-n} + \widetilde{c}(x) = 0. \tag{50}$$

Зробимо тут заміну змінних

$$z = y^{1-n}.$$

Тоді

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Leftrightarrow \quad y'y^{-n} = \frac{1}{1-n}z'.$$

У результаті прийдемо до лінійного рівняння

$$\frac{1}{1-n}\widetilde{a}(x)z' + \widetilde{b}(x)z + \widetilde{c}(x) = 0.$$

2) *Рівняння, які можна записати у вигляді*

$$\big(h(y)x + g(y)\big)y' = q(y). \tag{51}$$

Ці рівняння розв'язують таким чином. Шукаємо не функції $y = y(x)$, які є розв'язками заданого рівняння, а обернені до них функції $x = x(y)$. Враховуючи зв'язок між похідними взаємно обернених функцій, маємо рівність

$$y' = \frac{1}{x'}\,.$$

Враховуючи це, з рівняння (51) отримаємо лінійне рівняння з невідомою функцією x від незалежної змінної y:

$$q(y)x' = h(y)x + g(y). \tag{52}$$

Множина всеможливих розв'язків рівняння (51) неявно визначається загальним розв'язком рівняння (52), до якого треба долучити сталі функції

$$y = y_i, \qquad i \in K \subset \mathbb{N},$$

де y_i, $i \in K$, — розв'язки рівняння

$$q(y) = 0, \tag{53}$$

з області визначення функцій h і g , в чому легко переконатися безпосередньо.

3) *Рівняння вигляду*

$$\big(m(y)x^n + h(y)x\big)y' = q(y),$$

переходом до відшукання функцій $x = x(y)$, обернених до розв'язків $y = y(x)$ даного рівняння, зводиться до рівняння Бернуллі (стосовно x)

$$q(y)x' - h(y)x - m(y)x^n = 0.$$

4) *Рівняння вигляду*

$$c(x)\psi'(y)y' + d(x)\psi(y) = g(x)$$

зводяться до лінійного
$$c(x)z' + d(x)z = g(x)$$
заміною змінних
$$z = \psi(y) \qquad (\text{тоді} \ \ z' = \psi'(y)y').$$

5) *Рівняння Рікатті*, тобто, рівняння, які можна записати у вигляді
$$y' + c(x)y + d(x)y^2 = g(x),$$
де c, $d \not\equiv 0$, g — задані функції.

Це рівняння зводиться до рівняння Бернуллі таким чином. Нехай нам відомо частковий розв'язок $y = w(x)$ цього рівняння. Тоді робимо в заданому рівнянні заміну змінних
$$y = z + w(x).$$
У результаті отримаємо
$$z' + w'(x) + c(x)(z + w(x)) + d(x)(z + w(x))^2 = g(x),$$
звідки
$$z' + \big[c(x) + 2d(x)w(x)\big]z + d(x)z^2 = g(x) - (w'(x) + c(x)w(x) + d(x)w^2(x)).$$
Оскільки $y = w(x)$ — розв'язок рівняння Рікатті, а це означає, що ліва частина даного рівняння рівна нулю, то отримаємо рівняння Бернуллі
$$z' + \widetilde{a}(x)z + d(x)z^2 = 0,$$
де $\widetilde{a}(x) := c(x) + 2d(x)w(x), \ \ x \in (a, b)$.

Контрольні питання

1. Що таке лінійне рівняння першого порядку?
2. На якому твердженні базується алгоритм розв'язування лінійних рівнянь?
3. Які рівняння зводяться до лінійних?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння
$$x(e^y - y') = 2.$$
◀ Поділимо дане рівняння на e^y і перепишемо його у вигляді
$$x - xe^{-y}y' = 2e^{-y}. \tag{54}$$
Зробивши заміну
$$z = e^{-y} \quad (\text{тоді} \quad z' = -e^{-y}y'), \tag{55}$$
зведемо рівняння (54) до лінійного, яке запишемо в стандартному вигляді
$$z' - \frac{2}{x}z = -1. \tag{56}$$

Розв'яжемо це рівняння, тобто знайдемо його повний загальний розв'язок.

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння
$$z' - \frac{2}{x}z = 0. \tag{57}$$
Маємо
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z \,\Big|\cdot\frac{dx}{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x} \quad \vee \quad z = 0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C|,\ C \neq 0 \ \vee \quad z = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$z = Cx^2$$
– повний загальний розв'язок о рівняння (57).
2-ий крок. Записуємо проект часткового розв'язку рівняння (56) у вигляді
$$z = \varphi(x)\,x^2,$$
де φ — деяка функція. Підставимо цей вираз у лінійне неоднорідне рівняння (56). У результаті отримаємо
$$\varphi'(x)x^2 + 2x\varphi(x) - \frac{2}{x}\varphi(x)x^2 = -1.$$
Звідси маємо $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, тобто $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Отож,
$$z = x$$
– частковий розв'язок рівняння (56).
3-ий крок. Записуємо повний загальний розв'язок рівняння (56):
$$z = Cx^2 + x.$$
Повертаючись до старих змінних, отримаємо розв'язок рівняння (54):
$$e^{-y} = Cx^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad y = -\ln(Cx^2 + x).$$
▶
2. Розв'язати рівняння
$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(t)\,dt.$$
◀ Продиференціюємо це рівняння по змінній x, використовуючи формулу диференціювання інтеграла зі змінною межею:
$$\frac{d}{dx}\Big(\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\Big) = f(x).$$
У результаті одержуємо
$$y' = y. \tag{58}$$
Із заданого інтегрального рівняння, поклавши $x = 0$, знаходимо
$$y(0) = 1. \tag{59}$$
Відокремлюючи змінні у рівнянні (58), знаходимо повний загальний розв'язок рівняння (58):
$$y = Ce^x,$$

де C – довільна стала. Тоді, підставивши вираз повного загального розв'язку рівняння (58) в умову (59), знаходимо $C = 1$. Отже, розв'язок вихідного інтегрального рівняння

$$y = e^x.$$

▶

3. Завдяки підбору часткового розв'язку звести дане рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі та розв'язати його:

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$$

◀ Частковий розв'язок рівняння Ріккаті шукаємо у вигляді $y = ax + b$, де a, b – неозначені коефіцієнти. Підставимо вираз часткового розв'язку у дане рівняння:

$$xa - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звівши подібні доданки, отримаємо

$$(-2a + a^2 + 1)x^2 + (a - 2b - a + 2ab)x + (-b + b^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad -2b + 2ab = 0, \quad -b + b^2 = 0,$$

а отже, маємо $a = 1$ і $b = 0$ або $b = 1$. Оскільки нам потрібен один частковий розв'язок даного рівняння, то візьмемо $b = 0$, тобто розв'язок $y = x$. Далі робимо в заданому рівнянні заміну невідомої функції

$$y = z + x.$$

У результаті отримаємо рівняння Бернуллі

$$x(z'+1) - (2x+1)(z+x) + (z+x)^2 = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad xz' - z + z^2 = 0. \tag{60}$$

Поділивши рівняння (60) на z^2, зробимо заміну $u = z^{-1}$ і врахуємо, що $u' = -z^{-2}z'$. Тоді отримаємо $-xu' - u + 1 = 0$, звідки

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}. \tag{61}$$

Зауважимо, що $z = 0$ є розв'язком рівняння (60). Розв'яжемо рівняння (61).
1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$u' + \frac{1}{x}u = 0.$$

Знаходимо

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}u \Big| \cdot \frac{dx}{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},\ u = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|u| = -\ln|x| + \ln|C|,\ u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{C}{x}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.
2-ий крок. Частковий розв'язок рівняння (61) шукаємо у вигляді

$$u = \frac{\varphi(x)}{x},$$

де φ – шукана функція.

Знаходимо

$$\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = 1.$$

Звідси $\varphi(x) = x$, а отже, $u = 1$ — частковий розв'язок заданого рівняння.
3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (61):

$$u = \frac{C}{x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{C + x}{x}.$$

Повертаючись до старих змінних, маючи на увазі, що $z = \frac{1}{u} \Rightarrow y = \frac{1}{u} + x$, записуємо сім'ю всеможливих розв'язків вихідного рівняння: $y = \frac{x}{C+x} + x \quad \vee \quad y = x$ (тут враховано, що функція $z = 0$ є розв'язком рівняння (60)). ►

4. Знайти лінії, ортогональні до лінії сім'ї гіпербол

$$xy = C.$$

◄ Складемо диференціальне рівняння даної сім'ї гіпербол. Для цього продиференціюємо рівняння сім'ї за змінною x:

$$xy' + y = 0.$$

Відомо, що дві прямі $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ ортогональні тоді і лише тоді, коли між їхніми кутовими коефіцієнтами існує зв'язок: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Оскільки $k_1 = y'$, то $k_2 = -1/y'$ і диференціальне рівняння ліній, ортогональних до даних гіпербол, має вигляд

$$-\frac{x}{y'} + y = 0 \Rightarrow \quad y\,dy - x\,dx = 0.$$

Звідси знаходимо $y^2 - x^2 = C$ – лінії, які ортогональні до даної сім'ї гіпербол. ►

5. Знайти розв'язок рівняння

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

який залишається обмеженим при $x \to \frac{\pi}{2}$.

◄ Дане рівняння є лінійним. Запишемо його у стандартному вигляді:

$$y' - \frac{2}{\sin 2x}y = \frac{1}{\sin x}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{62}$$

та розв'яжемо.
1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$y' - \frac{2}{\sin 2x}y = 0.$$

Відокремлюючи змінні, знаходимо повний загальний розв'язок цього рівняння

$$y = C \operatorname{tg} x,$$

де C — довільна стала.
2-ий крок. Частковий розв'язок рівняння (62) шукаємо у вигляді

$$y = \varphi(x) \operatorname{tg} x,$$

де φ — шукана функція.

З рівняння (62) знаходимо

$$\varphi'(x)\operatorname{tg} x + \varphi(x)\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin 2x}\varphi(x)\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Звідси матимемо $\varphi'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, тобто $\varphi(x) = -\frac{1}{\sin x}$. Отож,

$$y = -\frac{1}{\cos x}$$

– частковий розв'язок рівняння (62).

3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (62):

$$y = C\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \equiv \frac{C\sin x - 1}{\cos x}.$$

Оскільки $\cos x \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, то з умови, що розв'язок обмежений, випливає, що має бути $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(C\sin x - 1) = C - 1 = 0$, звідки $C = 1$. Отже, тільки функція

$$y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \equiv \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

може бути шуканим розв'язком. А в тому, що це справді так, переконуємося, знайшовши за правилом Лопіталля розкриття невизначеності типу $\frac{0}{0}$ границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\cos x}{-\sin x} = 0.$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:

161*. $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$; **165*.** $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

Завдяки підбору часткового розв'язку звести дане рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі та розв'язати його:

167***.** $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

172*. Знайти траєкторії, ортогональні до ліній сім'ї $y^2 = Ce^x + x + 1$.

234. Показати, що тільки один розв'язок рівняння $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ прямує до скінченної границі при $x \to +\infty$, і знайти цю границю.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння:

162*. $(x + 1)(yy' - 1) = y^2$;

164*. $(x^2 - 1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$;

166*. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt$.

Завдяки підбору часткового розв'язку звести дані рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі та розв'язати їх:

168*. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$;   **170*.** $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.
226. Знайти криву, дотична до якої в точці (x, y) проходить через точку (x^2, y^2).
235. Знайти періодичний розв'язок рівняння
$y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

Додаткові завдання:

Розв'язати рівняння:
163*. $x(e^y - y') = 2$.

Відповіді:

161*. $x^2 = Ce^{2y} + 2y$;   **162*.** $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$;
163*. $e^{-y} = Cx^2 + x$;   **164*.** $\cos y = (x^2-1)\ln C(x^2-1)$;
165*. $y = 2e^x - 1$;   **166*.** $y = -2e^x$;
167*. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}$, $y = \dfrac{2}{x}$;
168*. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}$, $y = \dfrac{1}{x}$;
170*. $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1}$, $y = x + 2$;
172*. $3x = C\sqrt{|y|} - y^2$, $y = 0$;   **226.** $y(2x - 1 + C(x-1)^2) = x^2$;
234. $y = x\int\limits_{+\infty}^{x} e^{x^2 - t^2}\,dt \to -\dfrac{1}{2}$ при $x \to \infty$;
235. $y = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t-\sin t\cos(t+2x)}\sin(x+t)\,dt$.

Практичне заняття № 6

Контрольна робота № 1

Варіант № 1

1. $xy' + 2y = 6x^4$; 2. $y - x(1+x^2)e^{-arctgx}y^2 = (1+x^2)y'$;
3. $(y+1)^2 + (2(y+1)^2x - 1)y' = 0$; 4. $(6xy - 2y^3)y' = x + y^2$;
5. $(5x + y - 6)\,dx + (3x + y - 4)\,dy = 0$; 6. $xy' - y + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = 0$;
7. $x(1+y^2)\,dx + (1+x)(2y+1)\,dy = 0$; 8. $2y' + 1 = \sqrt{x + 2y - 1}$.

Практичне заняття № 7
Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник

Довідкова інформація

Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$, M, N – визначені та неперервні на D функції і

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{63}$$

– рівняння в симетричній формі.

Рівнянням в повних диференціалах називають рівняння вигляду (63), ліва частина якого є повним диференціалом деякої функції $F(x,y)$, $(x,y) \in D$, тобто

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \qquad (x,y) \in D. \tag{64}$$

Нагадаємо, що повний диференціал функції F виражається формулою

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy, \quad (x,y) \in D. \tag{65}$$

Лема 1. *Рівняння* (63) *є рівнянням в повних диференціалах тоді і лише тоді, коли*

$$\exists F \in C^1(D): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \quad (x,y) \in D. \end{cases}$$

Лема 2. *Нехай D — однозв'язна область і $M, N, \partial_y M, \partial_x N$ – неперервні на D. Тоді рівняння* (63) *є рівнянням в повних диференціалах в тому і лише в тому випадку, коли виконується рівність*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad (x,y) \in D. \tag{66}$$

Відмітимо, що коли рівняння (63) є рівнянням в повних диференціалах, то його, на підставі (64), можна подати у вигляді

$$dF(x,y) = 0\,. \tag{67}$$

Теорема 2. *Якщо рівняння* (63) *є рівнянням в повних диференціалах, тобто його можна записати у вигляді* (67)*, то повний загальний інтеграл цього рівняння має вигляд*

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

Зауваження 1. *Зауважимо, що від рівняння вигляду* (63) *до рівняння вигляду* (67) *можна безпосередньо перейти, використовуючи лінійність операції диференціювання та метод виділення "інтегровних комбінацій", під якими розуміють формули диференціалів різних комбінацій функцій:*

$$d(u(x,y)\cdot v(x,y)) = du(x,y)\cdot v(x,y) + u(x,y)\cdot dv(x,y),$$

$$d\Big(\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\Big) = \frac{du(x,y)\cdot v(x,y) - u(x,y)\cdot dv(x,y)}{v^2(x,y)},$$

$$du^2(x,y) = 2u(x,y)du(x,y), \ \dots .$$

Наприклад, якщо $g_1(x), g_2(y), g_3(x), g_4(y)$ *– які-небудь неперервно диференційовні функції, то*

$$\left(g_1'(x) + g_2(y)g_3'(x)\right) dx + \left(g_2'(y)g_3(x) + g_4'(y)\right) dy = 0 \quad \Leftrightarrow \tag{69}$$

$$dg_1(x) + g_2(y)\, dg_3(x) + g_3(x)dg_2(y) + dg_4(y) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d \quad \big(g_1(x) + g_2(y)g_3(x) + g_4(y)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$g_1(x) + g_2(y)g_3(x) + g_4(y) = C, \quad C - \ \textit{довільна стала},$$

повний загальний інтеграл рівняння (69).

Якщо рівняння (63) не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu(x,y)$, $(x,y) \in D$, така, що після множення рівняння на цю функцію

$$\mu(x,y)M(x,y)\, dx + \mu(x,y)N(x,y)\, dy = 0 \tag{70}$$

ми отримаємо рівняння в повних диференціалах, то це рівняння називають **рівнянням, звідним до рівнянння в повних диференціалах,** а цю функцію μ – **інтегрувальним множником**.

Нехай $M, N, \partial_y M, \partial_x N \in C(D)$ і область D – однозв'язна. Очевидно, що згідно з (70) і лемою 2 функція $\mu \in C^1(D)$ є інтегрувальним множником рівняння (63) тоді і лише тоді, коли правильна тотожність

$$\partial_y\big(\mu(x,y)M(x,y)\big) = \partial_x\big(\mu(x,y)N(x,y)\big), \qquad (x,y) \in D, \tag{71}$$

де тут і далі використано позначення:

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}.$$

Отож, інтегрувальний множник $\mu \in C^1(D)$ рівняння (63) можна шукати, як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\mu\partial_y M + M\partial_y\mu = \mu\partial_x N + N\partial_x\mu. \tag{72}$$

Знаходження розв'язку цього рівняння не є простішим, а може є й складнішим завданням, ніж безпосереднє розв'язування рівняння (63). Але існують випадки, коли рівняння (72) має настільки простий вигляд, що його можна легко розв'язати. Розглянемо кілька таких випадків.

1) *Вираз*

$$\frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{N(x,y)} \tag{73}$$

явно від y *не залежить.*

Тоді μ *шукаємо, як функцію, залежну тільки від* x, *тобто* $\mu = \mu(x)$.

2) *Вираз*

$$\frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{M(x,y)} \tag{74}$$

явно від x *не залежить.*

Тоді розв'язок рівняння (72) шукаємо у вигляді функції $\mu = \mu(y)$ тільки від змінної y.

3) *Вираз*

$$\frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{xM(x,y) - yN(x,y)} \tag{75}$$

залежить тільки від xy.

Тоді шукаємо розв'язок рівняння (72) у вигляді функції $\mu(xy) \equiv \mu(z)|_{z=xy}$.

Подібним чином можна знаходити інтегрувальні множники вигляду $\mu(x/y)$, $\mu(x^2+y^2)$, тощо.

На практиці краще не обчислювати спочатку вирази (73), (74), (75) і визначати вигляд інтегрувального множника, а пробувати зразу шукати інтегрувальний множник певної структури як розв'язок рівняння (72). Наприклад, якщо припустити, що інтегрувальний множник залежить тільки від x, тобто має вигляд $\mu(x)$, то рівняння (72) набуде вигляду

$$\mu\partial_y M = \mu\partial_x N + N\mu', \tag{76}$$

звідки

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{N(x,y)}. \tag{77}$$

Оскільки ліва частина рівності (77) залежить тільки від змінної x, то для існування залежного від змінної x інтегрувального множника даного рівняння необхідно і достатньо, щоби вираз в правій частині рівності (77) явно від y не залежав, тобто

$$\frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{N(x,y)} \equiv g(x), \quad (x,y) \in D. \tag{78}$$

Тоді з (77) і (78) маємо

$$(\ln|\mu(x)|)' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{G(x)},$$

де G – первісна для g, тобто $G' = g$.

Контрольні питання

1. Що таке рівняння в повних диференціалах? За яких умов рівняння (63) є рівнянням в повних диференціалах? Як на практиці перевірити чи є рівняння (63) в повних диференціалах? Який вигляд має повний загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах?

2. Які рівняння називають звідними до рівнянь в повних диференціалах? Що таке інтегрувальний множник? За якої умови існує інтегрувальний множник, залежний тільки від x (тільки від y, тільки від xy)?

Приклади розв'язування типових завдань

1. Розв'язати рівняння

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0.$$

◀ Знайдемо відповідні частинні похідні

$$\partial_y\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}, \quad \partial_x\Big(y^3 + \ln x\Big) = \frac{1}{x}.$$

Оскільки праві частини цих рівностей співпадають, то згідно з лемою 2 дане рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто

$$\exists F(x,y): \quad \begin{cases} \partial_x F(x,y) = \dfrac{y}{x}, \\ \partial_y F(x,y) = y^3 + \ln x. \end{cases} \tag{79}$$

Співвідношення (79) трактуємо, як систему двох рівнянь для знаходження (однієї) функції F. Інтегруючи перше рівняння за змінною x, вважаючи змінну y довільно вибраною і зафіксованою, знаходимо

$$F(x,y) = y\ln x + \varphi(y),$$

де φ – поки що довільна функція. Підставимо знайдений вираз функції F у друге рівняння системи

$$\partial_y\big(y\ln x + \varphi(y)\big) = y^3 + \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + \varphi'(y) = y^3 + \ln x \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + C_*, \quad \text{де} \;\; C_* - \text{довільна стала.}$$

Отже, $F(x,y) = y\ln x + \frac{y^4}{4} + C_*$, а тому

$$y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$$

– повний загальний інтеграл вихідного рівняння.

Зауважимо (**!!!**), що дане рівняння можна розв'язати методом виділення "інтегровних комбінацій". Для цього розкриємо дужки і запишемо ліву частину рівняння у вигляді (67), використовуючи формули диференціалів елементарних функцій та добутків функцій:

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\,d\ln x + \ln x\,dy + d\frac{y^4}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$d(y\ln x) + d\frac{y^4}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(y\ln x + \frac{y^4}{4}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\ln x + \frac{y^4}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

►

2. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0.$$

◄ З'ясуємо чи вихідне рівняння є рівняння у повних диференціалах. Для цього знайдемо

$$\partial_y(x^2 + y^2 + x) = 2y, \quad \partial_x y = 0.$$

Оскільки відповідні частинні похідні різні, то дане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Попробуємо знайти інтегрувальний множник для цього рівняння у вигляді функції від змінної x. Домножимо вихідне рівняння на функцію $\mu = \mu(x)$:

$$\mu(x)(x^2 + y^2 + x)\,dx + \mu(x)y\,dy = 0. \tag{80}$$

Як випливає з леми 2, для того, щоб рівняння (80) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо виконання рівності

$$\partial_y\big(\mu(x)(x^2 + y^2 + x)\big) = \partial_x\big(\mu(x)y\big). \tag{81}$$

Звідси одержуємо рівняння для знаходження функції μ:

$$2y\mu(x) = \mu'(x)y \quad \Rightarrow \quad \mu'(x) = 2\mu(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{2x}.$$

Помноживши вихідне рівняння на e^{2x}, отримуємо

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0. \tag{82}$$

Обчислюючи

$$\partial_y\big(e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\big) = 2e^{2x}y, \quad \partial_x\big(e^{2x}y\big) = 2e^{2x}y,$$

переконуємося, що це рівняння в повних диференціалах. Отже,

$$\exists\ F(x,y): \quad \begin{cases} \partial_x F(x,y) = (x^2 + y^2 + x)e^{2x}, \\ \partial_y F(x,y) = ye^{2x}. \end{cases}$$

Інтегруючи друге рівняння за змінною y, знаходимо

$$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \varphi(x),$$

де φ – поки що невідома функція. Підставляємо знайдений вираз функції F у перше рівняння системи, матимемо

$$\partial_x\big(\frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \varphi(x)\big) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}y^2 + \varphi'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),$$

звідки $\varphi'(x) = (x^2 + x)e^{2x}$, тобто $\varphi(x) = \int (x^2 + x)e^{2x}\,dx$. Інтегруючи частинами, знаходимо $\varphi(x) = \frac{x^2e^{2x}}{2} + C_*$, де C_* – довільна стала.

Отже, $F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \frac{x^2e^{2x}}{2} + C_*$, звідки і теореми 2 маємо

$$e^{2x}(y^2 + x^2) = C$$

– повний загальний інтеграл вихідного рівняння.

Зауважимо (**!!!**), що дане рівняння можна розв'язати методом виділення "інтегровних комбінацій":

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)\,dx + x\,dx + y\,dy = 0\,\Big|\times 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + y^2)\,dx + d(x^2 + y^2) = 0\,\Big|:(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$d(2x + \ln(x^2 + y^2)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + \ln(x^2 + y^2)) = \ln|C|, \quad C \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}(y^2 + x^2) = C, \quad C - \text{ довільна стала}$$

(очевидно, що значення C може бути тільки додатним). ▶

3. Розв'язати рівняння

$$y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx.$$

◀ Дане рівняння розв'яжемо, виділивши повний диференціал деякої функції. Поділимо рівняння на x^2. Тоді

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = 2x \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad -d\Big(\frac{y}{x}\Big) = 2x \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$-\operatorname{ctg}\frac{y}{x}d\Big(\frac{y}{x}\Big) = d(x^2),\quad \sin\frac{y}{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln|\sin\frac{y}{x}| = -x^2+\ln|C|,\ C\neq 0,\quad \sin\frac{y}{x}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$e^{x^2}\sin\frac{y}{x} = C,\quad C - \text{довільна стала},$$

– повний загальний інтеграл вихідного рівняння. ▶

4. Розв'язати рівняння

$$(x^2-y^2+y)\,dx + x(2y-1)\,dy = 0.$$

◀ Зробимо відповідні перетворення даного рівняння:

$$x^2\,dx - (y^2-y)\,dx + x(2y-1)\,dy = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\,dx + x\,d(y^2-y) - (y^2-y)\,dx = 0.$$

Зробимо в цьому рівняння заміну змінних $u = y^2 - y$ і проведемо відповідні перетворення

$$x^2\,dx + x\,du - u\,dx = 0\,\Big|\,: x^2 \quad\Leftrightarrow\quad dx + \frac{x\,du - u\,dx}{x^2} = 0,\ x=0 \quad\Leftrightarrow\quad dx + d\Big(\frac{u}{x}\Big) = 0,\ x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x + \frac{u}{x} = C,\quad x = 0.$$

Повернувшись до старих змінних, одержуємо сім'ю всеможливих розв'язків вихідного рівняння:

$$\frac{x^2+y^2-y}{x} = C,\quad x=0.$$

▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:

237. $2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = 0$;

243. $(1+y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$;

271. $\left(1+\dfrac{y}{x^2}\right)\,dx + \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2y}{x^2}\right)\,dy = 0$;

276. $dx + (x + e^{-y}y^2)\,dy = 0$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння:

238. $x(2-9xy^2)\,dx + (4y^2-6x^3)y\,dy = 0$;

245. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)\,dx + \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$;

249. $\left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)\,dy + \left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)\,dx = 0$;

251. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)\,dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)\,dy = 0$;

257. $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$;

264. $(2x^2y + 2y + 5)\,dx + (2x^3 + 2x)\,dy = 0$;

270. $y^2(x-3y)\,dx + (1-3xy^2)\,dy = 0$;

279. $\left(x^3 - \dfrac{2\ln y}{x} - \dfrac{2y}{x}\right)\,dx + \left(\dfrac{1}{y}+1\right)\,dy = 0$;

283. $\left(\dfrac{1}{x^2+1} + x + \dfrac{2x}{x^2+1}\cos y\right)\,dx - \sin y\,dy = 0$.

Додаткові завдання:

Розв'язати рівняння:

259. $(\cos(x+y^2)+3y)\,dx+(2y\cos(x+y^2)+3x)\,dy=0,\ y(\pi/2)=0;$

265. $(x+\sin x+\sin y)\,dx+\cos y\,dy=0;$

286. $(e^x+1)\,dx+\left(y^2+\dfrac{e^x+x}{y\ln y}\right)\,dy=0.$

Відповіді:

237. $3x^2y-y^3=C;$ **238.** $x^2-3x^3y^2+y^4=C;$

243. $x-y^2\cos^2 x=C;$ **245.** $x^2+1=2(C-2x)\sin y;$

249. $\left(\dfrac{\sin^2 x}{y}+\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)=C;$ **251.** $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C;$

257. $3xy^2+x^2y+3y+x^2=C;$ **259.** $\sin(x+y^2)+3xy=1;$

264. $5\operatorname{arctg} x+2xy=C,\ x=0;$

265. $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C;$

270. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{y}-3xy=C;$ **271.** $x^3+3xy+3y^2=C;$

276. $3xe^y+y^3=C;$ **279.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}(\ln y+y)=C;$

283. $x^4+2x^2+4x+4x^2\cos y+4\cos y=C;$

286. $(e^x+x)\ln y+\dfrac{y^3}{3}(\ln y-1)=C.$

Практичне заняття № 8
Нерозв'язні стосовно похідної рівняння (I)

Довідкова інформація

Нерозв'язним стосовно похідної називають рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \tag{83}$$

яке не можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y).$$

Розрізняють дві групи інтегровних нерозв'язних стосовно похідної рівнянь в залежності від методу інтегрування.

I група. *Рівняння вигляду* (110), *які можна подати у вигляді сукупності* $m > 1$ *рівнянь*

$$\left[\begin{array}{l} y' = f_1(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y' = f_m(x, y), \end{array}\right. \tag{84}$$

кожне з яких належить до раніше вивчених класів.

Нехай для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$ співвідношення

$$\Phi_k(x, y, C) = 0$$

— повний загальний інтеграл k-го рівняння сукупності (84). Тоді повний загальний інтеграл рівняння (110) має вигляд

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \ \dots\ \cdot \Phi_m(x, y, C) = 0$$

або вигляд

$$\left[\begin{array}{l} \Phi_1(x, y, C) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_m(x, y, C) = 0. \end{array}\right.$$

II група. *Рівняння вигляду* (110), *які можна записати у вигляді*

$$y = h(x, y') \tag{85}$$

або у вигляді

$$x = q(y, y'), \tag{86}$$

де h, q *— неперервно диференційовні функції.*

Рівняння (111) та (112) розв'язують *методом введення параметра.* Спочатку опишемо цей метод для рівняння (111).

Перш за все запишемо рівняння (111) в параметричній формі:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = h(x, p), \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{87}$$

Тут змінні p і x, яка стоїть в правих частинах другого і третього співвідношень, є параметрами, через які виражаються змінні x, y, y', які стоять в лівих частинах перших трьох співвідношень і в цілому четвертому. Отож, залежність змінної y від змінної x, яка нас цікавить (це шукані розв'язки рівняння (111)), виражається через параметри p, x (див. друге і третє співвідношення в системі (87)), які в свою чергу пов'язані між собою і цей зв'язок задається диференціальним рівнянням

$$dh(x,p) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x h(x,p)\,dx + \partial_p h(x,p)\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow$$
$$(\partial_x h(x,p) - p)\,dx + \partial_p h(x,p)\,dp = 0. \tag{88}$$

Рівняння (88) виникає, коли у четверте співвідношення системи (87) замість змінних x, y, y' поставити їх вирази через параметри x, p, задані в правих частинах перших трьох співвідношень цієї системи.

Нехай

$$\Phi(x,p,C) = 0, \text{ де } C - \text{довільна стала},$$

— повний загальний інтеграл рівняння (88). Тоді повний загальний інтеграл рівняння (111) задається в параметричній формі так:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = h(x,p), \\ \Phi(x,p,C) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = h(x,p), \\ \Phi(x,p,C) = 0. \end{cases} \tag{89}$$

Звідси, зокрема, випливає, що у випадку

$$\Phi(x,p,C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(p,C) \tag{90}$$

повний загальний інтеграл рівняння (111) має вигляд

$$\begin{cases} x = g(p,C), \\ y = h(x,p), \end{cases} \tag{91}$$

а у випадку

$$\Phi(x,p,C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = w(x,C) \tag{92}$$

повний загальний розв'язок рівняння (111) має вигляд

$$y = h(x, w(x,C)), \tag{93}$$

де C – довільна стала.

Зауваження 2. *Очевидно, що у випадку* (92) *розв'язки записуються в більш простій і зручній для дальшого використання формі. Тому при розв'язуванні рівняння* (88) *бажано отримати вираз параметра p через параметр x, тобто отримати зв'язок між параметрами p і x у вигляді $p = w(x,C)$.*

Тепер розглянемо рівняння (112). Метод введення параметра для нього практично не відрізняється від цього ж методу для розглянутого вище рівняння. Опишемо цей метод в даному випадку.

Спочатку запишемо рівняння (112) в параметричній формі:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ y = y, \\ x = q(y,p), \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{94}$$

Тут змінна p і змінна y, яка стоїть в правих частинах другого і третього співвідношень, є параметрами, через які виражаються змінні x, y, y', які стоять в лівих частинах перших трьох співвідношень і в цілому четвертому. Отож, залежність змінної y від змінної x, яка нас цікавить (це шукані розв'язки заданого рівняння (112)), виражається через параметри p, y (див. друге і третє співвідношення в системі (94)), які в свою чергу пов'язані між собою і цей зв'язок задається диференціальним рівнянням

$$dy = p\,dq(y,p) \quad \Leftrightarrow \quad dy = p\big(\partial_y q(y,p)\,dy + \partial_p q(y,p)\,dp\big) \quad \Leftrightarrow$$
$$(p\,\partial_y q(y,p) - 1)\,dy + p\,\partial_p q(y,p)\,dp = 0. \tag{95}$$

Рівняння (95) виникає, коли у четверте співвідношення системи (94) замість змінних x, y, y' поставити їх вирази через параметри y, p, задані в правих частинах перших трьох співвідношень цієї системи.

Нехай $\Psi(y,p,C) = 0$, де C – довільна стала, — повний загальний інтеграл рівняння (95). Тоді повний загальний інтеграл рівняння (112) задається в параметричній формі так:

$$\begin{cases} y = y, \\ x = q(y,p), \\ \Psi(y,p,C) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = q(y,p), \\ \Psi(y,p,C) = 0. \end{cases} \tag{96}$$

Звідси, зокрема, випливає, що у випадку

$$\Psi(y,p,C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \widehat{g}(p,C)$$

повний загальний інтеграл рівняння (111) має вигляд

$$\begin{cases} y = \widehat{g}(p,C), \\ x = q(y,p), \end{cases} \tag{97}$$

а у випадку

$$\Psi(y,p,C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \widehat{w}(y,C)$$

повний загальний інтеграл рівняння (112) має вигляд

$$x = q(y, \widehat{w}(y,C)), \tag{98}$$

де C – довільна стала.

Зауваження 3. *Очевидно, що в другому випадку розв'язки записуються в більш простій і зручній для дальшого використання формі. Тому при розв'язуванні рівняння* (95) *бажано отримати вираз параметра p через параметр y, тобто отримати зв'язок між параметрами p і y у вигляді $p = \widehat{w}(y,C)$.*

Особливі розв'язки звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x,y,y') = 0, \tag{99}$$

припускаючи, що функція F визначена і неперервно диференційовна в області G простору $\mathbb{R}^3$. Під *інтегральною лінією* рівняння (99) розумітимемо графік розв'язку цього рівняння.

Використаємо позначення:

$$L := \{(x,y,p) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,p) = 0\}, \quad D := \{(x,y) \,|\, \exists p \in \mathbb{R} : \ (x,y,p) \in L\}$$

– проекція множини L на площину Oxy. Очевидно, що всі інтегральні лінії рівняння (99) лежать в множині D.

Точку $(x_0, y_0) \in D$ називають *звичайною* для рівняння (99), якщо через неї проходить хоча б одна інтегральна лінія і нема двох інтегральних ліній, що проходять цю точку, дотикаються в ній і відрізняються одна від другої в будь-якому (як завгодно малому) околі заданої точки.

Точка $(x_0, y_0) \in D$ називається *особливою* для рівняння (99), якщо вона не є звичайною. Множина особливих точок рівняння (99) називається *особливою множиною.*

Особливою інтегральною лінією рівняння (99) називаютью інтегральну лінію, яка складається з особливих точок цього рівняння. Іншими словами кажучи, особливою інтегральною лінією рівняння (99) є така інтегральна лінія цього рівняння, через кожну точку якої проходить ще хоча б одна його інтегральна лінія, яка дотикається в цій точці до даної лінії і відрізняється від неї в будь-якому околі цієї точки.

Особливим розв'язком рівняння (99) називається його розв'язок, графіком якого є особлива інтегральна лінія.

Оскільки особлива інтегральна лінія лежить в особливій множині, то відшукання особливих інтегральних ліній (особливих розв'язків) рівняння (99) варто починати із знаходження особливої множини заданого рівняння.

Особлива множина рівняння (99) є підмножиною (в широкому розумінні) множини точок (x, y) з D, які визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{100}$$

(виключаючи із системи (100) параметр p отримаємо рівняння $H(x, y) = 0$, розв'язками якого є координати особливих точок множини, в якій міститься особлива множина рівняння (99)).

Є інший спосіб відшукання особливих інтегральних ліній. Він базується на понятті *обвідної сім'ї ліній.*

Нехай

$$R(x, y, C) = 0, \quad (x, y, C) \in U, \text{ де } U \text{ – область в } \mathbb{R}^3, \tag{101}$$

— сім'я гладких ліній на площині (C — параметр, який "ідентифікує" лінії заданої сім'ї). Під *обвідною* заданої сім'ї ліній розуміється гладка лінія, яка в кожній своїй точці дотикається до однієї з ліній цієї сім'ї, причому в різних точках — до різних ліній.

Нехай

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (x, y, C) \in \Omega \quad (\Omega \text{ — область в } \mathbb{R}^3), \tag{102}$$

сім'я інтегральних ліній рівняння (99). Тоді, якщо $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, — обвідна сім'ї ліній (102), то це є особлива інтегральна лінія рівняння (99). Отже, особливі інтегральні лінії рівняння (99) можна шукати, як обвідні сім'ї інтегральних ліній даного рівняння. Обвідні сім'ї (102) можна знаходити, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{103}$$

Контрольні питання

1. Що таке розв'язне і нерозв'язне стосовно похідної ЗДР першого порядку?

2. Як записати повний загальний інтеграл рівняння, яке можна подати у вигляді сукупності $m > 1$ рівнянь?

3. У чому полягає метод введення параметра розв'язування нерозв'язних стосовно похідної ЗДР?

4. Яка точки називають звичайними, а які особливими для ЗДР першого порядку? Що таке особлива множина, особлива інтегральна лінія, особливий розв'язок ЗДР першого порядку?

5. Що називають обвідною сім'ї ліній? Як знаходять обвідні сім'ї інтегральних ліній?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$y'^2 + xy = y^2 + xy'$$

і виділити особливі розв'язки (якщо вони є).

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$y'^2 - xy' + (xy - y^2) = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння як квадратне відносно y':

$$D = (-x)^2 - 4(xy - y^2) = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{x \pm (x - 2y)}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$y' = x - y \quad \text{або} \quad y' = y. \tag{104}$$

Розв'яжемо перше рівняння з отриманої сукупності, записавши його у вигляді

$$y' + y = x. \tag{105}$$

Як легко бачити, це є лінійне неоднорідне рівняння. Отож, розв'язуємо його у три кроки.

1-ий крок. Знаходимо повний загальний розв'язок відповідного рівнянню (105) лінійного однорідного рівняння:

$$y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -y \quad \Big| \times \frac{dx}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx, \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = -x + \ln|C|, \; C \neq 0, \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = Ce^{-x}, \;\; \text{де} \;\; C - \; \text{довільна стала},$$

– повний загальний розв'язок ЛОР.

2-ий крок. Шукаємо частковий розв'язок рівняння (105). Для цього використовуємо метод варіації сталих, записавши його проєкт у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{-x}, \tag{106}$$

де φ – невідома функція, яку шукаємо за умови, що функція (461) є розв'язком рівняння (105):

$$\varphi'(x)e^{-x} - \varphi(x)e^{-x} + \varphi(x)e^{-x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x)e^{-x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = xe^{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x) = \int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - e^x \text{ (використали формулу інтегрування частинами).}$$

Звідси і (461) отримуємо частковий розв'язок рівняння (105):

$$y = x - 1\,.$$

3-ий крок. Отож, повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (105) має вигляд:

$$y = Ce^{-x} + x - 1.$$

Тепер розв'яжемо друге рівняння сукупності (104), яке є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y' = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\,\Big|\cdot dx\,\Big| : y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx, \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = x + \ln|C|,\ C \neq 0, \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^x, \text{ де } C - \text{ довільна стала,}$$

– повний загальний розв'язок даного рівняння.

Отже, повний загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = Ce^{-x} + x - 1, \quad y = Ce^x, \text{ де } C - \text{ довільна стала.}$$

Шукаємо особливі розв'язки рівняння. Для визначення дискримінантної кривої складемо систему

$$\begin{cases} p^2 + xy - y^2 - xp = 0 \\ 2p - x = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь p:

$$p = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy - y^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x^2}{4} + xy - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 = 0,$$

знаходимо дискримінантну криву

$$y = \frac{x}{2}.$$

Безпосередньо перевіркою впевнюємося, що функція $y = \dfrac{x}{2}$ не є розв'язком заданого рівняння, а отже, не може бути особливим розв'язком. Отож, задане рівняння особливих розв'язків немає. ►

2. Розв'язати рівняння

$$y = x + 2y' - {y'}^2$$

і виділити особливі розв'язки (якщо вони є).

◄ Запишемо дане рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = x + 2p - p^2, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{107}$$

Підставимо у рівність $dy = y'\,dx$ вирази (що стоять під внутрішньою фігурною дужкою) змінних y', x, y через параметри p та x і зробимо відповідні перетворення:

$$d(x + 2p - p^2) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad dx + 2\,dp - 2p\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)\,dx + 2(1-p)\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-p)(dx+2dp)=0 \Leftrightarrow \quad p=1 \text{ або } dx+2\,dp=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$p=1 \quad \text{або} \quad x+2p=C \quad \Leftrightarrow \qquad p=1 \quad \text{або} \quad p=(C-x)/2.$$

Отже, розв'язками заданого рівняння є функції

$$y=x+1 \quad \text{ або } \quad y=x+2(C-x)/2-(C-x)^2/4 \equiv -(x-C)^2/4+C. \tag{108}$$

Знайдемо особливі розв'язки заданого рівняння. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y-x-2p+p^2=0, \\ -2+2p=0 \end{cases}$$

знаходимо дискримінантну криву

$$y=x+1.$$

Як вище показано, ця функція є розв'язком вихідного рівняння. Перевіримо, чи дотикаються до прямої $y=x+1$ в кожній її точці інші інтегральні криві даного рівняння. Умови дотику кривих $y=\varphi(x)$ і $y=\psi(x)$ в точці з абсцисою $x=x_0$ такі: $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$. Для розв'язків $y=x+1$ і $y=-(C-x)^2/4+C$ ці умови запишуться у вигляді

$$\begin{cases} x_0+1=-(x_0-C)^2/4+C, \\ 1=-(x_0-C)/2. \end{cases}$$

З другої рівності знаходимо $C=x_0+2$. Підставивши значення C в перше рівняння системи, знаходимо $x_0+1=x_0+1$. Ця рівність виконується при всіх x_0. Отже, при кожному x_0 пряма $y=x+1$ в точці з абсцисою x_0 дотикається до однієї з парабол $y=-(x-C)^2/4+C$, а саме, до тієї параболи, для якої $C=x_0+2$. Звідси робимо висновок, що $y=x+1$ – особливий розв'язок. ▶

3. Розв'язати рівняння

$$2xy'-y=y'\ln yy'.$$

◀ Запишемо дане рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \begin{cases} y'=p, \\ y=y, \\ x=\dfrac{y+p\ln yp}{2p}, \end{cases} \\ dy=y'\,dx. \end{cases} \tag{109}$$

З рівності $dy=y'\,dx$ дістанемо

$$dy=p\frac{2p\,d(y+p\ln yp)-2(y+p\ln yp)\,dp}{4p^2}.$$

Звідси $2(y-p)(\dfrac{p}{y}\,dy+dp)=0 \Rightarrow \quad y=p$ або $\dfrac{p}{y}\,dy+dp=0$. Відокремлюючи змінні в другому рівнянні, одержуємо $yp=C$.

Отже, розв'язками даного рівняння є функції

$$\begin{cases} y=p \\ x=\dfrac{1+2\ln p}{2} \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{C}{p} \\ x=\dfrac{C+p^2\ln C}{2p^2}. \end{cases}$$

Виключивши параметр p в цих системах, одержуємо зображення розв'язків в неявному вигляді

$$x = \frac{1 + 2\ln y}{2} \quad \text{або} \quad x = \frac{y^2 + C\ln C}{2C}. \blacktriangleright$$

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Знайти всі розв'язки поданих рівнянь і виділити особливі розв'язки (якщо вони є).
298. $y'^2 - y^2 = 0$.

Розв'язати рівняння щодо y', а після цього загальний розв'язок шукати звичайними методами. Знайти також особливі розв'язки, якщо вони є.
309. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.

Розв'язати рівняння методом введення параметра.
341. $y = xy' - x^2y'^3$; **346.** $x = \dfrac{y}{y'}\ln y - \dfrac{y'^2}{y^2}$; **324.** $x = y'^3 + y'$.

Домашні завдання:

Знайти всі розв'язки поданих рівнянь і виділити особливі розв'язки (якщо вони є).
301. $y^2(y'^2 + 1) = 1$; **304.** $xy'^2 = y$;
307. $4(1 - y) = (3y - 2)^2y'^2$.

Розв'язати рівняння щодо y' а після цього загальний розв'язок шукати звичайними методами. Знайти також особливі розв'язки, якщо вони є.
314. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$; **318.** $y'^2 + y^2 = y^4$;
321. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

Розв'язати рівняння методом введення параметра.
326. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$; **327.** $y'(x - \ln y') = 1$;
334. $y'^4 = 2yy' + y^2$; **342.** $y = 2xy' + y^2y'^3$;
348. $y'^3 - 4xy' + 8y^2 = 0$.

Додаткові завдання:

Знайти всі розв'язки поданих рівнянь і виділити особливі розв'язки (якщо вони є).
306. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.

Розв'язати рівняння щодо y', а після цього загальний розв'язок шукати звичайними методами. Знайти також особливі розв'язки, якщо вони є.
316. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

Розв'язати рівняння методом введення параметра.
328. $y = y'^2 + 2y'^3$.

Відповіді:

298. $y = Ce^{\pm x}$; **301.** $(x + C)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm 1$;
304. $(y - x)^2 = 2C(x + y) - C^2$, $y = 0$;
306. $4y = (x + C)^2$, $y = Ce^x$; **307.** $y^2(1 - y) = (x + C)^2$, $y = 1$;
309. $x^2y = C$, $y = Cx$; **314.** $y = 2x^2 + C$, $y = -x^2 + C$;
316. $\ln Cy = x \pm 2e^{x/2}$, $y = 0$;
318. $\operatorname{arctg} u + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{u - 1}{u + 1}\right| = \pm x + C$, де $u = (1 - 1/y^2)^{1/4}$, $y = 0$, $y = \pm 1$;
321. $2(x - C)^2 + 2y^2 = C^2$, $y = \pm x$;
324. $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + C$;
326. $x = p\sqrt{p^2 + 1}$, $3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C$;

327. $x = \ln p + (1/p)$, $y = p - \ln p + C$;
328. $x = 3p^2 + 2p + C$, $y = 2p^3 + p^2$, $y = 0$;
334. $x = \pm 2\sqrt{1+p^2} - \ln(\sqrt{1+p^2} \pm 1) + C$, $y = -p \pm p\sqrt{p^2+1}$, $\qquad y = 0$;
341. $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$, $y = xp - x^2p^3$, $y = 0$;
342. $2p^2x = C - C^2p^2$, $py = C$, $32x^3 = -27y^4$, $y = 0$;
346. $x = \dfrac{1}{C}\ln y - C^2$, $x = -3\left(\dfrac{\ln y}{2}\right)^{2/3}$; **348.** $y = C(x-C)^2$, $y = 0$, $y = \dfrac{4}{27}x^3$.

Практичне заняття № 9
Нерозв'язні стосовно похідної рівняння (II)

Довідкова інформація

Рівняння
$$F(x, y, y') = 0, \tag{110}$$
яке не можна записати у вигляді $y' = f(x, y)$, називають *нерозв'язним стосовно похідної.*

Ми тут продовжимо розглядати другу групу нерозв'язних стосовно похідної рівнянь, тобто *рівняння* (110)*, які можна записати у вигляді*
$$y = h(x, y') \tag{111}$$
або у вигляді
$$x = q(y, y'), \tag{112}$$
де h, q — неперервно диференційовні функції.

В класі рівнянь, які можна подати у вигляді (111) і розв'язати методом введення параметра, виділяють два підкласи: ***рівняння Лагранжа та Клеро***.

1°. ***Рівнянням Лагранжа*** називають рівняння, яке можна подати у вигляді
$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{113}$$
де $\varphi(p) - p \not\equiv 0$.

Рівняння Лагранжа, очевидно, можна розв'язувати методом введення параметра. Покажемо це.

Спочатку параметризуємо рівняння (113):
$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = x\varphi(p) + \psi(p), \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{114}$$

Підставляючи в рівність $dy = y'\,dx$ вирази змінних x, y, y' через параметри x, p (вони стоять під внутрішньою фігурною дужкою) дістанемо
$$d(x\varphi(p) + \psi(p)) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(p)\,dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow$$
$$(\varphi(p) - p)\,dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\,dp = 0 \;\Big|\; : (\varphi(p) - p)\,dp \quad \Leftrightarrow$$
$$x' + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{-\psi'(p)}{\varphi(p) - p} \quad \text{або} \quad \varphi(p) - p = 0. \tag{115}$$

Перше з рівнянь (115) є лінійним рівнянням першого порядку і його розв'язок знаходимо у вигляді
$$x = C\omega(p) + \varrho(p), \quad p \in I \subset \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

Друге рівняння може мати тільки числові розв'язки. Припустимо, що
$$\varphi(p) - p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = p_j, \quad j \in N \subset \mathbb{N}.$$

Тоді сім'я всеможливих розв'язків рівняння Лагранжа має вигляд

$$\begin{cases} x = C\omega(p) + \varrho(p), \\ y = x\varphi(p) + \psi(p), \end{cases} \qquad y = x\varphi(p_j) + \psi(p_j), \quad j \in N.$$

2°. ***Рівнянням Клеро*** називають рівняння

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{116}$$

Рівняння Клеро, очевидно, можна розв'язати методом введення параметра. Покажемо це. Спочатку параметризуємо це рівняння:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = xp + \psi(p), \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{117}$$

Підставляючи в рівність $dy = y'\,dx$ вирази змінних x, y, y' через параметри x, p (вони стоять під внутрішньою фігурною дужкою) дістанемо

$$d(xp + \psi(p)) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad p\,dx + (x + \psi'(p))\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$(x + \psi'(p))\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\psi'(p) \quad \text{або} \quad dp = 0. \tag{118}$$

Оскільки $dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = C$, то повна сім'я розв'язків рівняння Клеро має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p), \end{cases} \qquad y = Cx + \psi(C),$$

де C — довільна стала.

Контрольні питання

1. Який вигляд має рівняння Лагранжа? Як знайти його загальний розв'язок в параметричній формі?

2. Який вигляд має рівняння Клеро? Чим воно відрізняється від рівняння Лагранжа? Як написати його загальний розв'язок по вигляду рівняння?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння Лагранжа

$$y + xy' - y'^3 = 0.$$

◀ Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = -xy' + y'^3 \tag{119}$$

і параметризуємо його:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = -xp + p^3, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases}$$

Тоді з рівності $dy = y'\,dx$ маємо

$$d(-xp+p^3) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad -x\,dp - p\,dx + 3p^2\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad 2p\,dx + (x-3p^2)\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x' + \frac{x}{2p} = \frac{3p}{2} \quad \text{або} \quad p = 0.$$

Якщо $p = 0$, то отримаємо розв'язок: $y = 0$.

Розглянемо рівняння

$$x' + \frac{x}{2p} = \frac{3p}{2}\,, \tag{120}$$

яке є лінійним, і розв'яжемо його.

1 крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x' + \frac{x}{2p} = 0.$$

Маємо

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2p} \,\Big|\cdot\frac{dp}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p},\ x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|p| + \ln|C|,\ C \neq 0,\ x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{C}{\sqrt{|p|}}$$

– повний загальний розв'язок відповідного даному рівнянню лінійного однорідного рівняння.

2 крок. Знайдемо частковий розв'язок рівняння (120) методом варіації сталої. Для цього запишемо проект часткового розв'язку даного рівняння у вигляді

$$x = \frac{\varphi(p)}{\sqrt{|p|}},$$

де φ — функція, яку треба визначити за умови, що цей вираз задає частковий розв'язок рівняння (120):

$$\varphi'(p)\sqrt{|p|} - \frac{\varphi(p)\operatorname{sign}p}{2\sqrt{|p|^3}} + \frac{\varphi(p)}{2p\sqrt{|p|}} = \frac{3p}{2},$$

де

$$\operatorname{sign}p = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad p > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad p = 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad p < 0, \end{cases} \qquad |p| = p\ \operatorname{sign}p\,.$$

Звідси

$$\varphi'(p) = \frac{3p}{2\sqrt{|p|}}\,.$$

Оскільки $p = |p| \operatorname{sign} p$, то
$$\varphi'(p) = \frac{3}{2}\sqrt{|p|}\,\operatorname{sign} p\,,$$
звідки $\varphi(p) = \sqrt{|p|^3}\,$.

Отже,
$$x = |p|, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
— частковий розв'язок рівняння (120).

3 крок.
$$x = \frac{C}{\sqrt{|p|}} + |p|$$
— повний загальний розв'язок рівняння (120).

Отож, сім'я всеможливих розв'язків заданого рівняння може бути записаною у вигляді
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{C}{\sqrt{|p|}} + |p|, \\ y = -xp + p^3, \end{cases} \\ \qquad y = 0. \end{array}\right.$$

2. Розв'язати рівняння Клеро
$$xy' - y = \ln y'.$$

◀ Запишемо дане рівняння у вигляді
$$y = xy' - \ln y'$$
і параметризуємо його:
$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = xp - \ln p, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{121}$$
З рівності $dy = y'\,dx$ дістанемо
$$d(xp - \ln p) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad x\,dp + p\,dx - \frac{1}{p}\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \big(x - \frac{1}{p}\big)\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x - \frac{1}{p} = 0 \quad \text{або} \quad dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{p} \quad \text{або} \quad p = C.$$
Отож, сім'я всеможливих розв'язків заданого рівняння може бути записана у вигляді
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p} \\ y = 1 - \ln p \end{cases} \qquad \text{або} \quad y = xC - \ln C,$$
або у вигляді
$$y = 1 + \ln x \quad \text{або} \quad y = Cx - \ln C.$$
▶

3. Розв'язати рівняння методом введення параметра
$$y'^3 = 3(xy' - y).$$

◀ Розв'яжемо задане рівняння стосовно x:

$$x = \frac{y'^3 + 3y}{3y'}.$$

і параметризуємо його:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ y = y, \\ x = \dfrac{p^3 + 3y}{3p}, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{122}$$

З рівності $dy = y'\,dx$ дістанемо

$$dy = p\,d\Big(\frac{p^3+3y}{3p}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad dy = p\,\frac{3p\,d(p^3+3y) - 3(p^3+3y)\,dp}{9p^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$dy = \frac{3p^3\,dp + 3p\,dy - p^3\,dp - 3y\,dp}{3p} \quad \Leftrightarrow \quad (2p^3 - 3y)\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^3 = \frac{3y}{2} \quad \text{або} \quad p = C\,.$$

Сім'ю всеможливих розв'язків заданого рівняння записуємо у вигляді

$$4x^3 = 9y^2 \quad \text{або} \quad 3Cx = C^3 + 3y\,.$$

▶

4. Розв'язати рівняння

$$xy'(y'+2) = y.$$

◀ Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = 2xy' + xy'^2$$

і параметризуємо його:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = 2xp + xp^2, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{123}$$

З рівності $dy = y'\,dx$ дістанемо

$$d(xp^2 + 2xp) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad p^2\,dx + 2px\,dp + 2x\,dp + 2p\,dx = p\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$(p+1)(p\,dx + 2x\,dp) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = -1 \quad \text{або} \quad p\,dx + 2x\,dp = 0.$$

При $p = -1$ маємо

$$y = 2x(-1) + x(-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x.$$

Далі

$$p\,dx + 2x\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} + 2\frac{dp}{p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| + 2\ln|p| = \ln|C| \quad \Leftrightarrow \quad xp^2 = C.$$

Сім'ю всеможливих розв'язків заданого рівняння можна записати як в параметричному вигляді

$$y = -x \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} \\ y = \dfrac{2C}{p} + C, \end{cases}$$

так і в явному вигляді

$$y = -x \quad \text{або} \quad y = \pm 2\sqrt{xC} + C.$$

►

5. Розв'язати рівняння

$$y = y'^2 + y'^3.$$

◄ Параметризуємо дане рівняння:

$$\begin{cases} \begin{cases} y' = p, \\ x = x, \\ y = p^2 + p^3, \end{cases} \\ dy = y'\,dx. \end{cases} \tag{124}$$

З рівності $dy = y'\,dx$ дістанемо

$$d(p^2 + p^3) = p\,dx \quad \Leftrightarrow \quad (2p + 3p^2)\,dp = p\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$p = 0 \quad \text{або} \quad dx = (2 + 3p)\,dp \Leftrightarrow \quad p = 0 \quad \text{або} \quad x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C.$$

Звідси випливає, що сім'я всеможливих розв'язків заданого рівняння має вигляд

$$\begin{cases} x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C, \\ y = p^2 + p^3 \end{cases} \qquad \text{або} \qquad y = 0\,.$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння методом введення параметра:

340. $y' = e^{xy'/y}$; **349.** $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$.

Розв'язати рівняння Клеро і Лагранжа:

361. $y = xy' - y'^2$; **366.** $y = xy'^2 - 2y'^3$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння методом введення параметра:

325. $x(y'^2 - 1) = 2y'$; **333.** $y'^2 - y'^3 = y^2$; **337.** $x^2y'^2 = xyy' + 1$.

Розв'язати рівняння Клеро і Лагранжа:

363. $y = 2xy' - 4y'^3$; **367.** $xy' - y = \ln y'$; **377.** $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

388. Знайти криву, кожна дотична до якої відтинає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених до квадратів довжин цих відрізків, дорівнює 1.

Додаткові завдання:

Розв'язати рівняння методом введення параметра:

351. $yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0$.

Розв'язати рівняння Клеро і Лагранжа:

372. $y = x(1+y') + y'^2$.

Відповіді:

325. $x = \dfrac{2p}{p^2-1}$, $y = \dfrac{2}{p^2-1} - \ln|p^2-1| + C$;

333. $x = \pm\left(\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right| + 3\sqrt{1-p}\right) + C$, $y = \pm p\sqrt{1-p}$, $y = 0$;

337. $\pm xp\sqrt{2\ln Cp} = 1$, $y = \mp\left(\sqrt{2\ln Cp} - \dfrac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$;

340. $Cx = \ln Cy$, $y = e^x$; **349.** $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$, $y = \dfrac{x^2}{4}$;

351. $\left(y - \dfrac{x^2}{2} - C\right)\left(\dfrac{y^2}{2} - x - C\right) = 0$;

361. $y = Cx - C^2$, $4y = x^2$;

363. $x = 3p^2 + Cp^{-2}$, $y = 2p^3 + 2Cp^{-1}$, $y = 0$;

366. $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1$, $y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2$, $y = 0$, $y = x - 2$;

367. $y = Cx - \ln C$, $y = \ln x + 1$;

372. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$, $y = x(1+p) + p^2$;

377. $x = yC + C^2$; $x = -y^2/4$.

Практичне заняття № 10

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Довідкова інформація

Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$ і $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, – задана функція. Розглянемо розв'язане стосовно похідної звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$x' = f(t,x). \tag{125}$$

Нагадаємо, що розв'язком рівняння (291) називається функція $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a,\, b\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1\big(\langle a,\, b\rangle\big)$;
2) $(t,\varphi(t)) \in D \quad \forall x \in \langle a,\, b\rangle$;
3) $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) \quad \forall t \in \langle a,\, b\rangle$.

Задача Коші для рівняння (291) полягає у знаходженні розв'язку рівняння (291), який задовольняє умову

$$x(t_0) = x_0, \tag{126}$$

де (t_0, x_0) — деяка задана точка області D.

Умову (292) називають *початковою умовою*, а точка (t_0, x_0) — *початковими даними.* Під *вхідними даними* задачі Коші для рівняння (291) розуміється права частина f цього рівняння та початкові дані (t_0, x_0).

Теорема 3. *Нехай $f \in C(D)$. Тоді будь-який розв'язок задачі (291), (292) є розв'язком рівняння*

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,x)\,ds. \tag{127}$$

і, навпаки, довільний розв'язок рівняння (127) *є розв'язком задачі* (291), (292).

Теорема 4 (теорема Пеано)**.** *Якщо функція f є неперервною на D, то задача* (291), (292) *має розв'язки.*

Наслідок 1. *Нехай $f \in C(D)$ і для деяких $r > 0$ і $q > 0$ прямокутник*

$$P^{r,q}_{t_0,x_0} := \{(t,x) \,\big|\, t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0 + r,\ x_0 - q \leqslant x \leqslant x_0 + q\}$$

лежить в D. Тоді існує розв'язок задачі (291), (292), *визначений на відрізку Пеано*

$$I_{t_0,h} := [t_0 - h, t_0 + h], \quad \text{де} \;\; h := \min\left\{r, \frac{q}{m}\right\}, \quad m := \max_{(t,x)\in P^{r,q}_{t_0,x_0}} |f(t,x)|.$$

Означення 3. *Кажуть, що функція $g(t,x)$, $(t,x) \in G \subset \mathbb{R}^2$, задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом, якщо існує стала $L \geqslant 0$ така, що для будь-яких $(t,x_1), (t,x_2) \in G$ виконується нерівність*

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Найменша зі сталих типу L називається сталою Ліпшиця.

Кажуть, що функція $g(t,x)$, $(t,x) \in G$, задовольняє локально умову Ліпшиця за другим аргументом (на G), якщо для будь-якого компакту (обмеженої і замкненої множини) $K \subset G$ звуження функції g на K задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом (із залежною від K сталою Ліпшиця).

Лема 3. *Якщо функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, де D – область в $\mathbb{R}^2$, є неперервною разом з частинною похідною $\partial_x f(t,x)$, $(t,x) \in D$, то вона задовольняє локально умову Ліпшиця за другим аргументом (за змінною x).*

Теорема 5 (теорема Пікарра)**.** *Якщо функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшиця за другим аргументом, то задача* (291), (292) *має розв'язки, причому будь-які два розв'язки цієї задачі співпадають на спільній частині їх областей визначення.*

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 5. Тоді розв'язок задачі Коші (291), (292), який визначений на відрізку Пеано $I_{t_0,h}$ (див. наслідок 1), є границею рівномірно збіжної послідовності послідовних наближень*

$$x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots, \quad t \in I_{t_0,h},$$

члени якої знаходять за правилом:

$$x_0(t) := x_0, \quad t \in I_{t_0,h}, \qquad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds, \quad t \in I_{t_0,h}.$$

Означення 4. *Скажемо, що область $D \subset \mathbb{R}^2$ є областю існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння (291), якщо для будь-якої точки (t_0, x_0) цієї області задача (291),(292) має розв'язки, причому будь-які два з них (графіки яких лежать в D) співпадають на спільній частині їх областей визначення.*

Наслідок 3. *Нехай D – область в $\mathbb{R}^2$ і функція $f : D \to \mathbb{R}$ задовольняє умови теореми 5 (відповідно, умови леми 3). Тоді D є областю існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння* (291).

Означення 3. *Нехай $x = \varphi_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$, і $x = \varphi_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$, — розв'язки задачі (291),(292). Розв'язок φ_1 називається продовженням розв'язку φ_2 (а φ_2 — звуженням φ_1), якщо $\langle a_2, b_2 \rangle \subset \langle a_1, b_1 \rangle$ і $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для кожного $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$.*

Означення 4. *Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, задачі (291),(292) називається непродовжуваним* (*повним*), *а його область визначення $\langle a, b \rangle$ — максимальною, якщо не існує нетривіального продовження цього розв'язку.*

Під тривіальним продовженням заданого розв'язку розуміється сам розв'язок.

Теорема 1. *Нехай функція f є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшіца за другим аргументом. Тоді задача* (291), (292) *має тільки один непродовжуваний розв'язок, він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

Теоретичні питання

1. В чому полягає задача Коші для рівняння першого порядку? Що таке початкова умова, початкові дані та вхідні дані задачі Коші? Який вигляд має інтегральне рівняння, що еквівалентне задачі Коші для ЗДР?

2. За яких умов задача Коші для ЗДР має розв'язки? Як знайти послідовні наближення розв'язку задачі Коші?

3. Що таке область існування та єдиності розв'язків задачі Коші для ЗДР?

4. Який розв'язок задачі Коші для ЗДР називається непродовжуваним? Сформулювати теорему про існування непродовжуваного розв'язку задачі Коші для ЗДР.

Приклади розв'язування деяких типових задач

1. Записати інтегральне рівняння, яке еквівалентне задачі

$$\begin{cases} x' = 1 + t\sin x, \\ x(\pi) = 2\pi, \end{cases} \tag{128}$$

і побудувати послідовні наближення x_0, x_1, x_2 до розв'язку цієї задачі.

◀ Спочатку запишемо інтегральне рівняння, яке еквівалентне даній задачі. Нехай $x = x(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, – який-небудь розв'язок даної задачі. Тоді з рівняння цієї задачі маємо тотожність

$$x'(t) = 1 + t\sin x(t), \quad t \in \langle a, b\rangle.$$

Замінивши в цій тотожності символ t на символ s, проінтегруємо отриману тотожність за змінною s від $t_0 = \pi$ до $t \in \langle a, b\rangle$:

$$\int\limits_{\pi}^{t} x'(s)\,ds = \int\limits_{\pi}^{t} [1 + s\sin x(s)]\,ds. \tag{129}$$

Врахувавши початкову умову нашої задачі, отримаємо

$$\int\limits_{\pi}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - x(\pi) = x(t) - 2\pi. \tag{130}$$

Отож, на підставі (129) і (130) приходимо до інтегрального рівняння

$$x = 2\pi + \int\limits_{\pi}^{t} [1 + s\sin x]\,ds,$$

яке еквівалентне даній задачі.

Послідовні наближення до розв'язку даної задачі Коші визначаємо за правилом:

$$x_0(t) = 2\pi, \quad x_{n+1}(t) = 2\pi + \int_{\pi}^{t} (1 + s\sin x_n(s))\,ds, \quad n = 0, 1, 2\dots .$$

При $n = 0$ маємо

$$x_1(t) = 2\pi + \int\limits_{\pi}^{t} (1 + s\sin 2\pi)\,ds = 2\pi + \int\limits_{\pi}^{t} ds = t + \pi.$$

При $n = 1$ маємо

$$x_2(t) = 2\pi + \int\limits_{\pi}^{t} (1 + s\sin(s + \pi))\,ds = 2\pi + \int\limits_{\pi}^{t} (1 - s\sin s)\,ds = 2\pi + t - \pi - \int\limits_{\pi}^{t} s\sin s\,ds =$$

$$= \pi + t + (s\cos s - \sin s)\,\big|_{\pi}^{t} = 2\pi + t + t\cos t - \sin t. \text{ ▶}$$

2. Вказати який-небудь відрізок Пеано для задачі

$$\begin{cases} x' = t + e^x, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

◀ Права частина $f(t,x) = t + e^x$ даного рівняння є визначеною і неперервною на всій площині $\mathbb{R}^2$. Отже, виконується умова теореми Пеано, звідки випливає існування розв'язку даної задачі, визначеного на відрізку Пеано. Для знаходження цього відрізка відмітимо, що $t_0 = 1,\ x_0 = 0$ і для будь-яких чисел $r > 0$ і $q > 0$ прямокутник

$$P_{1,0}^{r,q} := \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 1 - r \le t \le 1 + r, \quad -q \le x \le q\big\}$$

лежить в області визначення функції f, тобто в $\mathbb{R}^2$. Візьмемо, для прикладу, $r = 1$, $q = 1$ і розглянемо прямокутник $P_{1,0}^{1,1} := \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \le t \le 2, \quad -1 \le x \le 1\big\}$. Маємо

$$m := \max_{(t,x) \in P_{t_0,x_0}^{r,q}} |f(t,x)| = \max_{(t,x) \in P_{1,0}^{1,1}} |t + e^x| = 2 + e.$$

Тоді

$$h := \min\{r,\ \frac{q}{m}\} = \min\{1,\ \frac{1}{2+e}\} = \frac{1}{2+e}$$

і відрізок Пеано має вигляд

$$I_{t_0,h} := [t_0 - h, t_0 + h] = \Big[1 - \frac{1}{2+e}, 1 + \frac{1}{2+e}\Big].$$

▶

3. Визначити максимальні області існування та єдиності розв'язків задачі Коші для заданого рівняння:

$a)$ $x' = 2tx + x^2$;

$b)$ $x' = \dfrac{x \ln t}{x - t}$.

◀ $a)$ Легко бачити, що функція $f(t,x) := 2tx + x^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, та її частинна похідна $\partial_x f(t,x) = 2t + 2x$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, є неперервними на всій площині $\mathbb{R}^2$. Отже, вся площина $\mathbb{R}^2$ є областю існування та єдиності розв'язку задачі Коші для даного рівняння.

$b)$ Областю визначення функції $f(t,x) = \dfrac{x \ln t}{x - t}$ є відкрита множина

$$S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ x \ne t\}.$$

Знайдемо

$$\partial_x f(t,x) = -\frac{t \ln t}{(x-t)^2}, \quad (x,t) \in S.$$

Як легко бачити, функція f разом з частинною похідною $\partial_x f$ є неперервними на S. Очевидно, що множина S є відкритою, але не зв'язною, тобто S не є областю. Але, як легко переконатися, $S = S_1 \cup S_2$, де

$$S_1 := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, t > 0,\ x > t\}, \quad S_2 := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, t > 0,\ x < t\},$$

причому S_1, S_2 – області (відкриті та зв'язні множини) на $\mathbb{R}^2$. Отже, S_1 і S_2 – області існування та єдиності розв'язків задачі Коші для заданого рівняння. ▶

4. Чи можуть графіки двох розв'язків рівняння $x' = e^{2t} + x^2$ перетинатися (тобто мати цю точку за спільну при умові, що кутові коефіцієнти дотичних до їх графіків в цій точці різні) в деякій точці $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

◀ Права частина рівняння – функція $f(t,x) = e^{2t} + x^2$ – визначена і неперервна на всій площині $\mathbb{R}^2$. Отже, через будь-яку точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ проходить графік деякого розв'язку даного рівняння і графіки будь-яких двох розв'язків, що проходять через задану точку, дотикаються в ній. Тому графіки двох розв'язків цього рівняння не перетинатися в жодній точці площини $\mathbb{R}^2$. ▶

5. Знайти непродовжуваний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} x' = 2x^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{131}$$

де $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ – довільно задана точка площини.

◀ Спочатку знайдемо сім'ю всеможливих розв'язків рівняння задачі (131), а тоді виберемо той, який нам потрібен.

Очевидно, що рівняння задачі (131) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а отже, маємо

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = 2dt, \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} = 2t - C, \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{C - 2t}, \quad x = 0, \tag{132}$$

де $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала. Виберемо із сім'ї розв'язків (132) той, який задовольняє початкову умову задачі (131). Для цього розглянемо два випадки:

1) $x_0 = 0$;

2) $x_0 \neq 0$.

Нехай маємо випадок 1). Легко переконатися, що тоді початкову умову задачі (131) задовольняє розв'язок $x = 0,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

Тепер розглянемо випадок 2). Підставимо вираз загального розв'язку $x = \frac{1}{C-2t}$ в початкову умову задачі ():

$$x_0 = \frac{1}{C - 2t_0} \quad \Leftrightarrow \quad C = 2t_0 + \frac{1}{x_0}. \tag{133}$$

Отже, розв'язком задачі (131) у випадку 2) є функція

$$x = \frac{1}{2t_0 + \frac{1}{x_0} - 2t} \equiv \frac{-1}{2\big[t - (t_0 + \frac{1}{2x_0})\big]}. \tag{134}$$

яка визначена на промені $(-\infty, t_0 + \frac{1}{2x_0})$, якщо $x_0 > 0$, і на промені $(t_0 + \frac{1}{2x_0}, +\infty)$, якщо $x_0 < 0$.

Можемо зробити такий висновок : розв'язуючи задачу (131) при різних $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, отримали функцію

$$x = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } x_0 = 0, \\ -\dfrac{1}{2\big[t - (t_0 + \frac{1}{2x_0})\big]}, & \text{якщо } x_0 \neq 0, \end{cases}$$

яка визначена для всіх $t \in (-\infty, +\infty)$, якщо $x_0 = 0$, $t \in (-\infty, t_0 + \frac{1}{2x_0})$, якщо $x_0 > 0$, і $t \in (t_0 + \frac{1}{2x_0}, +\infty)$, якщо $x_0 < 0$. ▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

287. Побудувати послідовні наближення x_0, x_1, x_2 до розв'язку даної задачі:
a) $x' = t - x^2$, $x(0) = 0$.

289. Вказати який-небудь відрізок Пеано для даної задачі:
a) $x' = t + x^3$, $x(0) = 0$.

290. Визначити максимальні області існування та єдиності розв'язків задачі Коші для заданого рівняння:
b) $x' = 2 + \sqrt[3]{x - 2t}$.

292. Чи можуть графіки двох розв'язків заданого рівняння перетинатися в деякій точці $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$:
a) $x' = t + x^2$.

10.1. Знайти непродовжуваний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} x' = 3x^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

де $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ – довільно задана точка площини.

Домашні завдання:

287. Побудувати послідовні наближення x_0, x_1, x_2 до розв'язку даної задачі:
b) $x' = x^2 + 3t^2 - 1$, $x(1) = 1$.

289. Вказати який-небудь відрізок Пеано для даної задачі:
b) $x' = 2x^2 - t$, $x(1) = 1$; **c)** $x' = t + x^3$, $x(1) = 0$.

290. Визначити максимальні області існування та єдиності розв'язку задачі Коші для заданого рівняння:
c) $x' = \dfrac{\sqrt{x} - t}{t - 2}$; **f)** $x' = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - t^2}}{t}$.

293. Чи можуть графіки двох розв'язків даного рівняння дотикатися один до одного у деякій точці $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$:
a) для рівняння $x' = t + x^2$.

10.2. Знайти непродовжуваний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} x' = -x^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

де $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ – довільно задана точка площини.

Додаткові завдання:

290. Визначити максимальні області існування та єдиності розв'язку задачі Коші для заданого рівняння:
d) $x' = 1 + \operatorname{tg} x$.

Практичне заняття № 12
Рівняння вищих порядків (I)

Довідкова інформація

Звичайним диференціальним рівнянням вищого порядку називається звичайне диференціальне рівняння
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{135}$$
порядок якого вищий за перший.

Тут і далі $n \geqslant 2$ — натуральне число, x – незалежна дійсна змінна, y – невідома функція від змінної x, а $y', \dots, y^{(n)}$ – похідні функції y, $F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, $(x, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \Omega$, – задана функція, Ω – область в просторі $\mathbb{R}^{n+2}$.

Якщо рівняння (164) можна подати у вигляді
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{136}$$
де $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$, – задана функція, D – область в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$,то його називають *розв'язним стосовно старшої похідної*, а в протилежному випадку — *нерозв'язним стосовно старшої похідної*. Рівняння вигляду (164) називають *не розв'язаним стосовно старшої похідної*, а рівняння (299) — *розв'язаним стосовно старшої похідної*.

Під *розв'язком* рівняння (164) розуміємо функцію $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови:
1) $\varphi \in C^n\big(\langle a, b\rangle\big)$;
2) $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$;
3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Загальним розв'язком рівняння (164) називають функцію
$$y = \psi(x, C_1, \dots, C_n), \quad (x, C_1, \dots, C_n) \in \Gamma, \tag{137}$$
(G — область в $\mathbb{R}^{1+n}$), яка задовольняє умову:
• для кожних конкретних допустимих значень $C_1^\circ, \dots, C_n^\circ$ відповідних параметрів $C_1, \dots, C_n$ функція $y = \varphi(x, C_1^\circ, \dots, C_n^\circ)$, $x \in \langle a, b\rangle$, є розв'язком рівняння (164).

Повним загальним розв'язком рівняння (164) називають загальний розв'язок (147), якщо він задовольняє умову:
• який би не був розв'язок $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, рівняння (164), знайдуться конкретні значення $C_{1,\varphi}, \dots, C_{n,\varphi}$ параметрів $C_1, \dots, C_n$ такі, що
$$\varphi(x) = \psi(x, C_{1,\varphi}, \dots, C_{n,\varphi}), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Під *інтегралом* рівняння (164) розуміють рівняння
$$\Phi(x, y) = 0, \tag{138}$$
таке, що будь-яка неявно задана цим рівнянням n раз неперервно-диференційовна функція $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, є розв'язком рівняння (164).

Загальним інтегралом рівняння (164) називається співвідношення

$$\Psi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \tag{139}$$

таке, що виконана умова:
• при довільно вибраних і зафіксованих допустимих значень $C_1^\circ, \dots, C_n^\circ$ відповідних параметрів (довільних сталих) $C_1, \dots, C_n$ рівняння $\Psi(x, y, C_1^\circ, \dots, C_n^\circ) = 0$ є інтегралом рівняння (164).

Повним загальним інтегралом рівняння (164) називають загальний інтеграл (149), якщо він задовольняє умову:
• для будь-якого інтегралу (148) рівняння (164) знайдуться допустимі значення $C_{1,\Phi}, \dots, C_{n,\Phi}$ параметрів $C_1, \dots, C_n$ такі, що

$$\Phi(x, y) = \Psi(x, y, C_{1,\Phi}, \dots, C_{n,\Phi}).$$

Рівняння вищих порядків, як правило, розв'язують в три етапи: 1) заміною змінних понижують порядок даного рівняння до першого; 2) розв'язують отримане рівняння першого порядку; 3) вертаються до старих змінних.

Зрозуміло, що пониження порядку можна провести тільки для певних типів рівнянь і при цьому використовувати відповідні заміни змінних. Виділимо декілька груп рівнянь (164), для яких існують відповідні способи пониження порядку.

I група. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{140}$$

де $f(x)$ — задана на (a, b) і неперервна там функція. Розв'язок цього рівняння шукається n-кратним інтегруванням функції f.

II група. Рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{141}$$

де $k \geqslant 1$ (рівняння, в якому явно не фігурують значення шуканої функції та її похідних до певного порядку).

В рівнянні (151) робимо заміну

$$y^{(k)} =: z\,.$$

Тоді

$$y^{(k+1)} = z', \quad \dots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}\,.$$

Отож, рівняння (151) зводиться до рівняння

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

порядок якого $n - k < n$.

III група. Рівняння вигляду

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{142}$$

(рівняння, в якому явно не фігурують значення незалежної змінної x).

В цьому рівнянні робимо заміну змінних

$$y' =: p,$$

де $p = p(y)$ — функція від значень шуканої функції y.

Оскільки

$$y'(x) = p(y(x)),$$

то

$$\begin{aligned}
&y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)),\\
&y'''(x) = p''(y(x)) \cdot y'(x) \cdot p(y(x)) + p'(y(x)) \cdot p'(y(x)) \cdot y'(x) =\\
&\qquad = p''(y(x)) \cdot p^2(y(x)) + p'^2(y(x)) \cdot p(y(x)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned}$$

Коротко це можна записати у вигляді

$$y'' = p'p, \quad y''' = p''p^2 + p'^2 p, \quad \ldots \quad , y^{(n)} = g(p, p', \ldots, p^{(n-1)}).$$

Отже, рівняння (152) зводиться до рівняння

$$G(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0,$$

порядок якого на 1 менший за порядок вихідного рівняння.

IV група. **Однорідні рівняння** , тобто рівняння вигляду (164), де F — однорідна функція стосовно змінних $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \quad \forall k > 0, \text{ де } m \in \mathbb{R} \ - \text{деяке число.}$$

Покладемо

$$\frac{y'}{y} = z.$$

Тоді

$$y' = zy,$$

звідки

$$\begin{gathered}
y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y,\\
y''' = (z'' + 2zz')y + (z' + z^2)y' = (z'' + 3z'z + z^3)y, \ldots,\\
y^{(n)} = h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})y.
\end{gathered}$$

Підставляючи ці вирази в (164), отримаємо рівняння

$$H\big(x, z, z', \ldots, h(z, z', \ldots, z^{(n-1)})\big) = 0.$$

V група. **Узагальнено однорідні рівняння**, тобто рівняння вигляду (164), де функція F володіє властивістю

$$F\big(kx, k^m y, k^{m-1}y', \ldots, k^{m-n}y^{(n)}\big) = k^{\nu} F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) \quad \forall k > 0,$$

де m і ν — деякі дійсні числа.

Зробимо заміну змінних при $x > 0$

$$\begin{cases} x = e^t,\\ y = ze^{mt}, \end{cases}$$

де $z = z(t)$ — "нова" шукана функція від "нової" змінноїt.

Оскільки

$$y(x) = z(t)e^{mt}|_{t=\ln x},$$

то

$$y'_x = (ze^{mt})'_t \cdot t'_x = (z'_t e^{mt} + mze^{mt}) \cdot \frac{1}{x'_t} = (z'_t + mz)e^{(m-1)t},$$
$$y''_x = \big((z'_t + mz)e^{(m-1)t}\big)'_t \cdot t'_x = \big[(z''_t + mz'_t)e^{(m-1)t} + (z'_t + mz)(m-1)e^{(m-1)t}\big]e^{-t} =$$
$$= \big[z''_t + (2m-1)z'_t) + m(m-1)z\big]e^{(m-2)t},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}_x = q\big(z, z't, \dots, z^{(n)}_t\big)e^{(m-n)t}.$$

Підставляючи ці вирази в (164) та враховуючи рівність

$$F\big(e^t, z(e^t)^m, (z'_t + mz)(e^t)^{m-1}, \dots, q(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)(e^t)^{m-n}\big) =$$
$$= e^{\nu t}F\big(1, z, z'_t + mz, \dots, q(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)\big),$$

отримаємо рівняння

$$M\big(z, z', \dots, z^{(n)}\big) = 0,$$

яке належить до третьої групи.

VI група. Рівняння, які після певних елементарних перетворень (множення і ділення на певні вирази), можна записати у вигляді

$$\Big(F_1\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)\Big)' = \Big(F_2\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)\Big)'.$$

Звідси, очевидно, отримаємо рівняння

$$F_1\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) = F_2\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) + C_1.$$

Контрольні питання

1. Що називають звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) вищого порядку розв'язним (нерозв'язним) стосовно похідної?

2. Що називають розв'язком, загальним розв'язком, повним загальним розв'язком, інтегралом, загальним інтегралом та повним загальним інтегралом ЗДР вищого порядку?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$y'' = 6x + 2\,.$$

◀ Дане рівняння належить до першої групи. Маємо

$$y' = 3x^2 + 2x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = x^3 + x^2 + C_1x + C_2.$$

– повний загальний розв'язок рівняння. ►

2. Розв'язати рівняння
$$2xy'y'' = {y'}^2 - 1.$$

◄ Оскільки рівняння явно не містить змінної y, то воно належить до другої групи, а отже, для пониження порядку робимо в ньому заміну змінних
$$y' =: z \quad \Rightarrow \quad y'' = z'.$$

У результаті підстановки виразів y', y'' через змінну z приходимо до рівняння першого порядку
$$2xzz' = z^2 - 1. \tag{143}$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:
$$2xz\frac{dz}{dx} = z^2 - 1 \;\Big|\times \frac{dx}{x(z^2-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2z\,dz}{z^2-1} = \frac{dx}{x}, \;\; z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{d(z^2-1)}{z^2-1} = \frac{dx}{x}, \;\; z = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|z^2-1| = \ln|x| + \ln|C_1|, \; C_1 \neq 0, \quad z = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{1 + C_1 x}.$$

Повертаючись до старих змінних, отримаємо
$$y' = \pm\sqrt{1 + C_1 x},$$

звідки маємо сім'ю всеможливих розв'язків заданого рівняння:
$$y = \pm\frac{2\sqrt{(1+C_1x)^3}}{3C_1} + C_2, \;\; \text{якщо } C_1 \neq 0, \quad \text{і} \quad y = \pm\, x + C_2, \;\; \text{якщо } C_1 = 0.$$

►

3. Розв'язати рівняння
$$yy'' = {y'}^2 - {y'}^3.$$

◄ Оскільки в дане рівняння явно не входить змінна x, то воно належить до третьої групи, а отже, для пониження порядку робимо в ньому заміну змінних
$$y' =: p\,, \quad \text{де} \;\; p = p(y), \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'.$$

Отож, дане рівняння зводиться до рівняння першого порядку відносно невідомої функції p від змінної y:
$$yp'p = p^2 - p^3 \quad \Leftrightarrow \quad p(yp' + p^2 - p) = 0,$$

звідки отримаємо сукупність рівнянь
$$p = 0 \quad \text{або} \quad yp' + p^2 - p = 0. \tag{144}$$

Розв'яжемо друге рівняння, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними:
$$yp' + p^2 - p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\,\frac{dp}{dy} + p^2 - p = 0 \;\Big|\times \frac{dy}{y(p^2-p)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dp}{p^2-p}+\frac{dy}{y}=0 \quad \text{або} \quad y=0 \quad \text{або} \quad p=0 \quad \text{або} \quad p=1.$$

$$\int \frac{dp}{p^2-p}+\ln|y|=\ln|C_1| \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=\ln\left|\frac{C_1}{y}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p-1}{p}=\frac{C_1}{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$p=\frac{y}{y-C_1}.$$

Повертаючись до старих змінних, одержуємо

$$y'=\frac{y}{y-C_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-C_1}\ \Big|\times\frac{(y-C_1)\,dx}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y-C_1)\,dy}{y}=dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int\left(1-\frac{C_1}{y}\right)dy=x+C_2 \quad \Leftrightarrow \quad y-C_1\ln y=x+C_2.$$

Також маємо

$$p=0 \quad \Rightarrow \quad y'=0 \quad \Rightarrow \quad y=C_1,$$

$$p=1 \quad \Rightarrow \quad y'=1 \quad \Rightarrow \quad y=x+C_2.$$

Отже, всеможливими розв'язками рівняння є функції

$$y-C_1\ln y=x+C_2 \quad \text{та} \quad y=C_1\,.$$

►

4. Розв'язати рівняння

$$xyy''-xy'^2=yy'.$$

◄ Дане рівняння є однорідним стосовно змінних y, y', y'', а тому належить до четвертої групи. Отже, робимо в ньому заміну змінних

$$\frac{y'}{y}=:z \quad \Rightarrow \quad y'=yz, \quad \Rightarrow \quad y''=y(z^2+z').$$

У результаті отримаємо рівняння

$$xy^2(z^2+z')-x(yz)^2=y^2z,$$

звідки

$$xz'=z.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$x\frac{dz}{dx}=z\ \Big|\times\frac{dx}{xz} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x},\ z=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|z|=\ln|x|+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0, \quad z=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z=C_1x\,.$$

Повертаючись до старих змінних, одержуємо

$$\frac{y'}{y}=C_1x \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ln|y|\big)'=C_1x \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y|=C_1x^2/2+\ln|C_2| \quad \Leftrightarrow$$

$$y=C_2e^{C_1x^2/2}$$

– повний загальний розв'язок даного рівняння. ►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння (або задачу Коші):

1*. $y''' = \sin 2x + e^x$.; **536.** $y' = 2xy'' + 4y'' + 3$; **552.** $yy'' + y'^2 = 3yy'$;

564. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Знизити порядок рівняння, користуючись його однорідністю розв'язати це рівняння:

618. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння (або задачу Коші):

538. $y' - \dfrac{1}{2}xy'' + 2y'' = 1$; **544.** $y' = \dfrac{1}{2}xy''^2 - y''^2 + 4$;

570. $y'''y' - 3y''^2 = 0$;

553. $2yy'' - (y-2)y'^2 = (y+2)y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$;

567. $yy'' + y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$;

582. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

545. $\left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}\right)(yy'' - y'^2) + \dfrac{5}{9}y^2 = yy'$;

572. $yy'' - y'(2\sqrt{yy'} - y') = 0$.

Знизити порядок рівняння, користуючись його однорідністю розв'язати це рівняння:

615. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

Додаткові завдання:

542. $y' = xy''^2 - 2y''^2 + 1$; **564.** $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Відповіді:

536. $y = C_1|2x+4|^{3/2} + 3x + C_2$; **538.** $y = C_1\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^3 + x + C_2$;

542. $y = x + C$, $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4C_1}{3}|x-2|^{3/2} \pm C_1^2 x - x + C_2$;

544. $y = 4x + C$; $y = x^2 + \dfrac{16}{3}C_1\left|\dfrac{x}{2} - 1\right|^{3/2} \pm C_1^2 x + C_2$;

545. $y = C_2 \exp\left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{16}{27}C_1\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}\right|^{3/2} \pm C_1^2 x - x\right)$, $y = C_2 e^{5x/9}$;

552. $3y^2 + C_1 = C_2 e^{3x}$; **553.** $(y+4)^4 = 5^4 e^{x+y-1}$;

557. $y = e^{3/y - x/2 - 3}$; **564.** $y\cos^2(x + C_1) = C_2$;

567. $y^2 = C_1 + C_2\big(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\big)$;

570. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$; **572.** $\ln(y + C_1) + \dfrac{C_1}{y + C_1} = x + C_2$;

582. $y^2 = 2x - 1$; **618.** $y = C_2|x|^{C_1 - (1/2)\ln|x|}$.

Практичне заняття № 13
Рівняння вищих порядків (II)

Довідкова інформація

Звичайним диференціальним рівнянням вищого порядку називається звичайне диференціальне рівняння
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{145}$$
порядок якого вищий за перший.

Тут і далі $n \geqslant 2$ — натуральне число, x – незалежна дійсна змінна, y – невідома функція від змінної x, а $y', \ldots, y^{(n)}$ – похідні функції y, $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in \Omega$, – задана функція, Ω – область простору $\mathbb{R}^{n+2}$.

Якщо рівняння (164) можна подати у вигляді
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{146}$$
де $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$, – задана функція, D – область простору $\mathbb{R}^{n+1}$,то його називають *розв'язним* стосовно старшої похідної, а в протилежному випадку — *нерозв'язним* стосовно старшої похідної. Рівняння вигляду (299) називають *розв'язаним* стосовно старшої похідної.

Під ***розв'язком*** рівняння (164) розуміємо функцію $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови:
1) $\varphi \in C^n\big(\langle a, b\rangle\big)$;
2) $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$;
3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Загальним розв'язком рівняння (164) називають функцію
$$y = \psi(x, C_1, \ldots, C_n), \quad (x, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega, \tag{147}$$
(Ω — область в $\mathbb{R}^{1+n}$), яка задовольняє умову:
• для кожних конкретних допустимих значень $C_1^\circ, \ldots, C_n^\circ$ відповідних параметрів $C_1, \ldots, C_n$ функція $y = \psi(x, C_1^\circ, \ldots, C_n^\circ)$ є розв'язком рівняння (164).

Повним загальним розв'язком рівняння (164) називають загальний розв'язок (147), якщо він задовольняє умову:
• який би не був розв'язок $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, рівняння (164), знайдуться конкретні значення $C_{1,\varphi}, \ldots, C_{n,\varphi}$ параметрів $C_1, \ldots, C_n$ такі, що
$$\varphi(x) = \psi(x, C_{1,\varphi}, \ldots, C_{n,\varphi}), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Під ***інтегралом*** рівняння (164) розуміють рівняння
$$\Phi(x, y) = 0, \tag{148}$$
таке, що будь-яка n раз неперервно-диференційовна функція $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, неявно задана цим рівнянням, є розв'язком рівняння (164).

Загальним інтегралом рівняння (164) називають співвідношення
$$\Psi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{149}$$

таке, що виконана умова:
• при довільно вибраних і зафіксованих допустимих значень $C_1^\circ, \ldots, C_n^\circ$ відповідних параметрів (довільних сталих) $C_1, \ldots, C_n$ рівняння $\Psi(x, y, C_1^\circ, \ldots, C_n^\circ) = 0$ є інтегралом рівняння (164).

Повним загальним інтегралом рівняння (164) називають загальний інтеграл (149), якщо він задовольняє умову:
• для будь-якого інтегралу (148) рівняння (164) знайдуться допустимі значення $C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}$ параметрів $C_1, \ldots, C_n$ такі, що

$$\Phi(x, y) = \Psi(x, y, C_{1,\Phi}, \ldots, C_{n,\Phi}).$$

Рівняння вищих порядків, як правило, розв'язують в три етапи: 1) заміною змінних понижують порядок даного рівняння до першого; 2) розв'язують отримане рівняння першого порядку; 3) вертаються до старих змінних.

Зрозуміло, що пониження порядку можна провести тільки для певних типів рівнянь і при цьому використовувати відповідні заміни змінних. Виділимо декілька груп рівнянь (164), для яких існують відповідні способи пониження порядку.

I група. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{150}$$

де $f(x)$ — задана на (a, b) і неперервна там функція. Розв'язок цього рівняння шукається n-кратним інтегруванням функції f.

II група. Рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{151}$$

де $k \geqslant 1$ (рівняння, в якому явно не фігурують значення шуканої функції та її похідних до певного порядку).

В рівнянні (151) робимо заміну

$$y^{(k)} =: z\,.$$

Тоді

$$y^{(k+1)} = z', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}\,.$$

Отож, рівняння (151) зводиться до рівняння

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

порядок якого $n - k < n$.

III група. Рівняння вигляду

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{152}$$

(рівняння, в якому явно не фігурують значення незалежної змінної x).

В цьому рівнянні робимо заміну змінних

$$y' =: p,$$

де $p = p(y)$ — функція від значень шуканої функції y.

Оскільки

$$y'(x) = p(y(x)),$$

то

$$\begin{aligned}
&y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)),\\
&y'''(x) = p''(y(x)) \cdot y'(x) \cdot p(y(x)) + p'(y(x)) \cdot p'(y(x)) \cdot y'(x) =\\
&\qquad = p''(y(x)) \cdot p^2(y(x)) + p'^2(y(x)) \cdot p(y(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{aligned}$$

Коротко це можна записати у вигляді

$$y'' = p'p, \quad y''' = p''p^2 + p'^2 p, \quad \dots \quad , y^{(n)} = g(p, p', \dots, p^{(n-1)}).$$

Отже, рівняння (152) зводиться до рівняння

$$G(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0,$$

порядок якого на 1 менший за порядок вихідного рівняння.

IV група. **Однорідні рівняння** , тобто рівняння вигляду (164), де F — однорідна функція стосовно змінних $y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad \forall k > 0, \text{ де } m \in \mathbb{R} \text{ — деяке число.}$$

Покладемо

$$\frac{y'}{y} = z.$$

Тоді

$$y' = zy,$$

звідки

$$\begin{gathered}
y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y,\\
y''' = (z'' + 2zz')y + (z' + z^2)y' = (z'' + 3z'z + z^3)y, \dots,\\
y^{(n)} = h(z, z', \dots, z^{(n-1)})y.
\end{gathered}$$

Підставляючи ці вирази в (164), отримаємо рівняння

$$H\big(x, z, z', \dots, h(z, z', \dots, z^{(n-1)})\big) = 0.$$

V група. **Узагальнено однорідні рівняння**, тобто рівняння вигляду (164), де функція F володіє властивістю

$$F\big(kx, k^m y, k^{m-1}y', \dots, k^{m-n}y^{(n)}\big) = k^\nu F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) \quad \forall k > 0, \tag{153}$$

де m і ν — деякі дійсні числа.

Зробимо заміну змінних при $x > 0$

$$\begin{cases} x = e^t,\\ y = ze^{mt}, \end{cases}$$

де $z = z(t)$ — нова шукана функція від нової змінної t.

Оскільки

$$y(x) = z(t)e^{mt}|_{t=\ln x},$$

то

$$\begin{aligned}
y'_x &= (ze^{mt})'_t \cdot t'_x = (z'_t e^{mt} + mze^{mt}) \cdot \frac{1}{x'_t} = (z'_t + mz)e^{(m-1)t},\\
y''_x &= \big((z'_t + mz)e^{(m-1)t}\big)'_t \cdot t'_x = \big[(z''_t + mz'_t)e^{(m-1)t} + (z'_t + mz)(m-1)e^{(m-1)t}\big]e^{-t} =\\
&= \big[z''_t + (2m-1)z'_t) + m(m-1)z\big]e^{(m-2)t},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y^{(n)}_x &= q\big(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t\big)e^{(m-n)t}.
\end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (164) та враховуючи рівність

$$\begin{aligned}
&F\big(e^t, z(e^t)^m, (z'_t + mz)(e^t)^{m-1}, \dots, q(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)(e^t)^{m-n}\big) =\\
&= e^{\nu t}F\big(1, z, z'_t + mz, \dots, q(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)\big),
\end{aligned}$$

отримаємо рівняння

$$M\big(z, z', \dots, z^{(n)}\big) = 0,$$

яке належить до третьої групи.

VI група. Рівняння, які після певних елементарних перетворень (множення і ділення на певні вирази), можна записати у вигляді

$$\Big(F_1\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)\Big)' = \Big(F_2\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)\Big)'.$$

Звідси, очевидно, отримаємо рівняння

$$F_1\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) = F_2\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) + C_1.$$

Контрольні питання

1. Що називають звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) вищого порядку розв'язним (нерозв'язним) стосовно похідної?

2. Що називають розв'язком, загальним розв'язком, повним загальним розв'язком, інтегралом, загальним інтегралом та повним загальним інтегралом ЗДР вищого порядку?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0.$$

◀ Переконаємося, що дане рівняння узагальнено однорідним. Приймемо

$$F(x, y, y', y'') := x^4y'' + (xy' - y)^3$$

і перевіримо виконання умови (153), яка в даному випадку має вигляд:

$$F(kx, k^m y, k^{m-1}y', k^{m-2}y'') = k^\nu F(x, y, y', y'') \quad \forall k > 0,$$

тобто

$$(kx)^4(k^{m-2}y'') + \big((kx)(k^{m-1}y') - (k^m y)\big)^3 = k^\nu(x^4y'' + (xy' - y)^3) \quad \Leftrightarrow$$
$$k^{4+m-2}x^4y'' + \big(k^{1+m-1}xy' - k^m y\big)^3 = k^\nu(x^4y'' + (xy' - y)^3).$$

Звідси випливає, що дане рівняння є узагальнено однорідним, якщо існують числа m, ν такі, що

$$4 + m - 2 = 3(1 + m - 1) = 3m = \nu. \tag{154}$$

Очевидно, що значення m має бути розв'язком рівняння: $m+2 = 3m$, звідки маємо $m = 1$, а тоді $\nu = 3$. Отож, дане рівняння є узагальнено однорідним і нам треба в ньому зробити заміну змінних

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = ze^t. \end{cases} \tag{155}$$

Звідси знаходимо

$$y' = (z'e^t + ze^t)e^{-t} = z' + z, \quad y'' = (z'' + z')e^{-t}.$$

Підставляємо вирази x, y, y', y'' відповідно через t, z, z', z'' в дане рівняння:

$$e^{4t}(z'' + z')e^{-t} + (e^t(z' + z) - ze^t)^3 = 0 \,\Big|\, : e^{3t} \quad \Leftrightarrow$$

$$z'' + z' + {z'}^3 = 0. \tag{156}$$

Оскільки у рівняння (156) явно не входить змінна t, то це рівняння належить до третьої групи, а отже, для пониження його порядку треба в ньому зробити заміну змінних

$$z' = p, \quad \text{де} \ \ p = p(z).$$

Тоді $z'' = pp'$ і рівняння (156) зводиться до рівняння першого порядку

$$p'p + p + p^3 = 0.$$

Звідси $p(p' + 1 + p^2) = 0$, тобто

$$p = 0 \quad \text{або} \quad p' = -(1 + p^2). \tag{157}$$

Розв'яжемо друге рівняння отриманої сукупності, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dz} = -(1 + p^2) \,\Big|\, \times \frac{dz}{1 + p^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{1 + p^2} = -dz \ \ \big(1 + p^2 > 0 \ \forall p \in \mathbb{R}\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{arctg} p = -z + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad p = -\operatorname{tg}(z - C_1)$$

Врахувавши отримане і вертаючись до старих змінних, із сукупності (157) здобуваємо

$$z' = 0 \quad \text{або} \quad z' = -\operatorname{tg}(z - C_1). \tag{158}$$

З першого рівняння одержуємо, що $z = C_1$, а друге рівняння розв'яжемо, відокремивши змінні, так:

$$\frac{dz}{dt} = -\operatorname{tg}(z - C_1) \Big| \times \frac{dt}{\operatorname{tg}(z - C_1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(z - C_1)}{\sin(z - C_1)}\, dz = -dt \quad \text{або} \quad \sin(z - C_1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{d \sin(z - C_1)}{\sin(z - C_1)}\, dz = -t + \ln|C_2| \quad \text{або} \quad \sin(z - C_1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|\sin(z - C_1)| = \ln e^{-t} + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0, \quad \text{або} \quad \sin(z - C_1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin(z - C_1) = C_2 e^{-t}.$$

Повертаючись до старих змінних ($e^t = x,\ z = y/x$), знаходимо всеможливі розв'язки вихідного рівняння

$$\begin{array}{ll} z = C_1 & \Rightarrow y = C_1 x, \\ \sin(z - C_1) = C_2 e^{-t} & \Rightarrow \sin(y/x - C_1) = C_2/x. \end{array}$$

Зауважимо, що розв'язок $y = C_1 x$ входить у сім'ю розв'язків $\sin(y/x - C_1) = C_2/x$, коли взяти $C_2 = 0$.

Отож,

$$\sin(y/x - C_1) = C_2/x$$

– повний загальний інтеграл даного рівняння. ▶

2. Розв'язати рівняння

$$yy''' + 3y'y'' = 0.$$

◀ Легко бачити, що

$$yy''' + 3y'y'' = 0 \Big| \times \frac{1}{yy''} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'''}{y''} + 3\frac{y'}{y} = 0 \quad \text{або} \quad y'' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\ln|y''|)' + 3(\ln|y|)' = 0 \quad \text{або} \quad y' = C_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$y''y^3 = C_1 \quad \text{або} \quad y = C_1 x + C_2.$$

Зробимо в рівнянні

$$y''y^3 = C_1$$

заміну змінних

$$y' = p,\ \text{де } p = p(y).$$

Тоді $y'' = p'p$ і в результаті отримаємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$y^3 pp' = C_1.$$

Звідси

$$y^3 p\frac{dp}{dy} = C_1 \Big| \times \frac{dy}{y^3} \quad \Leftrightarrow \quad p\, dp = C_1 \frac{dy}{y^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{2} = \frac{C_1}{-2y^2} + \frac{C_2}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$p^2 = \frac{C_2 y^2 - C_1}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad p = \pm\frac{\sqrt{C_2 y^2 - C_1}}{y}.$$

Повертаючись до старих змінних, матимемо

$$y' = \pm\frac{\sqrt{C_2y^2-C_1}}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_2y^2-C_1}}{y}\,\Big|\times\frac{y\,dx}{\sqrt{C_2y^2-C_1}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y\,dy}{\sqrt{C_2y^2-C_1}} = \pm\,dx$$

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_2y^2-C_1}} = \pm x + C_3,$$

звідки $C_2y^2 - C_1 = C_2^2(\pm\,x + C_3)^2$, якщо $C_2 \neq 0$, і $y^2 = 2\sqrt{-C_1}(\pm\,x + C_3)$, якщо $C_2 = 0$ (тоді $C_1 \leqslant 0$).

Отже, всеможливі розв'язки рівняння є функції, задані сукупністю загального розв'язку і загальних інтегралів

$$y = C_1x + C_2, \quad C_2y^2 - C_1 = C_2^2(\pm\,x + C_3)^2, \quad y^2 = 2\sqrt{-C_1}(\pm\,x + C_3).$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Знизити порядок рівнянь, користуючись їхньою однорідністю, і розв'язати ці рівняння:

625. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$; **627.** $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.

Знизивши порядок рівнянь, звести їх до рівнянь першого порядку:

642. $2yy''' = y'$.

Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

649. $yy'' = 2xy'^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$;

651. $y''' = 3yy'$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4,5$.

Домашні завдання:

Знизити порядок рівнянь, користуючись їхньою однорідністю, і розв'язати ці рівняння:

623. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$; **624.** $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$;

630. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

Знизивши порядок рівнянь, звести їх до рівнянь першого порядку:

640. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$; **646.** $(y'y''' - 3y''^2)y = y'^5$;

648. $x^2(y^2y''' - y'^3)2y^2y' - 3xyy'^2$.

Знайти розв'язки рівняння, що задовольняють задані початкові умови:

652. $y''\cos y + y'^2\sin y = y'$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

Додаткові завдання:

Знизивши порядок рівнянь, звести їх до рівнянь першого порядку:

639. $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$.

Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

650. $2y''' - 3y'^2 = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

7. Відповіді:

623. $4C_1y^2 = 4x + x(C_1\ln C_2x)^2$;

624. $y = -x\ln(C_2\ln C_1x)$, $y = Cx$;

625. $\dfrac{y}{x} = C_2 - 3\ln|1/x - C_1|$, $y = Cx$;

627. $4(C_1y - 1) = C_1^2\ln^2 C_2x$;

630. $2C_1C_2y = C_2^2|x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$;

649. $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$; **650.** $y(x + 2) = -x - 6$;

651. $y = 3\mathrm{th}^2\dfrac{x\sqrt{3}}{2} - 2$; **652.** $\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$.

Практичне заняття № 14
Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нормальних систем і рівнянь вищих порядків

Довідкова інформація

Під $\mathbb{R}^k$, де $k \in \mathbb{N}$, розумітимемо нормований лінійний простір над полем $\mathbb{R}$, який складається з впорядкованих наборів з k дійсних чисел (векторів) $z = (z_1, \ldots, z_k)$, зі стандартними операціями додавання та множення на скаляр і нормою $|z| := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$.

Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку називають систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{159}$$

де $n \geqslant 2$ – натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі дійсні функції від змінної t, $x_1', \ldots, x_n'$ – похідні невідомих функцій, $f_1 : D \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ – задані неперервні функції, D – область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$.

Означення 5. *Розв'язком нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь (159) називають систему функцій*

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \quad \text{де } \infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

які задовольняють умови:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^1\big(\langle a, b \rangle\big)$*;*

2) $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$*;*

3) $$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \quad \forall t \in \langle a, b \rangle. \end{cases}$$

Задача Коші для системи (159) полягає у знаходженні розв'язку цієї системи, який задовольняє початкову умову

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{160}$$

де $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — яка-небудь фіксована точка з D.

Цю задачу коротко називатимемо *задачею* (159), (160).

При дослідженні питання *існування розв'язку задачі (159),(160), його єдиності та неперервної залежності від вхідних даних* важливу роль відіграє система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1, \ldots, x_n)\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_n(s, x_1, \ldots, x_n)\, ds. \end{cases} \tag{161}$$

Розв'язком системи скалярних рівнянь (161) називають систему функцій $x_1 = \psi_1(t)$,…, $x_n = \psi_n(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$, які задовольняють умови

1) $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C\big(\langle c, d\rangle\big)$;

2) $\big(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big) \in D \quad \forall t \in \langle c, d\rangle$;

3) $$\begin{cases} \psi_1(t) = x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_1(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(t) = x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_n(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\, ds \qquad \forall t \in \langle c, d\rangle. \end{cases}$$

Правильне таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $f_1, \ldots, f_n \in C(D)$. Тоді будь-який розв'язок задачі (159),(160) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (161)) і, навпаки, довільний розв'язок системи (173) є розв'язком задачі (159),(160).*

Правильне таке твердження.

Теорема 3 (Пеано). *Нехай $f_1, \ldots, f_n \in C(D)$. Тоді задача (159),(160) має розв'язки.*

Зауваження 0.0.1. *Умови теореми Пеано не гарантують єдиності розв'язку задачі Коші в сенсі, що будь-які два її розв'язки збігаються на спільній частині області їх визначення.*

Означення 6. *Скажемо, що функція $g(t, x_1, \ldots, x_n)$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$, де G — множина в $\mathbb{R}^{1+n}$, задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x_1, \ldots, x_n$), якщо існує стала $L \geqslant 0$ така, що*

$$\big|g(t, x_1^1, \ldots, x_n^1) - g(t, x_1^2, \ldots, x_n^2)\big| \leqslant L \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^1 - x_i^2|$$
$$\forall\, (t, x_1^1, \ldots, x_n^1),\ (t, x_1^2, \ldots, x_n^2) \in G. \tag{162}$$

Означення 7. *Функція $g(t, x_1, \ldots, x_n)$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$, де G — множина в $\mathbb{R}^{1+n}$, задовольняє умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого (тобто за змінними $x_1, \ldots, x_n$) в G локально, якщо для будь-якого компакту $K \subset G$ звуження функції g на компакт K задовольняє умову Ліпшіца (на K) за всіма аргументами, крім першого.*

Теорема 4 (Пікар). *Нехай функції f_i, $i = \overline{1, n}$, є неперервними на D і задовольняють умову Ліпшіца за всіма аргументами, крім першого, локально. Тоді для будь-якої точки $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ задача (159), (160) має розв'язки і будь-які два з них збігаються на спільній частині їх областей визначення.*

Зауваження 0.0.2. *Умови теореми 4 виконуються, якщо*

$$f_j,\ \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in C(D), \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Зауваження 0.0.3. *Нехай виконуються умови теореми Пікара і* $r > 0$ *та* $q_1 > 0, \ldots, q_n > 0$ *такі, що*

$$P^{r,\,q_1,\,\ldots,\,q_n}_{t_0,x_1^0,\ldots,x_n^0} := \Big\{(t, x_1, \ldots, x_n) \,\Big|\, |t-t_0| \leqslant r,\ |x_i - x_i^0| \leqslant q_i,\, i=\overline{1,n}\Big\} \subset D.$$

Тоді задача (159), (160) має розв'язок, визначений на відрізку Пеано

$$I_{t_0,h} := [t_0 - h,\, t_0 + h],$$

$$\text{де}\ \ h = \min\Big\{r, \frac{q_1}{m_1}, \ldots, \frac{q_n}{m_n}\Big\}, \quad \text{а}\ \ m_i := \max_{(t,x_1,\ldots,x_n)\in P^{r,\,q_1,\,\ldots,\,q_n}_{t_0,x_1^0,\ldots,x_n^0}} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|, \quad i=\overline{1,n}.$$

Зауваження 0.0.4. *Розв'язок* $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in I_{t_0,h}$, *про який йдеться у зауваженні 0.0.3, отримують як границю послідовності послідовних наближень:*

$$\begin{cases} x_1^{\langle 0\rangle}(t) := x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n^{\langle 0\rangle}(t) := x_n^0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{\langle k\rangle}(t) := x_1^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1^{\langle k-1\rangle}(s), \ldots, x_n^{\langle k-1\rangle}(s))\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{\langle k\rangle}(t) := x_n^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_n(s, x_1^{\langle k-1\rangle}(s), \ldots, x_n^{\langle k-1\rangle}(s))\, ds, \quad t \in I_{t_0,h}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{163}$$

тобто $\varphi_i(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{\langle k\rangle}(t), \quad t \in I_{t_0,h}, \quad i = \overline{1,n}.$

Теорема 5 (існування непродовжуваного розв'язку)**.** *Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі(159),(160), він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку.*

Звичайним диференціальним рівнянням вищого порядку називають звичайне диференціальне рівняння

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{164}$$

порядок якого вищий за перший. В рівнянні (164) $n \geqslant 2$ — натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, x – невідома функція від змінної t, а $x', \ldots, x^{(n)}$ – похідні функції x, $F(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega$, – задана функція, Ω – область простору $\mathbb{R}^{n+2}$.

Якщо рівняння (164) можна подати у вигляді

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{165}$$

де $f(t, x_1, \ldots, x_n)$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, – задана функція, D – область простору $\mathbb{R}^{1+n}$, то його називають *розв'язним стосовно старшої похідної*, а в протилежному випадку — *нерозв'язним стосовно старшої похідної*. Рівняння вигляду (299) називають *розв'язаним стосовно старшої похідної*.

Означення 8. *Розв'язком рівняння (164) називають функцію* $x = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, *яка задовольняє умови:*

1) $\psi \in C^n\big(\langle a, b\rangle\big)$;

2) $\big(t, \psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n)}(t)\big) \in \Omega \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$;

3) $F(t,\psi(t),\psi'(t),\ldots,\psi^{(n)}(t))=0 \ \ \forall t\in\langle a,b\rangle$.

Далі розглянемо ***рівняння*** (299) (розв'язане стосовно похідної) і поряд з ним таку нормальну систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2\,, \\ x_2' = x_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}' = x_n\,, \\ x_n' = f(t,x_1,\ldots,x_n)\,. \end{cases} \tag{166}$$

Теорема 6. *Якщо функція*

$$x=\psi(t), \quad t\in\langle a,b\rangle,$$

є розв'язком рівняння (299)*, то система функцій*

$$x_1=\psi(t),\ x_2=\psi'(t),\ \ldots,\ x_n=\psi^{(n-1)}(t), \quad t\in\langle a,b\rangle, \tag{167}$$

є розв'язком нормальної системи (166)*.*

І навпаки, якщо система функцій

$$x_1=\varphi_1(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t), \quad t\in\langle c,d\rangle, \tag{168}$$

є розв'язком нормальної системи (166)*, то функція*

$$x=\varphi_1(t), \qquad t\in\langle c,d\rangle,$$

є розв'язком рівняння (299)*, причому*

$$\varphi_2=\varphi_1',\, \varphi_3=\varphi_2'',\, \ldots,\, \varphi_n=\varphi_1^{(n-1)}. \tag{169}$$

Наслідок 1. *Між множинами розв'язків рівняння* (299) *та системи* (166) *існує взаємно однозначне відображення, визначене за правилом*

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = x', \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x^{(n-1)}, \end{cases} \tag{170}$$

де x — розв'язок рівняння (299)*, а $x_1,\ldots,x_n$ — розв'язок системи* (166)*.*

Задача Коші для рівняння (299) полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} x(t_0) = x_1^0, \\ x'(t_0) = x_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{171}$$

де $(t_0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$ — задана точка області D (початкові дані).

Цю задачу коротко називатимемо задачею (299),(300).

Розглянемо поряд із задачею (299),(300) задачу Коші для нормальної системи (166) з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ x_2(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{172}$$

де значення $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ — ті ж самі, що і в (300). Виходячи з наслідку теореми 6, приходимо до висновку, що питання про коректність задачі (299),(300) зводиться до аналогічного питання стосовно задачі (166),(172), для якої ми його вже вирішили. Тому, використовуючи відповідні результати для нормальних систем, можна сформулювати такі твердження.

Теорема 7 (Пеано)**.** *Нехай $f \in C(D)$. Тоді задача* (299),(300) *має розв'язки.*

Теорема 8 (Пікар)**.** *Нехай функція $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшица за всіма змінними, крім першої. Тоді існують розв'язки задачі* (299),(300)*, причому будь-які два з них співпадають на спільній частині їх областей визначення.*

Зауваження 0.0.5. *Як випливає з вище сказаного, для знаходження розв'язку задачі* (299),(300) *при виконанні умов теореми 8 можна використати такий спосіб:*

1) Переходимо до задачі Коші (166),(172), розв'язки якої пов'язані взаємно однозначно з розв'язками задачі (299),(300) *за правилом* (170).

2) Будуємо послідовність послідовних наближень розв'язку задачі (166),(172):

$$\begin{cases} x_1^{\langle 0\rangle}(t) := x_1^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n^{\langle 0\rangle}(t) := x_n^0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{\langle k\rangle}(t) := x_1^0 + \int\limits_{t_0}^{t} x_2^{\langle k-1\rangle}(s)\, ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^{\langle k\rangle}(t) := x_{n-1}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} x_n^{\langle k-1\rangle}(s)\, ds, \\ x_n^{\langle k\rangle}(t) := x_n^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_1^{\langle k-1\rangle}(s), \dots, x_n^{\langle k-1\rangle}(s))\, ds, \quad t \in I_{t_0,h}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{173}$$

3) Знаходимо $\varphi(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_1^{\langle k\rangle}(t), \quad t \in I_{t_0,h}$.

Тоді функція $x = \varphi(t)$, $t \in I_{t_0,h}$, є шуканим розв'язком задачі (299),(300).

Теорема 9 (існування непродовжуваного розв'язку)**.** *Нехай функція $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, є неперервною і задовольняє локально умову Ліпшица за всіма змінними, крім першої. Тоді існує і тільки один непродовжуваний розв'язок задачі* (299),(300)*, він визначений на інтервалі і є продовженням будь-якого іншого розв'язку цієї задачі.*

Контрольні питання

1. Що називають нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь (НС) і її розв'язком?

2. В чому полягає задача Коші для НС? Які умови на вхідні дані гарантують коректність задачі Коші для НС?

3. Коли задача Коші для НС має розв'язок? Як знайти послідовні наближення розв'язку задачі Коші для НС? Сформулювати теорему про непродовжувальний розв'язок задачі Коші для НС.

4. Що таке звичайне диференціальне рівняння вищого порядку і його розв'язок?

5. В чому полягає задача Коші для рівняння вищого порядку та які умови на вхідні дані гарантують коректність задачі Коші для НС? Сформулювати теорему про непродовжуваний розв'язок задачі Коші для рівняння вищого порядку.

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти область існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи

$$\begin{cases} x' = \dfrac{y^2+\sqrt{t}}{t}, \\ y' = \ln x. \end{cases}$$

◀ Приймемо $f(t,x,y) := \dfrac{y^2+\sqrt{t}}{t}$, $g(t,x,y) := \ln x$. Легко переконатися, що функції f, g, f_x, g_x, f_y, g_y визначені та неперервні в області $D := \{(t,x,y) : t > 0,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$. Отже, D – область існування і єдиності розв'язку задачі Коші для даної системи. ▶

2. Вказати який-небудь відрізок, на якому визначений розв'язок нормальної системи

$$\begin{cases} x' = x + y^2, \\ y' = 3x + |y|. \end{cases}$$

з початковими умовами $x(1) = 1$, $y(1) = 0$.

◀ Розглянемо паралелепіпед

$$\Pi^{1,1,1}_{1,1,0} = \left\{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqslant t \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

Знаходимо

$$m_1 := \max_{\Pi^{1,1,1}_{1,1,0}} |x+y^2| = 3, \quad m_2 := \max_{\Pi^{1,1,1}_{1,1,0}} |3x+|y|| = 7, \quad h := \min\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right\} = \frac{1}{7}.$$

Отож, існує розв'язок даної задачі, визначений на відрізку $\left[1-\dfrac{1}{7}, 1+\dfrac{1}{7}\right] = \left[\dfrac{6}{7}, \dfrac{8}{7}\right]$.

3. Побудувати два послідовних наближення (не рахуючи нульового) розв'язку задачі Коші для нормальної системи

$$\begin{cases} x' = e^t + y \\ y' = x^2 \end{cases} \tag{174}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} . \tag{175}$$

◀ Спочатку запишемо систему інтегральних рівнянь, яка еквівалентна даній задачі. Для цього припустимо, що $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, – розв'язок системи (174) і підставимо його в рівняння системи та проінтегруємо отримані рівності від 0 до t, попередньо замінивши символ t на символ s:

$$\begin{cases} x(t) - x(0) = \int\limits_0^t (e^s + z(s))\, ds \\ y(x) - y(0) = \int\limits_0^t x^2(s)\, ds \end{cases}.$$

Звідси, використовуючи початкові умови (178), одержуємо систему інтегральних рівнянь, яка еквівалентна задачі Коші (174),(178):

$$\begin{cases} x = 1 + \int\limits_0^t (e^s + y)\, ds, \\ y = \int\limits_0^t x^2\, ds. \end{cases} \tag{176}$$

Тоді рекурентні формули для знаходження послідовних наближень розв'язку задачі (174), (178) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{k+1}(t) = 1 + \int\limits_0^t (e^s + y_k(s))\, ds, \\ y_{k+1}(t) = \int\limits_0^t x_k^2(s)\, ds. \end{cases}$$

Знайдемо перше послідовне наближення:

$$\begin{cases} x_1(t) := 1 + \int\limits_0^t e^s\, ds = e^t, \\ y_1(t) := \int\limits_0^t \, ds = t. \end{cases}$$

Тоді шукаємо друге послідовне наближення:

$$\begin{cases} x_2(t) := 1 + \int\limits_0^t (e^s + s)\, ds = e^t + \dfrac{t^2}{2}, \\ y_2(t) := \int\limits_0^t e^{2s}\, ds = \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

▶

4. Побудувати два послідовних наближення (не рахуючи нульового) розв'язку задачі Коші для рівняння другого порядку

$$x'' - tx' + 3x = e^t \tag{177}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ x'(0) = 2. \end{cases} \tag{178}$$

◀ Спочатку розв'яжемо дане рівняння відносно старшої похідної (тобто відносно x''):

$$x'' = tx' - 3x + e^t \tag{179}$$

і, ввівши нову невідому функцію $y := x'$, зведемо рівняння (179) до нормальної системи

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = ty - 3x + e^t, \end{cases} \tag{180}$$

а початкові умови (178) до початкових умов

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{181}$$

У результаті ми отримали задачу Коші для нормальної системи (180) з початковими умовами (181), розв'язком якої є пара функцій x, y від змінної t, перша з яких є розв'язком задачі Коші (177), (178). Запишемо систему інтегральних рівнянь, яка еквівалентна задачі (180), (181) (див. попередній приклад):

$$\begin{cases} x = 1 + \int\limits_0^t y\,ds, \\ y = 2 + \int\limits_0^t (sy - 3x + e^s)\,ds. \end{cases} \tag{182}$$

Тоді рекурентні формули для знаходження послідовних наближень розв'язку задачі (174), (178) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{k+1}(t) = 1 + \int\limits_0^t y_k(s)\,ds, \\ y_{k+1}(t) = 2 + \int\limits_0^t (sy_k(s) - 3x_k(s) + e^s)\,ds. \end{cases}$$

Знайдемо перше послідовне наближення:

$$\begin{cases} x_1(t) := 1 + \int\limits_0^t 2\,ds = 2t + 1, \\ y_1(t) := 2 + \int\limits_0^t (2s - 3 + e^s)\,ds = 2 + t^2 - 3t + e^t - 1 = e^t + t^2 - 3t + 1. \end{cases}$$

Тоді шукаємо друге послідовне наближення:

$$\begin{cases} x_2(t) := 1 + \int\limits_0^t (e^s + s^2 - 3s + 1)\,ds = e^t + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{3t^2}{2} + t, \\ y_2(t) := \int\limits_0^t \big((s(e^s + s^2 - 3s + 1) - 6s - 3 + e^s\big)\,ds. \end{cases}$$

Отож, шукані послідовні наближення розв'язку задачі Коші (177), (178) є такими:

$$x_0(t) := 1, \quad x_1(t) := 2t, \quad x_2(t) := e^t + \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

288. Побудувати по два послідовних наближення (не рахуючи нульового) для розв'язків таких рівнянь і систем:
a) $x' = 2t + y,\ y' = x, \quad x(1) = 1,\ y(1) = 0;$
c) $x'' + x'^2 - 2x = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

289. Вказати який-небудь відрізок, на якому існує розв'язок задачі Коші для нормальної системи:
d) $x' = y^2,\ y' = x^2, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

291. Знайти область існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи:
f) $x' = y^3 + \ln(1+t),\ y' = \sqrt[3]{y-t}.$

293. Чи можуть графіки двох розв'язків даного рівняння дотикатися один до одного у деякій точці $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$:
a) для рівняння $x'' = t + x^2$?

Домашні завдання:

1^***.** Вказати який-небудь відрізок, на якому існує розв'язок задачі Коші для нормальної системи:
$x' = |y| + 1,\ y' = x^4,\ x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

288. Побудувати по два послідовних наближення (не рахуючи нульового) для розв'язків таких рівнянь і систем:
b) $x' = y,\ y' = x^2,\ x(0) = 1,\ y(0) = 2;$
d) $x'' = 3tx,\ x(1) = 2,\ x'(1) = -1.$

291. Знайти область існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи:
e) $x' = y^2 + \sqrt[3]{t},\ y' = \sqrt[3]{x}.$

292. Чи можуть графіки двох розв'язків даного рівняння перетинатися в деякій точці $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$:
b) для рівняння $x'' = t + x^2$?

Додаткові завдання:

295. Скільки розв'язків рівняння $x^{(n)} = f(t, x)$ (f і f_x неперервні в $\mathbb{R}^2$) проходить через кожну точку (t_0, x_0) за заданим напрямком, який утворює кут α з віссю Ot? Розглянути випадки $n = 1$, $n = 2$, $n \geq 3$.

Практичне заняття № 15

Лінійні однорідні рівняння. Загальний випадок

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ – поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Лінійним рівнянням вищого порядку називають звичайне диференціальне рівняння вищого порядку, яке можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{183}$$

де $n \geqslant 2$, а $a_1, \ldots, a_n$, f — задані і неперервні на інтервалі (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ функції, які в приймають значення в $\mathbb{P}$.

Функції $a_1, \ldots, a_n$ називаються *коефіцієнтами*, а функція f — *вільним членом* ЛР. Рівняння (244) при $f = 0$, тобто рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{184}$$

називають *лінійним однорідним рівнянням* (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР). Якщо в рівняннях (244) і (245) коефіцієнти співпадають, то кажуть, що рівняння (245) відповідне рівнянню (244).

Розв'язком рівняння (244) називають функцію $y = \psi(x)$, $x \in \langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\psi \in C^n\big(\langle c,d\rangle; \mathbb{P}\big)$;

2) $\psi^{(n)}(x) + a_1(x)\psi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\psi(x) = f(x), \quad x \in \langle c,d\rangle$.

Задача Коші для рівняння (244) полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} y(x_0) = y_1^0, \\ y'(x_0) = y_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \end{cases} \tag{185}$$

де $x_0 \in (a,b)$, $y_1^0, \ldots, y_n^0 \in \mathbb{P}$ — задані.

Теорема 6. *Задача* (244), (185) *має і тільки один розв'язок, який визначений на інтервалі* (a,b), *а всі інші розв'язки є його звуженнями.*

Далі ми розглядаємо тільки ті розв'язки рівняння (244), які є визначеними на інтервалі (a,b).

Теорема 7. *Повний загальний розв'язок рівняння* (244) *є сумою повного загального розв'язку рівняння* (245), *відповідного рівнянню* (244), *і часткового розв'язку рівняння* (244).

Розглянемо **властивості розв'язків** лінійного однорідного рівняння (245) та зображення його повного загального розв'язку.

Лема 4. *Будь-яка лінійна комбінація розв'язків рівняння (245) є розв'язком цього рівняння.*

Означення 5. *Систему функцій $\psi_1, \ldots, \psi_k$, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, називають лінійно залежною (ЛЗ), якщо існують сталі $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ з $\mathbb{P}$, які не всі рівні нулеві (тобто $|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_k| > 0$) і такі, що*

$$\lambda_1\psi_1(x) + \cdots + \lambda_k\psi_k(x) = 0, \qquad x \in (a, b). \tag{186}$$

Означення 6. *Систему функцій $\psi_1, \ldots, \psi_k$, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, називають лінійно незалежною (ЛН), якщо вона не є лінійно залежною, тобто з того, що виконується рівність* (186) *для деяких $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, випливають рівності*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Означення 7. *Будь-яка систему n лінійно незалежних розв'язків рівняння (245) називають* ***фундаментальною системою розв'язків*** *рівняння (245) (скорочено, ФСР* (245)*).*

Лема 5. *Фундаментальна система розв'язків рівняння (245) існує.*

Теорема 8. *Множина розв'язків рівняння (245) утворює n-вимірний лінійний підпростір простору $C^n\big((a, b); \mathbb{P}\big)$, тобто, іншими словами, повний загальний розв'язок рівняння* (245) *має вигляд*

$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x), \quad x \in (a, b), \ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P},$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — яка-небудь ФСР (245).

Означення 8. *Якщо $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – будь-які розв'язки рівняння* (245)*, то функцію*

$$W(x) := det \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \cdots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \cdots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (a, b),$$

(тобто для кожного $x \in (a, b)$ значення $W(x)$ дорівнює визначнику відповідної матриці) називають визначником Вронського (побудованим за розв'язками $\psi_1, \ldots, \psi_n$).

Теорема 9. *Нехай $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — розв'язки рівняння* (245)*. Тоді є еквівалентними такі три твердження:*

1) $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *— ЛН (відповідно, ЛЗ);*

2) $\exists x_0 \in (a, b) \colon W(x_0) \neq 0$ *(відповідно,* $= 0$*);*

3) $\forall\, x \in (a, b) : W(x) \neq 0$ *(відповідно,* $= 0$*).*

Теорема 10. *Правильна рівність*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds}, \quad x \in (a, b), \tag{187}$$

де $x_0 \in (a, b)$ – яка-небудь фіксована точка інтервалу (a, b).

Рівність (187) називають *формулою Остроградського-Ліувілля.*

Теорема 11. *Якщо*

$$y = C_1\psi_1(x) + \dots + C_n\psi_n(x), \quad x \in (a,b),\ C_1, \dots, C_n \in \mathbb{P},$$

повний загальний розв'язок рівняння (245), то рівняння (244) *має частковий розв'язок вигляду*

$$y = \chi_1(x)\psi_1(x) + \dots + \chi_n(x)\psi_n(x), \quad x \in (a,b),$$

де $\chi_1, \dots, \chi_n$ *— (які-небудь) функції з простору* $C^1\big((a,b);\mathbb{P}\big)$*, що визначаються системою рівнянь*

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \cdots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \cdots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1'(x) \\ \chi_2'(x) \\ \vdots \\ \chi_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (a,b).$$

Наведемо **спосіб знаходження повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку**

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad x \in (a,b). \tag{188}$$

Розглянемо рівняння (188). Якщо

$$y = \psi_1(x), \quad y = \psi_2(x), \quad x \in (a,b), \tag{189}$$

– два його лінійно незалежні розв'язки, тобто вони утворюють ФСР (188), то на підставі теореми 8 маємо повний загальний розв'язок рівняння (188) у вигляді

$$y = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x), \quad x \in (a,b), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}. \tag{190}$$

Розглянемо проблему, коли відомий один розв'язок $y = \psi_1(x)$, $x \in (a,b)$, рівняння (188) і потрібно знайти повний загальний розв'язок цього рівняння, тобто знайти ще його один розв'язок $y = \psi_2(x)$, $x \in (a,b)$, який лінійно незалежний з відомим, і використати формулу (190). Для вирішення цієї проблеми зауважимо, що, як легко переконатися (використовуючи формулу Остроградського-Ліувілля), існує потрібний нам розв'язок $y = \psi_2(x)$, $x \in (a,b)$, такий:

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)\,dx}, \tag{191}$$

де $\int a_1(x)\,dx$, $x \in (a,b)$, – яка-небудь фіксована первісна функції $a_1(x)$, $x \in (a,b)$, (a_1 – коефіцієнт рівняння при y'). Фактично співвідношення (191) є рівнянням для знаходження ψ_2. Розв'яжемо це рівняння так. Поділимо його на $(\psi_1(x))^2$:

$$\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x) = e^{-\int a_1(x)\,dx} \,\Big|\, \times \frac{1}{(\psi_1(x))^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Big(\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}\Big)' = e^{-\int a_1(x)\,dx}\frac{1}{(\psi_1(x))^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)} = \int e^{-\int a_1(x)\,dx}\frac{1}{(\psi_1(x))^2}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\psi_2(x) = \psi_1(x)\int e^{-\int a_1(x)\,dx}\frac{1}{(\psi_1(x))^2}\,dx, \quad x \in (a,b). \tag{192}$$

Висновок. Маючи ненульовий розв'язок ψ_1 рівняння (188), другий розв'язок ψ_2, який лінійно незалежний з ψ_1, шукаємо так:

- знаходимо первісну $\int a_1(x)\,dx$ коефіцієнта $a_1(x)$, $x \in (a,b)$, рівняння (188) (**увага!!!**: коефіцієнт цього рівняння при похідній y'' має бути рівним 1, інакше дане лінійне рівняння другого порядку треба поділити на коефіцієнт при y'');
- записуємо співвідношення (191) і виконуємо перетворення так, як це зроблено в (192);
- знайшовши ψ_2, записуємо повний загальний розв'язок рівняння (188) у вигляді (190).

Контрольні питання

1. Що таке лінійне рівняння вищого порядку? Що називається розв'язком лінійного рівняння вищого порядку? Що таке коефіцієнти та вільний член ЛР? Що називається лінійним однорідним рівнянням (лінійним неоднорідним рівнянням)?
2. У чому полягає задача Коші для ЛР? За яких умов існує розв'язок задачі Коші для ЛР?
3. Чи є лінійна комбінація розв'язків ЛОР знову його розв'язком?
4. Коли система функцій $\psi_1, \ldots, \psi_k$ є лінійно залежною (лінійно незалежною)?
5. Який вигляд має повний загальний розв'язок ЛОР? Що таке фундаментальна система розв'язків ЛОР?
6. У якому вигляді можна записати повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?

Приклади розв'язування типових задач

1. Дослідити на лінійну залежність (лінійну незалежність) системи функцій (у тій області, де вони визначені):
а) $4-x$, $2x+3$, $6x+8$;
б) $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2+e^x$.

◀ а) Нехай сталі λ_1, λ_2, λ_3 такі, що виконується тотожність

$$\lambda_1(4-x)+\lambda_2(2x+3)+\lambda_3(6x+8)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{193}$$

Тотожність (193) еквівалентна тотожності

$$(4\lambda_1+3\lambda_2+8\lambda_3)\cdot 1+(-\lambda_1+2\lambda_2+6\lambda_3)\cdot x=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{194}$$

Як легко переконатися, ця тотожність виконується тоді і лише тоді, коли система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4\lambda_1+3\lambda_2+8\lambda_3=0, \\ -\lambda_1+2\lambda_2+6\lambda_3=0 \end{cases} \tag{195}$$

має ненульові розв'язки. А ця система рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} \lambda_1-2\lambda_2-6\lambda_3=0, \\ 11\lambda_2+32\lambda_3=0, \end{cases} \tag{196}$$

яка має безліч розв'язків, зокрема, розв'язком цієї системи є числа $\lambda_1=\frac{1}{11}$, $\lambda_2=\frac{-16}{11}$, $\lambda_3=\frac{1}{2}$. Отже, задані функції лінійно залежні.

б) Припустимо, що існують сталі $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такі, що правильна тотожність

$$\lambda_1 \operatorname{sh} x+\lambda_2 \operatorname{ch} x+\lambda_2(2+e^x)=0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Продиференціюємо цю тотожність два рази:

$$\lambda_1 \operatorname{ch} x + \lambda_2 \operatorname{sh} x + \lambda_2 e^x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_1 \operatorname{sh} x + \lambda_2 \operatorname{ch} x + \lambda_2 e^x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отримані три рівності потрактуємо як однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно змінних $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ для довільного фіксованого значення $x \in \mathbb{R}$. Обчислимо визначник основної матриці даної системи:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & 2 + e^x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & e^x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & e^x \end{vmatrix} = 2(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = 2 \neq 0.$$

Оскільки визначник відмінний від нуля, то обов'язково $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а отже, задана система функцій є лінійно незалежною. ►

2. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (можливо найменшого порядку), маючи часткові розв'язки: $3x$, $x - 2$, $e^x + 1$.

◄ Обчислюючи визначник Вронського для даної системи функцій:

$$\begin{vmatrix} 3x & x - 2 & e^x + 1 \\ 3 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 3xe^x - 3(x - 2)e^x = 6e^x \neq 0,$$

переконуємося, що ця система функцій є лінійно незалежною на $\mathbb{R}$. Тоді ці три функції утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку. Це рівняння можна записати у такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} y & 3x & x - 2 & e^x + 1 \\ y' & 3 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за елементами останнього рядка, одержуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку

$$y''' - y'' = 0.$$

►

3. Знайти повний загальний розв'язок рівняння

$$(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0.$$

◄ Нам потрібно мати два (часткові) лінійно незалежні розв'язки заданого рівняння.

Спробуємо знайти один частковий розв'язок у вигляді многочлена першого степеня

$$y = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{де } a, b \ - \ \text{сталі.}$$

Маємо $y' = a$, $y'' = 0$. Підставляючи знайдені вирази y, y', y'' у вихідне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти біля x^2, x, x^0 до нуля, одержуємо рівняння

$$3a + b = 0.$$

Покладемо $a = 1$, тоді $b = -3$, а отже, один частковий розв'язок має вигляд

$$\psi_1(x) = x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого розв'язку поділимо задане рівняння на коефіцієнт при y'', тобто на $x^2 - 1$, і визначимо коефіцієнт при y' в отриманому після перетворення рівнянні, тобто $a_1(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$, та знайдемо його первісну

$$\int a_1(x)\,dx = \int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx = -\ln\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Другий частковий розв'язок знаходимо на підставі формули Остроградського-Ліувілля із співвідношення

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)\,dx}. \tag{197}$$

Поділивши рівність в (197) на $\psi_1^2(x)$, одержуємо

$$\left(\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}\right)' = \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{\psi_1^2(x)},$$

Маємо

$$\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{\psi_1^2(x)} = \frac{e^{\ln\frac{x-1}{(x+1)^2}}}{(x-3)^2} = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)^2}.$$

Отже, другий частковий розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\psi_2(x) = (x-3)\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)^2}\,dx. \tag{198}$$

Для обчислення інтеграла у виразі (198) розкладаємо підінтегральний вираз на суму елементарних дробів:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2},$$

де A, B, C, D – сталі.

Зводячи праву частину до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти у правій та лівій частинах при однакових степенях x, знаходимо

$$A = C = 0, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad D = \frac{1}{8}.$$

Отож, другий частковий розв'язок має вигляд

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{2(x+1)}$$

і повний загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1(x-3) + C_2\frac{1}{x+1},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. ►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Дослідити, чи є дані функції лінійно залежні (у тій області, де вони визначені):
641. $x+2$, $x-2$; **642.** $6x+9$, $8x+12$; **643.** $\sin x$, $\cos x$;
648. e^x, e^{2x}, e^{3x}.

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (можливо найменшого порядку), маючи часткові розв'язки:
674. 1, $\cos x$.

Знайти повні загальні розв'язки даних рівнянь, знаючи їх часткові розв'язки. У тих завданнях, де часткові розв'язки не задані, можна шукати їх шляхом підбору, наприклад, у вигляді показникової функції $y = e^{ax}$ або алгебраїчного многочлена $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$:
681. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$; **684.** $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$;
686. $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$; **688.** $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$.

Домашні завдання:

Дослідити, чи є дані функції лінійно залежні (у тій області, де вони визначені):
644. 1, x, x^2; **646.** x^2+2x, $3x^2-1$, $x+4$;
649. x, e^x, xe^x; **656.** $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$; **660.** x^2, $x|x|$.

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (можливо найменшого порядку), маючи часткові розв'язки:
675. x, e^x.

Знайти загальні розв'язки даних рівнянь, знаючи їх часткові розв'язки. У тих завданнях, де часткові розв'язки не задані, можна шукати їх шляхом підбору, наприклад, у вигляді показникової функції $y = e^{ax}$ або алгебраїчного многочлена $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$:
683. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$;
685. $y'' - 2(1 + tg^2\, x)y = 0$, $y_1 = \operatorname{tg} x$;
687. $(e^x+1)y'' - 2y' - e^x y = 0$; $y_1 = e^x - 1$.

6. Відповіді:

641. ні; **642.** так; **643.** ні; **648.** ні; **674.** $y'' - y' \operatorname{ctg} x = 0$;
681. $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$; **684.** $xy = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$;
686. $y = C_1(1 + x\ln|x|) + C_2 x$;
644. ні; **646.** ні; **649.** ні;
656. ні; **660.** ні; **675.** $(x-1)y'' - xy' + y = 0$;
683. $y = e^x(C_1 x^2 + C_2)$; **685.** $y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x\operatorname{tg} x)$;
687. $y = C_1(e^x - 1) + \dfrac{C_2}{e^x+1}$.

Практичне заняття № 16

Контрольна робота № 3

Варіант № 1

Розв'язати рівняння:

1. $3xy'' + 7y'' - y' - 9 = 0;$ 2. $xyy'' = y'(y + y');$

3. $(y+3)y'' + y'^2 + yy' = 0;$ 4. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1;$

5. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

6. Для задачі Коші

$$x'' = 2t + x^2 + 3x', \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

знайти два послідовні наближення (не рахуючи нульового) її розв'язку.

7. Знайти повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

Практичне заняття № 17
Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Лінійне однорідне рівняння (ЛОР) зі сталими коефіцієнтами — це рівняння, яке можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{199}$$

де n — натуральне число, $a_k \in \mathbb{P},\ k = \overline{1, n}$.

Під *розв'язком* рівняння (216) розумітимемо n-раз неперервно диференційовну функцію, яка визначена на $\mathbb{R}$ і приймає значення в $\mathbb{P}$ функцію $y : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$, тобто $y \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{P})$, яка при підстановці в задане рівняння перетворює його в тотожність. Якщо $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то розв'язок цього рівняння ще називатимемо *дійсним* розв'язком, а коли $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ —*комплексним* розв'язком.

Повний загальний розв'язок рівняння (216) має вигляд

$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R},\ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P} \text{ — довільні сталі,}$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — (часткові) лінійно-незалежні розв'язки, тобто *фундаментальна система розв'язків* рівняння (216) або, коротко, ФСР(216).

Лема 6. *Функція*

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\lambda_* \in \mathbb{P}$, є розв'язком рівняння (216) *тоді і лише тоді, коли λ_* — корінь рівняння*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{200}$$

Многочлен

$$D(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad \lambda \in \mathbb{P},$$

називають *характеристичним многочленом*, рівняння (200) — *характеристичним рівнянням*, а його корені — *характеристичними числами* рівняння (216).

Лема 7. *Якщо числа $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{P}$ ($m \in \mathbb{N}$) попарно різні, то функції*

$$y = e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y = e^{\lambda_m x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{201}$$

є лінійно незалежними в $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{P})$.

Наслідок 4. *Якщо* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{P}$ — *попарно різні корені характеристичного рівняння* (200), *то система функцій* (201) *при* $m = n$ *є фундаментальною системою розв'язків рівняння* (216) *і, отже, повний загальний розв'язок рівняння* (216) *в просторі* $C^n(\mathbb{R};\mathbb{P})$ *має вигляд*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P}.$$

Лема 8. *Нехай* $\lambda_* \in \mathbb{P}$ — *корінь характеристичного рівняння кратності* $r \geq 1$. *Тоді для кожного* $j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ *функція* $y = x^j e^{\lambda_* x}$, $x \in \mathbb{R}$, *є розв'язком рівняння (216) в просторі* $C^n(\mathbb{R};\mathbb{P})$.

Тепер розглянемо окремо випадки $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ і $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Спочатку нехай коефіцієнти рівняння (216) —***комплексні*** і нас цікавить ***повний загальний комплексний розв'язок*** цього рівняння, тобто розглядаємо випадок $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Відмітимо, що в полі комплексних чисел на основі основної теореми алгебри характеристичне рівняння (200) можна записати у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0, \tag{202}$$

де $m, k_1, \ldots, k_m$ — натуральні числа такі, що $1 \leqslant m \leqslant n$, $k_1 + \ldots + k_m = n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ — (попарно різні) характеристичні числа рівняння (216). Числа $k_1, \ldots, k_m$ називають кратностями відповідних коренів рівняння (200).

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} &y = \psi_{1,1}(x) \equiv e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad y = \psi_{1,k_1}(x) \equiv x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ &y = \psi_{2,1}(x) \equiv e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y = \psi_{2,k_2}(x) \equiv x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &y = \psi_{m,1}(x) \equiv e^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \quad y = \psi_{m,k_m}(x) \equiv x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}, \\ &x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{203}$$

Теорема 12. *Функції* $\psi_{1,1}, \ldots, \psi_{m,k_m}$ *системи* (203) *утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОР* (216) *у випадку* $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, *а отже,* ***повний загальний комплексний розв'язок*** *рівняння* (216) *можна записати у вигляді*

$$\begin{gathered} y = C_{1,1}\psi_{1,1}(x) + \cdots + C_{m,k_m}\psi_{m,k_m}(x) \equiv C_{1,1}e^{\lambda_1 x} + C_{1,2}xe^{\lambda_1 x} + \cdots + \\ + C_{1,k_1}x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} + C_{2,1}e^{\lambda_2 x} + C_{2,2}xe^{\lambda_2 x} + \cdots + C_{2,k_2}x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} + \cdots \\ \cdots + C_{m,1}e^{\lambda_m x} + C_{m,2}xe^{\lambda_m x} + \cdots + C_{m,k_m}x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}, \\ x \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C} \text{ — довільні (комплексні) сталі.} \end{gathered} \tag{204}$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти рівняння (216) є ***дійсними*** і нас цікавить тільки ***повний загальний дійсний розв'язок*** цього рівняння, тобто розглядаємо випадок $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Оскільки поле комплексних чисел є розширенням поля дійсних чисел, то можна вважати, що ми знаходимося в полі комплексних чисел і, знайшовши повний загальний комплексний розв'язок даного рівняння, спробувати виділити з нього всеможливі дійсні розв'язки. Це легко зробити, якщо всі характеристичні числа є дійсними. Тоді повний загальний дійсний розв'язок отримуємо із повного загального комплексного розв'язку, беручи довільні сталі тільки з поля дійсних чисел, а точніше, правильне таке твердження.

Наслідок 5. *Якщо* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *— дійсні, то повний загальний дійсний розв'язок має вигляд* (204)*, де довільні сталі — дійсні.*

Але у випадку, коли є комплексні характеристичні числа, то так робити не можна і потрібно досить серйозно ускладнювати процедуру знаходження повного загального дійсного розв'язку, якщо пробувати реалізувати вказану ідею. Є простіший і надійніший спосіб знаходження повного загального дійсного розв'язку, коли серед характеристичних чисел є комплексні (тобто їх уявна частина відмінна від нуля). Опишемо його.

Спочатку зауважимо, що коли коефіцієнти рівняння (200) є дійсними і λ_* — його комплексний корінь (уявна частина λ_* відмінна від нуля), то, як відомо з алгебри, $\overline{\lambda_*}$ — теж корінь цього рівняння і кратності λ_* і $\overline{\lambda_*}$ збігаються.

Далі, не втрачаючи загальності, вважаємо, що корені рівняння (200) можна записати так:

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1,\ \lambda_2 = \mu_1 - i\nu_1,\ \lambda_3 = \mu_3 + i\nu_3,\ \lambda_4 = \mu_3 - i\nu_3, \ldots, \tag{205}$$

$$\lambda_{2l-1} = \mu_{2l-1} + i\nu_{2l-1},\ \lambda_{2l} = \mu_{2l-1} - i\nu_{2l-1},$$

$$\lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_m,$$

де $\mu_1, \mu_3, \ldots, \mu_{2l-1}, \nu_1 \neq 0,\ \nu_3 \neq 0, \ldots, \nu_{2l-1} \neq 0, \lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_m$ — дійсні числа, причому, якщо нема комплексних коренів, то $l = 0$, а якщо нема дійсних коренів, то m — парне і $l = m/2$. Отож, ми припускаємо, що $0 \leqslant 2l \leqslant m$ і рівняння (200) має l пар комплексно спряжених (або немає жодного, коли $l = 0$) і $m - 2l$ дійсних коренів (або нема жодного, коли $l = m/2$). Кратність кореня λ_j будемо позначати через $k_j,\ j = \overline{1, m}$.

На підставі (205) і ***формули Ейлера***

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v), \quad u, v \in \mathbb{R},\ i \text{ —уявна одиниця,}$$

функції (203) можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\psi_{1,1}(x) = e^{\lambda_1 x} \equiv e^{\mu_1 x}(\cos\nu_1 x + i\sin\nu_1 x), \ldots,\\
&\psi_{1,k_1}(x) = x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \equiv x^{k_1-1}e^{\mu_1 x}(\cos\nu_1 x + i\sin\nu_1 x),\\
&\psi_{2,1}(x) = e^{\lambda_2 x} \equiv e^{\mu_1 x}(\cos\nu_1 x - i\sin\nu_1 x), \ldots,\\
&\psi_{2,k_1}(x) = x^{k_1-1}e^{\lambda_2 x} \equiv x^{k_1-1}e^{\mu_1 x}(\cos\nu_1 x - i\sin\nu_1 x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\psi_{2l+1,1}(x) = e^{\lambda_{2l+1}x}, \quad \ldots, \quad \psi_{2l+1,k_{2l+1}}(x) = x^{k_{2l+1}-1}e^{\lambda_{2l+1}x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\psi_{m,1}(x) = e^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \quad \psi_{m,k_m}(x) = x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}, \quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{206}
$$

Як було сказано вище, ця система функцій є фундаментальною системою розв'язків в просторі (комплексних) розв'язків рівняння (216). Трансформуємо її у фундаментальну систему розв'язків рівняння (216), яка складається тільки з дійсних розв'язків, в такий спосіб. Очевидно, що для кожних $j\in\{1,\ldots,l\}$ і $s\in\{1,\ldots,k_{2j-1}=k_{2j}\}$ маємо

$$\psi_{2j-1,s}(x) = \overline{\psi_{2j,s}(x)}, \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Тоді для кожних $j\in\{1,\ldots,l\}$ і $s\in\{1,\ldots,k_{2j-1}=k_{2j}\}$ покладемо

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_{2j-1,s}(x) &:= \mathrm{Re}\,\psi_{2j-1,s}(x) = \frac{1}{2}\big(\psi_{2j-1,s}(x)+\psi_{2j,s}(x)\big) \equiv x^{s-1}e^{\mu_{2j-1}x}\cos\nu_{2j-1}x,\\
\widetilde{\psi}_{2j,s}(t) &:= \mathrm{Im}\,\psi_{2j-1,s}(x) = \frac{1}{2i}\big(\psi_{2j-1,s}(x)-\psi_{2j,s}(x)\big) \equiv x^{s-1}e^{\mu_{2j-1}x}\sin\nu_{2j-1}x,
\end{aligned}
\tag{207}
$$

$x\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,l}$, $s=\overline{1,k_{2j-1}=k_{2j}}\,.$

Функції $\widetilde{\psi}_{r,s}$, $r=\overline{1,2l}$, $s=\overline{1,k_r}$, є дійсними розв'язками рівняння (216). Це випливає з того, що лінійна комбінація розв'язків ЛОР (216) є знову розв'язком цього рівняння (підкреслимо, що для кожних $j\in\{1,\ldots,l\}$, $s\in\{1,\ldots,k_{2j-1}=k_{2j}\}$ функції $\widetilde{\psi}_{2j-1,s}$ та $\widetilde{\psi}_{2j,s}$ є відповідно дійсною та уявною частиною функції $\psi_{2j-1,s}$).

Лема 9. *Система функцій*

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}_{1,1}(x),\ldots,\widetilde{\psi}_{1,k_1}(x),\ \widetilde{\psi}_{2,1}(x),\ldots,\widetilde{\psi}_{2,k_2}(x),\ \ldots,\\
&\widetilde{\psi}_{2l-1,1}(x),\ldots,\widetilde{\psi}_{2l-1,k_{2l-1}}(x),\ \widetilde{\psi}_{2l,1}(x),\ldots,\widetilde{\psi}_{2l,k_{2l}}(x),\\
&\psi_{2l+1,1}(x),\ldots,\psi_{2l+1,k_{2l+1}}(x),\ \ldots,\psi_{m,1}(x),\ldots,\psi_{m,k_m}(x), \quad x\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{208}
$$

які визначені в (206) *і* (207)*, утворює фундаментальну систему (дійсних) розв'язків рівняння* (216) *в просторі* $C^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$*.*

Теорема 13. *Якщо коефіцієнти рівняння* (216) *— дійсні і корені характеристичного рівняння* (200) *мають вигляд* (205), *то* ***повний загальний дійсний розв'язок*** *рівняння* (216) *можна подати у вигляді*

$$y = C_{1,1}\widetilde{\psi}_{1,1}(x) + \cdots + C_{1,\,k_1}\widetilde{\psi}_{1,\,k_1}(x) + C_{2,1}\widetilde{\psi}_{2,1}(x) + \cdots +$$

$$+C_{2,k_2}\widetilde{\psi}_{2,k_2}(x) + \cdots + C_{m,1}\psi_{m,1}(x) + \cdots + C_{m,k_m}\psi_{m,k_m}(x) =$$

$$= C_{1,1}e^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x + \cdots + C_{1,\,k_1}x^{k_1-1}e^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x + C_{2,1}e^{\mu_1 x}\sin\nu_1 x + \cdots +$$

$$+C_{2,\,k_2}x^{k_1-1}e^{\mu_1 x}\sin\nu_1 x + \cdots + C_{m,1}e^{\lambda_m x} + \cdots + C_{m,\,k_m}x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}, \qquad (209)$$

$x \in \mathbb{R},\ C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,\,k_m} \in \mathbb{R}.$

Висновок:

I. Для розв'язування рівняння (216) ***в полі комплексних чисел***

- записуємо характеристичне рівняння (200) і подаємо його у вигляді (202),
- виписуємо фундаментальну систему розв'язків (203),
- записуємо повний загальний комплексний розв'язок у вигляді (204).

II. Для розв'язування рівняння (216) з дійсними коефіцієнтами ***в полі дійсних чисел***

- записуємо характеристичне рівняння (200) і подаємо його у вигляді (202), перейшовши, якщо є потреба, в поле комплексних чисел;
- виписуємо систему функцій (203);
- якщо серед чисел $\lambda_1, ..., \lambda_m$ є комплексні, а отже, маємо ситуацію (205), то трансформуємо систему (203) за правилом (206), (207) і отримуємо фундаментальну систему розв'язків (208) рівняння (216), складену з дійсних розв'язків,
- записуємо повний загальний дійсний розв'язок у вигляді (209).

Контрольні питання

1. Що таке ЛОР зі сталими коефіцієнтами? Що називається розв'язком ЛОР зі сталими коефіцієнтами?
2. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами?
3. Коли функція $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, є (частковим) розв'язком ЛОР зі сталими коефіцієнтами?
4. Що таке характеристичний многочлен, характеристичне рівняння, характеристичні числа ЛОР зі сталими коефіцієнтами?

5. У якому випадку система функцій $y = e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y = e^{\lambda_m x}$ є фундаментальною системою розв'язків ЛОР зі сталими коефіцієнтами? Який вигляд має загальний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами за умови $m = n$?

6. Коли функція $y = x^j e^{\lambda_* x}$ є (частковим) розв'язком ЛОР зі сталими коефіцієнтами? Який вигляд має загальний дійсний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами якщо коефіцієнти рівняння і корені його характеристичного рівняння дійсні?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

◀ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ_* — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \tag{210}$$

Розв'яжемо його. Зауважимо, що $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Отож, рівняння (211) можна записати у вигляді $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, звідки отримаємо

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

— характеристичні числа заданого диференціального рівняння. Отже,

$$\psi_1(x) := e^x, \quad \psi_2(x) := e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

— фундаментальна система розв'язків заданого рівняння. Оскільки ці розв'язки є дійсними, то повний загальний дійсний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ — довільні сталі.}$$

▶

2. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.

◀ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ_* — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0. \tag{211}$$

Розв'яжемо його. Зауважимо, що $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Отож, рівняння (211) можна записати у вигляді $(\lambda - 2)^2 = 0$, звідки отримаємо, що $\lambda_1 = 2$

—характеристичне число заданого диференціального рівняння, яке має кратність 2. Отже,

$$\psi_1(x) := e^{2x}, \quad \psi_2(x) := xe^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

—фундаментальна система розв'язків заданого рівняння. Оскільки ці розв'язки є дійсними, то повний загальний дійсний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} \equiv (C_1 + C_2x)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ —довільні сталі.}$$

►

3. Розв'язати рівняння $y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.

◄ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)^3+1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0. \tag{212}$$

Звідси

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

—характеристичні числа заданого диференціального рівняння. Отже,

$$\psi_1(x) := e^{-2x},$$

$$\psi_2(x) := e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x),$$

$$\psi_3(x) := e^{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x), \quad x \in \mathbb{R},$$

— фундаментальна система розв'язків заданого рівняння. Очевидно, що ψ_1 —дійсний розв'язок, а ψ_2 і ψ_3 — комплексні розв'язки, причому $\psi_2 = \overline{\psi_3}$. Покладемо

$$\widetilde{\psi}_2(x) := \mathrm{Re}\{\psi_2(x)\} = \frac{1}{2}(\psi_2(x) + \psi_3(x)) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\widetilde{\psi}_3(x) := \mathrm{Im}\{\psi_2(x)\} = \frac{1}{2i}(\psi_2(x) - \psi_3(x)) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Зі сказаного випливає, що $\psi_1,\ \widetilde{\psi}_2,\ \widetilde{\psi}_3$ —фундаментальна система розв'язків заданого рівняння, складена з дійсних розв'язків. Тому повний загальний дійсний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$— довільні сталі. ▶

4. Розв'язати рівняння $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.

◀ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ_* — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^4 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^4 = -4.$$

Очевидно, що характеристичні числа є коренями четвертого степеня з числа -4. Їх знаходимо за формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big), \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{213}$$

де

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль числа z, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — аргумент числа z.

Оскільки $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, то

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}), \quad k = \overline{0, 3}.$$

Звідси знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i, \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm i.$$

Отже, фундаментальна система розв'язків в полі комплексних чисел має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &:= e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i \sin x), \\ \psi_2(x) &:= e^{(1-i)x} = e^x(\cos x - i \sin x), \\ \psi_3(x) &:= e^{(-1+i)x} = e^{-x}(\cos x + i \sin x), \\ \psi_4(x) &:= e^{(-1-i)x} = e^{-x}(\cos x - i \sin x). \end{aligned}$$

Трансформуємо цю систему комплексних розв'язків в систему дійсних розв'язків, зауваживши, що $\psi_1 = \overline{\psi}_2$ і $\psi_3 = \overline{\psi}_4$:

$$\widetilde{\psi}_1(x) := \mathrm{Re}\{\psi_1(x)\} = \frac{1}{2}(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = e^x \cos x,$$

$$\widetilde{\psi}_2(x) := \mathrm{Im}\{\psi_1(x)\} = \frac{1}{2i}(\psi_1(x) - \psi_2(x)) = e^x \sin x,$$
$$\widetilde{\psi}_3(x) := \mathrm{Re}\{\psi_3(x)\} = \frac{1}{2}(\psi_3(x) + \psi_4(x)) = e^{-x} \cos x,$$
$$\widetilde{\psi}_4(x) := \mathrm{Im}\{\psi_3(x)\} = \frac{1}{2i}(\psi_3(x) - \psi_4(x)) = e^{-x} \sin x.$$

Зі сказаного випливає, що система функцій $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2, \widetilde{\psi}_3, \widetilde{\psi}_4$ є фундаментальною системою розв'язків даного диференціального рівняння. Отже, повний загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + C_3 e^{-x} \cos x + C_4 e^{-x} \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \text{ —довільні сталі. } \blacktriangleright$$

5. Розв'язати рівняння $y^{\text{IV}} - y''' - y' + y = 0$.

◀ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ_* — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0 \iff \lambda^3(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \iff$$
$$\iff (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$ (кратність цього кореня $k_1 = 2$), $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Отже,

$$\psi_1(x) := e^x, \quad \psi_2(x) := xe^x,$$
$$\psi_3(x) := e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x),$$
$$\psi_4(x) := e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

—фундаментальна система розв'язків заданого рівняння. Очевидно, що ψ_1, ψ_2 —дійсні розв'язки, а ψ_3 і ψ_4 — комплексні розв'язки, причому $\psi_3 = \overline{\psi_4}$. Покладемо

$$\widetilde{\psi}_3(x) := \mathrm{Re}\{\psi_2(x)\} = \frac{1}{2}(\psi_3(x) + \psi_4(x)) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\widetilde{\psi}_4(x) := \mathrm{Im}\{\psi_3(x)\} = \frac{1}{2i}(\psi_3(x) - \psi_4(x)) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Зі сказаного випливає, що

$$\psi_1, \quad \psi_2(x), \quad \widetilde{\psi}_3, \quad \widetilde{\psi}_3,$$

—фундаментальна система розв'язків заданого рівняння, складена з дійсних розв'язків.

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \text{ —довільні сталі.}$$

►

6. Розв'язати рівняння $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

◄ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda_* x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ_* — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - i^2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0.$$

Отже, $\lambda_{1,2} = \pm i$ —характеристичні числа кратності 2. Запишемо ФСР даного рівняння, складену з комплексних розв'язків:

$$\psi_1(x) := e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \psi_2(x) := e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

$$\psi_3(x) := x e^{ix} = x \cos x + i x \sin x, \quad \psi_4(x) := x e^{-ix} = x \cos x - i x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Трансформуємо цю систему у ФСР даного рівняння, складену з дійсних розв'язків:

$$\widetilde{\psi}_1(x) := \mathrm{Re}\{\psi_1(x)\} = \cos x, \quad \widetilde{\psi}_2(x) := \mathrm{Im}\{\psi_1(x)\} = \sin x,$$

$$\widetilde{\psi}_3(x) := \mathrm{Re}\{\psi_3(x)\} = x \cos x, \quad \widetilde{\psi}_4(x) := \mathrm{Im}\{\psi_3(x)\} = x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отож, повний загальний дійсний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ —довільні сталі. ►

7. Розв'язати рівняння $y'' + 2iy = 0$.

◄ Шукаємо часткові розв'язки даного рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де λ — корінь так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + 2i = 0.$$

Його корені є числа $\sqrt{-2i}$. За формулою (213) знаходимо корені характеристичного рівняння (в даному випадку $n = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$) $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ (корені характеристичного рівняння не є комплексно спряженими, оскільки коефіцієнти рівняння —комплексні числа). Отже, фундаментальна система розв'язків даного рівняння складається з функцій:

$$\psi(x) := e^{(-1+i)x}, \quad \psi_2(x) := e^{(1-i)x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки коефіцієнти рівняння — комплексні числа, то записуємо його повний загальний комплексний розв'язок:

$$y(x) = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ —довільні (комплексні) сталі ►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:

511. $y'' + y' - 2y = 0$; **513.** $y'' - 2y' = 0$; **515.** $y'' - 4y' + 5y = 0$;
518. $y''' - 8y = 0$; **519.** $y^{(4)} - y = 0$; **520.** $y^{(4)} + 4y = 0$;
523. $4y'' + 4y' + y = 0$; **527.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
530. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння:

512. $y'' + 4y' + 3y = 0$; **514.** $2y'' - 5y' + 2y = 0$;
516. $y'' + 2y' + 10y = 0$; **517.** $y'' + 4y = 0$; **521.** $y^{(6)} + 64y = 0$;
524. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$; **525.** $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0$;
526. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$; **528.** $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Відповіді:

511. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$; **513.** $y = C_1 + C_2 e^{2x}$;
515. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
518. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3})$;
519. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;
523. $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x)$; **527.** $y = e^{x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$;
530. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$;
512. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$; **514.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$;
516. $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
517. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;
520. $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$;
521. $y = e^{x\sqrt{3}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x+$

$+ e^{-x\sqrt{3}}(C_5 \cos x + C_6 \sin x);$

524. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5 x);$

525. $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x};$

526. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x;$

528. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}.$

Практичне заняття № 18

Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР) зі сталими коефіцієнтами — це рівняння, яке можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{214}$$

де n — - натуральне число, $a_k \in \mathbb{P},\ k = \overline{1,n},\ \ f \in C(\mathbb{R};\mathbb{P})$.

Під *розв'язком* рівняння (214) розуміють n-раз неперервно диференційовну функцію y, яка визначена на $\mathbb{R}$ і приймає значення в $\mathbb{P}$, тобто функцію $y \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{P})$, яка при підстановці в задане рівняння перетворює його в тотожність. Якщо $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то розв'язок даного рівняння ще називають *дійсним* розв'язком, а коли $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ — *комплексним* розв'язком.

Теорема 14. *Повний загальний розв'язок рівняння* (214) *має вигляд*

$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x) + \overset{*}{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R},\ C_1,\ldots,C_n \in \mathbb{P} \text{ — довільні сталі,} \tag{215}$$

де $\psi_1,\ldots,\psi_n$ — (часткові) лінійно-незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{216}$$

тобто фундаментальна система розв'язків рівняння (216), *а $\overset{*}{\psi}$ — частковий розв'язок рівняння* (214).

Висновок 1. Для знаходження повного загального розв'язку рівняння (214) потрібно виконати такі кроки:

1-ий крок. Знайти повний загальний розв'язок однорідного рівняння (216):

$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R},\ \ C_1,\ldots,C_n \in \mathbb{P} \text{ — довільні сталі.}$$

2-ий крок. Знайти частковий розв'язок неоднорідного рівняння (214):

$$y = \overset{*}{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3-ий крок. Записати повний загальний розв'язок рівняння (214) у вигляді (215).

Відмітимо, що спосіб знаходження *повного загального розв'язку однорідного рівняння* (216) запропоновано на попередньому практичному занятті №17. Тут ми розглянемо знаходження часткового розв'язку рівняння (214) ***методом неозначених коефіцієнтів***, якщо вільний член є ***квазімногочленом***. Цей метод базується на таких двох теоремах.

Теорема 15. *Нехай в рівнянні (214) коефіцієнти — комплексні і вільний член f — комплексний квазімногочлен, тобто*

$$f(x) = \big(b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_l\big) e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{217}$$

де
• $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
• $b_0, \ldots, b_l \in \mathbb{C}$,
• $\mu \in \mathbb{C}$.

Тоді рівняння (214) *має частковий розв'язок вигляду*

$$y = x^k \big(c_0 x^l + c_1 x^{l-1} + \cdots + c_l\big) e^{\mu x} \equiv \big(c_0 x^{l+k} + c_1 x^{l+k-1} + \cdots + c_l x^k\big) e^{\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{218}$$

де
• $c_0, \ldots, c_l \in \mathbb{C}$,
• $k = 0$, *якщо μ не є характеристичним числом рівняння* (216), *а якщо μ є характеристичним числом, то k дорівнює його кратності.*

Теорема 16. *Нехай коефіцієнти рівняння* (214) *— дійсні, а вільний член f — дійсний квазімногочлен вигляду*

$$f(x) = e^{\alpha x}\big[(b_0 x^r + \cdots + b_r)\cos\beta x + (c_0 x^s + \cdots + c_s)\sin\beta x\big], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{219}$$

де
• $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
• $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
• $b_0, \ldots, b_r, c_0, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$.

Тоді рівняння (214) *має частковий розв'язок вигляду*

$$y = x^k e^{\alpha x}\big[(d_0 x^l + \cdots + d_l)\cos\beta x + (\widetilde{d}_0 x^l + \cdots + \widetilde{d}_l)\sin\beta x\big], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{220}$$

де
• $l := \max\{r, s\}$,
• $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l \in \mathbb{R}$,
• $k = 0$, *якщо число $\mu = \alpha + i\beta$ не є характеристичним для рівняння* (216), *а якщо μ є характеристичним числом, то k дорівнює кратності цього числа.*

Висновок 2. Для знаходження часткового розв'язку рівняння (214), коли вільний член має вигляд (219), можна використати *метод неозначених коефіцієнтів*:

1) Записуємо проєкт часткового розв'язку у вигляді (220) при умові, що коефіцієнти $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l$ поки що неозначені.

2) Підставляємо вираз (220) часткового розв'язку в рівняння (214), проводимо відповідні спрощення і прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах вигляду $x^j e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^j e^{\alpha x} \sin \beta x$, $j \in \overline{0, l}$, які знаходяться в різних частинах отриманої рівності. У результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l$.

3) Здобуту систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо одним із способів, наприклад, методом Гаусса.

4) Знайдені значення $d_0, \ldots, d_l, \widetilde{d}_0, \ldots, \widetilde{d}_l$ підставляємо у (220). Це і буде шуканий частковий розв'язок рівняння (214).

Розширити сферу застосування методу неозначених коефіцієнтів можна за рахунок принципу суперпозиції, суть якого викладена в такому твердженні.

Теорема 17 (принцип суперпозиції)**.** *Нехай*

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_s(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $s \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_s \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, *а* $y = \varphi_j(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, s}$, *– часткові розв'язки відповідно рівнянь* $Ly = f_j(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $j = \overline{1, s}$. *Тоді функція*

$$y = \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_s(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

є розв'язком рівняння $Ly = f(x)$.

Контрольні питання

1. Що таке ЛНР зі сталими коефіцієнтами? Який вигляд має повний загальний розв'язок ЛНР зі сталими коефіцієнтами?

2. Як знайти частковий розв'язок ЛНР зі сталими коефіцієнтами, якщо вільний член цього рівняння є квазімногочленом?

3. У чому полягає принцип суперпозиції для часткових розв'язків ЛНР?

4. У якому вигляді можна шукати частковий розв'язок ЛНР зі сталими коефіцієнтами, якщо коефіцієнти рівняння дійсні, а вільний член є дійсним квазімногочленом?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}. \tag{221}$$

◀ *1-ий крок.* Знайдемо *повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння*

$$y'' + 3y' - 4y = 0. \tag{222}$$

Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = 1.$$

Отже,

$$\psi_1(x) := e^{-4x}, \quad \psi_2(x) := e^{x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

— фундаментальна система розв'язків рівняння (222) і його повний загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ \text{— довільні сталі.} \tag{223}$$

2-ий крок. Знайдемо частковий розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння. Вільний член цього рівняння не є квазімногочленом, але є сумою двох квазімногочленів $f_1(x) := e^{-4x}$ та $f_2(x) := xe^{-x}$. Тому частковий розв'язок рівняння (221) на основі принципу суперпозиції можна шукати у вигляді суми часткових розв'язків таких двох неоднорідних рівнянь

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}, \tag{224}$$

$$y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}. \tag{225}$$

2а) Запишемо *проєкт часткового розв'язку рівняння* (224). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_1(x) := e^{-4x},$$

для якого маємо (див. (219)):

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$l := \min\{r, s\}$
-4	0	-4	1	0	0	0

(число $\mu = -4$ є характеристичним числом кратності $k = 1$). Тому частковий розв'язок рівняння (224) шукаємо у вигляді

$$y = axe^{-4x}, \tag{226}$$

де a — неозначений коефіцієнт (оскільки у виразі $f_1(x)$ біля e^{-4x} стоїть многочлен нульового степеня, а саме 1, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня з неозначеним коефіцієнтом), x — поправка за рахунок того, що $\mu = -4$ — характеристичне число кратності $k = 1$.

2б) Запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (225). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_2(x) := xe^{-x},$$

для якого маємо (див. (219)):

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$l := \min\{r, s\}$
-1	0	-1	0	1	0	1

(число $\mu = -1$ не є характеристичним числом, а тому $k = 0$). Тому частковий розв'язок рівняння (225) шукаємо у вигляді

$$y = (bx + c)e^{-x}, \tag{227}$$

де b, c — поки що неозначені коефіцієнти (оскільки у виразі $f_2(x)$ біля e^{-x} стоїть многочлен першого степеня, а саме x, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен першого степеня з неозначеними коефіцієнтами).

Отож, частковий розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = axe^{-4x} + (bx + c)e^{-x}, \tag{228}$$

де a, b, c — сталі, значення яких знаходять із умови, що при підстановці цього виразу у задане рівняння отримаємо тотожність. Маємо

$$\begin{array}{r|l} -4 & y = axe^{-4x} + (bx + c)e^{-x}, \\ 3 & y' = ae^{-4x} - 4axe^{-4x} + be^{-x} - bxe^{-x} - ce^{-x}, \\ 1 & y'' = -8ae^{-x}e^{-4x} + 16axe^{-4x} - 2be^{-x} + bxe^{-x} + ce^{-x}. \end{array}$$

Підставляємо вирази y, y', y'' у вихідне лінійне неоднорідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях xe^{-4x}, e^{-4x}, xe^{-x}, e^{-x}. У результаті отримаємо

$$\begin{array}{lcl} xe^{-4x} & : & -4a - 12a + 16a = 0 \\ e^{-4x} & : & 3a - 8a = 1 \\ xe^{-x} & : & -4b - 3b + b = 1 \\ e^{-x} & : & -4c + 3b - 3c - 2b + c = 0. \end{array}$$

Звідси

$$\begin{cases} -5a = 1 \\ -6b = 1 \\ b - 6c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{6} \\ c = -\frac{1}{36}. \end{cases}$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = -\frac{1}{5}xe^{-4x} + \left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}\right)e^{-x} \equiv -\frac{1}{5}xe^{-4x} - \frac{6x + 1}{36}e^{-x}.$$

3-ий крок. Повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (221) — сума повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння, знайденого на першому кроці, та часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, який знайдений на другому кроці:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x} - \frac{1}{5}xe^{-4x} - \frac{6x + 1}{36}e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. ▶

2. Розв'язати рівняння

$$y'' + 4y = e^{2x}\cos 2x. \tag{229}$$

◀ *1-ий крок.* Шукаємо повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y'' + 4y = 0. \tag{230}$$

Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i. \tag{231}$$

Отже,

$$\psi_1(x) := e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x, \quad \psi_2(x) := e^{-2ix} = \cos 2x - i\sin 2x \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{\psi}_1(x) := \mathrm{Re}\{\psi_1(x)\} = \cos 2x, \quad \widetilde{\psi}_2(x) := \mathrm{Im}\{\psi_1(x)\} = \sin 2x$$

— фундаментальна система (дійсних) розв'язків рівняння (230) і повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x, \quad x \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2-ий крок. Знайдемо частковий розв'язок рівняння (406). Вільний член цього рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{2x}\cos 2x.$$

Для цієї функції маємо (див. (219)):

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$l := \min\{r, s\}$
2	2	$2+2i$	0	0	0	0

(число $\mu = 2 + 2i$ не є коренем характеристичного рівняння (231), тому поправки типу x^k, де k — кратність числа μ, як кореня характеристичного рівняння, не буде). Тоді частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = e^{2x}(a\cos 2x + b\sin 2x),$$

де a, b — неозначені коефіцієнти (оскільки у вільному члені $f(x)$ біля $e^{2x}\cos 2x$ стоїть многочлен нульового степеня, а саме 1, тому у вираз часткового розв'язку входять многочлени нульового степеня з неозначеними коефіцієнтами біля виразів $e^{2x}\cos 2x$ та $e^{2x}\sin 2x$).

Маємо

$$\begin{array}{c|l}
4 & y = e^{2x}(a\cos 2x + b\sin 2x), \\
0 & y' = 2e^{2x}(a\cos 2x + b\sin 2x) + e^{2x}(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) \equiv \\
 & \equiv (2a+2b)e^{2x}\cos 2x + (2b-2a)e^{2x}\sin 2x, \\
1 & y'' = (4a+4b)e^{2x}\cos 2x - (4a+4b)\sin 2x + \\
 & +(4b-4a)e^{2x}\sin 2x + (4b-4a)e^{2x}\cos 2x \equiv \\
 & \equiv 8be^{2x}\cos 2x - 8ae^{2x}\sin 2x.
\end{array}$$

Підставляємо значення y, y', y'' у вихідне лінійне неоднорідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях $e^{2x}\cos 2x$, $e^{2x}\sin 2x$:

$$\begin{array}{ll} e^{2x}\cos 2x: & 4a + 8b = 1 \\ e^{2x}\sin 2x: & 4b - 8a = 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} a = \frac{1}{20} \\ b = \frac{1}{10}. \end{array}$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = \frac{1}{20}\,e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{10}\,e^{2x}\sin 2x.$$

3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (406)

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{20}\,e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{10}\,e^{2x}\sin 2x, \quad x \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. ▶

3. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = -16\cos x \cdot \cos 2x.$$

◀ Використовуючи формулу

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

записуємо дане рівняння у вигляді

$$y'' + y = -8\cos x - 8\cos 3x. \tag{232}$$

1-ий крок. Шукаємо повний загальний розв'язок відповідного рівнянню (232) лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0. \tag{233}$$

Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i. \tag{234}$$

Отже,

$$\psi_1(x) := e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \psi_2(x) := e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \Rightarrow$$
$$\widetilde{\psi}_1(x) := \mathrm{Re}\{\psi_1(x)\} = \cos x, \quad \widetilde{\psi}_2(x) := \mathrm{Im}\{\psi_1(x)\} = \sin x$$

— фундаментальна система (дійсних) розв'язків рівняння (233) і повний загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2-ий крок. Знайдемо частковий розв'язок рівняння (232). Вільний член цього рівняння є сумою двох квазімногочленів:

$$f_1(x) = -8\cos x \quad \text{та} \quad f_2(x) = -8\cos 3x.$$

На підставі принципу суперпозиції шукатимемо частковий розв'язок рівняння (232) як суму часткових розв'язків двох лінійних неоднорідних рівнянь:

$$y'' + y = -8\cos x, \tag{235}$$

$$y'' + y = -8\cos 3x. \tag{236}$$

2а) Запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (235). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_1(x) = -8\cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

для якого маємо (див. (219)):

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$l := \min\{r, s\}$
0	1	i	1	0	0	0

(число $\mu = i$ є коренем характеристичного рівняння (233) кратності $k = 1$). Отож, частковий розв'язок рівняння (235) шукаємо у вигляді

$$y = x(a\cos x + b\sin x),$$

де a, b — неозначені коефіцієнти (оскільки у виразі $f_1(x)$ біля $\cos x$ стоїть многочлен нульового степеня, а саме -8, тому у вираз проєкту часткового розв'язку входять многочлени нульового степеня з неозначеними коефіцієнтами біля виразів $\cos x$ та $\sin x$), x — поправка за рахунок того, що $\mu = i$ корінь характеристичного рівняння (233) кратності $k = 1$.

2б) Запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (236). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_2(x) = -8\cos 3x, \quad x \in \mathbb{R},$$

для якого маємо (див. (219)):

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$l := \min\{r, s\}$
0	3	$3i$	0	0	0	0

(число $\mu = 3i$ не є коренем характеристичного рівняння (233), а тому $k = 0$, а отже, ніякої поправки не буде). Отож, частковий розв'язок рівняння (236) шукаємо у вигляді

$$y = c\cos 3x + d\sin 3x,$$

де c, d — неозначені коефіцієнти (оскільки у виразі $f_2(x)$ біля $\cos 3x$ стоїть многочлен нульового степеня, а саме -8, тому у вираз проєкту часткового розв'язку входять многочлени нульового степеня з неозначеними коефіцієнтами біля виразів $\cos 3x$ та $\sin 3x$).

На підставі сказаного вище частковий розв'язок рівняння (232) шукатимемо у вигляді

$$y = x(a\cos x + b\sin x) + c\cos 3x + d\sin 3x. \tag{237}$$

Маємо

$$\begin{array}{c|l} 1 & y = x(a\cos x + b\sin x) + c\cos 3x + d\sin 3x, \\ 0 & y' = a\cos x + b\sin x - ax\sin x + bx\cos x - 3c\sin 3x + 3d\cos 3x, \\ 1 & y'' = -a\sin x + b\cos x - a\sin x - ax\cos x + \\ & +b\cos x - bx\sin x - 9c\cos 3x - 9d\sin 3x. \end{array}$$

Підставляємо значення y, y', y'' у вихідне лінійне неоднорідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях $x\sin x$, $x\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$:

$$\begin{array}{lcl} x\sin x & : & -b + b = 0 \\ x\cos x & : & -a + a = 0 \\ \sin x & : & -2a = 0 \\ \cos x & : & 2b = -8 \\ \cos 3x & : & -9c + c = -8 \\ \sin 3x & : & -9d + d = 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -4 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{array}$$

Записуємо частковий розв'язок рівняння (232)

$$y = -4x\sin x + \cos 3x.$$

3-ий крок. Отже, повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - 4x\sin x + \cos 3x,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. ▶

4. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2iy' - y = 8\cos x.$$

◀ Оскільки коефіцієнти рівняння належать полю комплексних чисел, то використовуючи формулу

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}),$$

до правої частини рівняння, записуємо дане рівняння у вигляді

$$y'' + 2iy' - y = 4(e^{ix} + e^{-ix}). \qquad (238)$$

1-ий крок. Шукаємо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y'' + 2iy' - y = 0. \qquad (239)$$

Записуємо його характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$\lambda^2 + 2i\lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + i)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -i,\ k_1 = 2. \qquad (240)$$

Отже,

$$\psi_1(x) = e^{-ix}, \quad \psi_2(x) = xe^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

— фундаментальна система розв'язків рівняння (239) і його повний загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1e^{-ix} + C_2xe^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2-ий крок. Знайдемо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (238). Вільний член цього рівняння є сумою квазімногочленів

$$f_1(x) = 4e^{ix} \quad \text{та} \quad f_2(x) = 4e^{-ix},$$

а тому його частковий розв'язок є сумою часткових розв'язків двох неоднорідних рівнянь

$$y'' + 2iy' - y = 4e^{ix}, \tag{241}$$

$$y'' + 2iy' - y = 4e^{-ix}. \tag{242}$$

2а) Запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (235). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_1(x) = 4e^{ix},$$

для якого маємо (див. (219)):

μ	$k :=$ кр. μ	l
i	0	0

(число $\mu = i$ не є коренем характеристичного рівняння (239)). Отож, частковий розв'язок рівняння (241) шукаємо у вигляді

$$y = ae^{ix},$$

де a — неозначений коефіцієнт (оскільки у виразі $f_1(x)$ біля e^{ix} стоїть многочлен нульового степеня, а саме 4, тому у проєкт часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня з неозначеним коефіцієнтом).

2б) Запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (242). Вільним членом цього рівняння є квазімногочлен

$$f_1(x) = 4e^{-ix},$$

для якого маємо (див. (219)):

μ	$k :=$ кр. μ	l
$-i$	2	0

(число $\mu = -i$ є коренем характеристичного рівняння (233) кратності 2). Отож, частковий розв'язок рівняння (242) шукаємо у вигляді

$$y = bx^2e^{-ix},$$

де b — неозначений коефіцієнт (оскільки у виразі $f_2(x)$ біля e^{-ix} стоїть многочлен нульового степеня, а саме 4).

На підставі принципу суперпозиції частковий розв'язок рівняння (238) шукатимемо у вигляді

$$y = ae^{ix} + bx^2e^{-ix}. \tag{243}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-1 & y = ae^{ix} + bx^2e^{-ix}, \\
2i & y' = aie^{ix} + 2bxe^{-ix} - bix^2e^{-ix}, \\
1 & y'' = -ae^{ix} - 4bixe^{-ix} - bx^2e^{-ix} + 2be^{-ix}.
\end{array}
$$

Підставляємо вирази y, y', y'' у вихідне лінійне неоднорідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях x^2e^{-ix}, xe^{-ix}, e^{-ix}, e^{ix}:

$$
\begin{array}{lcl}
x^2e^{-ix} & : & -b + 2b + b = 0 \\
xe^{-ix} & : & -4bi + 4bi = 0 \\
e^{-ix} & : & 2b = 4 \\
e^{ix} & : & -a - 2a - a = 4
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{l}
a = -1 \\
b = 2.
\end{array}
$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = -e^{ix} + 2x^2e^{-ix}.$$

3-ий крок. Повний загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (238) має вигляд

$$y = C_1e^{-ix} + C_2xe^{-ix} - e^{ix} + 2x^2e^{-ix},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. ▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати рівняння:
534. $y'' + y = 4xe^x$; **535.** $y'' - y = 2e^x - x^2$;
537. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ **538.** $y'' + y = 4\sin x$;
545. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$; **546.** $y'' + y = x\sin x$.

Для кожного рівняння записати його частковий розв'язок з неозначеними коефіцієнтами (числове значення коефіцієнтів шукати не треба):
555. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$;
564. $y'' + 4y = \cos x \cos 3x$; **568.** $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$.

Домашні завдання:

Розв'язати рівняння:
533. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; **536.** $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;
539. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$; **540.** $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;
542. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$; **544.** $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$;
548. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Для кожного рівняння записати його частковий роз'язок з неозначеними коефіцієнтами (числове значення коефіцієнтів шукати не треба):
556. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$; **559.** $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - \cos x)$;
566. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$; **569.** $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$;
572. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$.

Відповіді:

534. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x$;
535. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$;
537. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 0,1\sin x + 0,3\cos x$;
538. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$; **545.** $y = (C_1 + C_2x + x^3)e^x$;
546. $y = \left(C_1 - \dfrac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_2 + \dfrac{x}{4}\right)\sin x$;
533. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{5}e^{4x}$;
536. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)e^x$;
539. $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$;
540. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x + 0,34)\sin x$;
542. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \left(\dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{x}{32}\right)e^x$;
544. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{1}{37}\cos x\right)e^{3x}$;
548. $y = C_1 + C_2e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x)$.

Практичне заняття № 19

Контрольна робота № 4

Варіант 1

1) $y'' - 2y' + 5y = 2x$; 2) $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$; 3) $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$; 4) $y'' - 4y' + 4y = (3x - 2)e^{2x} - 4\cos 2x$; 5) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\sin x + \cos x)$; 6) $y'' + 8y' + 16y = e^{-4x}$; 7) $y''' - 6y'' + 9y' = 3$; 8) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$;
9*) $y'' - 2iy = 8e^x \sin x$.

Практичне заняття № 20

Знаходження часткових розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь методом варіації сталих. Рівняння Ейлера

Частина перша: *Знаходження часткових розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь методом варіації сталих.*

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Означення 9. *Лінійним рівнянням вищого порядку (коротко, ЛР) називають звичайне диференціальне рівняння вищого порядку, яке можна записати у вигляді*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \qquad x \in (a,\, b), \tag{244}$$

де $n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$, x – незалежна змінна, що пробігає значення з числового інтервалу (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, $a_0, a_1, \dots, a_n$, f — задані функції від змінної x, які визначені на (a, b) і приймають значення в $\mathbb{P}$, причому $a_0(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$, y – невідома функція від змінної x зі значеннями в $\mathbb{P}$ (зауважимо, що коли $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то розв'язок ЛР можна записати у вигляді $y = u(x) + iv(x)$, $x \in \langle c, d\rangle \subset (a, b)$, де u і v — дійсні функції, i — уявна одиниця в $\mathbb{C}$).

Функції $a_0, a_1, \dots, a_n$ називають *коефіцієнтами*, а функцію f — *вільним членом* ЛР. Якщо в рівнянні (244) маємо $f(x) = 0$, $x \in (a, b)$, тобто воно має вигляд

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \qquad x \in (a,\, b), \tag{245}$$

то його називають *лінійним однорідним* рівнянням (ЛОР), а в протилежному випадку — *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР).

Якщо в рівняннях (244) і (245) однакові коефіцієнти, то рівняння (245) називають лінійним однорідним рівнянням, *відповідним* лінійному неоднорідному рівнянню (244).

Як правило, розглядають лінійні рівняння при умові, що його коефіцієнти і вільний член є неперервними на (a, b), а наслідком цього є те, що будь-який розв'язок цього рівняння можна продовжити на весь інтервал (a, b). Далі вважаємо, що коефіцієнти і вільний член є неперервними на (a, b) і розв'язки визначені на (a, b).

Повний загальний розв'язок рівняння (244) має вигляд

$$y = \overset{\circ}{y}(x, C_1, \dots, C_n) + \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a, b), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C},$$

де
$$y = \overset{\circ}{y}(x, C_1, \ldots, C_n), \quad x \in (a,b),\ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P},$$
— повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння (245), а
$$y = \overset{*}{y}(x), \quad x \in (a,b),$$
— (який-небудь частковий) розв'язок рівняння (244).

Як відомо, повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (245) має вигляд
$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x), \quad x \in (a,b),\ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P}, \tag{246}$$
де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (245) (коротко, ФСР (245)).

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (244) і вкажемо *метод варіації сталих* знаходження його часткового розв'язку при умові, що ми знаємо повний загальний розв'язок (246) відповідного лінійного однорідного рівняння (245). Цей метод полягає в тому, що частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо як функцію, зображення якої відрізняється від зображення повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння тільки тим, що замість сталих $C_1, \ldots, C_n$ стоять деякі функції від змінної x. Метод варіації сталих базується на такому твердженні.

Теорема 10. *Якщо $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — ФСР (245), то рівняння* (244) *має (частковий) розв'язок у вигляді функції*
$$y = \varphi_1(x)\psi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(x), \quad x \in (a,b), \tag{247}$$
де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — (які-небудь) функції з простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}\big)$, що задовольняють систему рівнянь
$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \cdots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \cdots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix}, \qquad x \in (a,b). \tag{248}$$

Наслідок 2. *Повний загальний розв'язок рівняння* (244) *можна записати у вигляді*
$$y = C_1\psi_1(x) + \cdots + C_n\psi_n(x) + \varphi_1(x)\psi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(x), \tag{249}$$
$$x \in (a,b), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{P},$$
де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — ФСР (245), $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — які-небудь функції з простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}\big)$, що задовольняють систему рівнянь (248).

Контрольні питання

1. Що таке ЛР, ЛОР і ЛНР?

2. Як знайти повний загальний розв'язок ЛНР, якщо відомо повний загальний розв'язок відповідного ЛОР і частковий розв'язок ЛНР?

3. У чому полягає метод варіації сталих знаходження часткового розв'язку ЛНР?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

◀ Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння.

1-ий крок. Шукаємо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0. \tag{250}$$

Записуємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Отже, функції

$$\psi_1(x) := e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \psi_2(x) := e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

є лінійно незалежними розв'язками рівняння (250), а тому функції

$$\widetilde{\psi}_1(x) := \operatorname{Re}\{e^{ix}\} = \cos x, \quad \widetilde{\psi}_2(x) := \operatorname{Im}\{e^{ix}\} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (250) і є дійсними. Отже, повний загальний дійсний розв'язок лінійного однорідного рівняння (250) має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{251}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2-ий крок. Оскільки вільний член $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ заданого рівняння не є квазімногочленом, то частковий розв'язок цього рівняння будемо шукати методом варіації сталих. Для цього запишемо проєкт часткового розв'язку, замінивши довільні сталі C_1, C_2 у виразі (251), відповідно, на функції φ_1, φ_2 від змінної $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x.$$

Функції φ_1, φ_2 на підставі теореми 2 знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{pmatrix}. \tag{252}$$

Для кожного значення $x \in \mathbb{R}$ трактуємо (252) як лінійну алгебраїчну систему відносно $\varphi_1'(x)$, $\varphi_2'(x)$ і розв'язуємо її методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$\triangle_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \triangle_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звідси маємо

$$\varphi_1'(x) = \frac{\triangle_1(x)}{\triangle(x)} \equiv -\operatorname{tg} x, \quad \varphi_2'(x) = \frac{\triangle_2(x)}{\triangle(x)} \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді, знайшовши відповідні первісні, отримаємо $\varphi_1(x) = \ln|\cos x|$, $\varphi_2(x) = x$, а отже, частковий розв'язок даного лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x.$$

3-ий крок. На підставі знайденого вище запишемо повний загальний розв'язок даного лінійного неоднорідного рівняння

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші для даного рівняння, підставивши вираз його повного загального розв'язку у початкові умови і розв'язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно C_1, C_2. Для цього знайдемо похідну

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \ln|\cos x| \cdot \sin x + x \cdot \cos x.$$

Тоді

$$y(0) = C_1 = 1, \quad y'(0) = C_2 = 0.$$

Отже, розв'язком даної задачі є функція

$$y = \cos x + \ln \cos x \cdot \cos x + x \cdot \sin x.$$

►

Частина друга: *Рівняння Ейлера*

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Означення 10. *Рівнянням Ейлера називається лінійне диференціальне рівняння, яке можна записати у вигляді*

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_k x^{n-k} y^{(n-k)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \tag{253}$$

де $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$), $x \in \mathbb{R}$ *– незалежна змінна,* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{P}$, $a_0 \neq 0$, $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{P})$, x *– невідома функція від змінної* x *зі значеннями в полі* $\mathbb{P}$.

При $x = 0$ коефіцієнти рівняння (253) при похідних шуканої функції перетворюються в нуль, а отже рівняння (253) вироджується. Це приводить до появи особливості розв'язків даного рівняння, зокрема, можливу їх розривність або розривність їх деяких похідних в точці 0. Тому варто розглянути рівняння (253) окремо на променях $(-\infty,\, 0)$ і $(0,\, +\infty)$. Оскільки при заміні x на $-x$ диференціальний вираз в лівій частині рівняння (253) не змінюється, а промінь $(-\infty,\, 0)$ переходить в промінь $(0,\, +\infty)$, то достатньо розглядати рівняння (253) на $(0,\, +\infty)$, що ми надалі й робитимемо, використавши позначення $\mathbb{R}_+ := (0,\, +\infty)$.

Перетворимо рівняння (253), зробивши в ньому заміну змінних

$$x = e^t, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{254}$$

Нехай

$$z(t) := y(x) \ \text{ при } x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси маємо

$$y(x) = z(t) \ \text{ при } x = e^t,$$

а отже за правилом диференціювання складених функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
&y'(x) = z'(t) \cdot t'(x) = z'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} = z'(t) \cdot e^{-t}, \\
&y''(x) = \big(z''(t) \cdot e^{-t} - z'(t) \cdot e^{-t}\big) \cdot t'(x) = \big(z''(t) - z'(t)\big) \cdot e^{-2t}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(k)}(x) = \big(z^{(k)}(t) + \cdots\big) \cdot e^{-kt}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(n)}(x) = \big(z^{(n)}(t) + \cdots\big) \cdot e^{-nt}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в рівняння (253). У результаті отримаємо рівняння

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_n z = g(t), \tag{255}$$

де

$$g(t) := f(e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рівняння (255) є лінійним диференціальними рівнянням зі сталими коефіцієнтами, які вивчені раніше. Як відомо, повний загальний розв'язок рівняння (255) є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_n z = 0 \tag{256}$$

та деякого (часткового) розв'язку рівняння (255).

Для знаходження повного загального розв'язку рівняння (256) записуємо відповідне характеристичне рівняння

$$b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0. \tag{257}$$

Легко бачити, що по характеристичному рівнянню (257) можна відновити диференціальне рівняння (256). Звідси прямо випливає такий висновок: якщо для заданого рівняння (253) можна безпосередньо знайти ліву частину рівняння (257), то очевидним чином можна записати рівняння (255). І тут в пригоді стає така тотожність

$$\begin{aligned} &a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_n = \\ &= b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{258}$$

яка випливає з тотожності

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_k x^{n-k} y^{(n-k)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y =$$

$$= b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_n z,$$

$$y \in C^n(\mathbb{R}_+; \mathbb{P}), \quad z(t) := y(x) \ \text{ при } x = e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

в якій треба взяти $y = x^\lambda$, $z = e^{\lambda t}$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ — довільне. Як легко бачити, ліву частину рівності (258) отримуємо з лівої частини рівняння (253), зробивши формальну заміну:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}: \quad x^k y^{(k)} \ \mapsto \ \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1), \qquad y \ \mapsto \ 1$$

(зауважимо, що для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$ вираз $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$ є добутком k множників, з яких перший — λ, другий — $\lambda - 1$ і т.д.).

Зі сказаного випливає такий ***спосіб зведення рівняння (253) до рівняння (255)*** і, фактично, розв'язування рівняння (253):

1) Записуємо рівняння

$$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n=0 \tag{259}$$

і зводимо многочлен, що знаходиться в лівій частині цього рівняння, до стандартного (канонічного) вигляду. У результаті отримаємо рівняння (257). Знаходимо його розв'язки $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ разом з кратностями $k_1,\ldots,k_m$.

2) Записуємо рівняння (255), ліва частина якого відтворюється за рівнянням (257), а права — результат заміни (254) змінної x на t у вільному члені (правій частині) рівняння (255) .

3) Знаючи характеристичні числа рівняння (256) та їх кратності, записуємо повний загальний розв'язок однорідного рівняння (256), відповідного рівнянню (255).

4) Шукаємо частковий розв'язок рівняння (255) методом варіації сталих чи, якщо вільний член є квазімногочленом чи сумою квазімногочленів, методом неозначених коефіцієнтів. Нагадаємо, що метод неозначених коефіцієнтів базується на такому твердженні.

Теорема 18. *Нехай коефіцієнти рівняння (255) — дійсні, а вільний член g – дійсний квазімногочлен:*

$$g(t)=e^{\alpha t}\big[(b_0t^r+\cdots+b_r)\cos\beta t+(c_0t^s+\cdots+c_s)\sin\beta t\big],\quad t\in\mathbb{R}, \tag{260}$$

де

- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
- $r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,
- $b_0,\ldots,b_r,c_0,\ldots,c_s\in\mathbb{R}$.

Тоді рівняння (255) має частковий розв'язок вигляду

$$z=t^ke^{\alpha t}\big[(d_0t^\nu+\cdots+d_\nu)\cos\beta t+(\widetilde{d}_0t^\nu+\cdots+\widetilde{d}_\nu)\sin\beta t\big],\quad t\in\mathbb{R}, \tag{261}$$

де

- $\nu=\max\{r,s\}$,
- $d_0,\ldots,d_\nu,\widetilde{d}_0,\ldots,\widetilde{d}_\nu\in\mathbb{R}$,
- $k=0$, *якщо число* $\mu=\alpha+i\beta$ *не є характеристичним для рівняння (255), а якщо* μ *є характеристичним числом, то* k *дорівнює кратності цього числа.*

5) Записуємо повний загальний розв'язок рівняння (255) і повертаємося до змінної x. Це буде повний загальний розв'язок рівняння (253).

Контрольні питання

1. Що таке рівняння Ейлера?

2. Яким чином рівняння Ейлера зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати рівняння Ейлера

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2. \tag{262}$$

◀ Зробимо в даному рівнянні заміну незалежної змінної

$$x = e^t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{263}$$

Нехай

$$z(t) := y(x) \ \text{ при } x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{264}$$

Тоді знаходимо

$$\begin{aligned} &y(x) = z(t) \ \text{ при } x = e^t, \\ &y'(x) = z'(t) \cdot t'(x) = z'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{z'(t)}{e^t} = z\,'(t) \cdot e^{-t}, \\ &y''(x) = (z''(t) - z'(t)) \cdot e^{-2t}. \end{aligned} \tag{265}$$

Підставивши y, y', y'' у вихідне рівняння та врахувавши заміну змінних (263), одержимо

$$e^{2t}(z\,'' - z\,')e^{-2t} - 2e^t z\,' e^{-t} + 2z = e^{2t} - 2e^t + 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$z\,'' - 3z\,' + 2z = e^{2t} - 2e^t + 2. \tag{266}$$

Рівняння (266) є лінійним неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Нам потрібно знайти його повний загальний розв'язок і вернутися до змінної x.

!!! Рівняння (266) можна отримати швидше і з меншими зусиллями. Для цього в лівій частині рівняння (262) робимо формальну заміну

$$x^2y'' \mapsto \lambda(\lambda - 1), \quad xy' \mapsto \lambda, \quad y \mapsto 1$$

і записуємо рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0.$$

Спростивши ліву частину цього рівняння, отримаємо

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0. \tag{267}$$

По лівій частині цього рівняння відтворюємо ліву частину рівняння (266), зробивши формальну заміну

$$\lambda^2 \mapsto z'', \quad \lambda \mapsto z', \quad \lambda^0 = 1 \mapsto z,$$

а праву частину отримуємо як і раніше безпосередньою заміною змінних x на t за правилом (263).

Розв'язуємо рівняння (266) стандартним способом.

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'' - 3z' + 2z = 0. \tag{268}$$

Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1. \tag{269}$$

Отже, функції

$$\psi_1(t) := e^{2t}, \quad \psi_2(t) := e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

– фундаментальна система розв'язків рівняння (263) і повний загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2-ий крок. Знайдемо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (266). Вільний член цього рівняння є сумою трьох квазімногочленів:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t), \text{ де } g_1(t) = e^{2t}, \quad g_2(t) = -2e^t, \quad g_3(t) = 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Випишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (266) як суму проєктів часткових розв'язків рівнянь

$$z'' - 3z' + 2z = g_1(t), \quad z'' - 3z' + 2z = g_2(t), \quad z'' - 3z' + 2z = g_3(t). \tag{270}$$

2а) Розглянемо перше з рівнянь (270). Для вільного члена цього рівняння

$$g_1(t) := e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

згідно з формулою (260)) маємо:

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
2	0	2	1	0	0	0

(число $\mu = 2$ є характеристичним числом кратності 1, а отже, $k = 1$). Тому частковий розв'язок першого з рівнянь (270) шукаємо згідно з формулою (261) у вигляді:

$$z = ate^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{271}$$

де a – поки що неозначений коефіцієнт многочлена нульового степеня (оскільки у виразі $g_1(t)$ біля e^{2t} стоїть многочлен нульового степеня, а саме 1, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня і t — поправка на кратність числа $\mu = 2$, як кореня характеристичного рівняння).
2б) Розглянемо друге з рівнянь (270). Для вільного члена цього рівняння

$$g_2(t) := -2e^{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

згідно з формулою (260) маємо:

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
1	0	1	1	0	0	0

(число $\mu = 1$ є характеристичним числом кратності 1, а отже, $k = 1$). Тому частковий розв'язок другого з рівнянь (270) шукаємо згідно з формулою (261) у вигляді

$$z = bte^{t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{272}$$

де b – поки що неозначений коефіцієнт многочлена нульового степеня (оскільки у виразі $g_2(t)$ біля e^t стоїть многочлен нульового степеня, а саме -2, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня і t — поправка на кратність числа $\mu = 1$, як кореня характеристичного рівняння).

2в) Розглянемо третє з рівнянь (270). Для вільного члена цього рівняння

$$g_3(t) := 2, \quad t \in \mathbb{R},$$

згідно з формулою (260) маємо:

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
0	0	0	0	0	0	0

(число $\mu = 0$ не є характеристичним числом, а отже, $k = 0$). Тому частковий розв'язок третього з рівнянь (270) шукаємо згідно з формулою (261) вигляді:

$$z = c, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{273}$$

де c – поки що неозначений коефіцієнт многочлена нульового степеня (оскільки у виразі $g_3(t)$ стоїть многочлен нульового степеня, а саме 2, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня без поправки).

На підставі сказаного частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (266) шукатимемо у вигляді

$$z = ate^{2t} + bte^{t} + c, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{274}$$

Знаходимо

$$\begin{array}{r|l} 2 & z = ate^{2t} + bte^{t} + c, \\ -3 & z' = ae^{2t} + 2ate^{2t} + be^{t} + bte^{t}, \\ 1 & z'' = 2ae^{2t} + 2ae^{2t} + 4ate^{2t} + be^{t} + be^{t} + bte^{t}. \end{array}$$

Підставляємо вирази z, z', z'' у рівняння (266) і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях te^{2t}, e^{2t}, te^{t}, e^{t}, e^{0t}:

$$\begin{array}{lll} te^{2t} & : & 2a - 6a + 4a = 0, \\ e^{2t} & : & -3a + 4a = 1, \\ te^{t} & : & 2b - 3b + b = 0, \\ e^{t} & : & -3b + 2b = -2, \\ e^{0t} & : & 2c = 2, \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} a = 1, \\ b = 2, \\ c = 1\,. \end{array}$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$z(t) = te^{2t} + 2te^{t} + 1.$$

3-ій крок. Повний загальний розв'язок рівняння (266) має вигляд

$$z = C_1e^{2t} + C_2e^{t} + te^{2t} + 2te^{t} + 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Звідси, враховуючи заміну (263) і наслідки з неї: $t = \ln x$, $e^{\lambda t} = (e^t)^\lambda = x^\lambda$, отримуємо повний загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + x^2 \ln|x| + 2x \ln|x| + 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі (тут враховано, що ліва частина даного рівняння не змінюється при заміні x на $-x$, а отже, з повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння на промені $(0, +\infty)$ можна отримати повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(-\infty, 0)$ вказаною заміною незалежної змінної.

►

2. Розв'язати рівняння Ейлера

$$x^2 y'' + xy' + y = 2x. \tag{275}$$

◄ Розглянемо це рівняння на $\mathbb{R}_+$. Робимо заміну незалежної змінної

$$x = e^t, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{276}$$

Нехай

$$z(t) := y(x) \quad \text{при} \quad x = e^t, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рівняння, яке отримується в результаті такої заміни, знайдемо так. В лівій частині рівняння (275) міняємо

$$x^2 y'' \mapsto \lambda(\lambda - 1), \quad xy' \mapsto \lambda, \quad y \mapsto 1.$$

Прирівнюючи отриманий вираз до 0, здобуваємо рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i. \tag{277}$$

Тепер в рівнянні (277) проведемо формальну заміну

$$\lambda^2 \mapsto z'', \quad \lambda \mapsto z', \quad \lambda^0 \mapsto z.$$

У результаті отримаємо лінійне однорідне рівняння, відповідне лінійному неоднорідному рівняння, що здобуваємо після заміни незалежних змінних:

$$z'' + z = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{278}$$

Отже, задане рівняння вказаною заміною змінних зведеться до рівняння

$$z'' + z = 2e^t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{279}$$

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'' + z = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{280}$$

Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Отже, функції

$$\psi_1(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad \psi_2(t) := e^{-it} = \cos t - i \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

є лінійно незалежними розв'язками рівняння (280), а тому функції

$$\widetilde{\psi}_1(t) := \mathrm{Re}\,\{e^{it}\} = \cos t, \quad \widetilde{\psi}_2(t) := \mathrm{Im}\,\{e^{it}\} = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (280) і є дійсними. Отже, повний загальний дійсний розв'язок лінійного однорідного рівняння (280) має вигляд

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{281}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2-ий крок. Шукаємо частковий розв'язок рівняння (279) методом неозначених коефіцієнтів. Для вільного члена цього рівняння

$$g(t) := 2e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

на підставі формули (260) маємо:

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
1	0	1	0	0	0	0

(число $\mu = 1$ не є характеристичним числом, а отже, $k = 0$). Тому частковий розв'язок рівняння (279) шукаємо на підставі формули (261) у вигляді:

$$z = ae^t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{282}$$

де a – поки що неозначений коефіцієнт многочлена нульового степеня (оскільки у виразі $g(t)$ біля e^{2t} стоїть многочлен нульового степеня, а саме 2, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен нульового степеня і поправки немає, бо число $\mu = 1$ не є коренем характеристичного рівняння).

Маємо

$$z' = ae^t, \qquad z'' = ae^t.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (279), отримаємо

$$2ae^t = 2e^t \Longrightarrow a = 1,$$

а отже, функція

$$z = e^t, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

є розв'язком рівняння (279).

3-ій крок. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (279) має вигляд

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Звідси, враховуючи (276), маємо

$$y = C_1 \cos \ln |x| + C_2 \sin \ln |x| + x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

— повний загальний дійсний розв'язок рівняння (275).

3. Розв'язати рівняння

$x(x-3)^2 y'' + 3(x^2 - 3x)y' - 3xy = 20x \cos \ln (x-3).$

◄ Поділимо дане рівняння на x:

$$(x-3)^2 y'' + 3(x-3)y' - 3y = 20 \cos \ln (x-3). \tag{283}$$

і зробимо в отриманому рівнянні заміну змінної

$$x - 3 = s.$$

Нехай

$$u(s) := y(x) \;\text{ при } x = s + 3.$$

Тоді

$$y(x) = u(s) \;\text{ при } s = x - 3, \quad y'(x) = u'(s), \quad y''(x) = u''(s).$$

Отже, нове рівняння має вигляд

$$s^2 u'' + 3su' - 3u = 20 \cos \ln s. \tag{284}$$

Це є рівняння Ейлера. Зробимо заміну змінних

$$s = e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+. \tag{285}$$

Нехай

$$z(t) := u(s) \quad \text{при} \quad s = e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Формально зробивши в лівій частині рівняння (284) заміну:

$$s^2 u'' \mapsto \lambda(\lambda - 1), \quad su' \mapsto \lambda, \quad u \mapsto 1.$$

отримуємо рівняння
$$\lambda(\lambda-1)+3\lambda-3=0,$$
що рівносильне рівнянню
$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=-3,\ \lambda_2=1. \tag{286}$$
Формально зробивши в лівій частині рівняння (286) заміну $\lambda^2 \mapsto z''$, $\lambda \mapsto z'$, $\lambda^0=1\mapsto z$, отримаємо ліву частину шуканого рівняння, а праву частину матимемо після заміни (285) змінних s на t в правій частині рівняння (284). У результаті здобуваємо рівняння
$$z''+2z'-3z=20\cos t. \tag{287}$$

!!! Можна в інший спосіб здобути рівняння (287). Для цього робимо у рівнянні (283) заміну незалежної змінної
$$x-3=e^t, \quad t\in(-\infty,+\infty), \quad x\in(3,+\infty). \tag{288}$$
Нехай
$$z(t):=y(x) \quad \text{при} \;\; x=e^t+3, \quad t\in(-\infty,+\infty), \quad x\in(3,+\infty).$$
Тоді знаходимо
$$\begin{aligned}&y(x)=z(t),\\&y'(x)=z'(t)\cdot e^{-t},\\&y''(x)=(z''(t)-z'(t))\cdot e^{-2t}.\end{aligned}$$
Підставивши y, y', y'' у рівняння (283) та врахувавши заміну змінних (288), одержимо рівняння (287).

Розв'яжемо рівняння (287).

1-ий крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння
$$z''+2z'-3z=0. \tag{289}$$
Характеристичне рівняння записане і його корені знайдені уже в (286). Отже, функції
$$\psi_1(t):=e^{-3t}, \quad \psi_2(t):=e^t, \quad t\in\mathbb{R},$$
утворюють ФСР(406) і повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (406) має вигляд
$$z=C_1e^{-3t}+C_2e^t, \quad t\in\mathbb{R},$$
де C_1, C_2 – довільні сталі.

2-ий крок. Шукаємо частковий розв'язок рівняння (287) методом неозначених коефіцієнтів. Для вільного члена цього рівняння

$$g(t) := 20\cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

на підставі формули (260) маємо:

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
0	1	i	0	0	0	0

(число $\mu = i$ не є характеристичним числом, а отже, $k = 0$). Тому частковий розв'язок рівняння (279) шукаємо на підставі формули (261) у вигляді:

$$z = a\cos t + b\sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{290}$$

де a, b – поки що неозначені коефіцієнти многочленів нульового степеня (оскільки у виразі $g(t)$ біля $\cos t$ стоїть многочлен нульового степеня, а саме 20, тому у вираз часткового розв'язку входять многочлени нульового степеня і поправки немає, бо число $\mu = i$ не є коренем характеристичного рівняння).

Знаходимо

$$\begin{array}{r|l} -3 & z = a\cos t + b\sin t, \\ 2 & z' = -a\sin t + b\cos t, \\ 1 & z'' = -a\cos t - b\sin t. \end{array}$$

Підставляємо вирази z, z', z'' у рівняння (287) і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях $\cos t$, $\sin t$:

$$\begin{array}{lcl} \cos t & : & -3a + 2b - a = 20 \\ \sin t & : & -3b - 2a - b = 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} a = -4\,, \\ b = 2\,. \end{array}$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$z = -4\cos t + 2\sin t.$$

3-ій крок. Повний загальний розв'язок рівняння (287) має вигляд

$$z = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t - 4\cos t + 2\sin t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Звідси, враховуючи заміну (288), отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1\frac{1}{(x-3)^3} + C_2(x-3) - 4\cos\ln(x-3) + 2\sin\ln(x-3), \quad x \in (3, +\infty),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Знайти розв'язки рівнянь методом варіації сталих:

575. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; **577.** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;
581. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

Розв'язати рівняння Ейлера :

589. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; **592.** $x^2y''' = 2y'$;
593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$; **595.** $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$;
599. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

Домашні завдання:

Знайти розв'язки рівнянь методом варіації сталих:

576. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$; **578.** $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$;
579. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$; **580.** $y'' + y = 2\sec^3 x$.

Знайти розв'язки задачі Коші:

583. $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$;
586. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

Розв'язати рівняння Ейлера:

590. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$; **591.** $x^3y''' + xy' - y = 0$;
594. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$; **596.** $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$;
597. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$; **598.** $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$;
600. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Розв'язати рівняння :

603. $y'' + 2iy = 8e^x \sin x$.

Відповіді:

575. $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)$;
577. $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$;
581. $y = \frac{1}{x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$; **589.** $y = C_1x^2 + C_2x^3$;
592. $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$; **593.** $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$;
595. $y = C_1x^2 + \frac{1}{x}\left(C_2 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right)$;
599. $y = (x-2)^2(C_1 + C_2\ln|x-2|) + x - 1,5$;
576. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$;
578. $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$;
579. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + C_1 + C_2x\right)$;
580. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$;
583. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$; **586.** $y = 2 + e^{-x}$;

590. $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$; **591.** $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|)$;
594. $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x$;
596. $y = x^2(C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| + 3)$;
597. $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$;
598. $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0,1\cos\ln x - 0,3\sin\ln x$;
600. $y = C_1\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2\left|x + \frac{3}{2}\right|^{3/2} + C_3\left|x + \frac{3}{2}\right|^{1/2}$;
603. $y = C_1e^{(-1+i)x} + [C_2 + (i-1)x]e^{(1-i)x} - e^{(1+i)x}$.

Практичне заняття № 21

Метод степеневих рядів знаходження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Лінійні рівняння з поліноміальними коефіцієнтами

Довідковий матеріал

Звичайним диференціальним рівнянням, розв'язаним стосовно похідної, називають рівняння

$$x' = f(t, x), \tag{291}$$

де t – незалежна змінна, x – функція від t, x' – похідна x, $f : D \to \mathbb{R}$ – задана функція, D – область в $\mathbb{R}^2$.

Під *розв'язком* рівняння (291) розуміють функцію $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, яка задовольняє умови

1) $\varphi \in C^1\big(\langle a, b\rangle\big)$ (тобто φ є неперервно-диференційовною функцією);

2) $(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$ (тобто графік φ лежить в області визначення f);

3) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$ (тобто φ задовольняє рівняння (291).

Задача Коші для рівняння (291) полягає у знаходженні розв'язку рівняння (291), який задовольняє *початкову умову*

$$x(t_0) = x_0, \tag{292}$$

де (t_0, x_0) — задана точка області D.

Розглянемо питання про **аналітичність** розв'язку задачі (291), (292). Спочатку нагадаємо означення аналітичних функцій.

Означення 11. *Функцію $\varphi(t)$, $t \in (a, b)$, називають аналітичною в точці $t_0 \in (a, b)$, якщо існує окіл $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (a, b)$ ($\delta > 0$ – деяке число) цієї точки, на якому задана функція є сумою абсолютно збіжного степеневого ряду з центром в точці t_0, тобто*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \qquad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \tag{293}$$

де $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — числова послідовність.

Відмітимо, що ряд (293) є абсолютно збіжним, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k||t - t_0|^k < \infty, \qquad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Легко переконатися, що коли функція $\varphi(t)$, $t \in (a,b)$, є аналітичною в точці $t_0 \in (a,b)$, тобто подається у вигляді степеневого ряду (293), то вона має похідні будь-якого порядку в околі точки t_0 і

$$c_k = \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{294}$$

Означення 12. *Функція $\varphi(t)$, $t \in (a,b)$, називається аналітичною на (a,b), якщо вона аналітична в кожній точці інтервалу (a,b).*

Нехай $K_\rho(t_0, x_0) := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|^2 + |x-x_0|^2 < \rho^2\}$ — круг радіуса $\rho > 0$ з центром в точці (t_0, x_0).

Означення 13. *Функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, називається аналітичною в точці $(t_0,x_0) \in D$, якщо існує круг $K_\rho(t_0,x_0) \subset D$, на якому задана функція є сумою абсолютно збіжного степеневого ряду з центром в точці (t_0,x_0), тобто*

$$f(t,x) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} d_{k_1,k_2}(t-t_0)^{k_1}(x-x_0)^{k_2}, \qquad (t,x) \in K_\rho(t_0,x_0), \tag{295}$$

де $\{f_{k_1,k_2}\}_{k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0}$ — числова послідовність.

Відмітимо, що ряд (295) є абсолютно збіжним, якщо

$$\sum_{k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0} |d_{k_1,k_2}||t-t_0|^{k_1}|x-x_0|^{k_2} < \infty, \quad (t,x) \in K_\rho(t_0,x_0).$$

Легко переконатися, що якщо функція $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, є аналітичною в точці $(t_0,x_0) \in D$, то в деякому околі цієї точки функція f має похідні будь-якого порядку і коефіцієнти d_{k_1,k_2}, $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, ряду (295) знаходяться за правилом

$$d_{k_1,k_2} = \frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2} f(t_0,x_0)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}}, \quad k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0.$$

Означення 14. *Функцію $f(t,x)$, $(t,x) \in D$, називають аналітичною в області D, якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.*

Теорема 11. *Якщо функція f є аналітичною в області D, то непродовжуваний (а отже, будь-який інший) розв'язок задачі (291), (292) є аналітичною функцією на своїй області визначення.*

Розглянемо проблему ***існування аналітичного розв'язку задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь***.

Нагадаємо, що *нормальною* системою звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку називають систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}, \tag{296}$$

де $n \geqslant 2$ – яке-небудь натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі дійсні функції від змінної t, $x_1', \ldots, x_n'$ – похідні невідомих функцій, $f_1 : D \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ – задані неперервні функції, D – область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$.

Задача Коші для системи (296) полягає у знаходженні розв'язку цієї системи, який задовольняє початкову умову

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{297}$$

де $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — яка-небудь фіксована точка з D.

Означення 15. *Вектор-функція* $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$, $t \in (a, b)$, *— аналітична в точці* $t_0 \in (a, b)$ *(відповідно, на* (a, b)*), якщо кожна її компонента є аналітичною в точці* $t_0 \in (a, b)$ *(відповідно, на* (a, b)*).*

Означення 16. *Функція* $g(z_1, \ldots, z_k)$, $(z_1, \ldots, z_k) \in \Omega$ *(*Ω *— область в* $\mathbb{R}^k$*), — аналітична в точці* $(z_1^0, \ldots, z_k^0) \in \Omega$*, якщо в деякому околі* $O(z_1^0, \ldots, z_k^0)$ *точки* $(z_1^0, \ldots, z_k^0)$ *дану функцію можна розвинути в степеневий ряд, тобто на* $O(z_1^0, \ldots, z_k^0)$ *функція* g *є сумою абсолютно збіжного степеневого ряду*

$$g(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{m_1 \geqslant 0, \ldots, m_k \geqslant 0} q_{m_1, \ldots, m_k} (z_1 - z_1^0)^{m_1} \cdots (z_k - z_k^0)^{m_k}, \tag{298}$$
$$(z_1, \ldots, z_k) \in O(z_1^0, \ldots, z_k^0).$$

Легко переконатися, що в (298)

$$q_{m_1, \ldots, m_k} = \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_k} g(z_1^0, \ldots, z_k^0)}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_k^{m_k}}, \qquad m_1 \geqslant 0, \ldots, m_k \geqslant 0.$$

Ясно, що необхідною умовою аналітичності функції в точці є існування похідних будь-якого порядку в деякому околі цієї точки.

Якщо функція $g(z_1, \ldots, z_k)$, $(z_1, \ldots, z_k) \in \Omega$, аналітична в кожній точці області Ω, то ця функція називається *аналітичною в області* Ω.

Теорема 12. *Нехай праві частини рівнянь системи* (296) *є аналітичними функціями в* D. *Тоді розв'язок задачі* (296), (297) *є аналітичною вектор-функцією.*

Аналогічно вирішується питання про аналітичність розв'язку задачі Коші для рівняння вищого порядку:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \tag{299}$$

де $f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$, – задана функція, D – область простору $\mathbb{R}^{1+n}$.

$$\begin{cases} x(t_0) = x_1^0, \\ x'(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{300}$$

де $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ — задана точка області D (початкові дані).

1. Знаходження розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем у вигляді рядів Тейлора

Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, — розв'язок задачі (291), (292), зокрема, це може бути непродовжуваний розв'язок. Підставимо його в рівняння (291). В результаті отримуємо тотожність

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in (a, b), \tag{301}$$

звідки

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

Тоді в силу властивостей композицій диференційовних функцій та враховуючи, що $\varphi \in C^1(a, b)$, маємо неперервну диференційовність правої частини рівняння (301), а отже, і лівої частини. З цього випливає, що $\varphi \in C^2(a, b)$ і виконується тотожність (301). Продиференціюємо цю тотожність (за t), враховуючи, що її ліва і права частини неперервно диференційовні. У результаті, на підставі формули диференціювання складених функцій, матимемо тотожність

$$\varphi''(t) = \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial x}\varphi'(t), \qquad t \in (a, b), \tag{302}$$

звідки

$$\varphi''(t_0) = \frac{\partial f(t_0, x_0)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_0, x_0)}{\partial x} f(t_0, x_0).$$

Оскільки права частина, в силу наших припущень і доведеного вище ($\varphi \in C^2(a, b)$), є неперервно диференційовною, то і ліва частина — теж. Це означає, що $\varphi \in C^3(a, b)$. Абсолютно аналогічно міркуючи, можна знайти вирази $\varphi^{(k)}$ для $k = 3, 4, \dots$.

2. Метод степеневих рядів знаходження розв'язків лінійних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{P}, \tag{303}$$

де $\mathbb{P} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, a_0, a_1, a_2 — поліноми (многочлени) від змінної t, причому $a_0 \not\equiv 0$.

Відомий такий факт: коли для деякого $t_0 \in \mathbb{R}$ маємо $a_0(t_0) \neq 0$, то в точці t_0 будь-який розв'язок рівняння (303) є аналітичним, тобто довільний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$, рівняння (303) в околі $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точки t_0 можна подати як суму степеневого ряду за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тобто

$$x = \varphi(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \quad t \in (t_0 - \delta,\, t_0 + \delta), \tag{304}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ — елементи поля $\mathbb{P}$, $\delta > 0$ — деяке дійсне число. Очевидно, що ряд (304) є рядом Тейлора функції φ і, зокрема,

$$c_k = \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

На підставі сказаного можна запропонувати такий спосіб знаходження загального розв'язку рівняння (303) в околі точки t_0.

1. Записуємо коефіцієнти рівняння (303) у вигляді полінома за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (для цього можна використати формулу Тейлора).

2. Записуємо проект розв'язку рівняння (303) у вигляді ряду (304) з неозначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ і підставляємо його в рівняння (303) замість x. Після відповідних спрощень та зведення подібних членів в лівій частині отримаємо ряд за степенями $(t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, коефіцієнти якого є лінійними комбінаціями коефіцієнтів $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ ряду (304).

   Оскільки сума степеневого ряду тотожньо дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли його коефіцієнти дорівнюють нулю, то з отриманої рівності матимемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$. Ця система, очевидно, має дві вільні змінні. Це можуть бути c_0 і c_1. Поклавши $c_0 = C_1$, $c_1 = C_2$ і виразивши решту коефіцієнтів через C_1 і C_2, знайдемо загальний розв'язок рівняння (303) у вигляді степеневого ряду з коефіцієнтами, які залежать від параметрів C_1 і C_2.

3. Метод узагальнених степеневих рядів знаходження розв'язків вироджуваних лінійних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами

Коли $a_0(t_0) = 0$, то розв'язки рівняння (303) можуть не бути аналітичними в точці t_0. Це означає, що не завжди можна знайти розв'язок рівняння (303) в околі точки t_0 у вигляді степеневого ряду. В такому випадку, як правило, розв'язки заданого рівняння шукають у вигляді *узагальненого степеневого ряду*

$$x = (t - t_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \qquad t \in \overset{\circ}{W}_\delta(t_0),$$

де ρ — деяке дійсне число, $\overset{\circ}{W}_\delta(t_0)$ — проколотий (дво- або односторонній) δ-окіл точки t_0, тобто $\overset{\circ}{W}_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$ або $\overset{\circ}{W}_\delta(t_0) = (t_0,\, t_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ – деяке число.

Цей спосіб розв'язування лінійного рівняння використовується, зокрема, у випадку *рівняння Бесселя*

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \nu^2) x = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{305}$$

де $\nu = \mathrm{const} \geqslant 0$, t — незалежна змінна, що приймає всі значення з $\mathbb{R}$.

Описаний вище метод знаходження розв'язків рівняння (303) називається *методом степеневих рядів.*

Контрольні питання

1. Що таке задача Коші для ЗДР?
2. Що таке аналітична функція?
3. Як шукають аналітичні розв'язки задачі Коші для ЗДР?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти перші три члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі

$$\begin{cases} x' = 3x^2 + t^3, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{306}$$

◀ Оскільки функція $f(x,t) := 3x^2 + t^3,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$, аналітична всюди на площині, то будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, задачі (306) є аналітичним в точці 0, тобто має вигляд

$$x = \varphi(t) \equiv c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad t \in (-\delta, \delta), \tag{307}$$

де $\delta > 0$ – деяке число,

$$c_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{308}$$

З початкової умови задачі (306) маємо

$$\varphi(0) = 0, \quad \text{тобто} \;\; c_0 = 1. \tag{309}$$

Підставимо цей розв'язок в рівняння задачі (306):

$$\varphi'(t) = 3\varphi^2(t) + t^3, \quad t \in (a, b). \tag{310}$$

Звідси маємо

$$\varphi'(0) = 3\varphi^2(0) + 0^3 = 3 \cdot 1^2 + 0 = 3,$$

тобто (див. (308))

$$c_1 = \frac{\varphi'(0)}{1!} = 3. \tag{311}$$

Продиференціюємо тотожність (310):

$$\varphi''(t) = 6\varphi(t)\varphi'(t) + 3t^2, \quad t \in (a, b). \tag{312}$$

Звідси маємо

$$\varphi''(0) = 6\varphi(0) \cdot \varphi'(0) + 3 \cdot 0^2 = 6 \cdot 1 \cdot 3 + 0 = 18,$$

а отже,

$$c_2 = \frac{\varphi''(0)}{2!} = \frac{18}{2} = 9. \tag{313}$$

Отже, з (307), (309), (311), (313) випливає

$$x = 1 + 3t + 9t^2 + \cdots, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

— розвинення розв'язку задачі (306) в степеневий ряд.

▶

2. Знайти повний загальний розв'язок рівняння

$$x'' - 2tx = 0$$

та розв'язок задачі Коші для цього рівняння з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1.$$

◀ Шукаємо розв'язки заданого рівняння у вигляді степеневого ряду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Вважаючи, що цей ряд є рівномірно і абсолютно збіжним в деякому околі точки 0, підставимо його в рівняння. У результаті отримаємо рівність

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)t^{k-2} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0.$$

В першому члені зробимо заміну $k-2=m$, а в другому заміну $k+1=n$. У результаті отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)t^m - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}t^n = 0.$$

Звідси маємо

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\big[(k+1)(k+2)c_{k+2} - 2c_{k-1}\big]t^k = 0.$$

Отже, прирівнюючи коефіцієнти при степенях t^k, $k \geqslant 0$, до нуля, отримаємо

$$\begin{aligned} &c_2 = 0,\\ &c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{314}$$

Звідси випливає, що значення c_0 і c_1 можна вибирати довільними, $c_2 = 0$, а значення решти коефіцієнтів знаходяться з рекурентного співвідношення (314):

$$c_3 = \frac{2c_0}{2\cdot 3}; \quad c_4 = \frac{2c_1}{3\cdot 4}; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{2c_3}{5\cdot 6} = \frac{2^2c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6};$$
$$c_7 = \frac{2c_4}{6\cdot 7} = \frac{2^2c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}; \quad \cdots .$$

Отже, маємо

$$c_0 = C_1, \qquad c_1 = C_2, \qquad c_2 = 0,$$

$$c_{3m} = \frac{2^m C_1}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j-1)(3j)}, \qquad c_{3m+1} = \frac{2^m C_2}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j)(3j+1)}, \qquad c_{3m+2} = 0, \qquad m \geqslant 1,$$

і, значить, загальний розв'язок заданого рівняння запишеться у вигляді

$$x = C_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m t^{3m}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j-1)(3j)}\right) + C_2\left(t + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m t^{3m+1}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(3j)(3j+1)}\right).$$

Розв'язок заданої задачі Коші матимемо із цієї формули при $C_1 = x_0, C_2 = x_1$. ▶

Завдання для самостійної роботи

I. Знайти перші три члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші для ЗДР:
1*. $x' = 2tx^2 - 3t, \quad x(0) = 1$; **2***. $x' = \sin x, \quad x(0) = \frac{\pi}{2}$; **3***. $x' = \cos(x+t), \quad x(0) = \pi$.

II. Знайти лінійно незалежні розв'язки кожного з даних рівнянь у вигляді степеневих рядів. В тих випадках, коли це можливо, суму отриманого ряду виразити через елементарні функції.
1100. $x'' - t^2x = 0$. **1101.** $x'' - tx' - 2x = 0$. **1102.** $(1-t^2)x'' - 4tx' - 2x = 0$.
1103. $(t^2+1)x'' + 5tx' + 3x = 0$. **1104.** $(1-t)x'' - 2x' + x = 0$.
1105. $(t^2 - t + 1)x'' + (4t-2)x' + 2x = 0$. **1106.** $x'' - tx' + tx = 0$.

III. Знайти лінійно незалежні розв'язки кожного з даних рівнянь у вигляді степеневих та узагальнено степеневих рядів.
1110. $tx'' + 2x' + tx = 0$. **1111.** $2t^2x'' + (3t - 2t^2)x' - (t+1)x = 0$. **1112.** $9t^2x'' - (t^2-2)x = 0$.
1113. $t^2x'' - t^2x' + (t-2)x = 0$. **1115.** $tx'' - tx' - x = 0$.

Практичне заняття № 22

Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку

Довідкова інформація

Нехай a і b — дійсні числа, $a < b$, а $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел. Розглянемо рівняння

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \qquad t \in (a, b). \tag{315}$$

Припускаємо, що функції a_0, a_1, a_2, f належать простору $C\big([a, b]; \mathbb{P}\big)$ і $a_0(t) \neq 0\ \forall t \in [a, b]$.

Виявляється, що при наших припущеннях на коефіцієнти і вільний член рівняння (315) будь-який його розв'язок (визначений на (a, b)), можна довизначити в точках a і b за неперервністю. Виходячи зі сказаного, далі будемо під *розв'язком рівняння* (315) розуміти функцію $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, з простору $\varphi \in C^2\big([a, b]\big)$, яка при її підстановці в рівняння (315) перетворює його в тотожність.

З відомих результатів для лінійних рівнянь випливає такий факт: якщо x_1 та x_2 — довільні лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \qquad t \in (a, b), \tag{315_0}$$

а $\overset{*}{x}$ – розв'язок рівняння (315), то повний загальний розв'язок рівняння (315) має вигляд

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in [a, b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}.$$

Регулярною крайовою задачею для рівняння (315) називають задачу на знаходження розв'язку цього рівняння, який задовольняє такі *крайові умови*

$$\begin{cases} \alpha_1 x'(a) + \beta_1 x(a) = \gamma_1, & (316_1) \\ \alpha_2 x'(b) + \beta_2 x(b) = \gamma_2, & (316_2) \end{cases} \tag{316}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{P}$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.

Далі сформульовану задачу коротко називатимемо задачею (315) – (316).

Відмітимо, що коли в умові (316_1) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, то її називають *першою крайовою умовою* або *крайовою умовою першого роду*, коли ж $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, то — *другою крайовою умовою* або *крайовою умовою другого роду*, а якщо $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$, то — *третьою крайовою умовою* або *крайовою умовою третього роду*. Аналогічно класифікують крайові умови вигляду (316_2).

Якщо в умовах (316) маємо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, тобто ці умови мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x'(a) + \beta_1 x(a) = 0, \qquad & (316_{0,1}) \\ \alpha_2 x'(b) + \beta_2 x(b) = 0, \qquad & (316_{0,2}) \end{aligned}\right\} \qquad (316_0)$$

то вони називаються *однорідними*, а в протилежному випадку — *неоднорідними.*

Відмітимо, що коли крайові умови є неоднорідними, то відповідною заміною залежної змінної в задачі (315), (316) можна здобути задачу, аналогічну до задачі (315) – (316), але з однорідними крайовими умовами. Справді, нехай $\gamma_1 \neq 0$ або $\gamma_2 \neq 0$. Візьмемо яку-небудь функцію $w \in C^2\big([a,b]\big)$, що задовольняє умови (316). Цю функцію можна, наприклад, шукати у вигляді квадратичної функції

$$w(t) = pt^2 + qt + r,$$

де p, q, і r — сталі такі, що функція w задовольняє умови (316), тобто ці сталі є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(2ap + q) + \beta_1(pa^2 + qa + r) = \gamma_1, \\ \alpha_2(2bp + q) + \beta_2(pb^2 + qb + r) = \gamma_2. \end{cases}$$

Маючи функцію w, робимо в задачі (315), (316) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + w(t), \qquad t \in [a,b]\,.$$

Легко бачити, що в результаті отримаємо задачу

$$\begin{cases} a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = \widetilde{f}(t), \quad t \in (a,b), \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases}$$

де

$$\widetilde{f}(t) := f(t) - a_0(t)w''(t) - a_1(t)w'(t) - a_2(t)w(t), \quad t \in [a,b].$$

Зауважимо, що коли $f(t) = 0$, $t \in [a,b]$, тобто рівняння (315) має вигляд (315_0), то задана задача (задача (315_0)–(316_0)) має нульовий розв'язок ($x = 0$, $t \in [a,b]$).

Означення 17. *Скажемо, що задача (315)–(316_0) задовольняє умову (T), якщо відповідна їй однорідна задача (315_0)–(316_0) має тільки нульовий розв'язок.*

Лема 10. *Якщо задача (315)–(316_0) задовольняє умову (T), то вона має не більше одного розв'язку, а в протилежному випадку ця задача або не має розв'язку, або має безліч розв'язків.*

Теорема 13. *Якщо задача (315)–(316_0) задовольняє умову (T), то вона має розв'язок і тільки один.*

Схема доведення. Ідея методу доведення існування розв'язку задачі (315)–(316_0) та його єдиності полягає в його побудові, використовуючи повний загальний розв'язок рівняння (315). При цьому фундаментальна система розв'язків рівняння (315_0) вибирається відповідною крайовим умовам.

Нехай $x = x_1(t)$, $t \in [a, b]$, — ненульовий розв'язок (однорідного) рівняння (315_0), що задовольняє умову ($316_{0,1}$), а $x = x_2(t)$, $t \in [a, b]$, — ненульовий розв'язок цього ж рівняння, що задовольняє умову ($316_{0,2}$).

Отже, функції x_1 та x_2 утворюють ФСР(315_0), тобто повний загальний розв'язок рівняння (315_0) має вигляд

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \qquad t \in [a, b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}.$$

Знайдемо (частковий) розв'язок рівняння (315) методом варіації сталих, тобто підбираючи функції $\psi_1, \psi_2 \in C^2\big([a, b]\big)$ так, щоб функція

$$x = \psi_1(t) x_1(t) + \psi_2(t) x_2(t), \qquad t \in [a, b],$$

була розв'язком рівняння (315). Як відомо з $\sum\limits_{i=1}^{n} 2$ функції ψ_1, ψ_2 шукаються із системи

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \\ \psi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}, \qquad t \in [a, b]. \tag{317}$$

Розглядаючи співвідношення (317) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходимо

$$\psi_1'(t) = -\frac{x_2(t) f(t)}{a_0(t) W(t)}, \qquad \psi_2'(t) = \frac{x_1(t) f(t)}{a_0(t) W(t)}, \qquad t \in [a, b],$$

звідки

$$\psi_1(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x_2(s) f(s)}{a_0(s) W(s)}\, ds, \qquad \psi_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x_1(s) f(s)}{a_0(s) W(s)}\, ds, \qquad t \in [a, b], \tag{318}$$

де $t_0 \in [a, b]$ — яке-небудь фіксоване число.

Отож, функція

$$x = \big(C_1 + \psi_1(t)\big) x_1(t) + \big(C_2 + \psi_2(t)\big) x_2(t), \qquad t \in [a, b], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{P}, \tag{319}$$

де ψ_1, ψ_2 визначені співвідношеннями (318), є повним загальним розв'язком рівняння (315).

Виберемо значення C_1 і C_2 такими, щоби функція вигляду (319) при цих значеннях змінних C_1 і C_2 задовольняла умови (316_0). □

Дамо таке

Означення 18. *Функцією Гріна задачі (315), (316_0) називають*

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & a \leqslant t \leqslant s, \\ \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)}, & s \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

де x_1, x_2 — розв'язки рівняння (315_0), які задовольняють відповідно умови ($316_{0,1}$) та ($316_{0,2}$), $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$ — визначник Вронського.

Наслідок 3. *Якщо задача (315), (316_0) задовольняє умову (T), то її єдиний розв'язок можна записати у вигляді*

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds = \int_a^t G(t,s)f(s)\,ds + \int_t^b G(t,s)f(s)\,ds =$$
$$= \left(\int_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\right)x_2(t) + \left(\int_t^b \frac{x_2(s)f(s)}{a_0(s)W(s)}\,ds\right)x_1(t), \tag{320}$$

де $t \in [a,b]$, а $G(t,s)$, $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, — функція Гріна задачі (315), (316_0).

Контрольні питання

1. Що таке регулярна крайова задача?
2. Що таке умова (T) стосовно крайової задачі?
3. Що таке функція Гріна і як її використовують?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$x'' - 4x = 8t, \qquad t \in (0;7), \tag{321}$$
$$x(0) = 0, \quad x'(7) = -2. \tag{322}$$

◀ Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок заданого рівняння.

1-ий крок. Шукаємо повний загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$x'' - 4x = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2.$$

Отож, функції

$$\psi_1(t) := e^{2t}, \quad \psi_1(t) := e^{-2t}, \quad t \in [0;7],$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків даного лінійного однорідного рівняння, а отже, його повний загальний розв'язок має вигляд

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad t \in [0;7], \quad C_1, C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

2-ий крок. Шукаємо частковий розв'язок відповідного заданого неоднорідного рівняння. Оскільки вільний член $f(t) = 2t$ є квазімногочленом, то використаємо метод неозначених коефіцієнтів. Маємо

α	β	$\mu := \alpha + i\beta$	$k :=$ кр. μ	r	s	$\nu := \min\{r, s\}$
0	0	0	0	1	0	1

(число $\mu = 0$ не є характеристичним числом). Тому частковий розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді

$$x = at + b, \tag{323}$$

де a, b – неозначені коефіцієнти (оскільки у виразі $f(t)$ стоїть многочлен першого степеня, а саме $8t$, тому у вираз часткового розв'язку входить многочлен першого степеня з неозначеними коефіцієнтами).

Маємо

$$\begin{array}{r|l} -4 & x = at + b, \\ 0 & x' = a, \\ 1 & x'' = 0. \end{array}$$

Підставляємо вирази x, x', x'' у вихідне лінійне неоднорідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при функціях t, 1. У результаті отримаємо
$t: \quad -4a = 8$
$1: \quad -4b = 0.$
Звідси

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0. \end{cases}$$

Записуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$x = -2t.$$

3-ий крок. Записуємо повний загальний розв'язок даного лінійного неоднорідного рівняння

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 2t, \quad t \in [0; 7], \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Тепер підставимо вираз повного загального розв'язку у крайові умови:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad x'(7) = 2C_1 e^{14} - 2C_2 e^{-14} - 2 = -2.$$

Звідси знаходимо $C_1 = 0, C_2 = 0$ і отримуємо розв'язок крайової задачі

$$x = -2t, \quad t \in [0; 7].$$

2. Знайти розв'язок крайової задачі

$$x'' + x = f(t), \qquad t \in [0, \pi], \tag{324}$$
$$x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0. \tag{325}$$

◀ Спочатку перевіримо виконання умови (T). Для цього розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$x'' + x = 0. \tag{326}$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \qquad t \in [0, \pi], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{327}$$

Підставимо отриманий вираз в першу і другу крайові умови

$$x(0) = C_2 = 0, \tag{328}$$
$$x'(\pi) = -C_1 = 0. \tag{329}$$

Отже, відповідна однорідна крайова задача має тільки нульовий розв'язок, тобто умова (T) виконується.

Знайдемо (частковий) розв'язок рівняння (326), що задовольняє першу з крайових умов. Для цього підставляємо вираз повного загального розв'язку (327) в першу умову. Тоді отримаємо рівність (328), з якої видно, що нам потрібно покласти у виразі загального розв'язку $C_2 = 0$, а значення C_1 можна взяти будь-яке відмінне від нуля, наприклад, $C_1 = 1$. Отож, функція $x = x_1(t)$, де

$$x_1(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi],$$

є шуканим розв'язком рівняння (326).

Тепер аналогічно шукаємо розв'язок рівняння (326), який задовольняє другу з крайових умов (325). Підставивши вираз (327) у другу крайову умову, отримаємо (329). Звідси випливає, що $C_1 = 0$, а C_2 — будь-яке відмінне від нуля. Взявши $C_2 = 1$, із зображення загального розв'язку (327) отримаємо $x = x_2(t)$, де

$$x_2(t) = \cos t, \qquad t \in [0, \pi],$$

— другий шуканий розв'язок.

Маємо

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1.$$

Отож, зі сказаного вище випливає таке зображення функції Гріна

$$G(t,s) = \begin{cases} -\sin t \cdot \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ -\sin s \cdot \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

а значить, розв'язок задачі (324), (325) можна записати у вигляді

$$x = \int_0^\pi G(t,s) f(s)\, ds = \left(\int_0^t \sin s \cdot f(s)\, ds \right) \cos t + \left(\int_t^\pi \cos s \cdot f(s)\, ds \right) \sin t,$$

$t \in [0, \pi]$. □

Завдання для самостійної роботи

I. Розв'язати крайові задачі:

751. $x'' - x = 2t; \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = -1$. **752.** $x'' + x' = 1; \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 1$.

753. $x'' - x' = 0; \quad x(0) = -1, \;\; x'(1) - x(1) = 2$. **754.** $x'' + x = 1; \quad x(0) = 0, \;\; x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

755. $x'' + x = 1; \quad x(0) = 0, \;\; x(\pi) = 0$.

756. $x'' + x = 2x - \pi; \quad x(0) = 0, \ \ x(\pi) = 0.$
757. $x'' - x' - 2x = 1; \quad x'(0) = 2, \ \ x(+\infty) = 0.$
760. $t^2x'' - 6x = 0; \quad x(0)$ – обмежене, $\ x(1) = 2.$

II. Для заданих крайових задач побудувати функцію Гріна і записати зображення розв'язку.
764. $x'' = f(t); \quad x(0) = 0, \ \ x(1) = 0.$
765. $x'' + x = f(t); \quad x'(0) = 0, \ \ x(\pi) = 0.$
766. $x'' + x' = f(t); \quad x(0) = 0, \ \ x'(1) = 0.$
767. $x'' - x = f(t); \quad x'(0) = 0, \ \ x'(2) + x(2) = 0.$
769. $t^2x'' + 2tx' = f(t); \quad x(1) = 0, \ \ x'(3) = 0.$

Практичне заняття № 23

Контрольна робота № 5

Варіант № 1

Розв'язати рівняння:

1. $y'' + 4y = \dfrac{2}{\sin 2x}$. 2. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3$.

3. $x^3y''' + 5x^2y'' + 5xy' = 3x + 2\ln x$.

4. Знайти перші три члени розвинення в степеневий ряд розв'язку даної задачі:

$x' = 2x^2 + t^5, \quad x(0) = 3.$

5. Методом степеневих рядів розв'язати рівняння: $x'' + 3tx' - 2tx = 0$.

6. Розв'язати крайову задачу: $x'' + 4x' + 5x = 2e^t; \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1.$

7. Для даної крайової задачі побудувати функцію Гріна і записати зображення її розв'язку:

$$x'' + 16x = f(t); \quad x'(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Практичне заняття № 24

Нормальні лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами (випадок співпадіння алгебраїчної і геометричної кратності)

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ – поле дійсних або комплексних чисел, тобто $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

Нормальною лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{330}$$

де $n \geq 2$ — деяке натуральне число; t — незалежна змінна, яка набуває значень з інтервалу (a, b) числової осі $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$; a_{kl}, f_k, $k, l = \overline{1, n}$, — задані на (a, b) функції зі значеннями в $\mathbb{P}$; x_k, $k = \overline{1, n}$, — невідомі функції від змінної t зі значеннями в $\mathbb{P}$, які визначені на якому-небудь числовому проміжку, що лежить в (a, b).

Функції a_{kl}, $k, l = \overline{1, n}$, називаються *коефіцієнтами*, а f_k, $k = \overline{1, n}$, — *вільними членами* системи (462). Якщо $f_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, то система (462) називається *однорідною*, в іншому випадку — *неоднорідною*.

Припускаємо, що функції a_{kl}, f_k, $k, l = \overline{1, n}$, є неперервними на всій області визначення — інтервалі (a, b). Під *розв'язком* системи (462) розуміємо набір неперервно диференційовних функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), \; \dots, \; x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in (a, b),$$

зі значеннями в $\mathbb{P}$, якщо при підстановці їх в рівняння системи отримуємо тотожності.

Далі буде зручно використовувати векторну форму запису НЛС. Щоб її отримати, введемо такі позначення

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n, \quad x' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b).$$

Отож, систему (462) можна записати у векторному вигляді

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{331}$$

де t — незалежна дійсна змінна, яка набуває значень з інтервалу (a,b); $A:(a,b)\to M_n(\mathbb{P})$ – задана матрична функція; $f:(a,b)\to\mathbb{P}^n$ — задана векторна функція; x — невідома векторна функція, яка визначена на числовому проміжку, що лежить в (a,b) і приймає значення в $\mathbb{P}^n$.

Під *розв'язком* рівняння (463) розуміємо векторну функцію $x=\varphi(t)$, $t\in(a,b)$, з простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}^n\big)$, яка при її підстановці у рівняння (463) перетворює його в тотожність на (a,b).

Задача Коші для векторного рівняння (463) полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$x(t_0)=x^0, \tag{332}$$

де $t_0\in(a,b)$, $\quad x^0=\begin{pmatrix}x_1^\circ\\ \vdots\\ x_n^\circ\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^n$ — задані.

Тепер розглянемо **нормальну лінійну однорідну систему** (НЛОС) у векторній формі

$$x'=A(t)x\,, \tag{333}$$

яке отримується із системи (463) за умови, що $f(t)=0$, $t\in(a,b)$.

Наведемо ряд тверджень щодо структури повного загального розв'язку НЛОС (464).

Лема 11. *Будь-яка лінійна комбінація розв'язків НЛОС* (464) *є розв'язком цієї ж НЛОС.*

Означення 19. *Система n ЛН розв'язків НЛОС* (464) *називається фундаментальною системою розв'язків НЛОС* (464)*, або, скорочено, ФСР* (464)*.*

Теорема 14. *Повний загальний розв'язок НЛОС* (464) *можна записати у вигляді*

$$x=C_1\varphi^1(t)+\dots+C_n\varphi^n(t),\qquad t\in(a,b),\quad C_1,\dots,C_n\in\mathbb{P},$$

де $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ – яка-небудь (фіксована) ФСР (464)*.*

Розглянемо НЛОС за умови, що її **коефіцієнти є сталими** функціями і $\mathbb{P}=\mathbb{C}$, тобто систему

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n'=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n,\end{cases}$$

де $n \geqslant 2$ — деяке натуральне число; $a_{kl} \in \mathbb{C},\ k, l = \overline{1, n},\ \ x_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ k = \overline{1, n},$ — невідомі функції. Зауважимо, що для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ маємо $x_k = u_k + iv_k$, де $u_k = u_k(t)$, $v_k = v_k(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, — дійсні неперервно диференційовні функції від дійсної змінної, i — уявна одиниця.

Задану систему можна записати у вигляді векторного рівняння

$$x' = Ax, \tag{334}$$

де $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}),\quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ — невідома векторна функція.

На підставі твердження теореми 20 повний загальний розв'язок рівняння (366) має вигляд

$$x = C_1\varphi^1(t) + \dots + C_n\varphi^n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C},$$

де $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (366).

Спробуємо шукати (частковий) ненульовий розв'язок рівняння (366) у вигляді

$$x = ve^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{335}$$

де $v \in \mathbb{C}^n$ і $v \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Підставивши вираз (367) в (366) та врахувавши, що $x' = \lambda ve^{\lambda t}$, отримаємо рівність

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $e^{\lambda t} \neq 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, то звідси випливає, що λ і v обов'язково повинні задовольняти рівність

$$Av = \lambda v, \tag{336}$$

тобто λ — власне значення матриці A, v — власний вектор, який відповідає цьому значенню. Отож, правильним є таке твердження.

Лема 12. *Функція вигляду* (367) *буде* (*частковим*) *розв'язком системи* (366) *тоді і тільки тоді, коли* λ *— власне значення матриці* A, *а* v *— відповідний йому власний вектор.*

Нагадаємо деякі факти з *теорії матриць* стосовно їхніх *власних значень* і *власних векторів.*

Відшукання власних значень і власних векторів матриці A зводиться (як випливає з (368)) до знаходження таких значень λ, за яких система лінійних алгебричних рівнянь

$$\big(A-\lambda I\big)v=0, \tag{337}$$

де I — одинична матриця; 0 — нульовий вектор, має ненульові розв'язки. Це рівносильно тому, що

$$\det\big(A-\lambda I\big)=0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{338}$$

Рівняння (370) можна записати у вигляді

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

яке згідно з основною теоремою алгебри можна переписати у вигляді

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}=0, \tag{339}$$

де $1\leqslant m\leqslant n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — різні (загалом комплексні) числа, $k_1\geqslant 1,\ldots,k_m\geqslant 1$ — цілі, $k_1+\cdots+k_m=n$.

Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ є власними значеннями матриці A (і тільки вони). Значення $k_1,\ldots,k_m$ називаються *алгебраїчними кратностями* відповідних власних значень.

Кожному власному значенню відповідає безліч власних векторів і множина всеможливих власних векторів, відповідних даному власному значенню, доповнена нульовим вектором утворює лінійний підпростір простору $\mathbb{C}^n$. Для кожного $j\in\{1,\ldots,m\}$ через l_j позначимо розмірність лінійного підпростору, складеного з нульового вектора і власних векторів, відповідних власному значенню λ_j. Значення l_j називається *геометричною кратністю* власного значення λ_j і, як відомо, $1\leqslant l_j\leqslant k_j$. Фактично, число l_j — це максимальна кількість лінійно незалежних власних векторів, які відповідають власному значенню λ_j. Значення l_j можна визначити як *кількість вільних змінних* у системі лінійних алгебраїчних рівнянь (369).

Нагадаємо таке: коли $v^1,\ldots,v^m$ — які-небудь власні вектори, що відповідають попарно різним власним значенням, то вони утворюють лінійно незалежну систему в просторі $\mathbb{C}^n$.

Теорема 15. *Повний загальний розв'язок системи* (366) *можна записати у вигляді*

$$x = [C_{1,1}p^{1,1}(t) + \cdots + C_{1,k_1}p^{1,k_1}(t)]e^{\lambda_1 t} + \cdots + [C_{m,1}p^{m,1}(t) + \cdots + C_{m,k_m}p^{m,k_m}(t)]e^{\lambda_m t}, \tag{340}$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C},$$

де для кожного $j \in \{1, \ldots, \nu\}$ $\quad p^{j,1}, \ldots, p^{j,k_j}$ *— векторні многочлени степеня* $\leqslant k_j - l_j$, *причому, якщо* $k_j - l_j = 0$, *то* $p^{j,1} \equiv v^{j,1}, \ldots, p^{j,k_j} \equiv v^{j,k_j}$ *— лінійно незалежні власні вектори, які відповідають власному значенню* λ_j.

Наслідок 4. *Повний загальний розв'язок рівняння* (366) *можна записати у вигляді*

$$x = [a^{1,0}t^{k_1-l_1} + \cdots + a^{1,k_1-l_1}]e^{\lambda_1 t} + \cdots + [a^{m,0}t^{k_m-l_m} + \cdots + a^{m,k_m-l_m}]e^{\lambda_m t}, \tag{341}$$

$$t \in (-\infty, +\infty), \quad C_{1,1}, \ldots, C_{1,k_1}, \ldots, C_{m,1}, \ldots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C},$$

де для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ $(a^{j,0}, \ldots, a^{j,k_j-l_j})^\top$ *— загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} (A - \lambda_j I)a^{j,0} = 0, \\ (A - \lambda_j I)a^{j,1} = (k_j - l_j)a^{j,0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,s} = (k_j - l_j - s + 1)a^{j,s-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,k_j-l_j} = a^{j,k_j-l_j-1}, \end{cases} \tag{342}$$

зокрема, якщо $l_j = k_j$, *то* $a^{j,0}$ *— загальний власний вектор матриці* A *для власного значення* λ_j.

Враховуючи сказане, можна запропонувати такий **спосіб розв'язування нормальних лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами.**

1. *Виписуємо матрицю* A *системи* (366) *та характеристичне рівняння* (370). *Розв'язуємо рівняння* (370). *Нехай* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ *— різні його корені (власні значення матриці* A*), а* $k_1, \ldots, k_m$ *— відповідні їхні кратності (алгебричні кратності власних значень).*

2. *Шукаємо для кожного власного значення відповідний йому неповний загальний розв'язок.*

Як це робити покажемо на прикладі якогось одного власного значення. Нехай λ_j — власне значення матриці A, $\quad k_j$ — його алгебрична кратність $(1 \le j \le m)$.

Запишемо систему рівнянь для знаходження власних векторів для власного
значення λ_j

$$(A - \lambda_j I)v = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок цієї системи, тобто з.в.в. для власного значення λ_j. Нехай він має вигляд

$$v = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + b_1^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ \dotfill \\ b_n^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + b_n^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \end{pmatrix}, \qquad \tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j} \in \mathbb{C}, \tag{343}$$

де $l_j \in \mathbb{N}$, а $b_l^{j,s}$, $l = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,l_j}$ — деякі сталі.

Число $l_j \in \mathbb{N}$ є геометричною кратністю власного значення λ_j. Як відомо, $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Можливі два випадки: 1) $l_j = k_j$; $\quad$ 2) $l_j < k_j$.

У першому випадку приймемо в (376)

$$\tau_{j,1} = C_{j,1}, \ldots, \tau_{j,k_j} = C_{j,k_j}$$

і отримаємо

$$x = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_1^{j,k_j}C_{j,k_j} \\ \dotfill \\ b_n^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_n^{j,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{344}$$

— неповний загальний розв'язок для власного значення λ_j.

Зауважимо, що тут $a^{j,0} = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_1^{j,k_j}C_{j,k_j} \\ \dotfill \\ b_n^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_n^{j,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix}$ — загальний розв'язок системи $(A - \lambda_j I)v = 0$, а отже, (377) можна записати у вигляді

$$x = a^{j,0}e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $a^{j,0}$ — з.в.в. для власного значення λ_j.

Розглянемо другий випадок, тобто випадок, коли $l_j < k_j$. Тоді записуємо проект неповного загального розв'язку для власного значення λ_j, у вигляді

$$x = (a^{j,0}t^{k_j - l_j} + a^{j,1}t^{k_j - l_j - 1} + \cdots + a^{j,k_j - l_j})e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{345}$$

де $a^{j,s} = \begin{pmatrix} a_1^{j,s} \\ \vdots \\ a_n^{j,s} \end{pmatrix}$, $s = \overline{0, k_j - l_j}$, —вектори з неозначеними компонентами, значення яких шукають за умови, що векторна функція, задана формулою (378), є розв'язком векторного рівняння (366).

Підставляючи вираз (378) замість x в рівняння (366), отримаємо

$$\lambda_j(a^{j,0}t^{k_j-l_j} + a^{j,1}t^{k_j-l_j-1} + \dots + a^{j,k_j-l_j})e^{\lambda_j t} +$$

$$+ ((k_j - l_j)a^{j,0}t^{k_j-l_j-1} + (k_j - l_j - 1)a^{j,1}t^{k_j-l_j-2} + \dots +$$

$$+ a^{j,k_j-l_j-1})e^{\lambda_j t} = ((Aa^{j,0})t^{k_j-l_j} + (Aa^{j,1})t^{k_j-l_j-1} + \dots + Aa^{j,k_j-l_j})e^{\lambda_j t}.$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t, одержимо

$$\begin{cases} t^{k_j-l_j}: & Aa^{j,0} = \lambda_j a^{j,0}; \\ t^{k_j-l_j-1}: & Aa^{j,1} = \lambda_j a^{j,1} + (k_j - l_j)a^{j,0}; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t^0: & Aa^{j,k_j-l_j} = \lambda_j a^{j,k_j-l_j} + a^{j,k_j-l_j-1}, \end{cases}$$

звідки отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (375).

Розв'язуємо цю систему, починаючи з першого векторного рівняння. Його загальний розв'язок $a^{j,0}$ уже знайдено у вигляді (376). Підставляючи його вираз у друге рівняння, знайдемо $a^{j,1}$. Можливо, що для розв'язності другої системи треба накласти певні зв'язки між параметрами $\tau_{j,1}, \dots, \tau_{j,l_j}$. Далі робимо аналогічно. Як випливає з наслідку 6, компоненти векторів $a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j}$ виражаються через k_j параметрів, які позначаємо через $C_{j,1}, \dots, C_{j,k_j}$. Знайдені вирази $a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j}$ підставляємо в (378). В результаті одержимо неповний загальний розв'язок, який відповідає власному значенню λ_j.

3. *Записуємо загальний розв'язок системи* (366) *як суму неповних загальних розв'язків, які відповідають власним значенням* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Наслідок 5. *Нехай елементи матриці* A *— дійсні, а її власні значення* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *такі, що* $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \dots, \lambda_{2\nu-1} = \overline{\lambda_{2\nu}}, \lambda_{2\nu+1} = \overline{\lambda_{2\nu+1}}, \dots, \lambda_m = \overline{\lambda_m}$, *де* $\nu \in \{1; [m/2]\}$ *(ν – кількість пар комплексно спряжених і $m - 2\nu$ дійсних). Тоді повний загальний дійсний розв'язок системи* (366) *має вигляд*

$$x = \left[C_{1,1}Re(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t}) + \dots + C_{1,k_1}Re(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t})\right] +$$

$$+\Big[C_{2,1}Im(p^{1,1}(t)e^{\lambda_1 t})+\dots+C_{2,k_1}Im(p^{1,k_1}(t)e^{\lambda_1 t})\Big]+\dots+$$
$$+\Big[C_{2\nu-1,1}Re(p^{2\nu-1,1}(t)e^{\lambda_{2\nu-1}t})+\dots+C_{2\nu-1,k_{2\nu-1}}Re(p^{2\nu-1,k_{2\nu-1}}(t)e^{\lambda_{2\nu-1}t})\Big]+$$
$$+\Big[C_{2\nu,1}Im(p^{2\nu-1,1}(t)e^{\lambda_{2\nu-1}t})+\dots+C_{2\nu,k_{2\nu-1}}Im(p^{2\nu-1,k_{2\nu-1}}(t)e^{\lambda_{2\nu-1}t})\Big]+$$
$$+\Big[a^{2\nu+1,0}t^{k_{2\nu+1}-l_{2\nu+1}}+\dots+a^{2\nu+1,k_{2\nu+1}-l_{2\nu+1}}\Big]e^{\lambda_{2\nu+1}t}+\dots+$$
$$+\Big[a^{m,0}t^{k_m-l_m}+\dots+a^{m,k_m-l_m}\Big]e^{\lambda_m t}, \qquad t\in\mathbb{R}, \tag{346}$$

де

1) *для кожного* $r\in\{1,\dots,\nu\}$ *маємо*

$$p^{2r-1,\mu}(t)=\sum_{s=0}^{k_{2r-1}-l_{2r-1}} a^{2r-1,s,\mu}t^{k_{2r-1}-l_{2r-1}-s},$$
$$t\in\mathbb{R}, \quad \mu=\overline{1,\dots,k_{2r-1}},$$

а $\{(a^{2r-1,0,\mu},\dots,a^{2r-1,k_{2r-1}-l_{2r-1},\mu})^\top : \quad \mu=\overline{1,\dots,k_{2r-1}}\}$, *— база в просторі розв'язків системи* (375) *при* $j=2r-1$, *зокрема, коли* $l_{2r-1}=k_{2r-1}$, *то* $\{a^{2r-1,0,\mu} : \quad \mu=\overline{1,k_{2r-1}}\}$, *— база у власному підпросторі* $B(\lambda_{2r-1})$*;*

2) *для кожного* $j\in\{2\nu+1,\dots,m\}$ $\quad(a^{j,0},\dots,a^{j,k_j-l_j})^\top$ *— загальний дійсний розв'язок системи* (375), *якщо* $l_j=k_j$, *то* $a^{j,0}$ *— загальний дійсний власний вектор для власного значення* λ_j *(якщо* $2\nu=m$, *то членів відповідних* $j>2m$ *немає).*

Розглянемо ***нормальну лінійну однорідну систему третього порядку***: Розглянемо нормальну лінійну однорідну систему третього порядку

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,\end{cases} \tag{347}$$

де $a_{ij}\in\mathbb{C},\ i,j=\overline{1,3}$.

Введемо позначення

$$w:=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \qquad A:=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

і запишемо систему (379) у векторному вигляді

$$w'=Aw. \tag{348}$$

Будемо шукати *повний загальний розв'язок* системи (380), який, як відомо, визначається власними значеннями матриці A, їхніми алгебраїчними та геометричними кратностями. Тому найперше треба розв'язати рівняння на знаходження власних значень матриці A (в полі комплексних чисел):

$$\det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{349}$$

а точніше, записати його у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

де $1 \leqslant m \leqslant 3$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — різні числа (назагал комплексні), що є власними значеннями матриці A, $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_m \geqslant 1$ — натуральні, $k_1 + \cdots + k_m = 3$. Числа $k_1, \ldots, k_m$ називають алгебраїчними кратностями відповідних власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ шукаємо власні вектори відповідні власному значенню λ_j, тобто ненульові розв'язки лінійної алгебраїчної системи рівнянь

$$(A - \lambda_j I)v = 0. \tag{350}$$

Оскільки λ_j є розв'язком рівняння (381), то система (382) має безліч розв'язків і її загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$v = \begin{pmatrix} v_1^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_1^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ v_2^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_2^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ v_3^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_3^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \end{pmatrix} \equiv \tau_{j,1} \begin{pmatrix} v_1^{j,1} \\ v_2^{j,1} \\ v_3^{j,1} \end{pmatrix} + \cdots + \tau_{j,l_j} \begin{pmatrix} v_1^{j,l_j} \\ v_2^{j,l_j} \\ v_3^{j,l_j} \end{pmatrix} \equiv \tag{351}$$

$$\equiv \tau_{j,1} v^{j,1} + \cdots + \tau_{j,l_j} v^{j,l_j}, \tag{352}$$

де $v^{j,1} = \begin{pmatrix} v_1^{j,1} \\ v_2^{j,1} \\ v_3^{j,1} \end{pmatrix}, \ldots, v^{j,l_j} = \begin{pmatrix} v_1^{j,l_j} \\ v_2^{j,l_j} \\ v_3^{j,l_j} \end{pmatrix}$ — деякі (конкретні) лінійно незалежні вектори, що утворюють максимальну систему лінійно незалежних власних векторів відповідних в. з. λ_j, а $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$ – параметри, які можуть набувати довільних значень. Очевидно, що число l_j є *геометричною кратністю* в. з. λ_j (l_j дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних власних векторів, які відповідають в. з. λ_j). Відомо, що $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Звідси випливає, що власному значенню λ_j відповідає безліч власних векторів, які можна отримати з (383), надаючи параметрам $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$ конкретні значення, серед яких хоча б одне відмінне від нуля. Тому векторну функцію від параметрів $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$, яка визначена за правилом (383), називають *загальним власним вектором* (з. в. в.) відповідного власному значенню (в. з.) λ_j.

Розглянемо можливі випадки значень m і $k_1, \ldots, k_m$, $l_1, \ldots,\ l_m$ і вигляд загального розв'язку системи (380) для цих значень.

Перший випадок: $m = 3$, тоді $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = 1$, $k_3 = l_3 = 1$.

Повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = C_1 v^1\, e^{\lambda_1 t} + C_2 v^2\, e^{\lambda_2 t} + C_3 v^3\, e^{\lambda_3 t}, \tag{353}$$

де для кожного $j \in \{1, 2, 3\}$ v^j – який-небудь (конкретний) власний вектор, що відповідає в. з. λ_j, а C_j – довільна стала (див. (383) при $l_j = 1$, $\tau_{j,1} = C_j$).

Другий випадок: $m = 2$, $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = 2$.

Повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = C_1 v^1\, e^{\lambda_1 t} + (C_2 v^2 + C_3 v^3)\, e^{\lambda_2 t}, \tag{354}$$

де v^1 – який-небудь конкретний власний вектор відповідний в. з. λ_1, v^2, v^3 – лінійно незалежні власні вектори відповідні в. з. λ_2 (див. (383) при $j = 1, l_1 = 1, \tau_{1,1} = C_1$, та при $j = 2, l_2 = 2, \tau_{2,1} = C_2$, $\tau_{2,2} = C_3$), C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Третій випадок (тривіальний): $m = 1$, $k_1 = l_1 = 3$.

Матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

і повний загальний розв'язок рівняння (380) набуває вигляду:

$$w = \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_1 t},\ t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \text{ — довільні сталі.}$$

Розглянемо ситуацію, коли матриця A — дійсна і нас цікавить загальний *дійсний* розв'язок системи (380)). Може бути одне з двох: а) всі власні значення — дійсні; б) одне з власних значень — дійсне, а два інші — комплексно-спряженні. Коли всі власні значення є дійсними, то маємо такі ж результати, які наведені вище, при умові, що всі величини є дійсними. Коли ж, наприклад, λ_1, λ_2 — комплексно-спряжені, а λ_3 — дійсне, то повний загальний дійсний розв'язок має вигляд

$$w = C_1 \operatorname{Re}(v^1\, e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(v^1\, e^{\lambda_1 t}) + C_3 v^3\, e^{\lambda_3 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

де v^1 — який-небудь конкретний власний вектор відповідний власному значенню λ_1, v^3 — власний вектор відповідний власному значенню λ_3.

Контрольні питання

1. Який вигляд має НЛОС зі сталими коефіцієнтами? Що таке фундаментальна система розв'язків НЛОС зі сталими коефіцієнтами? Як знайти загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами, якщо відома її фундаментальна система розв'язків?

2. Що таке алгебраїчна та геометрична кратності власного значення?

3. Як можна записати загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами, за умови, що кількість (різних) власних значень матриці A співпадає з порядком системи (алгебраїчна і геометрична кратність власних значень матриці A співпадають)?

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Знайти загальний розв'язок нормальної лінійної однорідної системи*

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язування. Введемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тоді задана система має вигляд

$$w' = Aw. \tag{355}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Як відомо, це є розв'язки рівняння

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Оскільки

$$\det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \equiv -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

то числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ є власними значеннями матриці A, алгебраїчні і геометричні кратності яких дорівнюють 1 (маємо перший випадок).

Запишемо системи лінійних алгебричних рівнянь для знаходження власних векторів

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_k & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_k & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{356}$$

Системи (356) зручно розв'язувати, зводячи їхні основні матриці до східчастого вигляду.

Для $k = 1$ маємо

$$(A - I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, перша з систем (356) (при $k = 1$) рівносильна системі

$$v_1 = 0, \qquad v_2 - v_3 = 0.$$

Враховуючи, що алгебраїчна та геометрична кратності збігаються, можна прийняти $v_3 = C_1$, де C_1 — довільна стала. Тоді

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \equiv C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

— загальний власний вектор, відповідний власному значенню λ_1, а отже,

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^t \equiv C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \ C_1 \text{ — довільна стала,} \quad \text{—}$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_1.

У випадку $k = 2$ з (356) аналогічно одержуємо

$$(A - 2I) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$v_1 = v_3, \quad v_2 = v_3.$$

Оскільки алгебраїчна та геометрична кратності власного значення $\lambda_2 = 2$ збігаються, то можемо прийняти $v_3 = C_2$, де C_2 — довільна стала. Тоді $v_1 = C_2$, $v_2 = C_2$. Отже,

$$v = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \equiv C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— загальний власний вектор, відповідний власному значенню λ_2, а отже,

$$w = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{2t} \equiv C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_2 \text{ — довільна стала,} \quad \text{—}$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_2.

Аналогічно зведемо основну матрицю системи (356) до східчастого вигляду у випадку $k = 3$:

$$(A - 3I) \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$v_1 = v_3, \quad v_2 = 0.$$

Міркуючи так само, як у попередньому випадку, доходимо висновку, що можна прийняти $v_3 = C_3$, де C_3 — довільна стала. Тоді $v_1 = C_3$, $v_2 = 0$. Отож, отримаємо

$$v = \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix} \equiv C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— загальний власний вектор, відповідний власному значенню λ_3, а отже,

$$w = \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{3t} \equiv C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_3 \text{ — довільна стала,} \quad \text{—}$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_3.

На підставі (384) повний загальний розв'язок векторного рівняння (355) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{3t} \equiv$$

$$\equiv C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.
Звідси отримуємо

$$\begin{cases} x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \\ z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t},\ t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \quad \text{— довільні сталі,} \end{cases} \tag{357}$$

— загальний розв'язок заданої системи. Щоб отримати повний загальний дійсний розв'язок, достатньо тут брати сталі C_1, C_2, C_3 дійсними. □

Приклад 2. *Розв'язати нормальну лінійну однорідну систему*

$$\begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z. \end{cases} \tag{358}$$

Розв'язування. Введемо позначення

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (358) можна записати у векторному вигляді

$$w' = Aw. \tag{359}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Оскільки

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)\lambda + 4 + 2 - 4\lambda - 2(2-\lambda) - (1+\lambda) =$$

$$= \lambda(2 + 2\lambda - \lambda - \lambda^2) - 3\lambda + 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 - 1 + 1 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) =$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i),$$

то власними значеннями матриці A є числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ (маємо перший випадок).

Знайдемо загальні власні вектори для власних значень λ_1, λ_2, λ_3. Для цього розглянемо лінійні алгебричні системи

$$(A - \lambda_k I)v = 0 \tag{360}$$

для $k = 1, 2, 3$.

Як і в попередньому прикладі, системи (360) будемо розв'язувати, зводячи їхні основні матриці до східчастого вигляду.

У випадку $k=1$ одержуємо

$$(A-I)\equiv\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-1&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, для знаходження власних векторів маємо систему рівнянь

$$v_1=0,\quad v_2-2v_3=0\,.$$

Оскільки алгебраїчна та геометрична кратності власного значення $\lambda_1=1$ збігаються і дорівнюють 1, то можемо прийняти $v_3=C_1$, де C_1 — довільна стала. Тоді $v_2=2C_1$, $v_1=0$. Отож,

$$v=\begin{pmatrix}0\\2C_1\\C_1\end{pmatrix}\equiv C_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

— загальний власний вектор для власного значення λ_1, а отже,

$$w=\begin{pmatrix}0\\2C_1\\C_1\end{pmatrix}e^t\equiv C_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^t,\quad t\in\mathbb{R},\ C_1 \text{ — довільна стала,}\quad —$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_1.

Аналогічно розглянемо випадок $k=2$

$$(A-iI)\equiv\begin{pmatrix}2-i&-1&2\\1&-i&2\\-2&1&-1-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-i&2\\5&-2-i&4+2i\\0&1-2i&3-i\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-i&2\\0&-2+4i&-6+2i\\0&1-2i&3-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-i&2\\0&1-2i&3-i\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-i&2\\0&5&5+5i\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-i&2\\0&1&1+i\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1+i\\0&1&1+i\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тут ми зробили такі елементарні перетворення матриці $(A-iI)$:

1) переставили місцями перший і другий рядки;

2) помножили другий рядок на $(2+i)$;

3) до третього рядка додали перший, помножений на 2;

4) до другого рядка додали перший, помножений на (-5);

5) другий рядок поділили на (-2);

6) від третього рядка відняли другий;

7) домножили другий рядок на $(1+2i)$;

8) поділили другий рядок на 5;

9) до першого рядка додали другий, помножений на i.

Отже, друга з систем (360) $(k=2)$ еквівалентна системі

$$v_1 + (1+i)v_3 = 0, \quad v_2 + (1+i)v_3 = 0.$$

Приймемо $v_3 = C_2$, де C_2 — довільне. Отож,

$$v = \begin{pmatrix} -(1+i)\,C_2 \\ -(1+i)\,C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

— загальний власний вектор для власного значення λ_2, а отже,

$$w = C_2 \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_2 \text{ — довільна стала,} \quad —$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_2.

Для знаходження загального власного вектора для власного значення $\lambda_3 = -i$, зауважимо таке. Оскільки матриця A дійсна, то комплексно спряженою до матриці $(A-\lambda I)$ буде матриця $(A-\overline{\lambda} I)$. Отож, якщо v — загальний власний вектор відповідний власному значенню $\lambda_2 = i$, тобто

$$(A - iI)v = 0, \tag{361}$$

то

$$v = C_3 \begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix},\ C_3 \text{ — довільна стала,}$$

буде загальним власним вектором для власного значення $\lambda_3 = -i$, оскільки, взявши комплексне спряження рівності (361), матимемо

$$(A + iI)\overline{v} = 0,$$

а C_2 – довільне комплексне число. Отже,

$$w = C_3 \begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_3 \text{ — довільна стала,} \quad \text{—}$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_3.

Отже, загальний (комплексний) розв'язок матиме (див. (384)) вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + C_3 \begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}, \tag{362}$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні (комплексні) сталі.

Щоби знайти загальний дійсний розв'язок заданої системи, зауважимо таке. Векторні функції

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \varphi^2(t) = \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}, \quad \varphi^3(t) = \begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}, \quad t \in \mathbb{R},$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків. Справді, оскільки загальний розв'язок записуємо у вигляді

$$w = C_1\varphi^1(t) + C_2\varphi^2(t) + C_3\varphi^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C},$$

то прийнявши по черзі $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, отримаємо, що φ^1, φ^2, φ^3 — розв'язки системи (358). Позаяк вектори $\varphi^1(0)$, $\varphi^2(0)$, $\varphi^3(0)$ є власними векторами матриці A, які відповідають різним власним значенням, то вони лінійно незалежні, а отже, φ^1, φ^2 і φ^3 — лінійно незалежні векторні функції. Отож, φ^1, φ^2, φ^3 — фундаментальна система розв'язків рівняння (359).

Оскільки $\varphi^2(t) = \overline{\varphi^3}(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{Re}\varphi^2(t) = \frac{1}{2}\big(\varphi^2(t) + \varphi^3(t)\big), \qquad \operatorname{Im}\varphi^2(t) = \frac{1}{2i}\big(\varphi^2(t) - \varphi^3(t)\big).$$

Враховуючи, що лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є розв'язком цієї системи, робимо висновок, що

$$\widetilde{\varphi}^2(t) := \operatorname{Re}\varphi^2(t), \quad \widetilde{\varphi}^3(t) := \operatorname{Im}\varphi^2(t)$$

є розв'язками рівняння (359). Векторні функції $\varphi^1, \widetilde{\varphi}^2, \widetilde{\varphi}^3$ є лінійно незалежними. Справді, нехай

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \alpha_2\widetilde{\varphi}^2(t) + \alpha_3\widetilde{\varphi}^3(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси, враховуючи означення $\widetilde{\varphi}^2$, $\widetilde{\varphi}^3$, отримаємо

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \frac{\alpha_2}{2}\big(\varphi^2(t) + \varphi^3(t)\big) + \frac{\alpha_3}{2i}\big(\varphi^2(t) - \varphi^3(t))\big) = 0,$$

тобто

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \frac{\alpha_2 i + \alpha_3}{2i}\varphi^2(t) + \frac{\alpha_2 i - \alpha_3}{2}\varphi^3(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 i + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 i - \alpha_3 = 0$, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Отож, дійсні функції φ^1, $\widetilde{\varphi}^2$, $\widetilde{\varphi}^3$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (359). Загальний розв'язок заданого векторного рівняння має вигляд

$$w = C_1\varphi^1(t) + \widetilde{C}_2\widetilde{\varphi}^2(t) + \widetilde{C}_3\widetilde{\varphi}^3(t),\ t \in \mathbb{R},\ C_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3 \in \mathbb{C}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(C_1\varphi^1(t) + \widetilde{C}_2\widetilde{\varphi}^2(t) + \widetilde{C}_3\widetilde{\varphi}^3(t)\big) \equiv \\ \equiv (\mathrm{Re}C_1)\,\varphi^1(t) + (\mathrm{Re}\widetilde{C}_2)\,\widetilde{\varphi}^2(t) + (\mathrm{Re}\widetilde{C}_3)\,\widetilde{\varphi}^3(t),\end{aligned}$$

то повний загальний дійсний розв'язок такий:

$$w = C_1\varphi^1(t) + C_2\widetilde{\varphi}^2(t) + C_3\widetilde{\varphi}^3(t),\ \ t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Отож, нам треба знайти дійсну та уявну частини $\varphi^2(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$. Запишемо

$$\begin{pmatrix}-1-i\\-1-i\\1\end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix}-1-i\\-1-i\\1\end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix}(-1-i)(\cos t + i\sin t)\\(-1-i)(\cos t + i\sin t)\\\cos t + i\sin t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-\cos t + \sin t\\-\cos t + \sin t\\\cos t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-\cos t - \sin t\\-\cos t - \sin t\\\sin t\end{pmatrix}.$$

Отож,

$$\widetilde{\varphi}^2(t) \equiv \mathrm{Re}\varphi^2(t) = \begin{pmatrix}-\cos t + \sin t\\-\cos t + \sin t\\\cos t\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\varphi}^3(t) \equiv \mathrm{Im}\varphi^2(t) = \begin{pmatrix}-\cos t - \sin t\\-\cos t - \sin t\\\sin t\end{pmatrix},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

У результаті наших міркувань доходимо висновку, що повний загальний дійсний розв'язок заданої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ -\cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Приклад 3. *Знайти загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = y - 2x - 2z \\ y' = x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases} \tag{363}$$

Розв'язування. Приймемо

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді задана система матиме вигляд

$$w' = Aw. \tag{364}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Для цього зауважимо, що

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Отже, власними значеннями матриці A є числа $\lambda_1 = 3$ (алгебраїчна кратність $k_1 = 1$), $\lambda_2 = -1$ (алгебраїчна кратність $k_2 = 2$).

Знайдемо загальні власні вектори для власних значень λ_1, λ_2, тобто загальні розв'язки систем

$$(A - \lambda_k I)v = 0, \quad k = 1, 2. \tag{365}$$

Розглянемо випадок $k = 1$. Маємо

$$(A - 3I) \equiv \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 8 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отож, система (365) при $k = 1$ еквівалентна системі

$$\begin{cases} v_1 = -v_2, \\ v_3 = 3v_2. \end{cases}$$

Оскільки тут є одна вільна змінна, то геометрична кратність власного значення λ_1 дорівнює 1, що збігається з алгебраїчною кратністю. Тому приймемо $v_2 = C_1$, де C_1 — довільна стала. Отже, $v_1 = -C_1$, $v_3 = 3C_1$ і загальний власний вектор, відповідний в. з. λ_1, має вигляд

$$v = \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{pmatrix} \equiv C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а отже,

$$w = \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{pmatrix} e^{3t} \equiv C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R},\ C_1 \text{ — довільна стала}, \quad \text{—}$$

неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_1.

У випадку $k = 2$ з (365) отримаємо

$$(A + I) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто друга з систем (365) еквівалентна системі

$$v_1 = v_2 - 2v_3.$$

Звідси випливає, що задана система має дві вільні змінні, тобто геометрична кратність власного значення λ_2 дорівнює 2, а отже, збігається з алгебраїчною кратністю. Тому можемо прийняти $v_2 = C_2$, $v_3 = C_3$, де C_2, C_3 — довільні сталі. Тоді $v_1 = C_2 - 2C_3$. Отож,

$$v = \begin{pmatrix} C_2 - 2C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \text{—}$$

загальний власний вектор для власного значення λ_2, а отже,

$$w = \begin{pmatrix} C_2 - 2C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{-t} \equiv \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

C_2, C_3 — довільні сталі, — неповний загальний розв'язок, відповідний власному значенню λ_2.

Загальний розв'язок рівняння (364) має вигляд (див.(385))

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} C_2 - 2C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$, — загальний розв'язок системи (363). Якщо ж C_1, C_2, C_3 — дійсні довільні сталі, то це буде загальний дійсний розв'язок. □

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

786. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ **789.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$

796. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

801. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$

804. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$

Домашні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

787. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases}$ **790.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$ **791.** $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases}$

797. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

802. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$

Відповіді:

786. $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$;
789. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$,
$y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$;

796. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$,
$z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$;
801. $x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)$,
$y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$,
$z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$;
804. $x = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$,
$z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}$;
787. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$;
790. $x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$;
791. $x = (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t$,
$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$
797. $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$,
$z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$;
802. $x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$,
$y = e^{3t}[(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \sin t]$,
$z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3) \cos t + (2C_3 + C_2) \sin t]$.

Практичне заняття № 25

Нормальні лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами (випадок неспівпадіння алгебраїчної і геометричної кратностей)

Довідкова інформація

Розглянемо нормальні лінійні однорідні системи (коротко, НЛОС) за умови, що їх **коефіцієнти є сталими** функціями і $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, тобто систему

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

де n — деяке натуральне число; $a_{kl} \in \mathbb{C},\ k, l = \overline{1, n}$, — коефіцієнти системи; $x_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ k = \overline{1, n}$, — невідомі функції. Зауважимо, що для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ маємо $x_k = u_k + iv_k$, де $u_k = u_k(t)$, $v_k = v_k(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, — дійсні неперервно диференційовні функції від дійсної змінної, i — уявна одиниця.

Задану систему можна записати у вигляді векторного рівняння

$$x' = Ax, \tag{366}$$

де $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ — невідома векторна функція.

На підставі відомого твердження повний загальний розв'язок НЛОС (366) має вигляд

$$x = C_1\varphi^1(t) + \dots + C_n\varphi^n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C},$$

де $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — фундаментальна система розв'язків НЛОС (366) (нагадаємо, що *фундаментальною системою розв'язків* називається будь-яка система з n (часткових) лінійно незалежних розв'язків НЛОС (366)).

Спробуємо шукати (частковий) ненульовий розв'язок рівняння (366) у вигляді

$$x = ve^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{367}$$

де $v \in \mathbb{C}^n$ і $v \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Підставивши вираз (367) в (366) та врахувавши, що $x' = \lambda v e^{\lambda_* t}$, отримаємо рівність

$$\lambda_* v e^{\lambda_* t} = Ave^{\lambda_* t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $e^{\lambda t} \neq 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, то звідси випливає, що λ_* і v обов'язково повинні задовольняти рівність

$$Av = \lambda_* v, \tag{368}$$

тобто λ_* — власне значення матриці A, v — власний вектор, який відповідає цьому значенню. Отож, правильним є таке твердження.

Лема 13. *Функція вигляду* (367) *буде (частковим) розв'язком системи* (366) *тоді і тільки тоді, коли λ_* — власне значення матриці A, а v — відповідний йому власний вектор.*

Нагадаємо деякі факти з *теорії матриць* стосовно їхніх *власних значень* і *власних векторів.*

Відшукання власних значень і власних векторів матриці A зводиться (як випливає з (368)) до знаходження таких значень λ, за яких система лінійних алгебричних рівнянь

$$\big(A - \lambda I\big)v = 0, \tag{369}$$

де I — одинична матриця; 0 — нульовий вектор, має ненульові розв'язки. Це рівносильно тому, що

$$\det\big(A - \lambda I\big) = 0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{370}$$

Рівняння (370) можна записати у вигляді

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

яке згідно з основною теоремою алгебри можна переписати у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0, \tag{371}$$

де $1 \leqslant m \leqslant n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — різні (загалом комплексні) числа, $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_m \geqslant 1$ — цілі, $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ є власними значеннями матриці A (і тільки вони). Значення $k_1, \ldots, k_m$ називаються *алгебричними кратностями* відповідних власних значень.

Для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ власному значенню λ_j відповідає власний підпростір $B(\lambda_j)$, який складається з власних векторів, відповідних цьому власному значенню, та нульового вектора. Розмірність цього власного підпростору $B(\lambda_j)$ позначимо через l_j. Значення l_j називається *геометричною кратністю* власного значення λ_j і, як відомо, $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Фактично, число l_j — це максимальна кількість лінійно незалежних власних векторів, які відповідають власному значенню λ_j. Значення l_j можна визначити як *кількість вільних змінних* у системі (369).

Нагадаємо таке: коли $v^1 \in B(\lambda_1), \dots, v^m \in B(\lambda_m)$ — які-небудь ненульові вектори, то вони утворюють лінійно незалежну систему в просторі $\mathbb{C}^n$.

Теорема 16. *Повний загальний розв'язок системи* (366) *можна записати у вигляді*

$$x = [C_{1,1}p^{1,1}(t) + \dots + C_{1,k_1}p^{1,k_1}(t)]e^{\lambda_1 t} + \dots + \\ + [C_{m,1}p^{m,1}(t) + \dots + C_{m,k_m}p^{m,k_m}(t)]e^{\lambda_m t}, \tag{372}$$

$$\tag{373}$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad C_{1,1}, \dots, C_{1,k_1}, \dots, C_{m,1}, \dots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C},$$

де для кожного $j \in \{1, \dots, \nu\}$ $\quad p^{j,1}, \dots, p^{j,k_j}$ *— векторні многочлени степеня* $\leqslant k_j - l_j$, *причому, якщо* $k_j - l_j = 0$, *то* $p^{j,1} \equiv v^{j,1}, \dots, p^{j,k_j} \equiv v^{j,k_j}$ *— лінійно незалежні власні вектори, які відповідають власному значенню* λ_j.

Наслідок 6. *Повний загальний розв'язок рівняння* (366) *можна записати у вигляді*

$$x = [a^{1,0}t^{k_1-l_1} + \dots + a^{1,k_1-l_1}]e^{\lambda_1 t} + \dots + [a^{m,0}t^{k_m-l_m} + \dots + a^{m,k_m-l_m}]e^{\lambda_m t}, \tag{374}$$

$$t \in (-\infty, +\infty), \quad C_{1,1}, \dots, C_{1,k_1}, \dots, C_{m,1}, \dots, C_{m,k_m} \in \mathbb{C},$$

де для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ $(a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j})^\top$ *– загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь*

$$\begin{cases} (A - \lambda_j I)a^{j,0} = 0, \\ (A - \lambda_j I)a^{j,1} = (k_j - l_j)a^{j,0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,s} = (k_j - l_j - s + 1)a^{j,s-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda_j I)a^{j,k_j-l_j} = a^{j,k_j-l_j-1}, \end{cases} \tag{375}$$

зокрема, якщо $l_j = k_j$, *то* $a^{j,0}$ *— загальний власний вектор матриці* A *для власного значення* λ_j.

Враховуючи сказане, можна запропонувати такий **спосіб розв'язування нормальних лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами.**

1. *Виписуємо матрицю* A *системи* (366) *та характеристичне рівняння* (370). *Розв'язуємо рівняння* (370). *Нехай* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \le n)$ *— різні його корені* (*власні значення матриці* A), *а* $k_1, \ldots, k_m$ *— відповідні їхні кратності* (*алгебричні кратності власних значень*).

2. *Шукаємо для кожного власного значення відповідний йому неповний загальний розв'язок.*

   Як це робити покажемо на прикладі якогось одного власного значення. Нехай λ_j — власне значення матриці A, $\quad k_j$ — його алгебрична кратність $(1 \le j \le m)$.

   Запишемо систему рівнянь для знаходження власних векторів для власного
   значення λ_j
   $$(A - \lambda_j I)v = 0.$$
   Знайдемо загальний розв'язок цієї системи, тобто з.в.в. для власного значення λ_j. Нехай він має вигляд
   $$v = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + b_1^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + b_n^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \end{pmatrix}, \qquad \tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j} \in \mathbb{C}, \tag{376}$$
   де $l_j \in \mathbb{N}$, а $b_l^{j,s}$, $l = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,l_j}$, — деякі сталі.

   Число $l_j \in \mathbb{N}$ є геометричною кратністю власного значення λ_j. Як відомо, $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Можливі два випадки: 1) $l_j = k_j$; $\quad$ 2) $l_j < k_j$.

   У першому випадку приймемо в (376)
   $$\tau_{j,1} = C_{j,1}, \ldots, \tau_{j,k_j} = C_{j,k_j}$$
   і отримаємо
   $$x = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_1^{j,k_j}C_{j,k_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_n^{j,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{377}$$
   — неповний загальний розв'язок для власного значення λ_j.

   Зауважимо, що тут $a^{j,0} = \begin{pmatrix} b_1^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_1^{j,k_j}C_{j,k_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n^{j,1}C_{j,1} + \cdots + b_n^{j,k_j}C_{j,k_j} \end{pmatrix}$ — загальний розв'язок системи $(A - \lambda_j I)v = 0$, а отже, (377) можна записати у вигляді
   $$x = a^{j,0}e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $a^{j,0}$ — з.в.в. для власного значення λ_j.

Розглянемо другий випадок, тобто випадок, коли $l_j < k_j$. Тоді записуємо проект неповного загального розв'язку для власного значення λ_j, у вигляді

$$x =(a^{j,0}t^{k_j-l_j} + a^{j,1}t^{k_j-l_j-1} + \dots + a^{j,k_j-l_j})e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{378}$$

де $a^{j,s} = \begin{pmatrix} a_1^{j,s} \\ \vdots \\ a_n^{j,s} \end{pmatrix}$, $s = \overline{0, k_j - l_j}$, —вектори з неозначеними компонентами, значення яких шукають за умови, що векторна функція, задана формулою (378), є розв'язком векторного рівняння (366).

Підставляючи вираз (378) замість x в рівняння (366), отримаємо

$$\lambda_j(a^{j,0}t^{k_j-l_j} + a^{j,1}t^{k_j-l_j-1} + \dots + a^{j,k_j-l_j})e^{\lambda_j t} +$$

$$+ ((k_j - l_j)a^{j,0}t^{k_j-l_j-1} + (k_j - l_j - 1)a^{j,1}t^{k_j-l_j-2} + \dots +$$

$$+ a^{j,k_j-l_j-1})e^{\lambda_j t} = ((Aa^{j,0})t^{k_j-l_j} + (Aa^{j,1})t^{k_j-l_j-1} + \dots + Aa^{j,k_j-l_j})e^{\lambda_j t}.$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t, одержимо

$$\begin{cases} t^{k_j-l_j}: & Aa^{j,0} = \lambda_j a^{j,0}; \\ t^{k_j-l_j-1}: & Aa^{j,1} = \lambda_j a^{j,1} + (k_j - l_j)a^{j,0}; \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t^0: & Aa^{j,k_j-l_j} = \lambda_j a^{j,k_j-l_j} + a^{j,k_j-l_j-1}, \end{cases}$$

звідки отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (375).

Розв'язуємо цю систему, починаючи з першого векторного рівняння. Його загальний розв'язок $a^{j,0}$ уже знайдено у вигляді (376). Підставляючи його вираз у друге рівняння, знайдемо $a^{j,1}$. Можливо, що для розв'язності другої системи треба накласти певні зв'язки між параметрами $\tau_{j,1}, \dots, \tau_{j,l_j}$. Далі робимо аналогічно. Як випливає з наслідку 6, компоненти векторів $a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j}$ виражаються через k_j параметрів, які позначаємо через $C_{j,1}, \dots, C_{j,k_j}$. Знайдені вирази $a^{j,0}, \dots, a^{j,k_j-l_j}$ підставляємо в (378). В результаті одержимо неповний загальний розв'язок, який відповідає власному значенню λ_j.

3. *Записуємо загальний розв'язок системи* (366) *як суму неповних загальних розв'язків, які відповідають власним значенням* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Розглянемо **нормальну лінійну однорідну систему третього порядку**

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{379}$$

де $a_{ij} \in \mathbb{C},\ i, j = \overline{1, 3}$.

Введемо позначення

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

і запишемо систему (379) у вигляді векторного рівняння

$$w' = Aw. \tag{380}$$

Будемо шукати *повний загальний розв'язок* системи (380), який, як відомо, визначається власними значеннями матриці A, їхніми алгебраїчними та геометричними кратностями. Тому найперше треба записати і розв'язати рівняння на знаходження власних значень матриці A (в полі комплексних чисел):

$$\det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{381}$$

а точніше, записати його у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0,$$

де $1 \leqslant m \leqslant 3$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — різні числа (назагал комплексні) (вони є власними значеннями матриці A), $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_m \geqslant 1$ — натуральні числа, $k_1 + \cdots + k_m = 3$. Числа $k_1, \ldots, k_m$ називають алгебраїчними кратностями відповідних власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ шукаємо відповідні власному значенню λ_j власні вектори, тобто ненульові розв'язки лінійної алгебраїчної системи рівнянь

$$(A - \lambda_j I)v = 0. \tag{382}$$

Оскільки λ_j є розв'язком рівняння (381), то система (382) має безліч розв'язків і її загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$v = \widetilde{v}^j(\tau_{j,1}, \cdots, \tau_{j,l_j}) \equiv \begin{pmatrix} v_1^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_1^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ v_2^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_2^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \\ v_3^{j,1}\tau_{j,1} + \cdots + v_3^{j,l_j}\tau_{j,l_j} \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \tau_{j,1}\begin{pmatrix} v_1^{j,1} \\ v_2^{j,1} \\ v_3^{j,1} \end{pmatrix} + \cdots + \tau_{j,l_j}\begin{pmatrix} v_1^{j,l_j} \\ v_2^{j,l_j} \\ v_3^{j,l_j} \end{pmatrix} \equiv \tau_{j,1}v^{j,1} + \cdots + \tau_{j,l_j}v^{j,l_j}, \qquad (383)$$

де $v^{j,1} = \begin{pmatrix} v_1^{j,1} \\ v_2^{j,1} \\ v_3^{j,1} \end{pmatrix}, \ldots, v^{j,l_j} = \begin{pmatrix} v_1^{j,l_j} \\ v_2^{j,l_j} \\ v_3^{j,l_j} \end{pmatrix}$ — деякі (конкретні) лінійно незалежні вектори, що утворюють максимальну систему лінійно незалежних власних векторів відповідних в. з. λ_j, а $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$ – параметри, які можуть набувати довільних значень. Очевидно, що число l_j є *геометричною кратністю* в. з. λ_j і дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних власних векторів, які відповідають власному значенню λ_j. Відомо, що $1 \leqslant l_j \leqslant k_j$. Звідси випливає, що власному значенню λ_j відповідає безліч власних векторів, які можна отримати з (383), надаючи параметрам $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$ конкретні значення, серед яких хоча б одне відмінне від нуля. Тому залежну від параметрів $\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j}$ векторну функцію $\widetilde{v}^j$, яка визначається за правилом (383), називають *загальним власним вектором* (коротко, з. в. в.) відповідного власному значенню (коротко, в. з.) λ_j.

Розглянемо можливі випадки значень m і $k_1, \ldots, k_m$, $l_1, \ldots$, l_m і вигляд повного загального розв'язку рівняння (380) для цих значень.

Перший випадок: $m = 3$, $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = 1$, $k_3 = l_3 = 1$. Тоді повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = \widetilde{v}^1(C_1)\,e^{\lambda_1 t} + \widetilde{v}^2(C_2)\,e^{\lambda_2 t} + \widetilde{v}^3(C_3)\,e^{\lambda_3 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ – довільні сталі.} \qquad (384)$$

де $\widetilde{v}^j(C_j) = C_j v^j$ — з. в. в. відповідний в. з. λ_j, тобто $\widetilde{v}^j(C_j) := C_j v^j$, де v^j – який-небудь (конкретний) власний вектор, що відповідає в. з. λ_j, а C_j – довільна стала (див. (383) при $l_j = 1$, $\tau_{j,1} = C_j$), для кожного $j \in \{1, 2, 3\}$.

Другий випадок: $m = 2$, $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = 2$. Тоді повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = \widetilde{v}^1(C_1)\,e^{\lambda_1 t} + \widetilde{v}^2(C_2, C_3)\,e^{\lambda_2 t}, \qquad (385)$$

де $\widetilde{v}^1(C_1) = C_1 v^1$, $\widetilde{v}^2(C_2, C_3) = C_2 v^2 + C_3 v^3$, C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, v^1 – який-небудь конкретний власний вектор відповідний в. з. λ_1, v^2, v^3 – лінійно незалежні власні вектори відповідні в. з. λ_2 (див. (383) при $j = 1, l_1 = 1, \tau_{1,1} = C_1$ та при $j = 2, l_2 = 2, \tau_{2,1} = C_2$, $\tau_{2,2} = C_3$).

Третій випадок (тривіальний): $m = 1$, $k_1 = l_1 = 3$. Тоді матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

і повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = \widetilde{v}^1(C_1, C_2, C_3)\, e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad C_1, C_2, C_3 - \text{довільні сталі},$$

де

$$\widetilde{v}^1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

— з. в. в. відповідний в. з. λ_1.

Четвертий випадок: $m = 2$, $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = 2$, $l_2 = 1$. Тоді повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд:

$$w = \widetilde{v}^1(C_1)\, e^{\lambda_1 t} + \big[a(C_2, C_3)\, t + b(C_2, C_3)\big] e^{\lambda_2 t},\ t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 - \text{довільні сталі}, \tag{386}$$

де $\widetilde{v}^1(C_1) = C_1 v^1$ — з. в. в. відповідний в. з. λ_1 (в (383) маємо $j = 1$, $l_1 = 1$, $\tau_{1,1} = C_1$), а

$$a(C_2, C_3) = \begin{pmatrix} a_1(C_2, C_3) \\ a_2(C_2, C_3) \\ a_3(C_2, C_3) \end{pmatrix}, \quad b(C_2, C_3) = \begin{pmatrix} b_1(C_2, C_3) \\ b_2(C_2, C_3) \\ b_3(C_2, C_3) \end{pmatrix},$$

де a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — лінійні функції від параметрів C_2, C_3, які можуть набувати довільних значень.

Функцію

$$w = \widetilde{v}^1(C_1)\, e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ C_1 - \text{довільна стала},$$

називають відповідним в. з. λ_1 неповним загальним розв'язком (коротко, НЗР(λ_1)), а функцію

$$w = \big[a(C_2, C_3)\, t + b(C_2, C_3)\big]\, e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ C_2, C_3 - \text{довільні сталі},$$

– відповідним в. з. λ_2 неповним загальним розв'язком (коротко, НЗР(λ_2)).

НЗР(λ_2) знаходимо методом неозначених коефіцієнтів. Для цього записуємо проєкт НЗР(λ_2)

$$w = (at + b)e^{\lambda_2 t},$$

де a і b — поки що неозначені вектори з $\mathbb{R}^3$, і підставляємо цей вираз у рівняння (380) замість w. Оскільки

$$((at+b)e^{\lambda_2 t})' = ae^{\lambda_2 t} + \lambda_2(at+b)e^{\lambda_2 t},$$

то матимемо

$$(\lambda_2 at + \lambda_2 b + a)e^{\lambda_2 t} = (Aat + Ab)e^{\lambda_2 t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси, після ділення на $e^{\lambda_2 t}$ і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях t, отримаємо

$$t: \ Aa = \lambda_2 a,$$
$$1: \ Ab = \lambda_2 b + a,$$

тобто

$$\begin{cases} (A - \lambda_2 I)a = 0, \\ (A - \lambda_2 I)b = a. \end{cases} \tag{387}$$

Отримали систему з шести лінійних алгебраїчних рівнянь, записану як систему двох підсистем по три рівняння. Перша з цих підсистем в точності співпадає із системою для знаходження власних векторів, що відповідають в. з. λ_2. Ми її уже розв'язали, коли шукали з. в. в. відповідний в. з. λ_2 (пор. з (382)). Підставляємо цей з. в. в., замінивши символ v на a, у праву частину другої підсистеми та знаходимо загальний розв'язок, трактуючи a як вільний член. Отриманий загальний розв'язок системи (387) буде мати дві вільні змінні, які позначаємо через C_2, C_3.

П'ятий випадок: $m = 1$, $k_1 = 3$, $l_1 = 2$. Тоді повний загальний розв'язок системи (380) має вигляд

$$w = \left[a(C_1, C_2, C_3)\, t + b(C_1, C_2, C_3)\right] e^{\lambda_1 t}, \tag{388}$$

де

$$a(C_1,C_2,C_3) = \begin{pmatrix} a_1(C_1,C_2,C_3) \\ a_2(C_1,C_2,C_3) \\ a_3(C_1,C_2,C_3) \end{pmatrix}, \qquad b(C_1,C_2,C_3) = \begin{pmatrix} b_1(C_1,C_2,C_3) \\ b_2(C_1,C_2,C_3) \\ b_3(C_1,C_2,C_3) \end{pmatrix} \quad —$$

векторні функції, компоненти яких є лінійними функціями довільних сталих C_1, C_2, C_3.

Повний загальний розв'язок системи (380) знаходимо методом неозначених коефіцієнтів. Для цього записуємо його проєкт

$$w = (at + b)e^{\lambda_1 t},$$

де a і b — поки що неозначені вектори з $\mathbb{R}^3$, і підставляємо цей вираз у систему (380) замість w. У результаті отримаємо

$$(a+\lambda_1(at+b))e^{\lambda_1 t} = A(at+b)e^{\lambda_1 t}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної t в лівій і правій частинах:

$$t:\ Aa = \lambda_1 a,$$
$$1:\ Ab = \lambda_1 b + a,$$

тобто

$$\begin{cases}(A-\lambda_1 I)a = 0,\\ (A-\lambda_1 I)b = a.\end{cases} \tag{389}$$

Отримали систему з шести лінійних алгебраїчних рівнянь, записану як систему двох підсистем по три рівняння. Перша з цих підсистем в точності співпадає із системою для знаходження власних векторів, що відповідають в. з. λ_2. Ми її уже розв'язали, коли шукали з. в. в. відповідний в. з. λ_2 (пор. з (382)). Підставляємо цей з. в. в., замінивши символ v на a, у праву частину другої підсистеми та знаходимо загальний розв'язок, трактуючи a як вільний член. Отриманий загальний розв'язок системи (387) буде мати три вільні змінні, які позначаємо через C_1, C_2, C_3.

Шостий випадок: $m=1$, $k_1=3$, $l_1=1$. Тоді повний загальний розв'язок рівняння (380) має вигляд

$$w = \left[a(C_1,C_2,C_3)\,t^2 + b(C_1,C_2,C_3)\,t + d(C_1,C_2,C_3)\right]e^{\lambda_1 t}, \tag{390}$$

де

$$a(C_1,C_2,C_3) = \begin{pmatrix} a_1(C_1,C_2,C_3)\\ a_2(C_1,C_2,C_3)\\ a_3(C_1,C_2,C_3)\end{pmatrix}, \qquad b(C_1,C_2,C_3) = \begin{pmatrix} b_1(C_1,C_2,C_3)\\ b_2(C_1,C_2,C_3)\\ b_3(C_1,C_2,C_3)\end{pmatrix},$$

$$d(C_1,C_2,C_3) = \begin{pmatrix} d_1(C_1,C_2,C_3)\\ d_2(C_1,C_2,C_3)\\ d_3(C_1,C_2,C_3)\end{pmatrix} \quad —$$

векторні функції, компоненти яких є лінійними функціями від довільних сталих C_1, C_2, C_3. Повний загальний розв'язок системи (380) знаходимо методом неозначених коефіцієнтів. Для цього записуємо його проєкт

$$w = (at^2+bt+d)e^{\lambda_1 t},$$

де a, b і d — поки що неозначені вектори з $\mathbb{R}^3$, і підставляємо цей вираз у систему (380) замість w. У результаті отримаємо

$$(2at + b + \lambda_1(at^2 + bt + d))e^{\lambda_1 t} = A(at^2 + bt + d)e^{\lambda_1 t}.$$

У результаті спрощень і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях t^k, $k = 0, 1, 2$, в лівій та правій частинах отримаємо

$$t^2: \ Aa = \lambda_1 a, \qquad t: \ Ab = \lambda_1 b + 2a, \qquad 1: \ Ad = \lambda_1 d + b,$$

тобто

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 I)a = 0, \\ (A - \lambda_1 I)b = 2a, \\ (A - \lambda_1 I)d = b. \end{cases} \tag{391}$$

Отримали систему з дев'яти лінійних алгебраїчних рівнянь як систему з трьох підсистем. Перша з них є системою на знаходження з. в. в. відповідного в. з. λ_1. Отже, a збігається із з. в. в. відповідного в. з. λ_1. Підставивши вираз a у другу підсистему з (391), знайдемо вираз b. Тоді з третьої підсистеми з (391) знайдемо вираз d.

Зауваження 0.0.6. *Векторні многочлени, які стоять у виразах загального розв'язку у випадках 4, 5, 6, мають степінь, який (чисельно) дорівнює різниці між алгебраїчною та геометричною кратністю відповідного власного значення.*

Контрольні питання

1. Який вигляд має НЛОС зі сталими коефіцієнтами? Що таке фундаментальна система розв'язків НЛОС зі сталими коефіцієнтами? Як знайти загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами, якщо відома її фундаментальна система розв'язків?

2. Що таке алгебраїчна (геометрична) кратність власного значення?

3. Який вигляд має загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами, за умови, що алгебраїчна і геометрична кратність власних значень матриці A не співпадають?

4. Що таке дійсний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами? Який вигляд має загальний дійсний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами, якщо елементи матриці A і її власні значення — дійсні (якщо елементи матриці A — дійсні, а серед її власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ є ν пар комплексно спряжених і $m - 2\nu$ дійсних)?

Приклад 4. *Знайти загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + 4z \\ z' = x - z. \end{cases} \tag{392}$$

Розв'язування. Приймемо

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді система (392) може бути записана у векторній формі

$$w' = Aw. \tag{393}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Маємо

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda)^2(1+\lambda) + 4 = -(4 - 4\lambda + \lambda^2)(1+\lambda) + 4 =$$

$$= -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 4 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 3).$$

Отже, власними значеннями матриці A є числа $\lambda_1 = 3$ (алгебрична кратність $k_1 = 1$), $\lambda_2 = 0$ (алгебрична кратність $k_2 = 2$).

Знайдемо загальні власні вектори для власних значень λ_1 і λ_2, тобто загальні розв'язки лінійних алгебричних систем

$$(A - \lambda_k I)v = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{394}$$

Спочатку розглянемо випадок $k = 1$. Маємо

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

звідки $l_1 = 1$ і
$$\begin{cases} v_1 = 4v_3, \\ v_2 = 4v_3. \end{cases}$$
Оскільки алгебраїчна та геометрична кратності в. з. λ_1 збігаються (дорівнюють 1), то приймемо $v_3 = C_1$. Тоді $v_1 = 4C_1$, $v_2 = 4C_1$. Отже,
$$\widetilde{v}^1(C_1) := \begin{pmatrix} 4C_1 \\ 4C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$$
— загальний власний вектор, відповідний власному значенню λ_1, і
$$w = \begin{pmatrix} 4C_1 \\ 4C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{3t} \text{ — \textit{неповний загальний розв'язок системи} (393) \textit{для в. з.} } \lambda_1. \tag{395}$$

Розглянемо випадок $k = 2$. Зважаючи, що
$$(A - 0I) \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
доходимо висновку, що система (394) при $k = 2$ еквівалентна системі
$$\begin{cases} v_1 = v_3, \\ v_2 = -2v_3. \end{cases} \tag{396}$$
Нехай v_3 — довільне. Тоді
$$v^1 = \begin{pmatrix} v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
— загальний власний вектор для власного значення λ_2.

Оскільки загальний власний вектор визначається одним параметром, то це означає, що геометрична кратність l_2 власного значення λ_2 дорівнює 1 ($l_2 = 1$).

Отож, неповний загальний розв'язок рівняння (393), який відповідає в. з. λ_2, шукатимемо у вигляді
$$w = at + b, \quad \text{де } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$
тобто многочлена степеня $k_2 - l_2 = 2 - 1 = 1$ з векторними (неозначеними) коефіцієнтами. Для знаходження коефіцієнтів a і b підставимо вираз цього

многочлена у векторне рівняння (393) замість w. Оскільки $w' = a$, то матимемо
$$a = A(at + b).$$
Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t^k, $k = 1, 0$, в правій та лівій частинах цієї рівності, отримаємо систему двох векторних рівнянь для знаходження a і b:
$$\begin{cases} Aa = 0, \\ Ab = a. \end{cases} \tag{397}$$
Перша з підсистем системи (397) збігається із системою для знаходження з. в. для в. з. $\lambda_2 = 0$. Отже, (див. (396))
$$a = \begin{pmatrix} a_3 \\ -2a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$
Розв'яжемо другу підсистему системи (397). Для цього зведемо розширену матрицю відповідної лінійної алгебраїчної системи до східчастого вигляду
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 2 & 4 & -2a_3 \\ 1 & 0 & -1 & a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Отже,
$$\begin{cases} b_1 - b_3 = a_3 \\ b_2 + 2b_3 = -a_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = a_3 + b_3 \\ b_2 = -a_3 - 2b_3 \end{cases}.$$
Звідси маємо
$$a = \begin{pmatrix} a_3 \\ -2a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} a_3 + b_3 \\ -a_3 - 2b_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$
де a_3, b_3 — вільні змінні. Помінявши a_3, b_3 відповідно на C_2 і C_3, одержимо
$$w = \begin{pmatrix} C_2 \\ -2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_2 + C_3 \\ -C_2 - 2C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad - \tag{398}$$
неповний загальний розв'язок рівняння (393), відповідний в. з. λ_2.

Отже, на підставі (395),(398) загальний розв'язок рівняння (393) має вигляд
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4C_1 \\ 4C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_2 + C_3 \\ -C_2 - 2C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі (дійсні, якщо нас цікавить загальний дійсний розв'язок). $\square$

Приклад 5. *Знайти загальний розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = 2z - x + y. \end{cases} \tag{399}$$

Розв'язування. Позначимо

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (399) можна записати у вигляді векторного рівняння

$$w' = Aw. \tag{400}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Оскільки

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$

то характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

має один корінь $\lambda_1 = 1$ кратності 3. Отже, число $\lambda_1 = 1$ є власним значенням матриці A алгебричної кратності $k_1 = 3$.

Знайдемо загальний власний вектор, який відповідає власному значенню λ_1 із системи

$$(A - \lambda_1 I)v = 0. \tag{401}$$

Маємо

$$(A - I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто система (401) еквівалентна системі

$$v_1 = v_2 + v_3$$

.

Вважаючи v_2 і v_3 вільними змінними, отримаємо

$$v^1 = \begin{pmatrix} v_2 + v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{— з. в. в. для в. з. } \lambda_1. \tag{402}$$

З. в. в. визначається двома параметрами, а це означає, що геометрична кратність в. з. λ_1 дорівнює $l_1 = 2$ (п'ятий випадок). Отож, проект загального розв'язку рівняння (400) має вигляд векторного многочлена степеня $k_1 - l_1 = 3 - 2 = 1$, помноженого на e^t, тобто

$$w = (at + b)e^t,$$

$$\text{де } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Підставимо цей вираз w у рівняння (400)

$$ae^t + (at + b)e^t = A(at + b)e^t.$$

Звідси, після ділення на e^t і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $t^k, k = 0, 1$, одержимо

$$t: \; Aa = a, \qquad 1: \; Ab = b + a,$$

звідки

$$\begin{cases} (A - I)a = 0, \\ (A - I)b = a. \end{cases} \tag{403}$$

Перша підсистема системи (403) аналогічна до системи (401) на знаходження з. в. в., відповідного в. з. λ_1. Отже, згідно з (402) маємо

$$a = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо b з другої підсистеми системи (403), зводячи розширену матрицю

$(A-I)\,|\,a$ до східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & a_2+a_3 \\ 2 & -2 & -2 & a_2 \\ -1 & 1 & 1 & a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2+2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2+2a_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2+2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ця система розв'язна тоді і тільки тоді, коли $a_2+2a_3=0$. Звідси $a_2=-2a_3$, тобто

$$a = \begin{pmatrix} -a_3 \\ -2a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Друге рівняння системи (403) еквівалентне рівнянню

$$b_1 - b_2 - b_3 = -a_3,$$

звідки

$$b = \begin{pmatrix} -a_3+b_2+b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad a_3, b_2, b_3 \text{ — вільні змінні.}$$

Отже, прийнявши $a_3=C_1$, $b_2=C_2$, $b_3=C_3$, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$w = (at+b)e^t \equiv \left[\begin{pmatrix} -C_1 \\ -2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -C_1+C_2+C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}\right] e^t,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі (дійсні, якщо нас цікавить загальний дійсний розв'язок). □

Приклад 6. *Знайти загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z. \end{cases} \tag{404}$$

Розв'язування. Позначимо

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (404) запишемо у вигляді векторного рівняння

$$w' = Aw. \tag{405}$$

Знайдемо власні значення матриці A. Маємо

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 + 3(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3.$$

Отже, число $\lambda_1 = 2$ є власним значенням матриці A алгебричної кратності $k_1 = 3$. Знайдемо загальний власний вектор для власного значення $\lambda_1 = 2$. Оскільки

$$(A - 2I) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то система

$$(A - \lambda_1 I)v = 0$$

еквівалентна системі

$$v_1 = v_3, \qquad v_2 = 2v_3.$$

Отож, загальний власний вектор має вигляд

$$v^1 = \begin{pmatrix} v_3 \\ 2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{де} \quad v_3 \text{ — вільна змінна.} \tag{406}$$

Оскільки з. в. в. залежить тільки від одного параметра, то геометрична кратність в. з. λ_1 дорівнює $l_1 = 1$. Отже, проект загального розв'язку рівняння (405) можна записати у вигляді добутку векторного многочлена степеня $k_1 - l_1 = 3 - 1 = 2$ і експоненти $e^{\lambda_1 t}$, тобто у вигляді

$$w = (at^2 + bt + d))e^{2t},$$

де

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

— векторні функції від довільних сталих C_1, C_2, C_3. Підставимо цей вираз w у рівняння (405)

$$(2at + b)e^{2t} + 2(at^2 + bt + d)e^{2t} = A(at^2 + bt + d)e^{2t}.$$

Поділивши отриману рівність на e^{2t}, звівши подібні члени та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t^k $(k = 0, 1, 2)$, одержимо

$$t^2: \quad Aa = 2a, \qquad t: \quad Ab = 2b + 2a, \qquad 1: \quad Ad = 2d + b,$$

звідки

$$\begin{cases} (A - 2I)a = 0, \\ (A - 2I)b = 2a, \\ (A - 2I)d = b. \end{cases} \tag{407}$$

Перша підсистема системи (407) збігається з системою для знаходження з. в. в. для в. з. $\lambda_1 = 2$. Отже (див. (406)),

$$a = \begin{pmatrix} a_3 \\ 2a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Підставимо цей вираз a у друге рівняння. Оскільки

$$(A - 2I \mid b) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2a_3 \\ 3 & -1 & -1 & 4a_3 \\ 1 & 0 & -1 & 2a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2a_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2a_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2a_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2a_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то $b_1 = b_3 + 2a_3$, $b_2 = 2b_3 + 2a_3$, тобто

$$b = \begin{pmatrix} b_3 + 2a_3 \\ 2b_3 + 2a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тепер підставимо цей вираз у третє рівняння. Зважаючи на те, що

$$(A-2I\,|\,b) \equiv \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & b_3+2a_3 \\ 3 & -1 & -1 & 2b_3+2a_3 \\ 1 & 0 & -1 & b_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 1 & -2 & b_3-2a_3 \\ 0 & 1 & -2 & b_3-2a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 1 & -2 & b_3-2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

отримаємо

$$\begin{cases} d_1 = d_3 + b_3, \\ d_2 = 2d_3 + b_3 - 2a_3, \end{cases}$$

тобто

$$d = \begin{pmatrix} d_3+b_3 \\ 2d_3+b_3-2a_3 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, компоненти a_3, b_3, d_3 векторів a, b, d є вільними змінними. Приймемо $a_3 = C_1$, $b_3 = C_2$, $d_3 = C_3$. У результаті одержимо загальний розв'язок рівняння (404)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 2C_1+C_2 \\ 2C_1+2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_2+C_3 \\ -2C_1+C_2+2C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}\right] e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі (дійсні, якщо нас цікавить загальний дійсний розв'язок). $\square$

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

808. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, k_1 = 2; \lambda_2 = 2, k_2 = 1)$

812. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2, k_1 = 3)$

811. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y. \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, k_1 = 3)$

Домашні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

792. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$ **795.** $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0; \end{cases}$

809. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z. \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1;\ \lambda_2 = -1,\ k_2 = 2)$

Відповіді:

808. $x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$, $y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)e^t$,
$z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$;

812. $x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{2t}$,
$y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2]e^{2t}$,
$z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3 t^2]e^{2t}$;

811. $x = (C_1 + C_3 t)e^t$, $y = (C_2 + 2C_3 t)e^t$,
$z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t)e^t$;

792. $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$;

795. $x = (C_1 + 3C_2 t)e^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2 t)e^{2t}$;

809. $x = (C_2 + C_3 t)e^{-t}$, $y = 2C_1 e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^{-t}$,
$z = C_1 e^t - (C_2 + C_3 + C_3 t)e^{-t}$.

Практичне заняття № 26

Нормальні лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами (метод неозначених коефіцієнтів)

Довідкова інформація

Розглянемо **нормальну лінійну неоднорідну систему** (НЛОС) зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

де n — довільне натуральне число; $t \in (-\infty, +\infty)$ — незалежна змінна, $a_{kl} \in \mathbb{C}$, $f_k \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $k, l = \overline{1,n}$, — задані, відповідно, коефіцієнти і вільні члени; $x_k \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $k = \overline{1,n}$, — невідомі функції.

Задану систему можна записати у векторному вигляді

$$x' = Ax + f(t), \tag{408}$$

де t — незалежна змінна, яка пробігає значення з $\mathbb{R}$,

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

$$f(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

На підставі відомого твердження повний загальний розв'язок системи (408) має вигляд:

$$x = \overset{\circ}{x}(t, C) + \overset{*}{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{C}^n,$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t, C)$, $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}^n$, — повний загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$x' = Ax, \tag{409}$$

а $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — частковий розв'язок системи (408).

Зауважимо, що метод знаходження *повного загального розв'язку системи* (409) описано раніше. Частковий розв'язок системи (408), якщо відомо повний загальний розв'язок системи (409), можна знайти методом варіації сталих. У випадку, коли вільний член системи (408) є *векторним квазімногочленом*, то частковий розв'язок системи (408) можна знайти простішим способом, який називають *методом неозначених коефіцієнтів.* Цей метод ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 17. *Нехай вільний член системи (408) має вигляд*

$$f(t) = \begin{pmatrix} b_1^0 t^l + \dots + b_1^l \\ \vdots \\ b_n^0 t^l + \dots + b_n^l \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv (b^0 t^l + \dots + b^l) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{410}$$

де $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;* $\mu \in \mathbb{C}$*;* $b_s^j \in \mathbb{C}$*;* $b_s(t) = b_s^0 t^l + \dots + b_s^l$*,* $t \in \mathbb{R}$*;* $b^j = \begin{pmatrix} b_1^j \\ \vdots \\ b_n^j \end{pmatrix}$*,* $j = \overline{0, l}$*,* $s = \overline{1, n}$*.*

Тоді система (408) *має* (*частковий*) *розв'язок вигляду*

$$x = \begin{pmatrix} d_1^0 t^{k+l} + \dots + d_1^{k+l} \\ \vdots \\ d_n^0 t^{k+l} + \dots + d_n^{k+l} \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv (d^0 t^{k+l} + \dots + d^{k+l}) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{411}$$

де

- $k = 0$*, якщо* μ *не є власним значенням матриці* A*, і* k *дорівнює алгебраїчній кратності* μ*, якщо* μ *є власним значенням матриці* A*;*
- $d_s^j \in \mathbb{C}$*,* $d_s(t) = d_s^0 t^{k+l} + \dots + d_s^{k+l}$*,* $t \in \mathbb{R}$*,* $d^j := \begin{pmatrix} d_1^j \\ \vdots \\ d_n^j \end{pmatrix}$*,* $j = \overline{0, k+l}$*,* $s = \overline{1, n}$*.*

Векторну функцію

$$f(t) = e^{\alpha t}\big[(g^0 t^r + \dots + g^r)\cos\beta t + (h^0 t^s + \dots + h^s)\sin\beta t\big], \quad t \in \mathbb{R}, \tag{412}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $g^0 = \begin{pmatrix} g_1^0 \\ \vdots \\ g_n^0 \end{pmatrix}, \dots, g^r = \begin{pmatrix} g_1^r \\ \vdots \\ g_n^r \end{pmatrix}$,

$h^0 = \begin{pmatrix} h_1^0 \\ \vdots \\ h_n^0 \end{pmatrix}, \dots, h^s = \begin{pmatrix} h_1^s \\ \vdots \\ h_n^s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, називають *дійсним векторним квазімногочленом.*

Тепер розглянемо випадок, коли матриця A в рівнянні (408) — ***дійсна***, а його вільний член — ***дійсний векторний квазімногочлен***.

Теорема 18. *Нехай в рівнянні* (408) *матриця* A *— дійсна, а вільний член* f *має вигляд* (412). *Тоді рівняння* (408) *має дійсний* (*частковий*) *розв'язок вигляду*

$$x = e^{\alpha t}\big[(\tilde{d}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{d}^{k+l})\cos\beta t + (\tilde{\tilde{d}}^0 t^{k+l} + \cdots + \tilde{\tilde{d}}^{k+l})\sin\beta t\big], \quad t \in \mathbb{R}, \tag{413}$$

де $l = \max\{r, s\}$; $k = 0$, *якщо число* $\mu{:=}\alpha + i\beta$ *не є власним значенням матриці* A, *і* k *дорівнює алгебраїчній кратності числа* μ, *якщо воно є власним значенням матриці* A;

$$\tilde{d}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{d}_n^0 \end{pmatrix}, \ldots, \tilde{d}^{k+l} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^{k+l} \\ \vdots \\ \tilde{d}_n^{k+l} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{d}}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{d}}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{d}}_n^0 \end{pmatrix}, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{d}}_1^{k+l} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{d}}_n^{k+l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Для знаходження дійсних (часткових) розв'язків системи з дійсними коефіцієнтами, вільними членами яких є дійсні векторні квазімногочлени, а точніше, системи, яка у векторній формі має вигляд (див. (408),(412))

$$x' = Ax + e^{\alpha t}\big[(g^0 t^r + \cdots + g^r)\cos\beta t + (h^0 t^s + \cdots + h^s)\sin\beta t\big], \tag{414}$$

можна використати метод неозначених коефіцієнтів, який ґрунтується на твердженні тео-реми 18.

Суть цього методу така.

1. З'ясовуємо, чи число $\mu = \alpha + i\beta$ є власним значенням матриці A, якщо це так, то знаходимо його алгебраїчну кратність. На підставі цього і висновку теореми 18, записуємо проект шуканого розв'язку у вигляді (413) зі сталими поки що неозначеними векторами $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l}, \tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l}$ з $\mathbb{R}^n$.

2. Підставляємо вираз (413) у систему (414). Після відповідних спрощень приходимо до рівності двох векторних квазімногочленів. Прирівнявши коефіцієнти, які стоять зліва і справа при однакових виразах вигляду $t^j e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^j e^{\alpha t}\sin\beta t,\ j = \overline{0, k+l}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l},\ \tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l} \in \mathbb{R}^n$.

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь. Вона може мати безліч розв'язків. Вибираємо який-небудь один з її розв'язків.

4. Підставляємо знайдені значення $\tilde{d}^0, \ldots, \tilde{d}^{k+l},\ \tilde{\tilde{d}}^0, \ldots, \tilde{\tilde{d}}^{k+l} \in \mathbb{R}^n$ у вираз розв'язку (413) і отримуємо те, що шукали.

Контрольні питання

1. Який вигляд має нормальна лінійна неоднорідна система (НЛНС) зі сталими коефіцієнтами? Яким чином можна НЛНС записати у вигляді векторного рівняння? Як знайти загальний розв'язок НЛНС зі сталими коефіцієнтами, якщо відомо загальний розв'язок відповідної однорідної системи та частковий розв'язок цієї системи?

2. У якому випадку для відшукання частковогоо розв'язку НЛНС зі сталими коефіцієнтами можна застосовувати метод неозначених коефіцієнтів? У чому його суть?

3. Як знайти частковий розв'язок НЛНС, якщо вільний член цієї системи можна подати як суму кількох векторних квазімногочленів?

4. Що таке дійсний розв'язок НЛНС зі сталими коефіцієнтами? Який вигляд має дійсний частковий розв'язок НЛНС зі сталими коефіцієнтами, якщо коефіцієнти системи — дійсні, а її вільний член — дійсний квазімногочлен?

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 7. *Знайти повний загальний дійсний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 9t^2 - 3t, \\ y' = 2x + 6y - 3t^2 - 6t + 1. \end{cases} \tag{415}$$

Розв'язування. Приймемо

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad f(t) := \begin{pmatrix} 9t^2 - 3t \\ -3t^2 - 6t + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{a}t^2 + \widetilde{b}t + \widetilde{c}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді задану систему запишемо у векторному вигляді

$$w' = Aw + \widetilde{a}t^2 + \widetilde{b}t + \widetilde{c}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{416}$$

1 крок. Знайдемо *повний загальний розв'язок* відповідної однорідної системи

$$w' = Aw. \tag{417}$$

Оскільки система другого порядку, то її повний загальний розв'язок має вигляд

$$w = C_1\varphi^1(t) + C_2\varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ \text{– довільні сталі}, \tag{418}$$

де $\{\varphi^1, \varphi^2\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (417), тобто лінійно незалежна система з двох часткових розв'язків. Для зручності викладення матеріалу сім'ї функцій

$$w = C_1\varphi^1(t), \quad w = C_2\varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ \text{– довільні сталі}, \tag{419}$$

називатимемо неповними загальними розв'язками однорідної системи (417).

Розв'язки однорідної системи (417) спробуємо шукати у вигляді векторної функції

$$w = ve^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Підставимо цей вираз у систему (417):

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t} \ \Big| : e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0.$$

Звідси випливає, що λ – власне значення матриці A, а v – власний вектор, відповідний цьому власному значенню, тобто число λ є таким і тільки таким, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{420}$$

має ненульовий розв'язок, а для цього необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві:

$$\det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{421}$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 6 - \lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 6 = \\ = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7),$$

то розв'язками рівняння (421), а отже, власними значеннями матриці A є числа

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7.$$

Очевидно, що алгебраїчні та геометричні кратності цих власних значень дорівнюють 1. Знайдемо відповідні їм загальні власні вектори, тобто загальні розв'язки відповідних лінійних однорідних систем

$$(A-\lambda_j I)v \equiv \begin{pmatrix} 1-\lambda_j & 3 \\ 2 & 6-\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j=\overline{1,2}. \tag{422}$$

Розглянемо випадок $j=1$. Оскільки $\lambda_1=0$, то маємо

$$(A-0I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто при $j=1$ система (422) еквівалентна рівнянню

$$v_1+3v_2=0,$$

звідки

$$v_1=-3v_2 \;\Rightarrow\; v_2=C_1,\; v_1=-3C_1, \;\; \text{де } C_1 \text{ -- довільна стала.} \tag{423}$$

$$v^1=\begin{pmatrix} -3C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \qquad C_1\in\mathbb{C},$$

— загальний власний вектор для власного значення $\lambda_1=0$, а отже,

$$w=\begin{pmatrix} -3C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{0t}, \quad t\in\mathbb{R}, \;\; C_1\in\mathbb{C}, \tag{424}$$

– неповний загальний розв'язок однорідної системи (417), що відповідає власному значенню λ_1 або, коротко, НЗР(λ_1).

У випадку $j=2$ одержуємо

$$(A-7I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто при $j=2$ система (422) еквівалентна рівнянню

$$2v_1-v_2=0 \;\Leftrightarrow\; v_2=2v_1,$$

звідки $v_1=C_2,\; v_2=2C_1$. У результаті отримаємо

$$v^2=\begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix}, \qquad C_2\in\mathbb{C},$$

— загальний власний вектор для власного значення $\lambda_2=7$, а отже,

$$w=\begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad C_2\in\mathbb{C}, \tag{425}$$

– неповний загальний розв'язок однорідної системи (417), що відповідає власному значенню λ_2 або, коротко, НЗР(λ_2).

Отже, повний загальний дійсний розв'язок однорідної системи (417) є сумою неповних загальних розв'язків, що відповідають власним значенням λ_1 і λ_2, тобто (див. (424) і (425)) має вигляд

$$w = \begin{pmatrix} -3C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{426}$$

2 крок. Знайдемо частковий розв'язок системи (416). Оскільки вільний член є векторним квазімногочленом, то частковий розв'язок шукатимемо у вигляді векторного квазі-многочлена методом неозначених коефіцієнтів. Враховуючи, що показник квазімногочлена, який є вільним членом цієї системи, дорівнює нулю, а нуль є власним значенням матриці A алгебраїчної кратності 1, то згідно з теоремою 18 існує частковий розв'язок заданої системи вигляду

$$w(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{427}$$

де a, b, c, d — деякі сталі вектори з $\mathbb{R}^2$. Щоби знайти значення a, b, c, d, підставимо вираз (427) у рівняння (416). У результаті отримаємо

$$3at^2 + 2bt + c = A(at^3 + bt^2 + ct + d) + \widetilde{a}t^2 + \widetilde{b}t + \widetilde{c}, \quad t \in \mathbb{R},$$

звідки

$$Aa = 0, \quad Ab = 3a - \widetilde{a}, \quad Ac = 2b - \widetilde{b}, \quad Ad = c - \widetilde{c}. \tag{428}$$

Ми отримали чотири підсистеми системи восьми лінійних алгебраїчних рівнянь із вісьмома невідомими: $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$.

Розв'яжемо першу з підсистем системи (428). Вона збігається із системою (422) при $j = 1$, а отже, вона еквівалентна рівнянню

$$a_1 = -3a_2. \tag{429}$$

В другій із підсистем системи (428) вважатимемо, що a_1 і a_2 відомі і пов'язані рівністю (429), тобто трактуватимемо її як неоднорідну систему. Одержуємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -9a_2 - 9 \\ 2 & 6 & 3a_2 + 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -9a_2 - 9 \\ 0 & 0 & 21a_2 + 21 \end{array}\right).$$

Для того, щоби дана система мала розв'язки, необхідно та достатньо виконання рівності $21a_2 + 21 = 0$. Звідси, з врахуванням (429), отримаємо

$$a_2 = -1; \quad a_1 = 3 \tag{430}$$

$$b_1 = -3b_2. \tag{431}$$

В третій із підсистем системи (428) вважатимемо, що b_1 і b_2 відомі і пов'язані рівністю (431), тобто потрактуємо її як неоднорідну систему. Перетворимо розширену матрицю, яка відповідає третій підсистемі системи (428), так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -6b_2+3 \\ 2 & 6 & 2b_2+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -6b_2+3 \\ 0 & 0 & 14b_2 \end{array}\right),$$

Для того, щоби дана система мала розв'язки, необхідно та достатньо виконання рівності $14b_2 = 0$. Звідси, з врахуванням (431), отримаємо

$$b_2 = 0; \quad b_1 = 0 \tag{432}$$

$$c_1 = -3c_2 + 3. \tag{433}$$

В четвертій із підсистем системи (428) вважатимемо, що c_1 і c_2 відомі і пов'язані рівністю (433), тобто трактуватимемо її як неоднорідну систему. Перетворимо розширену матрицю, яка відповідає четвертій підсистемі системи (428), так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3c_2+3 \\ 2 & 6 & c_2-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3c_2+3 \\ 0 & 0 & 7c_2-7 \end{array}\right).$$

Для того, щоби дана система мала розв'язки, необхідно та достатньо виконання рівності $7c_2 - 7 = 0$. Звідси, з врахуванням (433), отримаємо

$$c_2 = 1; \quad c_1 = 0 \tag{434}$$

$$d_1 = -3d_2. \tag{435}$$

де d_2 – довільне.

Оскільки ми шукаємо частковий розв'язок вихідної системи, то приймемо $d_2 = 0$. Тоді з (435) отримаємо $d_1 = 0$. Отже, частковий розв'язок системи (415) має вигляд

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t. \tag{436}$$

3 крок. З (436) та з (437) отримаємо повний загальний дійсний розв'язок нашої системи у векторній формі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \tag{437}$$

$t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

звідки отримуємо повний загальний дійсний розв'язок нашої системи у скалярній формі

$$x = -3C_1 + C_2 e^{7t} + 3t^3,$$
$$y = C_1 + 2C_2 e^{7t} - t^3 + t, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Приклад 8. *Знайти повний загальний дійсний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = x - y - \cos 2t, \\ y' = 5x - y - \cos 2t + 2\sin 2t. \end{cases} \tag{438}$$

Розв'язування. Нехай

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t =$$
$$= \widetilde{a} \cos 2t + \widetilde{c} \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$\widetilde{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді система (438) може бути записана у векторному рівняння вигляді

$$w' = Aw + \widetilde{a} \cos 2t + \widetilde{c} \sin 2t. \tag{439}$$

1 крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$w' = Aw. \tag{440}$$

Оскільки система другого порядку, то її повний загальний розв'язок має вигляд

$$w = C_1 \varphi^1(t) + C_2 \varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ - \text{довільні сталі}, \tag{441}$$

де $\{\varphi^1, \, \varphi^2\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (417), тобто лінійно незалежна система з двох часткових розв'язків.

Для зручності викладення матеріалу сім'ї функцій

$$w = C_1 \varphi^1(t), \quad w = C_2 \varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ - \text{довільні сталі}, \tag{442}$$

називатимемо неповними загальними розв'язками однорідної системи (417).

Розв'язки однорідної системи (440) спробуємо шукати у вигляді векторної функції

$$w = v e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{443}$$

де

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Підставимо цей вираз у систему (440):

$$\lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t} \ \mid : e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0.$$

Звідси випливає, що λ – власне значення матриці A, а v – власний вектор, відповідний цьому власному значенню, тобто число λ є таким і тільки таким, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{444}$$

має ненульовий розв'язок, а для цього необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, тобто

$$0 = \det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 5 = \lambda^2 + 4.$$

Отже, $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ – власні значення матриці A.

Якщо б нас цікавив повний загальний комплексний розв'язок нашої системи, то далі ми діяли б точно так само як в при розв'язуванні попереднього прикладу. Але оскільки коефіцієнти системи (440) є дійсними і нас цікавить її повний загальний дійсний розв'язок, то нам потрібно мати фундаментальну систему розв'язків системи (440), складену з (двох) дійсних розв'язків. Ми знаходимо їх в такий спосіб. Для одного з власних значень (які у випадку дійсної матриці є комплексно спряженими), наприклад, λ_1 знаходимо один (!!!) відповідний йому власний вектор:

$$(A - \lambda_1 I)v \equiv \begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{445}$$

Зведемо основну матрицю цієї лінійної алгебраїчної системи до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1-2i \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & -1-2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отож, система (445) еквівалентна рівнянню

$$(-1+2i)v_1 + v_2 = 0.$$

Оскільки в даному випадку ми шукаємо тільки один (!!!) власний вектор, то приймемо $v_1 = 1$, а тоді $v_2 = (1-2i)$. Отже (див. (443)), маємо частковий розв'язок системи (440) вигляду

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Виділимо дійсну й уявну частини цього розв'язку, зваживши на те, що це будуть лінійно незалежні дійсні розв'язки однорідної системи (440).

Використовуючи формулу Ейлера, отримуємо

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, повний загальний дійсний розв'язок рівняння (440) має вигляд

$$w = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{446}$$

де C_1, C_2 — довільні дійсні сталі.

2 крок. Знайдемо частковий розв'язок неоднорідного системи (439). Оскільки показник вільного члена $\mu = 2i$ збігається з власним значенням матриці A, яке має алгебричну кратність 1, то частковий розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$w = (at + b)\cos 2t + (ct + d)\sin 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

де a, b, c, d — сталі вектори з $\mathbb{R}^2$, значення яких треба знайти. Підставимо цей вираз у рівняння (439)

$$\begin{aligned} &a\cos 2t - 2(at+b)\sin 2t + c\sin 2t + 2(ct+d)\cos 2t = \\ &= ((Aa)t + Ab)\cos 2t + ((Ac)t + Ad)\sin 2t + \widetilde{a}\cos 2t + \widetilde{c}\sin 2t. \end{aligned}$$

Зведемо подібні члени і прирівняємо коефіцієнти в лівій і правій частинах при однакових виразах вигляду $t\cos 2t$, $t\sin 2t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} t\cos 2t: &\qquad 2c = Aa \\ t\sin 2t: &\qquad -2a = Ac \\ \cos 2t: &\qquad a + 2d = Ab + \widetilde{a} \\ \sin 2t: &\qquad -2b + c = Ad + \widetilde{c}. \end{aligned}$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$Aa = 2c, \quad Ac = -2a, \quad Ab = a + 2d - \widetilde{a}, \quad Ad = -2b + c - \widetilde{c} \tag{447}$$

для знаходження коефіцієнтів a, b, c, d. З першого рівняння системи (447) знайдемо $c = \frac{1}{2}Aa$ і підставимо у друге

$$A^2 a = -4a,$$

тобто

$$(A^2 + 4I)a = 0.$$

Оскільки

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

то $A^2 + 4I = \mathbb{O}$, де $\mathbb{O}$ — нульова матриця. Отож, з перших двох рівнянь знаходимо $c = \frac{1}{2}Aa$, де a — поки що неозначене.

З третього рівняння системи (447) маємо $d = \frac{1}{2}(Ab - a + \widetilde{a})$. Підставимо цей вираз у четверте рівняння системи (447). У результаті одержимо

$$A^2 b - Aa + A\widetilde{a} = -4b + 2c - 2\widetilde{c}.$$

Оскільки $2c = Aa$, $A^2 + 4I = 0$, то доходимо висновку, що третє і четверте рівняння системи (447) еквівалентне співвідношенням

$$2Aa = A\widetilde{a} + 2\widetilde{c}, \quad b - \text{ довільне.}$$

Позаяк

$$A\widetilde{a} + 2\widetilde{c} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і $\det A \neq 0$, то $a = 0$, а отже, $c = 0$. Приймемо, для спрощення записів, $b = 0$. Тоді

$$d = \frac{1}{2}\widetilde{a} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отож,

$$w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{448}$$

— (частковий) розв'язок системи (438).

3 крок. З (448) та (446) випливає, що загальний дійсний розв'язок системи (438) має вигляд векторній формі

$$w = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix},$$

або у скалярній формі

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{2}\sin 2t,$$
$$y = C_1(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2(\sin 2t - 2\cos 2t) - \frac{1}{2}\sin 2t,$$

$t \in \mathbb{R}$, C_1, C_2 — довільні дійсні сталі. $\square$

Приклад 9. *Знайти загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t - 3t + 1, \\ y' = 2x - y + e^t - 2t. \end{cases} \tag{449}$$

Розв'язування. Нехай

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} e^t - 3t + 1 \\ e^t - 2t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \widetilde{a}e^t + \widetilde{b}t + \widetilde{c}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$\widetilde{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (449) можна записати у вигляді векторного рівняння

$$w' = Aw + \widetilde{a}e^t + \widetilde{b}t + \widetilde{c}. \tag{450}$$

1 крок. Знайдемо повний загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$w' = Aw. \tag{451}$$

Оскільки система другого порядку, то її повний загальний розв'язок має вигляд

$$w = C_1\varphi^1(t) + C_2\varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ \text{– довільні сталі}, \tag{452}$$

де $\{\varphi^1,\, \varphi^2\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (417), тобто лінійно незалежна система з двох часткових розв'язків. Для зручності викладення матеріалу сім'ї функцій

$$w = C_1\varphi^1(t), \quad w = C_2\varphi^2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \ \text{– довільні сталі}, \tag{453}$$

називатимемо *неповними загальними розв'язками* однорідної системи (417).

Розв'язки однорідної системи (451) спробуємо шукати у вигляді векторної функції

$$w = ve^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Підставимо цей вираз у систему (451):

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t} \ (| : e^{\lambda t}) \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Звідси випливає, що λ – власне значення матриці A, а v – власний вектор, відповідний цьому власному значенню, тобто число λ є таким і тільки таким, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{454}$$

має ненульовий розв'язок, а для цього необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, тобто

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

то $\lambda_1 = 1$ є власним значення матриці A алгебраїчної кратності $k_1 = 2$.

Знайдемо загальний власний вектор для власного значення λ_1, який, як відомо, є загальним розв'язком рівняння

$$(A - \lambda_1 I)v = 0. \tag{455}$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, система (470) рівносильна рівнянню

$$v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2. \tag{456}$$

Оскільки у рівнянні (471) фігурує тільки одна вільна змінна, то геометрична кратність в. з. λ_1 дорівнює $l_1 = 1$. Отож, загальний розв'язок однорідної системи (451) треба шукати у вигляді добутку векторного полінома степеня $k_1 - l_1 = 1$ на e^t, тобто

$$w = (at + b)e^t.$$

Підставимо цей вираз w в (451):

$$ae^t + (at + b)e^t = A(at + b)e^t.$$

Звідси

$$Aa = a, \qquad Ab = b + a,$$

тобто

$$(A - I)a = 0, \qquad (A - I)b = a. \tag{457}$$

Перше з рівнянь системи (472) збігається з рівнянням для знаходження власних векторів, відповідних власному значенню $\lambda_1 = 1$. Отже, $a = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $a_2 \in \mathbb{R}$. Враховуючи це, з другого рівняння маємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & a_2 \\ 2 & -2 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

звідки $2b_1 - 2b_2 = a_2$. Прийнявши $a_2 = 2C_1$, $b_2 = C_2$, де C_1, C_2 — довільні сталі, отримаємо $b_1 = C_1 + C_2$, тобто $a = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Отож, повний загальний розв'язок однорідної системи (451) має вигляд

$$w = \left[\begin{pmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \right] e^t \equiv$$

$$\equiv C_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t, \tag{458}$$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ –довільні сталі.

2 крок Проект часткового розв'язку рівняння (450), на підставі теореми 18, має вигляд

$$w = (mt^2 + nt + s)e^t + pt + q, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{459}$$

де $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ — сталі вектори з $\mathbb{R}^2$.

Підставимо вираз (458) у (450)

$$\begin{aligned} &(2mt + n)e^t + (mt^2 + nt + s)e^t + p = \\ &\qquad = A(mt^2 + nt + s)e^t + A(pt + q) + \widetilde{a}e^t + \widetilde{b}t + \widetilde{c}. \end{aligned}$$

Зведемо подібні члени у лівій і правій частинах цієї рівності. Враховуючи, що функції t^2e^t, te^t, e^t, t, 1 лінійно незалежні, відповідно прирівняємо коефіцієнти, які стоять відповідно при них в обох частинах отриманої рівності. У результаті матимемо

$$\begin{aligned} t^2e^t: &\qquad Am = m, \\ te^t: &\qquad An = 2m+n, \\ e^t: &\qquad As+\widetilde{a} = n+s, \\ t: &\qquad Ap+\widetilde{b} = 0, \\ 1: &\qquad Aq+\widetilde{c} = p. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{gathered} (A-I)m = 0, \quad (A-I)n = 2m, \quad (A-I)s = n-\widetilde{a}, \\ Ap = -\widetilde{b}, \quad Aq = p-\widetilde{c}. \end{gathered} \tag{460}$$

З першої підсистеми, яка збігається із системою (470), випливає, що $m_1 = m_2$, тобто $m = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$. З другої підсистеми одержуємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2m_2 \\ 2 & -2 & 2m_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2m_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, приходимо до співвідношення $n_1 - n_2 = m_2$ й отримуємо

$$m = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_2 \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} n_2+m_2 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

де m_2 і n_2 — поки що неозначені.

З третьої підсистеми системи (460) одержуємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & n_2+m_2-1 \\ 2 & -2 & n_2-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & n_2+m_2-1 \\ 0 & 0 & -m_2 \end{array}\right).$$

Отже, $m_2 = 0$, $s_1 = \frac{1}{2}(2s_2+n_2-1)$, а n_2, s_2 — довільні. Приймемо $n_2 = s_2 = 0$. Тоді $s_1 = -\frac{1}{2}$. Отож,

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо розширену матрицю четвертої підсистеми (460) так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

звідки $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, тобто, $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Підставивши це значення в п'яту підсистему системи (460), знайдемо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси $q_1 = 0,\ \ q_2 = 0$, а отже,

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У результаті проведених міркувань одержимо, що функція

$$w = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \equiv \begin{pmatrix} te^t + t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{461}$$

є (частковим) розв'язком рівняння (450).

3 крок. Отож, на підставі (458), (461) загальний розв'язок системи (449) має вигляд

$$\begin{aligned} &x = (2C_1 t + C_1 + C_2)e^t + te^t + t, \\ &y = (2C_1 t + C_2)e^t + te^t, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{– довільні сталі.} \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

826. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2; \end{cases}$ **827.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$ **830.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases}$

840. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

Домашні завдання:

Розв'язати системи рівнянь:

832. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}; \end{cases}$ **833.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t; \end{cases}$

841. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t; \end{cases}$ **843.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

845. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

826. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2$, $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t$;
827. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t$,
$y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t$;
829. $x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)$,
$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-2t}$;
830. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - 2te^{2t}$;
840. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t\sin t - t\cos t$,
$y = C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\sin t - \cos t) - 2t\cos t + \sin t + \cos t$;
832. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$;
833. $x = C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t + e^t + t + 1$,
$y = C_1e^t(-\cos t - \sin t) + C_2e^t(\cos t - \sin t) - 2e^t - 2t - 1$;
841. $x = (C_1 + C_2t - t^2)e^t$, $y = [C_1 - C_2 + (C_2+2)t - t^2]e^t$;
843. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}$;
845. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$,
$y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$.

Практичне заняття № 27

Нормальні лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами (метод варіації сталих)

Довідкова інформація

Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$) або комплексних ($\mathbb{P} = \mathbb{C}$) чисел.

Означення 20. *Нормальною лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь (НЛС) називають систему рівнянь вигляду*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{462}$$

де $n \geqslant 2$ — натуральне число, t — незалежна змінна, яка пробігає значення з інтервалу (a, b) числової осі $\mathbb{R}$ ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), a_{kl}, f_k, $k, l = \overline{1, n}$, — задані на (a, b) зі значеннями в $\mathbb{P}$ функції, а x_k, $k = \overline{1, n}$, — невідомі функції від змінної t, що приймають значення в $\mathbb{P}$.

Функції a_{kl}, $k, l = \overline{1, n}$, називають *коефіцієнтами*, а f_k, $k = \overline{1, n}$, — *вільними членами* системи (462). Якщо $f_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, то систему (462) називають *нормальною лінійною однорідною системою (НЛОС)*, в іншому випадку — *нормальною лінійною неоднорідною системою (НЛНС)*.

Всюди вважаємо, що коефіцієнти і вільні члени системи (462) є неперервними на інтервалі (a, b), і під *розв'язком* системи (462) розуміємо набір функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), \; \dots, \; x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in (a, b),$$

з простору $C^1((a, b); \mathbb{P})$, якщо при підстановці їх в рівняння системи отримуємо тотожності (під $C^1((a, b); \mathbb{P})$ розуміємо лінійний простір, складений з визначених на (a, b) неперервно-диференційовних функцій зі значеннями в $\mathbb{P}$).

Зауваживши, що якщо систему (462) записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

і ввівши позначення

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \; f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b),$$

система (462) запишеться у векторному вигляді:

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{463}$$

де t — незалежна дійсна змінна, яка набуває значень з інтервалу (a,b), $A : (a,b) \to M_n(\mathbb{P})$, $f : (a,b) \to \mathbb{P}^n$ — задані, відповідно, матрична та векторна функції, x — невідома векторна функція зі значеннями в $\mathbb{P}^n$ від змінної t.

Під *розв'язком* НЛС у вигляді векторного рівняння (463) розуміємо векторну функцію $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$, з простору $C^1\big((a,b);\mathbb{P}^n\big)$, яка при підстановці її у рівняння (463) перетворює його в тотожність на інтервалі (a,b).

Систему

$$x' = A(t)x\,, \tag{464}$$

де $A(t), t \in (a,b)$, — та сама матрична функція, що в (463), називаємо *нормальною лінійною однорідною системою* (коротко, НЛОС) *відповідною НЛНС* (463).

Теорема 19. *Повний загальний розв'язок НЛНС (463) має вигляд*

$$x = \overset{\circ}{x}(t,C) + \overset{*}{x}(t), \qquad t \in (a,b), \quad C \in \mathbb{P}^n,$$

де $x = \overset{\circ}{x}(t,C)$, $t \in (a,b)$, $C \in \mathbb{P}^n$, *— повний загальний розв'язок НЛОС* (464)*, а* $x = \overset{*}{x}(t)$, $t \in (a,b)$, *— (частковий) розв'язок неоднорідного рівняння* (463)*.*

Означення 21. *Систему n ЛН розв'язків НЛОС* (464) *називають фундаментальною системою розв'язків НЛОС* (464) *(скорочено, ФСР* (464)*).*

Теорема 20. *Повний загальний розв'язок НЛОС* (464) *можна записати у вигляді*

$$x = C_1\varphi^1(t) + \dots + C_n\varphi^n(t), \qquad t \in (a,b), \quad C_1,\dots,C_n \in \mathbb{P},$$

де $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ *— яка-небудь (фіксована) ФСР* (464)*.*

Розглянемо НЛОС (464). Нехай

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^1(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi^n(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^n(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b),$$

— розв'язки цієї НЛОС. Матричну функцію

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix} \equiv \big(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)\big), \qquad t \in (a,b),$$

називають *матрицею розв'язків*, *матрицiантом* або *матрицею Вронського* НЛОС (464), а коротко, МР (464).

Визначник цієї матриці

$$W(t) = \det \Phi(t), \qquad t \in (a, b)$$

називають *визначником Вронського* або *вронскiаном*.

Якщо ж задані розв'язки $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ є ЛН, тобто утворюють ФСР (464), то відповідну матрицю розв'язків $\Phi(t)$, $t \in (a, b)$, називають *фундаментальною матрицею розв'язків* НЛОС (464), а коротко ФМР (464).

Зі властивостей добутків матриць і теореми 20 випливають такі два твердження.

Наслідок 7. *Повний загальний розв'язок НЛОС* (464) *можна записати у вигляді*

$$x = \Phi(t)C, \qquad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{P}^n, \tag{465}$$

де $\Phi(t)$*,* $t \in (a, b)$*, — ФМР (464).*

Зауважимо, що метод знаходження повного загального розв'язку системи (464) описано раніше. Частковий розв'язок системи (463), якщо відомо повний загальний розв'язок системи (464), можна знайти методом варіації сталих. Цей метод ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 21. *Нехай* $\Phi(t)$*,* $t \in (a, b)$*, — фундаментальна матриця НЛОС* (464)*, яка відповідає НЛНС (463). Тоді частковий розв'язок НЛНС (463) можна знайти у вигляді*

$$x = \Phi(t)\psi(t), \qquad t \in (a, b), \tag{466}$$

де $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^\top$ *— векторна функція, яка визначається із системи рівнянь*

$$\Phi(t)\psi'(t) = f(t), \qquad t \in (a, b). \tag{467}$$

Наслідок 8. *Нехай* $\Phi(t)$*,* $t \in (a, b)$*, — фундаментальна матриця НЛОС* (464)*, відповідної НЛНС (463). Тоді повний загальний розв'язок НЛНС* (463) *можна записати у вигляді*

$$x = \Phi(t)C + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds, \qquad t \in (a, b), \quad C \in \mathbb{P}^n, \tag{468}$$

де t_0 *— яке-небудь фіксоване число з* (a, b)*.*

Суть ***методу методу варiацiї сталих*** знаходження часткового розв'язку НЛНС (463) така.

1. Знайшовши фундаментальну матрицю $\Phi(t)$, $t \in (a, b)$, відповідної НЛОС, записуємо проєкт часткового розв'язку НЛНС (463) у вигляді (466).

2. Записуємо систему рівнянь (467) для знаходження невідомої векторної функції ψ. Цю систему розв'язуємо для довільного фіксованого $t \in (a, b)$ як систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи, наприклад, метод Крамера.

4. Підставляємо знайдені вирази $\psi_1, \ldots, \psi_n$ проєкт (466) часткового розв'язку НЛНС (463) і отримуємо те, що шукали.

Контрольні питання

1. Що таке нормальна лінійна неоднорідна система (НЛНС)?

2. Як можна записати НЛНС у векторному вигляді?

3. В чому суть методу варіації сталих знаходження часткових розв'язків НЛНС?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти повний загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \dfrac{1}{t} - 4\ln t, \\[2ex] y' = -x + y + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

◀ ***0-ий крок.*** Введемо позначення

$$w := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - 4\ln t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Тоді дану систему можна записати у векторному вигляді

$$w' = Aw + f(t).$$

1-ий крок. Знайдемо загальний розв'язок лінійної однорідної системи

$$w' = Aw. \tag{469}$$

Знайдемо характеристичні числа цієї системи, тобто власні значення матриці A. Маємо

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Отже, число $\lambda_1 = 2$ є власним значенням матриці A, алгебраїчна кратність якого $k_1 = 2$.

Знайдемо загальний власний вектор для власного значення λ_1, який, як відомо, є загальним розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda_1 I)v = 0. \tag{470}$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, система (470) рівносильна одному рівнянню

$$v_1 + v_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = -v_2. \tag{471}$$

Оскільки у рівнянні (471) фігурує тільки одна вільна змінна, то геометрична кратність в. з. λ_1 дорівнює $l_1 = 1$. Отож, повний загальний розв'язок однорідної системи (469) треба шукати у вигляді добутку векторного многочлена степеня $k_1 - l_1 = 1$ на e^{2t}, тобто

$$w = (at + b)e^{2t}.$$

Підставимо цей вираз w в (469):

$$ae^{2t} + 2(at+b)e^{2t} = A(at+b)e^{2t}.$$

Звідси

$$t: \ Aa = 2a, \qquad 1: \ Ab = 2b + a,$$

тобто

$$\begin{cases} (A-2I)a = 0, \\ (A-2I)b = a. \end{cases} \tag{472}$$

Перша з підсистем системи (472) збігається із системою для знаходження власних векторів, відповідних власному значенню $\lambda_1 = 1$. Отже, $a_1 = -a_2$, тобто $a = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $a_2 \in \mathbb{R}$. Враховуючи це, з другого рівняння маємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -a_2 \\ -1 & -1 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

звідки

$$b_1 + b_2 = -a_2 \Rightarrow \ b = \begin{pmatrix} -a_2 - b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, вільними змінними в системі (472) є a_2, b_2. Поклавши $a_2 = C_1$, $b_2 = C_2$, отримаємо повний загальний розв'язок лінійної однорідної системи (469) у вигляді

$$w = \begin{pmatrix} -C_1 t - (C_1 + C_2) \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} e^{2t} = C_1 \begin{pmatrix} -t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

2-ий крок. Частковий розв'язок лінійної неоднорідної системи

$$w' = Aw + f(t) \tag{473}$$

будемо шукати у вигляді

$$w = \psi_1(t) \begin{pmatrix} -t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + \psi_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{474}$$

Функції ψ_1, ψ_2 знаходимо із системи:

$$\begin{pmatrix} -(t+1)\, e^{2t} & -e^{2t} \\ t\, e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - 4\ln t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи дану систему методом Крамера, знаходимо

$$\psi_1'(t) = (\frac{2}{t} - 4\ln t)e^{-2t},$$

$$\psi_2'(t) = (2 + \frac{1}{t} - 4t\ln t)e^{-2t}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) = -2\ln t \cdot e^{-2t}, \\ &\psi_2(t) = (2t+1)\ln t \cdot e^{-2t}. \end{aligned} \tag{475}$$

Підставивши (475) у (474), одержуємо частковий розв'язок лінійної неоднорідної системи (473)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\ln t \cdot \begin{pmatrix} -t-1 \\ t \end{pmatrix} + (1+2t)\ln t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ln t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3-ий крок. Повний загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи є сумою повного загального розв'язку лінійної однорідної системи, знайденого на першому кроці, та часткового розв'язку лінійної неоднорідної системи, який знайдений на другому кроці:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \ln t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання

Знайти загальний розв'язок системи:

846. $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$ **849.** $\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$

850. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}; \end{cases}$ **858.** $x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$

863. $x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Домашні завдання

Знайти загальний розв'язок системи:

847. $\begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}; \end{cases}$ **848.** $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$

851. $x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **853.** $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

855. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; **857.** $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

862. $x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **866.** $x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

846. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2$;

847. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t$,
$y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t$;

848. $x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|e^t - 1|$,
$y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1|$;

849. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t|$;

850. $x = (C_1 + 2C_2 t - 8t^{5/2})e^t$,
$y = (C_1 + 2C_2 t - C_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2})e^t$;

851. $x = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

853. $x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$;

855. $x = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

857. $x = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$;

858. $x = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$;

862. $x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t + 1 \\ -t \end{pmatrix}$;

863. $x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$;

866. $x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2-2t+2 \\ 2t^2-2t \end{pmatrix}.$

Практичне заняття № 28

Контрольна робота № 6

Варіант № 1

Розв'язати НЛОС $x' = Ax$, де

$$1.\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати НЛНС:

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x + y + 2e^{2t}, \\ y = -2x + 4y + 7e^{2t}; \end{cases} \quad 5. \begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2\cos 2t \\ \dot{y} = -4x - y - 3\sin 2t; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 1/(e^{-t} - 1), \\ \dot{y} = -2x + y + e^{t}/(e^{-t} - 1). \end{cases}$$

Практичне заняття № 29

Перші інтеграли нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь

Довідкова інформація

Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь називають систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{476}$$

де $n \geqslant 2$ – яке-небудь натуральне число, t – незалежна дійсна змінна, $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі дійсні функції від змінної t, $x_1', \ldots, x_n'$ – похідні цих функцій, $f_1 : D \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ – задані неперервні функції, D – область в просторі $\mathbb{R}^{1+n}$.

Число n називають *порядком* системи (476).

Означення 22. *Розв'язком нормальної системи (476) називають систему функцій*

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \quad t \in \langle a, b\rangle, \quad \text{де} \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

які задовольняють умови:

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^1\big(\langle a, b\rangle\big)$;

2) $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$;

3) $\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad \forall t \in \langle a, b\rangle. \end{cases}$

Означення 23. ***Загальним розв'язком*** *системи рівнянь (476) називають систему функцій*

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_n),\ \ldots,\ x_n = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n),\ \ (t, C_1, \ldots, C_n) \in G, \tag{477}$$

де G — область в $\mathbb{R}^{1+n}$, які задовольняють умову:

• *для будь-яких конкретних допустимих значень $C_1^0, ..., C_n^0$ параметрів $C_1, ..., C_n$ система функцій $x_1 = \psi_1(t, C_1^0,\ ..., C_n^0)$, ..., $x_n = \psi_n(t, C_1^0, ..., C_n^0)$ від змінної t є розв'язком системи (476).*

Якщо загальний розв'язок (477) системи рівнянь (476) має властивість:
• *для будь-якого розв'язку $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, системи (476) знайдуться значення $C_{1,\varphi}, \dots, C_{n,\varphi}$ параметрів $C_1, \dots, C_n$ такі, що*

$$\varphi_1(t) = \psi_1(t, C_{1,\varphi}, \dots, C_{n,\varphi}), \dots, \varphi_n(t) = \psi_n(t, C_{1,\varphi}, \dots, C_{n,\varphi}), \qquad t \in \langle a, b\rangle,$$

то цей загальний розв'язок називають ***повним загальним розв'язком.***

Параметри $C_1, \dots, C_n$ називають *довільними сталими.*

Означення 24. *Під* ***інтегралом*** *системи (476) розуміють систему рівнянь*

$$\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{478}$$

таку, що будь-яка система неперервно-диференційовних функцій $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, неявно заданих системою рівнянь (478), є розв'язком системи (476).

Означення 25. ***Загальним інтегралом*** *системи (476) називають систему співвідношень*

$$\Psi_1(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n) = 0, \dots, \Psi_n(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n) = 0, \tag{479}$$

які зв'язують змінні t, $x_1, \dots, x_n$, $C_1, \dots, C_n$, таку, що
• *при довільно фіксованих значеннях $C_1^0, \dots, C_n^0$ відповідних параметрів (довільних сталих) $C_1, \dots, C_n$ система рівнянь*

$$\Psi_1(t, x_1, \dots, x_n, C_1^0, \dots, C_n^0) = 0, \dots, \Psi_n(t, x_1, \dots, x_n, C_1^0, \dots, C_n^0) = 0$$

є інтегралом системи (476).

Якщо загальний інтеграл (479) має властивість:
• *для будь-якого інтегралу (478) системи (476) знайдуться допустимі значення $C_{1,\Phi}, \dots, C_{n,\Phi}$ параметрів (довільних сталих) $C_1, \dots, C_n$ такі, що*

$$\begin{gathered}\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) \equiv \Psi_1(t, x_1, \dots, x_n, C_{1,\Phi}, \dots, C_{n,\Phi}), \dots, \\ \Phi_m(t, x_1, \dots, x_n) \equiv \Psi_m(t, x_1, \dots, x_n, C_{1,\Phi}, \dots, C_{n,\Phi}),\end{gathered}$$

то цей загальний інтеграл називають ***повним загальним інтегралом.***

Дамо означення першого інтеграла системи (476).

Означення 26. ***Першим інтегралом*** *системи (476) називають неперервно диференційовну функцію* $u(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, *де* D_0 *— підобласть області* D, *якщо вона не є сталою і для будь-якого її розв'язку*

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \qquad t \in \langle a, b \rangle,$$

такого, що $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in D_0$, $t \in \langle a, b \rangle$, *виконується рівність*

$$u(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = C_\varphi \quad \forall t \in \langle a, b \rangle,$$

де C_φ *— стала, яка залежить від заданого розв'язку.*

Теорема 22. *Нехай функція* $u(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, *де* D_0 *— підобласть області* D, *належить простору* $C^1(D_0)$ *і не є сталою. Тоді* u *буде першим інтегралом системи* (476) *в тому і лише тому випадку, коли виконується рівність*

$$\frac{\partial u(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \ (t, x_1, \dots, x_n) \in D_0.$$

Означення 27. *Перші інтеграли* $u_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, *системи* (476) *називають незалежними, якщо*

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in D_0.$$

Теорема 23. *Для довільної точки* $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ *знайдеться її окіл, в якому визначені* n *незалежні перші інтеграли системи* (476) *і будь-який інший перший інтеграл цієї системи функційно залежний від них.*

Будь-яку систему з n незалежних перших інтегралів називають ***базовою системою перших інтегралів***.

Нехай $u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)$, $(t, x) \in D_0$, де D_0 — підобласть області D, — базова система перших інтегралів системи (476). Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} u_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n \end{cases}, \tag{480}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі, задає сім'ю всеможливих інтегральних ліній системи (476), що лежать в D_0.

Звідси, зокрема, випливає, що розв'язок задачі Коші для системи (476) з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \tag{481}$$

визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n^0 \end{cases},$$

де

$$C_1^0 := u_1(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \ \ldots, \ C_n^0 := u_n(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Зауваження 0.0.7. *Для знаходження перших інтегралів системи* (476) *зручно записати її в симетричній формі. Це робиться так. Нехай*

$$f_k(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_k^*(t, x_1, \ldots, x_n)}{f_0^*(t, x_1, \ldots, x_n)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння даної системи і провівши нескладні перетворення, отримаємо

$$\frac{dt}{f_0^*(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1^*(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n^*(t, x_1, \ldots, x_n)}. \tag{482}$$

Далі будуємо різні інтегровні комбінації, тобто записуємо дану систему у вигляді

$$dg_1^*(t, x_1, \ldots, x_n) = dg_1^{**}(t, x_1, \ldots, x_n), \quad dg_n^*(t, x_1, \ldots, x_n) = dg_n^{**}(t, x_1, \ldots, x_n),$$

звідки отримуємо (480).

Для побудови використовуємо таку властивість пропорцій:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_m}{b_m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots k_ma_m}{k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots k_mb_m} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_m}{b_m},$$

де $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots k_m$ — будь-які числа.

Контрольні питання

1. Що таке нормальна система n-го порядку? Що називають розв'язком, загальним розв'язком, повним загальним розв'язком нормальної системи?

2. Що називають першим інтегралом нормальної системи? Сформулювати критерій першого інтегралу НС. Поняття системи незалежних перших інтегралів. Існування базової системи перших інтегралів нормальної системи.

3. Який вигляд має повний загальний інтеграл нормальної системи при наявності її базової системи перших інтегралів? Як записується розв'язок задачі Коші для нормальної системи при наявності її базової системи перших інтегралів?

Приклади розв'язування типових задач

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x} \\ \\ z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)} \end{cases}, \tag{483}$$

де x — незалежна змінна, а $y = y(x)$, $z = z(x)$ — невідомі функції.

◀ Використаємо метод виключення змінної. З першого рівняння системи (483) виразимо

$$z = y'x.$$

Підставивши цей вираз у друге рівняння даної системи, одержимо

$$y''x + y' = \frac{y'x(y + 2y'x - 1)}{x(y-1)}.$$

Звідси отримуємо рівняння другого порядку

$$y''(y-1) = 2y'^{\,2}. \tag{484}$$

Вводячи у рівнянні (484) заміну змінних

$$y' = p(y), \quad \text{де } \ p = p(y), \tag{485}$$

і врахувавши, що тоді $y'' = p'p$, зводимо дане рівняння до рівняння першого порядку

$$p'p(y-1) = 2p^2.$$

Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{dp}{p} = \frac{2\,dy}{y-1}, \quad p = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$p = C_1(y-1)^2,$$

де C_1 — довільна стала.

Повертаючись до старих змінних (див. (485)), отримаємо

$$y' = C_1(y-1)^2,$$

звідки відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Оскільки $z = y'x$, то

$$z = C_1(y-1)^2 x = C_1 \frac{x}{(C_1 x + C_2)^2}.$$

Отже, розв'язком даної системи буде пара функцій:

$$y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}\,, \quad z = C_1 \frac{x}{(C_1 x + C_2)^2}\,,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. ►

2. Розв'язати нормальну систему

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}} \tag{486}$$

◄ З першої інтегровної комбінації знаходимо

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = C_1, \tag{487}$$

де C_1 – довільна стала.

Знайдемо другу інтегровну комбінацію. Оскільки у другій інтегровній комбінації має використовуватись третє співвідношення системи (486), то, як видно, у цей вираз входить добуток xy, який можна утворити домноживши чисельник і знаменник першого співвідношення системи (486) на y, а другого – на x, і "додавши" їх:

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{2xyz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}} \;\Leftrightarrow\; d(xy) = \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2+1}} \;\Leftrightarrow\; dxy = \frac{d(z^2+1)}{\sqrt{z^2+1}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_2, \tag{488}$$

де C_2 – довільна стала.

Знайдена система незалежних перших інтегралів (487), (488) задає повний загальний інтеграл системи (486). ►

3. Розв'язати нормальну систему

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z} \tag{489}$$

та перевірити чи функція $w(x, y, z, u) = yz - ux$ є першим інтегралом цієї системи.

◄ З першої інтегровної комбінації знаходимо

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,dx + y\,dy = 0 \;\Big|\; \times 2 \quad \Leftrightarrow \quad dx^2 + dy^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C_1, \tag{490}$$

де C_1 – довільна стала. Це є один з перших інтегралів даної системи.

З другої інтегровної комбінації знаходимо

$$\frac{dz}{u} = -\frac{du}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z\,dz + u\,du = 0 \;\Big|\; \times 2 \quad \Leftrightarrow \quad dz^2 + du^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + u^2 = C_2, \tag{491}$$

де C_2 – довільна стала. Це є ще один з перших інтегралів даної системи.

Знайдемо третю інтегровну комбінацію, використавши три співвідношення системи (489):

$$\frac{u\,dx + x\,du}{uy - xz} = \frac{z\,dy + y\,dz}{-zx + yu} \Rightarrow d(xu) = d(zy) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad xu - zy = C_3, \tag{492}$$

де C_3 – довільна стала.

Отримана система перших незалежних інтегралів (490), (491), (492) визначає повний загальний інтеграл (489).

Запишемо систему (489) у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \\ \dfrac{dz}{dt} = u \\ \dfrac{du}{dt} = -z. \end{cases} \tag{493}$$

Для того щоби функція w була першим інтегралом системи (493) необхідно і достатньо виконання рівності

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} = 0.$$

В даному випадку для заданої функції w маємо

$$-uy + z(-x) + yu - x(-z) = -zx + zx = 0,$$

звідки бачимо, що w є першим інтегралом системи (493), а отже, і вихідної системи. ▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

В задачах 1141 – 1162 розв'язати вказані системи рівнянь, а в 1161 – 1162 - ще і перевірити чи є функції u_1 і u_2 першими інтегралами цих систем:

1141. $y' = \dfrac{x}{z},\ z' = -\dfrac{x}{y}.$ **1146.** $\dfrac{dx}{2y-z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

1150. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y}.$ **1156.** $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

1161. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2-t}{y},\ \dfrac{dy}{dt} = -x,\ \ u_1(t,x,y) = t^2 + 2xy,\ u_2(t,x,y) = x^2 - ty.$

Домашні завдання:

1142. $y' = \dfrac{y^2}{z-x},\ z' = y+1.$ **1144.** $y' = y^2 z,\ z' = \dfrac{z}{x} - yz^2.$

1147. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}.$ **1148.** $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}.$

1151. $\dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}.$

1159. $\dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2-xz}.$

1162. $\dot{x} = xy,\ \dot{y} = x^2+y^2;\ \phi_1 = x\ln y - x^2 y;\ \phi_2 = \dfrac{y^2}{x^2} - 2\ln x.$

Відповіді:

1141. $y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \dfrac{1}{2C_1C_2} e^{-C_1x^2}$; **1146.** $y = C_1 z,\ x = 2y - z + C_2$; **1150.** $x^2 - z^2 = C_1,\ y^2 - u^2 = C_2,\ (x+z) = C_3(u+y)$; **1156.** $y = C_1 z,\ x - y^2 - z^2 = C_2 z$; **1161.** 1) так; 2) ні; **1142.** $y = C_2 e^{C_1 x},\ z = x + \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 x},\ y = 0,\ z = x + C$; **1144.** $y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \dfrac{2C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2},\ y = 0,\ z = Cx$; **1147.** $x^2 - y^2 = C_1,\ x + y = C_2 z$; **1148.** $x - y = C_1(y - z),\ (x+y+z)(x-y)^2 = C_2$; **1151.** $x + z = C_1,\ y + u = C_2,$ $(x-z)^2 + (y-u)^2 = C_3$; **1159.** $x + z - y = C_1,\ \ln|x| + \dfrac{z}{y} = C_2$; **1162.** 1) ні; 2) так.

Практичне заняття № 30

Рівняння з частинними похідними першого порядку

Довідкова інформація

Нехай $n \geqslant 2$ — довільне натуральне число.

Означення 28. *Диференціальним рівнянням з частинними похідними (далі — рівнянням з частинними похідними) першого порядку називають співвідношення вигляду*

$$\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{494}$$

яке зв'язує незалежні змінні $x_1, \ldots, x_n$, функцію $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ від них та її частинні похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Під *розв'язком* рівняння (494) будемо розуміти функцію u, яка визначена та неперервно диференційовна в деякій області простору $\mathbb{R}^n$ і при підстановці її в дане рівняння отримуємо тотожність.

Якщо рівняння (494) має вигляд

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{495}$$

то його називають *лінійним однорідним рівнянням.*

Рівняння (494), яке можна записати у вигляді

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = c(x_1, \ldots, x_n, u) \tag{496}$$

називають *квазілінійним рівнянням.*

Розглянемо лінійне однорідне рівняння (495), вважаючи, що $a_1, \ldots, a_n \in C^1(\Omega)$, де Ω — область в просторі $\mathbb{R}^n$. Укажемо спосіб знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (495). Для цього поряд з рівнянням (495) розглянемо динамічну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{497}$$

Нагадаємо, що першим інтегралом системи (497) називають неперервно диференційовну функцію $u(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_0$ (Ω_0 — підобласть області

Ω), яка не є сталою і для будь-якого розв'язку $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, $t \in I$ (I — числовий проміжок) маємо тотожність $u(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = C$, $t \in I$, де C — деяка стала. Часто перший інтеграл системи (497) будемо записувати у формі

$$u(x_1, \ldots, x_n) = C.$$

Відмітимо, що перші інтеграли системи (497) зручно шукати, застосовуючи метод інтегровних комбінацій до системи рівнянь (497) в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{498}$$

Між розв'язками рівняння (495) і першими інтегралами системи (497) існує тісний зв'язок, який описується такими твердженнями.

Лема 14. *Функція $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, де Ω_0 — підобласть області Ω, є першим інтегралом системи* (497) *тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком рівняння* (495).

Теорема 24. *Нехай $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — незалежні перші інтеграли системи (497) в околі точки x^0, яка не є особливою для системи* (497)*. Тоді будь-який розв'язок u рівняння (495) в деякому околі точки x^0 можна записати у вигляді композиції неперервно-диференційовної функції $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ і функцій $u_1, \ldots, u_{n-1}$, а точніше*

$$u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)), \quad x \in \Omega_0, \tag{499}$$

де Ω_0 – окіл точки x^0.

З теореми 24 випливає коректність такого означення.

Означення 29. *Загальним розв'язком рівняння (495) називають*

$$u = F(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{500}$$

де $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — незалежні перші інтеграли системи (497), а $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

Отож, можна запропонувати такий спосіб знаходження ***загального розв'язку лінійного однорідного рівняння*** (495).

1-ий крок. Записуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (498).

2-ий крок. Шукаємо базову систему перших інтегралів системи (498), тобто систему

$$u_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \quad \ldots, \quad u_n(x_1, \ldots, x_n) = C_n$$

незалежних перших інтегралів нормальної системи (498), використовуючи метод інтегровних комбінацій.

3-ий крок. Записуємо загальний розв'язок рівняння (495) у вигляді (500).

Тепер розглянемо квазілінійне рівняння (496), вважаючи, що $a_1, \ldots, a_n \in C^1(G)$, де G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Укажемо спосіб знаходження ***загального розв'язку квазілінійного рівняння*** (496).

1-ий крок. Записуємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n, u)} = \frac{du}{c(x_1, \ldots, x_n, u)}. \tag{501}$$

2-ий крок. Шукаємо базову систему перших інтегралів системи (501), тобто систему

$$w_1(x_1, \ldots, x_n, u) = C_1, \quad \ldots, \quad w_n(x_1, \ldots, x_n, u) = C_n$$

незалежних перших інтегралів нормальної системи (501) звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи метод інтегровних комбінацій.

3-ий крок. Записуємо загальний розв'язок рівняння (496) у вигляді

$$F(w_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, w_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0,$$

де $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Контрольні питання

1. Що таке рівняння з частинними похідними першого порядку, його розв'язок?

2. Які рівняння з частинними похідними називають лінійними однорідними та квазілінійними?

3. У чому полягає зв'язок між розв'язками лінійного однорідного рівняння і першими інтегралами відповідної нормальної системи? Як записати розв'язок лінійного однорідного рівняння якщо відомо $n-1$ незалежних перших інтегралів відповідної нормальної системи?

4. Який вигляд має розв'язок квазілінійного рівняння, якщо відомо n незалежних перших інтегралів відповідної нормальної системи?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

◀ Це є лінійне однорідне рівняння. Записуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо перший інтеграл даної системи

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,dx + y\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = C_1,$$

де C_1 — довільна стала.

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння записуємо в явному вигляді

$$z = F(x^2 + y^2),$$

де $F(\xi)$ — довільна диференційовна функція свого аргументу. ▶

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

◀ Це є квазілінійне рівняння. Записуємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь
$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}.$$

Один з перших незалежних інтегралів даної системи знаходимо так:
$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad \ln|z| - \ln|x| = \ln|C_1| \quad \Rightarrow$$
$$\frac{z}{x} = C_1, \tag{502}$$
де C_1 – довільна стала.

Другий з перших незалежних інтегралів даної системи знаходимо так:
$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \Rightarrow \quad x\,dx + y\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = C_2, \tag{503}$$
де C_2 — довільна стала.

Отож, на підставі (502) і (503) загальний розв'язок даного квазілінійного рівняння записуємо у вигляді
$$F\Big(\frac{z}{x},\, x^2 + y^2\Big) = 0,$$
де $F(\xi, \eta)$ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів. ▶

3. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 4u.$$

◀ Це є квазілінійне рівняння. Записуємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{3z} = \frac{du}{4u}.$$

Методом інтегровних комбінацій знайдемо три незалежних перших інтеграли даної системи
$$2\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad 2\ln|x| - \ln|y| = \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{y} = C_1,$$
$$3\frac{dy}{y} = 2\frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad 3\ln|y| - 2\ln|z| = \ln|C_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{z^2} = C_2,$$

$$4\frac{dz}{z} = 3\frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad 3\ln|u| - 4\ln|z| = \ln|C_3| \quad \Rightarrow \quad \frac{u^3}{z^4} = C_3.$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок даного квазілінійного рівняння має вигляд

$$F\Big(\frac{x^2}{y},\, \frac{y^3}{z^2},\, \frac{u^3}{z^4}\Big) = 0,$$

де $F\big(\xi, \eta, \zeta\big)$ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів. ▶

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання

Знайти загальний розв'язок даних рівнянь:

1168. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; **1172.** $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$;
1175. $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z$; **1180.** $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$;
1186. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$;
1188. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x+y$.

Домашні завдання

Знайти загальний розв'язок даних рівнянь:

1169. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$; **1171.** $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$;
1176. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$; **1179.** $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z$;
1183. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z\frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$;
1187. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.

Відповіді:

1168. $z = f(xy+y^2)$; **1172.** $F\left(e^{-x} - \frac{1}{y},\, z + \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - y^{-1}}\right) = 0$;
1175. $F\left(\frac{x^2}{y},\, xy - \frac{3z}{x}\right) = 0$; **1180.** $F(z^2 - y^2,\, x^2 + (y-z)^2) = 0$;
1186. $F(u(x-y),\, u(y-z),\, (x+y+z)/u^2) = 0$;
1188. $F(\frac{x-y}{z},\, (2u+x+y)z,\, \frac{u-x-y}{z^2}) = 0$; **1169.** $u = f(\frac{y}{x},\, \frac{z}{x})$;
1171. $F(x^2-y^2,\, x-y+z) = 0$;
1176. $F\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z},\, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z}\right) = 0$;
1179. $F(x^2+y^2,\, \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + (z+1)e^{-z}) = 0$;
1183. $F(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x,\, 2y - \operatorname{tg}^2 z) = 0$;
1187. $F(\frac{x}{y},\, xy - 2u,\, \frac{z+u-xy}{x}) = 0$.

Практичне заняття № 31

Задача Коші для рівнянь з частинними похідними першого порядку

Довідкова інформація

Розглянемо рівняння

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \tag{504}$$

де $a, b, c \in C^1(D)$, D — область в $\mathbb{R}^3$.

Під *розв'язком* рівняння (504) розуміємо функцію $u = w(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_0$ (Ω_0 — область в $\mathbb{R}^2$), з простору $C^1(\Omega_0)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність. Якщо функція $u = w(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_0$, є розв'язком рівняння (504), то її графік (поверхня в $\mathbb{R}^3$) називають *інтегральною поверхнею* даного рівняння.

Задача Коші для рівняння (504) полягає у знаходженні інтегральної поверхні цього рівняння, яка містить деяку наперед задану криву Γ.

Якщо крива Γ задається параметрично

$$x = p(\tau), \quad y = q(\tau), \quad u = s(\tau), \qquad \tau \in I{:=}(\tau_1, \tau_2),$$

де $-\infty \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant +\infty$, то сформульовану задачу можна поставити і так: знайти розв'язок рівняння (504), який задовольняє умову

$$u(p(\tau), q(\tau)) = s(\tau), \quad \tau \in I. \tag{505}$$

Умови на вхідні дані задачі (504), (505), при яких вона має єдиний розв'язок, можна сформулювати так.

Теорема 25. *Нехай*

$$\begin{vmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & p'(\tau_0) \\ b(x_0, y_0, z_0) & q'(\tau_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{506}$$

де τ_0 — яке-небудь число з I, $x_0 = p(\tau_0)$, $y_0 = q(\tau_0)$,$z_0 = s(\tau_0)$. Тоді в околі точки (x_0, y_0) визначений єдиним чином розв'язок рівняння (504), що задовольняє умову (505), коли τ пробігає всі значення з відповідного околу точки τ_0.

Розглянемо задачу Коші для нормальної (динамічної) системи з параметром τ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x, y, z), \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x, y, u), \\ \\ \dfrac{du}{dt} = c(x, y, u), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = p(\tau), \\ \\ y(0) = q(\tau), \\ \\ u(0) = s(\tau), \qquad \tau \in I. \end{cases} \tag{507}$$

Нехай

$$x = \varphi(t, \tau),\ y = \psi(t, \tau),\ u = \omega(t, \tau), \quad (t, \tau) \in G{:=}\big\{(t, \tau) \,\big|\, \tau \in I,\ t \in (a_\tau, b_\tau)\big\}, \tag{508}$$

— непродовжуваний розв'язок задачі (507). Тоді система функцій (507) задає шукану інтегральну поверхню. Відмітимо, що якщо в системі (507) виключити параметри t, τ, то отримаємо рівняння

$$H(x, y, u) = 0, \tag{509}$$

яке неявно задає розв'язок задачі Коші (504), (505). Для знаходження явного зображення розв'язку задачі Коші, потрібно з перших двох рівнянь системи (507) виразити змінні t і τ через x та y:

$$t = \varphi^{-1}(x, y), \quad \tau = \psi^{-1}(x, y), \quad (x, y) \in W, \tag{510}$$

і підставити в третє рівняння:

$$u = \omega\big(\varphi^{-1}(x, y), \psi^{-1}(x, y)\big) =: w(x, y), \quad (x, y) \in W.$$

Це є явне зображення розв'язку задачі Коші (504), (505).

Тепер зробимо такі зауваження. Із системи (508) випливає, що для довільного фіксованого значення $\tau_0 \in I$ система функцій

$$x = \varphi(t, \tau_0),\ y = \psi(t, \tau_0),\ u = \omega(t, \tau_0), \quad t \in (a_{\tau_0}, b_{\tau_0}), \tag{511}$$

задає траєкторію системи рівнянь задачі (507), що проходить через точку $(p(\tau_0), q(\tau_0), s(\tau_0))$. Отож, можна зробити висновок, що шукана в задачі Коші (504), (505) інтегральна поверхня складається з всеможливих траєкторій системи рівнянь задачі (507), що проходять через точки лінії Г. Звідси випливає ще один спосіб знаходження інтегральної поверхні рівняння (504), що проходить через лінію Г.

Для його формулювання спочатку зауважимо, що якщо

$$w_1(x, y, u) = C_1, \quad w_2(x, y, u) = C_2 \tag{512}$$

— незалежні перші інтеграли системи рівнянь задачі (507), то траєкторія цієї системи рівнянь, що проходить через точку (x_0, y_0, u_0), визначається системою рівнянь

$$w_1(x, y, u) = w_1(x_0, y_0, u_0), \quad w_2(x, y, u) = w_2(x_0, y_0, u_0). \tag{513}$$

Отже, сім'я траєкторій системи рівнянь задачі (507), що перетинають лінію Γ, задається системою рівнянь

$$\begin{cases} w_1(x, y, u) = w_1(p(\tau), q(\tau), s(\tau)) =: f(\tau), \\ w_2(x, y, u) = w_2(p(\tau), q(\tau), s(\tau)) =: g(\tau). \end{cases} \tag{514}$$

Припустимо, що з першого рівняння маємо $\tau = f^{-1}(w_1(x, y, u))$. Підставивши цей вираз τ в друге рівняння, отримаємо

$$w_2(x, y, u) = g(f^{-1}(w_1(x, y, u))),$$

тобто, якщо покласти $H(x, y, u) := w_2(x, y, u) - g(f^{-1}(w_1(x, y, u)))$, то одержимо рівняння (509), що неявно задає розв'язок задачі (504), (505). Тепер відмітимо, що при вказаному способі розв'язування є зручно ввести позначення

$$C_1 := w_1(x, y, u), \quad C_2 := w_2(x, y, u)$$

і систему (514) записати у вигляді

$$\begin{cases} w_1(p(\tau), q(\tau), s(\tau)) = C_1, \\ w_2(p(\tau), q(\tau), s(\tau)) = C_2, \end{cases} \tag{515}$$

Виключаючи з цієї системи параметр τ, одержимо рівняння

$$Q(C_1, C_2) = 0, \tag{516}$$

звідки, вертаючись до змінних x, y, u, одержимо

$$Q(w_1(x, y, u), w_2(x, y, u)) = 0, \tag{517}$$

тобто, якщо покласти $H(x, y, u) := Q(w_1(x, y, u), w_2(x, y, u))$, то отримаємо рівняння (509), що неявно задає розв'язок задачі (504), (505).

Зі сказаного випливає такий спосіб розв'язування задачі (504), (505).

1-ий крок. Записуємо відповідну рівнянню (504) систему звичайних диференціальних рівнянь (див. систему рівнянь задачі (507)):

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}. \tag{518}$$

2-ий крок. Знаходимо два незалежні перші інтеграли (512) (наприклад, методом інтегровних комбінацій).
3-ий крок. Підставивши замість x, y, u у (512) вирази, відповідно, $p(\cdot), q(\cdot)$, $s(\cdot)$, отримаємо (515). Виключаючи із системи (515) параметр τ, отримаємо (516), звідки, підставляючи замість C_1 і C_2 вирази $w_1(x, y, u)$ і $w_2(x, y, u)$, матимемо рівняння (517) — розв'язок задачі (504), (505) в неявній формі.

Відмітимо, що аналогічно розв'язують задачу Коші для рівняння

$$a(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z} = h(x,y,z,u) \tag{519}$$

з початковими умовами

$$u(p(\tau_1,\tau_2), q(\tau_1,\tau_2), r(\tau_1,\tau_2)) = s(\tau_1,\tau_2), \quad (\tau_1,\tau_2) \in I. \tag{520}$$

З геометричної точки зору задача Коші для рівняння (519) полягає у знаходженні інтегральної поверхні (в $\mathbb{R}^4$) цього рівняння, що містить поверхню Γ, задану параметрично

$$x = p(\tau_1,\tau_2), \quad y = q(\tau_1,\tau_2), \quad z = r(\tau_1,\tau_2), \quad u = s(\tau_1,\tau_2), \qquad \tau \in I \subset \mathbb{R}^2.$$

Примітка. Задачу Коші для лінійного однорідного рівняння варто розв'язувати, безпосередньо використовуючи загальний розв'язок. Пояснимо це на прикладі рівняння

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{521}$$

де $a, b \in C^1(\Omega)$, Ω — область в $\mathbb{R}^2$.

Задача Коші для рівняння (521): знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{522}$$

Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає даному рівнянню:

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}.$$

Нехай

$$w(x,y) = C$$

— перший інтеграл цієї системи. Тоді загальний розв'язок рівняння (521) можна записати у вигляді

$$u = F(w(x,y)), \tag{523}$$

де $F(\xi)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Знайдемо $F(\xi)$. Підставимо вираз (523) у початкову умову (522):

$$\varphi(y) = F(w(0, y)).$$

Зробивши в цій рівності заміну змінних $\xi = w(0, y) \;\Leftrightarrow\; y = \psi(\xi)$, отримаємо

$$F(\xi) = \varphi(\psi(\xi)).$$

Тоді розв'язок задачі (521), (522) можна записати у вигляді

$$u = \varphi(\psi(w(x, y))).$$

Контрольні питання

1. Що таке інтегральна поверхня рівняння в частинних похідних?
2. У чому полягає задача Коші для майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними?
3. У чому полягає задача Коші для квазілінійних рівнянь з двома незалежними змінними?

Приклади розв'язування типових задач

1. Знайти розв'язок рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

який задовольняє початкову умову

$$u = y^2 + z^2 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

◀ Записуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Знаходимо два незалежних перших інтеграли:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{y}{z} = C_2.$$

Записуємо загальний розв'язок даного рівняння в явному вигляді

$$u = F\Big(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\Big), \tag{524}$$

де $F(\xi, \eta)$ — довільна неперервно диференційовна функція від аргументів (ξ, η).

Згідно з початковою умовою, у (524) покладемо 1 замість x і y^2+z^2 замість u:

$$y^2 + z^2 = F\left(\frac{1}{y}, \frac{y}{z}\right). \tag{525}$$

Введемо заміну змінних у (525)

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{y} \\ \eta = \dfrac{y}{z} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{\xi} \\ z = \dfrac{1}{\xi\eta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi\eta)^2}. \tag{526}$$

Звідси, беручи $\xi = \dfrac{x}{y}$ та $\eta = \dfrac{y}{z}$, на підставі (524) дістанемо шуканий розв'язок:

$$u = \frac{y^2 + z^2}{x^2}.$$

►

2. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

яка проходить через лінію

$$y = 1, \quad z = x^2.$$

◄ Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}. \tag{527}$$

З перших двох співвідношень (527) знаходимо один з перших інтегралів системи

$$x^2 y = C_1.$$

Другий з перших інтегралів, знаходимо так:

$$\frac{2x\,dx + 2y\,dy - 2\,dz}{2x^2 - 4y^2 - 2x^2 - 2y^2} = \frac{dy}{-2y} \quad \Rightarrow \quad d(x^2 + y^2 - 2z) = 3y\,dy \Rightarrow$$

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z = C_2.$$

Отож, знайдено два незалежних перших інтеграли

$$x^2 y = C_1, \qquad x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z = C_2.$$

Параметризуємо лінію $y = 1$, $z = x^2$:

$$\begin{cases} x = \tau \\ y = 1 \\ z = \tau^2. \end{cases}$$

Підставимо ці вираз у знайдені два перших незалежних інтеграли

$$\begin{cases} \tau^2 = C_1 \\ \tau^2 - \dfrac{1}{2} - 2\tau^2 = C_2. \end{cases}$$

Виключивши із даної системи змінну t, одержуємо:

$$-\frac{1}{2} - C_1 = C_2.$$

Підставивши $x^2 y$ замість C_1, $x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - 2z$ замість C_2, одержимо рівняння, що неявно задає шуканий розв'язок:

$$2x^2(y+1) = y^2 + 4z - 1,$$

звідки можна явне зображення розв'язку даної задачі

$$z = \frac{1}{4}(2x^2(y+1) - y^2 + 1).$$

►

Завдання для самостійної роботи

Аудиторні завдання:

Знайти розв'язки рівнянь, котрі задовольняють вказані умови:

1190. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = y$ при $x = 0$;

1192. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = yz$ при $x = 1$.

Знайти інтегральну поверхню вказаного рівняння, що проходить через дану лінію:

1198. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), \quad x = 1,\ yz + 1 = 0$;

1204. $x\frac{\partial z}{\partial x} - (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad x + y = 2z,\ xz = 1$.

Домашні завдання:

Знайти розв'язки рівнянь, котрі задовольняють вказані умови:

1189. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = 2x$ при $y = 1$;

1191. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = y^2$ при $x = 1$;

1193. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^2 + y^2$ при $z = 0$.

Знайти інтегральну поверхню вказаного рівняння, що проходить через дану лінію:

1196. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2,\ z = y^2 + 1$;

1206. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y, \quad y = 2x,\ x + 2y = z$;

1208. $(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z, \quad x - y = 2,\ z + 2x = 1$;

1210. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, \quad y = x,\ z = x^2$.

Відповіді:

1190. $z = ye^x - e^{2x} + 1$; **1192.** $u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$;
1198. $2xy + 1 = x + 3y + z^{-1}$; **1204.** $xz = (xz - y - x + 2z)^2$;
1189. $z = 2xy$; **1191.** $z = y^2 e^{2\sqrt{x} - 2}$;
1193. $u = (xy - 2z)\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$; **1196.** $(x + 2y)^2 = 2x(z + xy)$;
1198. $2xy + 1 = x + 3y + z^{-1}$; **1206.** $x + y + z = 0$;
1208. $(x - y)(3x + y + 4z) = 4z$; **1210.** $z = xy + f(\dfrac{y}{x})$, де f – довільна диференційована функція така, що $f(1) = 0$.

Практичне заняття № 32

Контрольна робота № 7

Варіант № 1

1. $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{2x^2+2y^2+z}$;

2. $\dfrac{dx}{y-3z}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$;

3. $(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y$;

4. $z\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;

5. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{ctg} y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad z=4x^3, \quad y=x$;

6. $2z\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=2x+y$ при $z=0$.