Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

Методичні рекомендації для проведення практичних занять по курсу "Рівняння математичної фізики"

Автори: Бокало Микола Михайлович
Бокало Тарас Миколайович

Рекомендовано Вченою Радою
механіко-математичного факультету,
24.04.2024, протокол № 9

Львів 2024

Програма курсу “ Рівняння математичної фізики”

Спеціальності: 111 Математика, 014 Освіта

Вступ

Тема 1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь другого порядку. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними

1.1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь.

1.1.1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь у загальному випадку.

1.1.2. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними.

1.2. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.

1.2.1. Знаходження загальних розв'язків.

1.2.2. Знаходження розв'язків задачі Коші.

Тема 2. Математичні моделі природних процесів

2.1. Математичні моделі процесів коливань.

2.1.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для гіперболічних рівнянь.

2.1.1.1. Поперечні коливання однорідної струни.

2.1.1.2. Поздовжні коливання однорідного стержня.

2.1.1.3. Поперечні коливання мембрани.

2.1.1.4. Поширення звукових хвиль.

2.1.2. Постановки задач для рівняння коливань.

2.2. Математичні моделі процесів теплопровідності та дифузії.

2.2.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для параболічних рівнянь.

2.2.2. Постановки задач для рівняння теплопровідності.

2.3. Математичні моделі стаціонарних процесів.

2.3.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для еліптичних рівнянь.

2.3.2. Постановки задач для рівняння Пуассона (Лапласа).

2.4. Поняття коректності задач для рівнянь з частинними похідними.

Тема 3. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними другого порядку

3.1. Задача Коші для загальних лінійних рівнянь другого порядку.

3.1.1. Постановка задачі Коші. Характеристична поверхня (лінія).

3.1.2. Задача Коші в класі аналітичних функцій. Теорема Коші-Ковалевської.

3.2. Задача Коші для рівняння коливань.

3.2.1. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

3.2.1.1. Формули Кірхгофа, Пуассона та Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння коливань.

3.2.1.2. Існування розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння коливань. Принцип Дюамеля.

3.2.2. Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

3.2.3. Неперервна залежність від вхідних даних розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

3.3. Задача Коші для рівняння теплопровідності.

3.3.1. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності.

3.3.1.1. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності в обмеженій області визначення.

3.3.1.2. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності в необмеженій області визначення.

3.3.2. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.

3.3.2.1. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

3.3.2.2. Формула Пуассона розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності.

3.3.2.3. Існування розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності.

3.3.3. Єдиність та неперервна залежність від вхідних даних розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.

Тема 4. Мішані задачі для рівнянь гіперболічного та параболічного типів

4.1. Мішані задачі для гіперболічних рівнянь.

4.1.1. Класичний розв'язок першої мішаної задачі для однорідного рівняння коливання струни.

4.1.1.1. Деякі факти з теорії тригонометричних рядів

4.1.1.2. Перша мішана задача для однорідного рівняння коливання струни в класичній постановці.

4.1.2. Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь другого порядку.

4.1.2.1. Деякі поняття і факти з математичного та функціонального аналізу.

4.1.2.1.1. Відображення.

4.1.2.1.2. Лінійні простори; норма в лінійному просторі; збіжність послідовностей в нормованому лінійному просторі; банахові простори.

4.1.2.1.3. Гільбертові простори.

4.1.2.1.4. Простори неперервних і неперервно диференційовних функцій.

4.1.2.1.5. Простори інтегровних функцій.

4.1.2.1.6. Поняття узагальнених похідних функцій. Простори Соболева.

4.1.2.1.7. Замкнені, самоспряжені, невід'ємні (додатні) та компактні лінійні оператори в гільбертових просторах.

4.1.2.1.8. Простори векторних функцій.

4.1.2.2. Коректність задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь другого порядку.

4.1.2.2.1. Сильний розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння другого порядку.

4.1.2.2.2. Слабкий розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння другого порядку.

4.1.3. Існування, єдиність та неперервна залежність від вхідних даних узагальнених розв'язків мішаних задач для рівняння коливань.

4.2. Мішані задачі для параболічних рівнянь.

4.2.1. Класичний розв'язок першої мішаної задачі для однорідного рівняння теплопровідності.

4.2.2. Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь першого порядку.

4.2.2.1. Сильний розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння першого порядку.

4.2.2.2. Слабкий розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння першого порядку.

4.2.3. Існування, єдиність та неперервна залежність від вихідних даних узагальнених розв'язків мішаних задач для рівняння теплопровідності.

4.2.4. Розв'язування задачі Коші для диференціального-операторного рівняння з використанням півгруп лінійних обмежених операторів в гільбертовому просторі.

4.2.5. Задача Коші для загальних диференціально-операторних рівнянь.

Тема 5. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу. Гармонічні функції

5.1. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.

5.1.1. Операторні рівняння.

5.1.2. Регулярні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь.

5.1.2.1. Крайова задача для рівняння типу "рівняння Пуассона".

5.1.2.2. Крайова задача для рівняння типу "рівняння коливання струни".

5.1.3. Сингулярні крайові задачі.

5.2. Гармонічні функції та їх застосування.

5.2.1. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.

5.2.2. Перша і друга формули Гріна.

5.2.3. Властивості гармонічних функцій.

5.2.3.1. Інтегральне зображення гармонічної функції.

5.2.3.2. Нескінченна диференційовність гармонічної функції.

5.2.3.3. Інтеграл по замкненій поверхні від нормальної похідної гармонічної функції.

5.2.3.4. Теорема про середнє значення гармонічної функції на сфері та кулі.

5.2.3.5. Принцип екстремуму для гармонічної функції.

5.2.3.6. Усувні ізольовані особливі точки гармонічної функції.

5.2.3.7. Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.

5.2.3.8. Поведінка на нескінченності регулярної гармонічної функції та її градієнта.

5.2.4. Застосування властивостей гармонічних функцій для дослідження крайових задач для еліптичних рівнянь.

5.2.4.1. Знаходження розв'язків задач Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна.

5.2.4.2. Єдиність та неперервна залежність від вихідних даних розв'язків задач Діріхле та Неймана для рівняння Пуассона (Лапласа).

Тема 6. Методи інтегральних перетворень розв'язування задач для гіперболічних та параболічних рівнянь.

6.1. Дискретні інтегральні перетворення та їх застосування.

6.2. Перетворення Фур'є та його застосування.

6.3. Перетворення Лапласа та його застосування.

Тема 7. Теорія потенціалів для еліптичних рівнянь.

7.1. Поняття та властивості об'ємного та поверхневих потенціалів.

7.1.1. Поняття та властивості об'ємного потенціалу.

7.1.2. Поняття та властивості потенціалу подвійного шару.

7.1.3. Поняття та властивості потенціалу простого шару.

7.2. Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь та їх дослідження.

7.2.1. Основи теорії інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду.

7.2.2. Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь.

7.2.3. Дослідження на розв'язність інтегральних рівнянь, до яких зводяться крайові задачі для рівняння Лапласа.

Література

1. С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Л.М. Мельничук. Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі // Чернівці, 2016.

2. В.Г. Самойленко, І.М. Конет. Рівняння математичної фізики // Київ: КНУ, 2014.

3. М.О. Перестюк, В.В. Маринець. Теорія рівнянь математичної фізики // Київ: Либідь, 1993.

4. О.М. Бугрій. Методичні рекомендації до вивчення курсу "Рівняння математичної фізики"// Львів: ЛНУ, 2008.

5. Н.В. Пабирівська. Збірник задач з рівнянь у частинних похідних // Львів: ЛНУ, 2005.

Вступ

Природні процеси описують, як правило, функційною залежністю між певною кількістю змінних. Виходячи з умов процесу, для знаходження цих функцій ми отримуємо певні математичні співвідношення, які називають *математичною моделлю* цього процесу. Якщо процес описується функціями однієї змінної, то його математичну модель ми одержуємо у вигляді певних задач для звичайних диференціальних рівнянь. Якщо ж процес описується функціями від двох або більшого числа змінних, то математичне моделювання приводить до диференціальних рівнянь з частинними похідними або, коротше, *рівнянь з частинними похідними.* Вивчення математичних моделей, які являють собою певні задачі для рівнянь з частинними похідними другого порядку, є змістом курсу "Рівняння математичної фізики".

Сформулюємо деякі основні поняття і означення. Нехай n – довільне натуральне число, яке більше за 1, а $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний арифметичний простір, тобто лінійний простір складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел, $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$ – норма елемента x. Далі всюди вважаємо, що Ω – область (тобто відкрита і зв'язна множина) в $\mathbb{R}^n$.

Означення 0.1. *Рівнянням з частинними похідними (РЧП) називають співвідношення вигляду*

$$F\big(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^{k_1+...+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, ...\big) = 0, \tag{1}$$

яке зв'язує $n \geqslant 2$ *незалежних змінних* $x = (x_1, ..., x_n)$, *значення яких пробігають деяку область* Ω *простору* $\mathbb{R}^n$, *невідому функцію* u *від цих змінних та її похідні до певного порядку.*

Найвищий з порядків похідних, що входять в рівняння (1), *називають порядком цього рівняння.*

Класичним розв'язком рівняння (1) *називають функцію* $u(x), x \in \Omega$, *якщо вона має неперервні частинні похідні, яких вимагає рівняння, і при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.*

В даному курсі розглядатимуться тільки рівняння з частинними похідними *другого порядку.* Серед них розрізняють такі класи: лінійні, майже лінійні та квазілінійні рівняння.

Лінійним називають рівняння вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

де $a_0, a_i, a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, – коефіцієнти, а f – вільний член рівняння, які задані в деякій області Ω простору $\mathbb{R}^n$, u – невідома функція.

До класу *майже лінійних* входять рівняння вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Рівняння (1) називають *квазілінійним*, якщо воно має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\big) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Лінійні рівняння, очевидно, є частковим випадком майже лінійних, а майже лінійні – частковим випадком квазілінійних. Рівняння, які не належать до жодного з вказаних класів, називають *сильно нелінійними*. Далі, в основному, розглядатимемо лінійні рівняння.

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити, до якого класу: лінійних, майже лінійних, квазілінійних чи сильно нелінійних належать дані рівняння:

а) $(\sin xy + 1)u_{xx} - 2(x + y)u_{xy} + e^y u_{yy} - 2u_x + u_y = x \cos y$;

б) $(\operatorname{tg} \frac{u}{y} + 1)u_{xx} - 2(u^3 + y)u_{xy} + e^y u_{yy} - 2u_x^2 + u_y = x \cos y$;

в) $x^2 u_{xx} - 2(\cos(x + y) - 1)u_{xy} + e^y(\operatorname{ctg} x + y)u_{yy} - 2\sin(u_x + u_y) = x \cos(uy)$;

г) $\sin(u_{xx}) - 2(x + y)e^u u_{xy} + e^y u_{yy} - \operatorname{tg}(2u_x) + (u_y)^3 = x \cos y$;

д) $(\sin \frac{x}{y} + xy)u_{xx} - 2(x + \operatorname{tg} y)u_{xy} + (\cos y + 1)u_{yy} - 2u_x + u_y = x \cos\, y$.

Відповіді:

1. а) лінійне; б) квазілінійне; в) майже лінійне; г) сильно нелінійне; д) лінійне.

Практичне заняття № 1

1 Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь у загальному випадку

I. Довідкова інформація

Нехай $n \geqslant 2$ — довільне натуральне число, $x = (x_1, ..., x_n)$ —- точка простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x), \tag{5}$$

де $a_0, a_i, a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, — сталі коефіцієнти, а f — вільний член рівняння, який заданий в $\mathbb{R}^n$, а u — невідома функція.

Виникає питання: як знайти таку (невироджену) заміну незалежних змінних, при якій рівняння (5) матиме найпростіший (канонічний) вигляд? Відповідь отримаємо в два етапи.

1 етап. Спочатку розглядаємо квадратичну форму

$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Нехай стала матриця $P := \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ така, що при заміні змінних

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \tau_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \cdots \\ \tau_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad t = P\tau,$$

$$t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \tau = (\tau_1, ..., \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

форма $S(t)$ переходить у форму $\widetilde{S}(\tau)$ канонічного вигляду

$$\widetilde{S}(\tau) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \tau_k^2, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

де $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$ (як випливає із закону інерції для квадратичних форм, кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють 1, і кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють -1, не залежать від перетворення).

2 етап. Робимо в рівнянні (5) заміну змінних

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = P^\top x, \tag{9}$$

де $P^\top$ — транспонована по відношенню до P матриця. У результаті цього рівняння (5) переходить в рівняння канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{a}_i \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} + \widehat{a}_0 \widetilde{u} = \widehat{f}(\xi), \tag{10}$$

де γ_k ті ж самі, що в (8).

Залежно від значень γ_k у рівнянні (10) або, що те саме, у формі (8) кажуть, що рівняння (5) в точці x^0 є
а) *еліптичним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і однакового знаку, тобто $\gamma_k = 1,\ k = \overline{1,n}$, або $\gamma_k = -1,\ k = \overline{1,n}$.
б) *гіперболічним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і один з них має протилежний знак до всіх інших, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 1$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = -1$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$;
в) *параболічним*, якщо один з коефіцієнтів γ_k дорівнює нулеві, а решта — відмінні від нуля і одного знаку, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$;
г) *безтипним* в інших випадках.

Якщо рівняння (5) є еліптичним, або гіперболічним, або параболічним, або безтипним в кожній точці області Ω, то його називають відповідно *еліптичним*, *гіперболічним*, *параболічним* або *безтипним* рівнянням в області Ω.

Увага! Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду використовують різні методи, але найпоширенішим з них є *метод виділення повних квадратів*. Опишемо його.

Нехай
$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$
— довільна квадратична форма, $a_{ij} = a_{ji} = const$, $i, j = \overline{1,n}$. Можливі такі два випадки:
1) $a_{ii} = 0$ для всіх $i \in \{1, ..., n\}$.
2) $a_{ii} \neq 0$ хоча б одного значення $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Розглянемо *перший випадок.* Він легко зводиться до другого так. Оскільки квадратична форма ненульова, то існує хоча би один з її коефіцієнтів відмінний від нуля. Припустимо, не зменшуючи загальності, що $a_{12} \neq 0$. Зробимо заміну змінних
$$t_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad t_2 = \alpha_1 + \alpha_1, \quad t_i = \alpha_i, \quad i = 3, ..., n.$$
У результаті приходимо до квадратичної форми, в якій є відмінний від нуля коефіцієнт при квадраті змінної. А далі робимо так, як в другому випадку.

Розглянемо *другий випадок.* Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. Випишемо всі члени нашої квадратичної форми, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за правилом
$$a_{11} t_1^2 + 2a_{12} t_1 t_2 + ... + 2a_{1n} t_1 t_n =$$
$$= \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 - \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} t_i t_j.$$
Підставивши отриманий вираз у вихідну форму і спростивши подібні члени, прийдемо до зображення вихідної форми у вигляді
$$S(t) = \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j.$$
Тепер зауважимо, що вираз $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j$ являє собою квадратичну форму від $n-1$ (або менше) змінних. Перетворивши цю форму аналогічно вихідній, отримаємо зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми двох квадратів лінійних виразів від змінних

$t_1, ..., t_n$ і квадратичної форми від $n-2$ (або менше) змінних. Продовжуючи діяти аналогічно, через скінченну кількість кроків прийдемо до зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми квадратів лінійних виразів від змінних $t_1, ..., t_n$:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [b_{k1}t_1 + b_{k2}t_2 + ... + b_{kn}t_n]^2,$$

де для деяких k може бути $\lambda_k = 0$, але якщо $\lambda_k \neq 0$, то хоча би для одного значення j коефіцієнт $b_{kj} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$\tau_k = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_k|}(b_{k1}t_1 + b_{k2}t_2 + ... + b_{kn}t_n), & \text{якщо} \quad \lambda_k \neq 0, \\ t_k, & \text{якщо} \quad \lambda_k = 0, \end{cases} \quad k = 1, ..., n.$$

У результаті приходимо до канонічного вигляду (8), де $\gamma_k = 1$, якщо $\lambda_k > 0$, $\gamma_k = -1$, якщо $\lambda_k < 0$, і $\gamma_k = 0$, якщо $\lambda_k = 0$.

II. Розв'язування типових прикладів

Приклад 1.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yz} - u_{zz} + u_z - u = y.$$

Розв'язування.
1-ий етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := 4t_1^2 + 4t_1t_2 + 2t_2t_3 - t_3^2, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів. Оскільки коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом

$$4t_1^2 + 4t_1t_2 = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2.$$

Підставимо отриманий вираз у вихідну форму:

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2 + 2t_2t_3 - t_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$-t_2^2 + 2t_2t_3 = -(-t_2 + t_3)^2 + t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз вихідної квадратичної форми у вигляді

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - (-t_2 + t_3)^2 = (2t_1 + t_2)^2 - (t_2 - t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \tau_1 = 2t_1 + t_2 \\ \tau_2 = t_2 - t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases}.$$

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau), \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, де

$$\widetilde{S}(\tau) := \tau_1^2 - \tau_2^2.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом вихідної форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"змінні τ:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{2}\tau_3 \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3 \\ t_3 = \tau_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2-ий етап. Потрібну заміну змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"змінні $(x, y, z)^\top$)) маємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = 1/2x \\ \eta = -1/2x + y \\ \zeta = -1/2x + y + z \end{cases}.$$

Далі використаємо позначення

$$\partial_\xi := \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\eta := \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \partial_\zeta := \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\xi} := \partial_\xi \partial_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi}, \quad \partial^2_{\eta\eta} := \partial_\eta \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta}, \quad \partial^2_{\zeta\zeta} := \partial_\zeta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\eta} := \partial_\xi \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \partial^2_{\xi\zeta} := \partial_\xi \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad \partial^2_{\eta\zeta} := \partial_\eta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta},$$

а також формулу

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
-1 \,&\big|\, u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta), \\
+0 \,&\big|\, u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \frac{1}{2} + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\frac{1}{2}) + \widetilde{u}_\zeta \cdot (-\frac{1}{2}) = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\widetilde{u}, \\
+0 \,&\big|\, u_y = \widetilde{u}_\eta + \widetilde{u}_\zeta = \big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\widetilde{u}, \\
+1 \,&\big|\, u_z = \partial_\zeta \widetilde{u}, \\
+4 \,&\big|\, u_{xx} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)^2\widetilde{u} = \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\xi\xi} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta}, \\
-1 \,&\big|\, u_{zz} = \partial_\zeta \partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+4 \,&\big|\, u_{xy} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\widetilde{u} = \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+2 \,&\big|\, u_{yz} = \big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставимо вирази похідних функції u у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot(-\frac{1}{2})+2\cdot 1+(-1)\cdot 1]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[4(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+$$

$$+\widetilde{u}_{\xi\zeta}\cdot[4\cdot(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+\widetilde{u}_{\eta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\zeta}\cdot[1\cdot 1]+\widetilde{u}\cdot[-1\cdot 1]=\xi+\eta.$$

Після спрощення прийдемо до канонічного вигляду заданого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}-\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{u}_{\zeta}-\widetilde{u}=\xi+\eta.$$

□

Приклад 2.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xz}-2u_{yz}+u_x-2u_z=0.$$

Розв'язування.
1-ий етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t)=t_1^2+t_2^2+2t_3^2-2t_1t_3-2t_2t_3,\quad t=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3.$$

і зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів.

Врахувавши, що коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом:

$$t_1^2-2t_1t_3=(t_1-t_3)^2-t_3^2.$$

Отриманий вираз підставимо у вихідну форму:

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+t_2^2+t_3^2-2t_2t_3.$$

Тепер, оскільки коефіцієнт при t_2^2 відмінний від нуля, перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$t_2^2-2t_2t_3=(t_2-t_3)^2-t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз форми $S(t)$ вигляді

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+(t_2-t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases}\tau_1=t_1-t_3\\ \tau_2=t_2-t_3\\ \tau_3=t_3\end{cases}.$$

Тоді $S(t)=\widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau)=\tau_1^2+\tau_2^2,\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Це означає, що дане рівняння є параболічним. Виразимо "старі"змінні t через "нові"τ:

$$\begin{cases}t_1=\tau_1+\tau_3\\ t_2=\tau_2+\tau_3\\ t_3=\tau_3\end{cases}.$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-ий етап. Отож, в рівнянні робимо заміну змінних

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \\ \zeta = x + y + z \end{cases}.$$

Тоді, оскільки $u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta)$, то

$$\begin{aligned}
+1|\ & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
+0|\ & u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
-2|\ & u_z = \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
+1|\ & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+1|\ & u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+2|\ & u_{zz} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
-2|\ & u_{xz} = \widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
-2|\ & u_{yz} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} \cdot [1 + 1 + 2 - 2 - 2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [0] + \widetilde{u}_{\xi\zeta} \cdot [2 - 2] + \widetilde{u}_{\eta\zeta} \cdot [2 - 2] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [1] + \widetilde{u}_\eta \cdot [0] + \widetilde{u}_\zeta \cdot [1 - 2] = 0,$$

звідки маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\zeta = 0$$

- канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 3.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xy} + 2u_{yz} + u_z - u = x + y.$$

Розв'язування.

1-ий етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := t_1 t_2 + 2t_2 t_3, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Перш ніж виділяти повні квадрати, зробимо в цій формі заміну змінних

$$\begin{cases} t_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ t_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ t_3 = \alpha_3 \end{cases}.$$

У результаті отримаємо $S(t) = \widehat{S}(\alpha)$, де

$$\widehat{S}(\alpha) := \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Оскільки коефіцієнт при α_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну α_1, і виділимо повний квадрат за вказаним у зауваженні 1.3 правилом:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_3^2.$$

Підставимо отриманий вираз у форму $\widehat{S}(\alpha)$:

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну α_2:

$$-\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 = -(-\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_3^2.$$

В результаті отримаємо

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3) - (-\alpha_2 + \alpha_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних $\begin{cases} \tau_1 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ \tau_2 = -\alpha_2 + \alpha_3 \\ \tau_3 = \alpha_3 \end{cases}$.

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau) = \tau_1^2 - \tau_2^2, \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"τ (виразивши спочатку змінні α через змінні τ і підставивши їх у співвідношення між змінними α і t):

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3 \\ t_2 = \tau_1 - \tau_2 \\ t_3 = \tau_3, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-ий етап. Потрібна заміна змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"$(x, y, z)^\top$) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = -x + y \\ \zeta = -2x + z \end{cases}.$$

Обчисливши похідні і підставивши їх вирази у вихідне рівняння, після спрощення прийдемо до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\zeta - u = \xi.$$

□

III. Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (загальний випадок):

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$;
б) $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$;
в) $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + 3u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} - 8u = 0$;
г) $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + 4u_{yz} + u_{zz} + 2u = 0$;

Відповіді:

1. а) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} = 0$; $\quad \xi = x, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = 2x - 2y + z$;
б) $\widetilde{u}_{\xi\xi} - \widetilde{u}_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta} = 0$; $\quad \xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = -x - y + z$;
в) $\widetilde{u}_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 8\widetilde{u} = 0$; $\quad \xi = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \quad \eta = -\frac{1}{2}(y + z), \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - z)$;
г) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u} = 0$; $\quad \xi = x, \quad \eta = -2x + y, \quad \zeta = -x + z$.

Практичне заняття № 2

2 Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.

Частина I: Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними

I. Довідкова інформація

Розглянемо майже лінійне рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \Phi(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{11}$$

Вважатимемо, що Ω — область в $\mathbb{R}^2$, $a, b, c \in C^1(\Omega)$, $|a| + |b| + |c| > 0$ на Ω.

Виявляється, що класифікація рівнянь вигляду (11) за типом залежить від значення виразу

$$\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

який називають дискримінантом рівняння (11).

Якщо або $\Delta(x,y) > 0$, або $\Delta(x,y) = 0$, або $\Delta(x,y) < 0$ у всіх точках (x,y) множини $\Omega_0 \subset \Omega$, то рівняння (11) є відповідно *гіперболічним* або *параболічним*, або *еліптичним* на Ω_0.

Виявляється, що для кожного типу рівняння (11) можна знайти таке перетворення незалежних змінних, яке приводить його до канонічного вигляду не тільки в окремо взятій точці області Ω, але і зразу в деякій підобласті Ω_0 області Ω, де рівняння зберігає тип.

Покажемо це. Спочатку зробимо таке загальне зауваження. Нехай (ξ, η) — нові незалежні змінні, які пов'язані з (x,y) співвідношеннями

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega_0,\ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}, \tag{12}$$

де ξ, $\eta \in C^2(\Omega_0)$, $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ на Ω_0.

Виконаємо заміну змінних змінних (12) в рівнянні (11). Маємо

$$u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega_0,\ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&u_x = \widetilde{u}_\xi\, \xi_x + \widetilde{u}_\eta\, \eta_x, \\
&u_y = \widetilde{u}_\xi\, \xi_y + \widetilde{u}_\eta\, \eta_y, \\
&u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_x)^2 + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{xx} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{xx}, \\
&u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,\eta_x\eta_y + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{xy} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{xy}, \\
&u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_y)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_y)^2 + \widetilde{u}_\xi\,\xi_{yy} + \widetilde{u}_\eta\,\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u в рівняння (11), отримаємо

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0, \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
\widetilde{a} &= a\,(\xi_x)^2 + 2\,b\,\xi_x\,\xi_y + c\,(\xi_y)^2,\\
\widetilde{b} &= a\,\xi_x\,\eta_x + b\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + c\,\xi_y\,\eta_y,\\
\widetilde{c} &= a\,(\eta_x)^2 + 2\,b\,\eta_x\,\eta_y + c\,(\eta_y)^2,
\end{aligned}$$

а $\Phi(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta)$ — об'єднання всіх членів, які не містять похідних другого порядку від $\widetilde{u}$.

Виявляється, що можна вибрати заміну змінних (19) залежно від знаку Δ таку, при якій рівняння (13) матиме канонічний вигляд в Ω_0. Для цього розглядаємо рівняння

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0, \tag{14}$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (11), а лінію, задану рівнянням

$$\omega(x,y) = C, \tag{15}$$

де C — довільна стала, а $\omega(x,y)$, $(x,y)\in\Omega_0$, — перший інтеграл рівняння (14), називають *характеристикою* або *характеристичною лінією.*

Тепер вкажемо заміну незалежних змінних в рівнянні (11), при якій воно матиме канонічний вигляд в усій області Ω_0.

1) Нехай рівняння (11) *гіперболічне*, тобто $\Delta(x,y) > 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, і або $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, або $c(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$. Якщо $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, то рівняння (14) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо dy" і отримуємо сукупність рівнянь

$$dy = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}\,dx,$$

яка рівносильна рівнянню (14). Цю сукупність можна записати у вигляді

$$\left[\begin{aligned} &a\,dy - (b+\sqrt{\Delta})dx = 0,\\ &a\,dy - (b-\sqrt{\Delta})dx = 0. \end{aligned}\right.$$

Аналогічно, якщо $c(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, то рівняння (14) розв'язуємо як "квадратне рівняння відносно dx" і отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{aligned} &c\,dx - (b+\sqrt{\Delta})dy = 0,\\ &c\,dx - (b-\sqrt{\Delta})dy = 0. \end{aligned}\right.$$

Нехай, для визначеності, $a(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in\Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо перші інтеграли кожного з цих рівнянь:

$$\omega_1(x,y) = C, \quad \omega_2(x,y) = C$$

і зробимо заміну змінних

$$\xi = \omega_1(x,y), \quad \eta = \omega_2(x,y).$$

Тоді в рівнянні (13) маємо $\widetilde{a}(\xi,\eta) = 0$, $\widetilde{c}(\xi,\eta) = 0$, $\widetilde{b}(\xi,\eta)\neq 0$ для всіх $(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (13) на $\widetilde{b}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0. \tag{16}$$

Додаткова заміна $\xi = \alpha - \beta$, $\eta = \alpha + \beta$ зводить отримане рівняння до рівняння

$$\widehat{u}_{\alpha\alpha} - \widehat{u}_{\beta\beta} + \widehat{\Phi}(\alpha, \beta, \widehat{u}, \widehat{u}_{\alpha}, \widehat{u}_{\beta}) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння гіперболічного типу згідно з класифікацією, даною у попередньому пункті. Але у випадку двох незалежних змінних *канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу* частіше називають рівняння (16).

2) Нехай рівняння (11) *параболічне*, тобто $\Delta(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, і або $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, або $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$. Тоді, якщо $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, то розв'язуючи рівняння (14) як "квадратне рівняння відносно dy"отримаємо рівносильне йому рівняння

$$a\,dy - b\,dx = 0.$$

Аналогічно, якщо $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, то, розв'язуючи рівняння (14) як "квадратне рівняння відносно dx" , отримуємо рівносильне рівнянню (14) рівняння

$$c\,dx - b\,dy = 0.$$

Нехай (для визначеності) $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, і маємо перше рівняння. Знайдемо перший інтеграл цього рівняння

$$\omega(x, y) = C.$$

Зробимо заміну змінних

$$\xi = \omega(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де η — довільна неперервно диференційовна функція така, що $\begin{vmatrix} \omega_x & \eta_x \\ \omega_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ на Ω_0, тобто функції η і ω є незалежними. Тоді маємо $\widetilde{a}(\xi, \eta) = 0$, $\widetilde{b}(\xi, \eta) = 0$ і $\widetilde{c}(\xi, \eta) \neq 0$ для всіх $(\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_0$. Отже, поділивши рівняння (13) на $\widetilde{c}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\xi}, \widetilde{u}_{\eta}) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння параболічного типу.

3) Нехай рівняння (11) *еліптичне*, тобто $\Delta(x, y) < 0$, $(x, y) \in \Omega_0$. Тоді рівняння (14) рівносильне сукупності комплексно спряжених рівнянь

$$a\,dy - (b \pm i\sqrt{-\Delta})\,dx = 0,$$

якщо $a(x, y) \neq 0$ (рівняння (14) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо dy"), або

$$c\,dx - (b \pm i\sqrt{-\Delta})\,dy = 0,$$

якщо $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, (рівняння (14) розв'язуємо як "квадратне відносно dx").

Нехай, для визначеності, $a(x, y) \neq 0, (x, y) \in \Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо їх перші інтеграли:

$$\omega_1(x, y) \pm i\omega_2(x, y) = C$$

(вони є комплексно спряженими). Тоді виберемо заміну змінних

$$\xi = \omega_1(x, y), \quad \eta = \omega_2(x, y) \quad (\text{або} \quad \eta = -\omega_2(x, y)).$$

У результаті в рівнянні (14) матимемо $\widetilde{a}(\xi, \eta) = \widetilde{c}(\xi, \eta) \neq 0$ і $\widetilde{b}(\xi, \eta) = 0$ для всіх $(\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (13) на $\widetilde{a}(\xi, \eta) = \widetilde{c}(\xi, \eta)$, отримаємо рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\xi}, \widetilde{u}_{\eta}) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння еліптичного типу.

Висновок. Щоб звести рівняння (11) до канонічного вигляду, потрібно виконати такі операції:

- скласти дискримінант Δ і визначити тип рівняння;
- скласти характеристичне рівняння і знайти його перші інтеграли;
- виконати відповідне перетворення незалежних змінних.

Розв'язування типових прикладів

Приклад 4.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + u_x - 2u_y = x\,\sin y.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}\,.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 + 5\,dx\,dy + 6\,dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy", отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -3\,dx, \qquad dy = -2\,dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$y + 3x = C, \qquad y + 2x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = y + 3x, \qquad \eta = y + 2x.$$

Оскільки $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то

$$\begin{array}{r|l}
1 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 3 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2,\\
-2 & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
1 & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 9 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 12 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4,\\
-5 & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 5 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 2,\\
6 & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [9 - 15 + 6] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [12 - 25 + 12] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [4 - 10 + 6] + \widetilde{u}_\xi \cdot [3 - 2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [2 - 2] = x\,\sin y.$$

Звідси, врахувавши, що згідно з нашою заміною

$$y = 3\eta - 2\xi, \quad x = \xi - \eta,$$

одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\xi = (\eta - \xi) \cdot \sin(3\eta - 2\xi)$$

— канонічний вигляд даного рівняння. $\square$

Приклад 5.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} - 3x^2 u_{yy} + 4xu_x + 12x^2 u_y = 0, \quad x > 0.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = x^2 + 3x^2 = 4x^2, \quad x > 0.$$

Звідси, зокрема, випливає, що дане рівняння є гіперболічного типу. Зведемо його до канонічного вигляду. Для цього запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2x\, dxdy - 3x^2 dx^2 = 0.$$

Розв'яжемо його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = (x \pm 2x)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + xdx = 0 \quad \text{або} \quad dy - 3xdx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли отриманих рівнянь:

$$\frac{x^2}{2} + y = C, \quad \frac{3}{2}x^2 - y = C.$$

Отже, заміна змінних має вигляд

$$\xi = \frac{x^2}{2} + y, \quad \eta = \frac{3x^2}{2} - y.$$

Тоді $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, і похідні функції u виражаються через похідні функції $\widetilde{u}$ так:

$$\begin{aligned}
4x \;|\quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot x + \widetilde{u}_\eta \cdot 3x, \\
12x^2 \;|\quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1), \\
1 \,|\quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 6x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 9x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \cdot \widetilde{u}_\eta \cdot 3, \\
2x \,|\quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-3x), \\
-3x^2 |\quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставляємо вирази похідних в задане рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x^2 + 2x^2 - 3x^2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [6x^2 + 4x^2 + 6x^2] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [9x^2 - 6x^2 - 3x^2] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [4x^2 + 12x^2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [12x^2 - 12x^2] = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$16x^2\, \widetilde{u}_{\xi\eta} + (16x^2 + 1)\, \widetilde{u}_\xi + 3\, \widetilde{u}_\eta = 0.$$

Звідси, оскільки $2x^2 = \xi + \eta$, маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{8(\xi + \eta) + 1}{8(\xi + \eta)} \widetilde{u}_\xi + \frac{3}{8(\xi + \eta)} \widetilde{u}_\eta = 0$$

— рівняння канонічного вигляду.

Приклад 6.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{2y}u_{xx} - 2xe^{y}u_{xy} + x^2u_{yy} - x^2u_y = x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант

$$\Delta = x^2e^{2y} - x^2e^{2y} = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то дане рівняння є параболічним. Запишемо характеристичне рівняння

$$e^{2y}dy^2 + 2xe^{y}dx\,dy + x^2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy", отримаємо рівняння

$$dy = -x \cdot e^{-y}dx \quad \Longleftrightarrow \quad e^{y}dy + x\,dx = 0.$$

Звідси отримаємо перший інтеграл

$$2e^{y} + x^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2e^{y} + x^2, \qquad \eta = x.$$

Оскільки $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то маємо

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\ -\,x^2 & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^{y}, \\ e^{2y} & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 4x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_\xi, \cdot 2 \\ -\,2xe^{y} & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4xe^{y} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2e^{y}, \\ x^2 & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4e^{2y} + \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^{y}. \end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [4x^2e^{2y} - 8x^2e^{2y} + 4x^2e^{2y}] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [4xe^{2y} - 4xe^{2y}] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [e^{2y}] +$$

$$+\widetilde{u}_\xi \cdot [-2x^2e^{y} + 2e^{2y} + 2x^2e^{y}] + \widetilde{u}_\eta \cdot 0 = 0.$$

Врахувавши, що згідно з нашою заміною $x = \eta$, одержимо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_\xi = \eta.$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 7.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + yu_y = 0.$$

Розв'язування. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = y^2 - y^2 = 0.$$

Отже, дане рівняння має параболічний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$y^2dy^2 - 2ydxdy + dx^2 = 0 \Leftrightarrow (ydy - dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$ydy - dx = 0.$$

Знаходимо перший інтеграл:

$$\frac{y^2}{2} - x = C$$

і в даному рівняння робимо заміну змінних:

$$\xi = \frac{y^2}{2}, \quad \eta = y,$$

оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Маємо $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$. Виразимо похідні функцій u через похідні функцій $\widetilde{u}$:

$$\begin{aligned}
0 \cdot &\big| u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-1), \\
y \cdot &\big| u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot y + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
y^2 \cdot &\big| u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1)^2, \\
2y \cdot &\big| u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-y) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1), \\
1 \cdot &\big| u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot y^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2y + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_\xi \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо ці вирази у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \big[-2y^2 + y^2 + y^2\big] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \big[-2y + 2y\big] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot \big[1\big] + \widetilde{u}_\xi \cdot \big[y^2 + 1\big] + \widetilde{u}_\eta \cdot \big[y\big] = 0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + (\eta^2 + 1)\widetilde{u}_\xi + \eta\widetilde{u}_\eta = 0$$

— канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 8.

Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2 + 1)u_{yy} + xu_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = x^2 - 1 \cdot (x^2 + 1) = -1.$$

Оскільки $\Delta(x,y) < 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (17) має еліптичний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$dy^2 - 2xdxdy + (x^2 + 1)dx^2 = 0\,.$$

Розв'язуючи його як "квадратичне рівняння відносно dy ", отримаємо

$$dy = (x \pm i)dx,$$

звідки

$$y - \frac{x^2}{2} \mp i\,x = C.$$

Отже, заміну змінних в рівнянні (17) беремо у вигляді

$$\xi = y - \frac{x^2}{2}, \quad \eta = x.$$

Оскільки $u(x, y) = \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, то і маємо

$$\begin{aligned}
0| \quad & u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-x) + \tilde{u}_\eta \cdot 1\,, \\
0| \quad & u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1, \\
x| \quad & u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x^2) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2x) + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \tilde{u}_\eta \cdot (-1)\,, \\
2x| \quad & u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1\,, \\
(x^2+1)| \quad & u_{yy} = \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1\,.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази похідних у рівняння (17). Отримаємо

$$\tilde{u}_{\xi\xi}[x^2 - 2x^2 + x^2 + 1] + \tilde{u}_{\xi\eta}[-2x + 2x] + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \tilde{u}_\xi \cdot [x - 1] + \tilde{u}_\eta \cdot [0] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + (\eta - 1)\tilde{u}_\xi = 0$$

— канонічний вигляд рівняння (17). □

Приклад 9.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = x^2y^2 - 2x^2y^2 = -x^2y^2.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то дане рівняння є еліптичним. Запишемо характеристичне рівняння

$$y^2 dy^2 - 2xy\,dx\,dy + 2x^2 dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох комплексно спряжених рівнянь

$$dy = \frac{xy \pm ixy}{y^2}\,dx.$$

Після спрощення отримаємо

$$ydy = xdx \pm ixdx.$$

Перший інтеграл цього рівняння

$$x^2 - y^2 \pm ix^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = x^2, \qquad \eta = x^2 - y^2.$$

Обчислимо похідні

$$\begin{aligned}
0\,|\quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 2x,\\
y\,|\quad & u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot (-2y),\\
y^2\,|\quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 8x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 2 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2,\\
2xy\,|\quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-4xy) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-4xy),\\
2x^2\,|\quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-2).
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння і врахувавши, що згідно з нашою заміною $x^2 = \xi$, $y^2 = \xi - \eta$, одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}\,\widetilde{u}_\xi + \frac{1}{2(\eta - \xi)}\,\widetilde{u}_\eta = 0.$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 10.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$\Delta(x, y) = x^2 - x(x-1) = x.$$

Звідси випливає, що дане рівняння, залежно від значення x, є таких типів:
1) якщо $x = 0$, тобто $\Delta = 0$, то рівняння параболічного типу,
2) якщо $x > 0$, тобто $\Delta > 0$, то рівняння гіперболічного типу,
3) якщо $x < 0$, тобто $\Delta < 0$, то рівняння еліптичного типу.

Розглянемо кожний випадок окремо. У випадку 1), тобто на множині $\{(0, y)\,|\, y \in \mathbb{R}\}$, рівняння має такий канонічний вигляд:

$$u_{yy} = 0.$$

У випадку 2), тобто на множині $\{(x, y)\,|\, x > 0\}$, рівняння характеристик має вигляд

$$xdy^2 - 2xdxdy + (x-1)dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = \frac{x \pm \sqrt{x}}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = (1 - \frac{1}{\sqrt{x}})dx \ \vee \ dy = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$y - x - 2\sqrt{x} = C_1, \quad y - x + 2\sqrt{x} = C_2.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних:

$$\xi = y - x - 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x + 2\sqrt{x}.$$

Тоді $u(x,y)=\widetilde{u}(\xi,\eta)=\widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$ і

$$\begin{aligned}
0\ &|\ u_x=\widetilde{u}_\xi(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})+\widetilde{u}_\eta(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}),\\
0\ &|\ u_y=\widetilde{u}_\xi 1+\widetilde{u}_\eta 1,\\
x\ &|\ u_{xx}=\widetilde{u}_{\xi\xi}(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2\widetilde{u}_{\xi\eta}(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})+\widetilde{u}_{\eta\eta}(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})^2+\\
&+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\xi-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\eta,\\
2x\ &|\ u_{xx}=\widetilde{u}_{\xi\xi}(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})+\widetilde{u}_{\xi\eta}(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}})+\widetilde{u}_{\eta\eta}(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})\equiv\\
&\equiv\widetilde{u}_{\xi\xi}(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})+\widetilde{u}_{\xi\eta}(-2)+\widetilde{u}_{\eta\eta}(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}),\\
(x-1)\ &|\ u_{yy}=\widetilde{u}_{\xi\xi}+2\widetilde{u}_{\xi\eta}+\widetilde{u}_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази в рівняння (2), отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot\big[x(1-\frac{1}{x})^2+2x(-1-\frac{1}{\sqrt{x}})+x-1\big]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot\big[x(1-\frac{1}{x})+(-2)2x+2(x-1)\big]+$$

$$+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot\big[x(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2x(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})+(x-1)1\big]+$$

$$+\widetilde{u}_\xi\cdot\big[x\frac{1}{2x\sqrt{x}}\big]+\widetilde{u}_\eta\cdot\big[x(-\frac{1}{2x\sqrt{x}})\big]=0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad\widetilde{u}_\xi\cdot\big[-x-3\big]+\widetilde{u}_\xi\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\widetilde{u}_\eta\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=0.$$

Оскільки $x=(\frac{\eta-\xi}{2})^2$, то маємо канонічний вигляд нашого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}-\frac{2}{\eta-\xi}\frac{16}{(\eta-\xi)^2+8}(\widetilde{u}_\xi-\widetilde{u}_\eta)=0.$$

Розглянемо випадок 3), тобто коли $x<0$. Тоді характеристичне рівняння можна записати у вигляді сукупності рівнянь

$$dy=\frac{x\pm i\sqrt{-x}}{x}dx\quad\Leftrightarrow\quad dy=\left(1\pm i\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)dx\,,$$

і отримати такі перші інтеграли:

$$y-x\pm i\cdot 2\sqrt{-x}=C.$$

Отже, для зведення рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\begin{cases}\xi=y-x,\\ \eta=2\sqrt{-x}.\end{cases}$$

Оскільки $u(x,y) = \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то

$$
\begin{aligned}
&0 \mid \quad u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-1) + \tilde{u}_\eta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right),\\
&0 \mid \quad u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1\,,\\
&x \mid \quad u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}} + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{-x}}\right)^2 + \tilde{u}_\eta \cdot \frac{1}{2x\sqrt{-x}}\,,\\
&2x \mid \quad u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right),\\
&(x-1) \mid \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1^2\,.
\end{aligned}
$$

Підставимо вирази похідних u через похідні $\tilde{u}$ в рівняння:

$$
\tilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x - 2x + x - 1] + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left[2x\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x\frac{1}{\sqrt{-x}}\right] +
$$

$$
+\tilde{u}_{\eta\eta}\left[\frac{1}{-x} \cdot x\right] + \tilde{u}_\xi \cdot [0] + \tilde{u}_\eta\left[x\frac{1}{2x\sqrt{-x}}\right] = 0 \Leftrightarrow -\tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\tilde{u}_\eta = 0 \Leftrightarrow
$$

$$
\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta = 0
$$

— канонічний вигляд даного рівняння.

Частина II: Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними

Пункт 2.1: Знаходження загальних розв'язків

I. Довідкова інформація

Знаходження загального розв'язку довільного рівняння з частинними похідними другого порядку, взагалі кажучи, неможливе. Але в деяких часткових випадках це легко зробити. Наведемо частину цих випадків.

Розглянемо лінійне гіперболічне рівняння з двома незалежними змінними

$$
a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{18}
$$

де Ω — область в $\mathbb{R}^2$, і нехай

$$
\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,\ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}, \tag{19}
$$

невироджена заміна змінних, при якій дане рівняння набуває канонічного вигляду

$$
\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{a}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\xi + \widetilde{b}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\eta + \widetilde{c}_1(\xi,\eta)\widetilde{u} = \widetilde{f}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}. \tag{20}
$$

Розглянемо кілька найпростіших випадків виконання однієї з умов а) або б) і знаходження при цьому загального розв'язку вихідного рівняння. При цьому для спрощення викладення, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\widetilde{\Omega} = I \times J$, I, J — відповідні числові інтервали, тобто $\widetilde{\Omega}$ — відкритий прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат.

Випадок 1. Нехай в рівнянні (20): $\widetilde{a}_1 = 0, \quad \widetilde{b}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{21}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування однієї з систем рівнянь:

$$v_\eta = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\xi = v \tag{22}$$

або

$$v_\xi = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{23}$$

Розв'яжемо систему (22). Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його по η і при цьому вважаючи ξ параметром. У результаті здобуваємо

$$v(\xi, \eta) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \widetilde{f}(\xi, r)\, dr + F_1(\xi),$$

де η_0 — фіксоване число, F_1 — довільна функція. Підставимо отриманий вираз v у друге рівняння системи (23). Проінтегрувавши отримане рівняння по ξ, вважаючи при цьому η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (21):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \widetilde{f}(t, r)\, drdt + F(\xi) + G(\eta),$$

де $F(\xi)$, $\xi \in I$, $G(\eta)$, $\eta \in J$, — довільні неперервно диференційовні функції (тут F — первісна від F_1).

Отож, загальний розв'язок рівняння (18) в даному випадку має вигляд

$$u(x, y) = \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)} \int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} \widetilde{f}(t, r)\, drdt + F(\varphi(x, y)) + G(\psi(x, y)),$$

де F, G — довільні двічі неперервно диференційовні функції, визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 2. Нехай в рівнянні (20): $\widetilde{a} = p(\eta), \quad \widetilde{b}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + p(\eta)\widetilde{u}_\xi = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{24}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\xi = v. \tag{25}$$

Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, тобто рівняння

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi, \eta).$$

Його можна трактувати як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку щодо змінної η, вважаючи змінну ξ параметром.

Розв'яжемо його, помноживши попередньо на $e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds}$. Отримаємо

$$e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds} v_\eta + p(\eta) e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds} v = e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds} \widetilde{f}(\xi, \eta) \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds} v\right)_\eta = e^{\int_{\eta_0}^{\eta} p(s)\, ds} \widetilde{f}(\xi, \eta) \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, r)\,dr + F_1(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$v = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi, r)\,dr + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F_1(\xi).$$

де η_0 — фіксоване число, F_1 — довільна функція. Підставляючи отриманий вираз $v(\cdot)$ в друге рівняння системи (25) і інтегруючи його по ξ, вважаючи при цьому змінну η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (20):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(t, r)\,dr dt + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F(\xi) + G(\eta),$$

де $F(\xi)$, $\xi \in I$, $G(\eta)$, $\eta \in J$, — довільні неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових інтервалах (тут F — первісна від F_1).

Звідси здобуваємо загальний розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$u(x, y) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)} \int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(q, r)\,dr dq + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} F(\varphi(x, y)) + G(\psi(x, y)),$$

де F, G — довільні двічі неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 3. Нехай в рівнянні (20): $\widetilde{a}_1 = 0$, $\widetilde{b}_1 = q(\xi)$, $\widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + q(\xi)\widetilde{u}_{\eta} = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{26}$$

Його розв'язування зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_{\xi} + q(\xi)v = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_{\eta} = v. \tag{27}$$

Ця система інтегрується цілком аналогічно, як система (25), із заміною η на ξ.

II. Розв'язування типових прикладів

Приклад 11.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0.$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Обчисливши дискримінант рівняння

$$\Delta = (1 - y^2)^2 + y^2 = 1 + 2y^2 + y^4 = (1 + y^2)^2,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо його рівняння характеристик

$$4y^2 dy^2 - 2(1 - y^2)dx\,dy - dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як квадратне відносно dy, отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -\frac{1}{2}dx, \quad dy = \frac{1}{2y^2}dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$2y + x = C, \quad \frac{2}{3}y^3 - x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2y + x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^3 - x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$\begin{array}{r|l}
\dfrac{-4y}{1+y^2} & u_x = \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta, \\
\dfrac{2y}{1+y^2} & u_y = 2\widetilde{u}\ \ + 2y^2\widetilde{u}_\eta, \\
4y^2 & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} - 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
2(1-y^2) & u_{xy} = 2\widetilde{u}_{\xi\xi} + (-2+2y^2)\widetilde{u}_{\xi\eta} - 2y^2\widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
-1 & u_{yy} = 4\widetilde{u}_{\xi\xi} + 8y^2\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4y^4\widetilde{u}_{\eta\eta} + 4y\widetilde{u}_\eta.
\end{array}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння, одержимо канонічний вигляд даного рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{28}$$

Інтегруючи рівняння (28) спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім — по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ — довільні неперервно диференційовні функції.

Звідси, вернувшись до старих змінних, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$u(x, y) = F(2y + x) + G(2y^3/3 - x),$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ — довільні двічі неперервно диференційовні функції. □

Приклад 12.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - e^{2x})u_{yy} - u_x - u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{29}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння:

$$\Delta(x, y) = 1 - 1 + e^{2x} = e^{2x}.$$

Оскільки $\Delta(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (29) має гіперболічний тип. Запишемо відповідне рівняння характеристик:

$$dy^2 - 2\,dxdy + (1 - e^{2x})dx^2 = 0.$$

Розв'язавши його як "квадратне рівняння відносно dy", отримаємо сукупність двох рівнянь:

$$dy = (1 \pm e^x)\,dx,$$

і знайдемо їх перші інтеграли:

$$y - x - e^x = C, \quad y - x + e^x = C.$$

Отже, рівняння (29) зводиться до канонічного вигляду заміною змінних:

$$\xi = y - x - e^x, \quad \eta = y - x + e^x.$$

Оскільки

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big),$$

то

$$\begin{aligned}
-1\,\Big|\, & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1 + e^x), \\
-1\,\Big|\, & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,\Big|\, & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x)(-1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x)^2 + \\
& + \widetilde{u}_\xi \cdot (-e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot e^x, \\
2\,\Big|\, & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x - 1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x), \\
(1 - e^{2x})\,\Big|\, & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази u через похідні $\widetilde{u}$ в задане рівняння. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}_{\xi\xi}\Big[(-1 - e^x)^2 + 2(-1 - e^x) + 1 - e^{2x}\Big] + \widetilde{u}_{\xi\eta}\Big[2(1 - e^{2x}) + (-4) + 2(1 - e^{2x})\Big] + \\
&+\widetilde{u}_{\eta\eta}\Big[(-1 + e^x)^2 + 2(-1 + e^x) + (1 - e^{2x})\Big] + \widetilde{u}_\xi\Big[(-1) \cdot (-1 - e^x) - e^x - 1\Big] + \\
&+\widetilde{u}_\eta\Big[(-1) \cdot (-1 + e^x) + e^x - 1\Big] = 0 \Longleftrightarrow -4e^{2x}\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Розв'яжемо рівняння (30), а точніше, знайдемо його загальний розв'язок. Зауважимо, що рівняння (30) рівносильне системі рівнянь

$$v_\xi = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \qquad (31)$$

Знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його за змінною η, вважаючи зміну ξ довільною і фіксованою. Тоді

$$v = F_1(\xi), \qquad (32)$$

де F_1 — довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз (32) в друге рівняння системи :

$$\widetilde{u}_\xi = f_1(\xi).$$

Інтегруючи це рівняння за змінною ξ, вважаючи змінну η довільно заданою, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = F(\xi) + G(\eta), \qquad (33)$$

де F і G—довільні двічі неперервно диференційовні на осі $\mathbb{R}$ функції (тут F — первісна від F_1), тобто вираз (33) є зображенням загального розв'язку рівняння (30).

Повертаючись до змінних x і y, знайдемо загальний розв'язок рівняння (29):

$$u(x,y) = F(y-x-e^x) + G(y-x+e^x), (x,y) \in G,$$

де F і G—довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Приклад 13.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0. \tag{34}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = 4 + 5 = 9 > 0.$$

Отже, рівняння (34) має гіперболічний тип. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0, \tag{35}$$

звідси

$$dy = (2 \pm 3)\, dx \Longleftrightarrow dy - 5dy = 0 \quad \text{або} \quad dy + dx = 0.$$

Отже, перший інтеграл рівняння (35) мають вигляд,

$$y - 5x = C_1 \quad \text{або} \quad y + x = C_2,$$

і в рівнянні (34) робимо заміну змінних

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x.$$

Врахувавши, що

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big),$$

знаходимо

$$\begin{aligned}
-1 \cdot \big| u_x &= \widetilde{u}_\xi \cdot (-5) + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
-1 \cdot \big| u_y &= \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1 \cdot \big| u_{xx} &= \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-5)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-5) \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2, \\
4 \cdot \big| u_{xy} &= \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-5) \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-5 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2, \\
-5 \cdot \big| u_{yy} &= \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1^2.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази у рівняння (34) одержимо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [15 - 5 \cdot 4 - 5] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [-10 - 16 - 10] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1 + 4 - 5] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi[-5 - 1] + \widetilde{u}_\eta[1 - 1] = 0 \Longleftrightarrow -36\widetilde{u}_{\xi\eta} - 6\widetilde{u}_\xi = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{6}\widetilde{u}_\eta = 0. \tag{36}$$

Рівняння (36) рівносильне системі рівнянь

$$v_\xi + \frac{1}{6}v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{37}$$

Спочатку розв'яжемо перше рівняння системи (37). Для цього помноживши його на $e^{\xi/6}$ і перепишемо у вигляді
$$\left(ve^{\xi/6}\right)_\xi = 0.$$

Звідси інтегруючи за змінною ξ, вважаючи змінну η довільною і фіксованою, знаходимо
$$ve^{\xi/6} = G_1(\eta),$$
де G_1—довільна неперервно диференційовна функція.

Отже, маємо
$$v(\xi,\eta) = G_1(\eta)\cdot e^{-\xi/6}.$$

Підставляючи цей вираз в друге рівняння системи (37), одержимо
$$\widetilde{u}_\eta = G_1(\eta)\cdot e^{-\xi/6},$$
Звідси маємо загальний роз'язок рівняння (36):
$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = F(\xi) + G(\eta)e^{-\xi/6},$$
де F і G—довільні двічі неперервно диференційовні функції. Вертаючись до змінних x і y, знаходимо
$$u(x,y) = F(y-5x) + G(y+x)\, e^{(-y+5x)/6}$$
— загальний розв'язок заданого рівняння.

Пункт 2.2: Знаходження розв'язків задачі Коші

I. Довідкова інформація

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними
$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{38}$$
з початковими умовами або вигляду
$$u\Big|_{y=\mu_1(x)} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu_1(x)} = \psi(x), \tag{39}$$
або вигляду
$$u\Big|_{x=\mu_2(y)} = \varphi(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\mu_2(y)} = \psi(y). \tag{40}$$

Вважатимемо, що для рівняння (38) виконуються такі ж умови, як у пункті , тобто умови, які гарантують можливість знаходження загального розв'язку рівняння (38). Тоді, знайшовши загальний розв'язок рівняння (38), який містить дві довільні функції, підставимо його вираз у початкові умови ((39) чи (40)) і визначимо ці функції. Такий метод знаходження розв'язку задачі Коші називається *методом характеристик*. Продемонструємо його на конкретних прикладах.

II. Розв'язування типових прикладів

Приклад 14.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{xx} + 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} + \cos x\, u_y = -4. \tag{41}$$

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 1 + 2\sin x, \quad u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 2 - 2x. \tag{42}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайшовши дискримінант рівняння

$$\Delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2\sin x\, dx\, dy - \cos^2 x\, dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох рівнянь

$$dy = (\sin x + 1)dx, \qquad dy = (\sin x - 1)dx.$$

Загальні інтеграли цих рівнянь

$$y + \cos x - x = C_1, \qquad y + \cos x + x = C_2.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду слід зробити заміну

$$\xi = y + \cos x - x, \qquad \eta = y + \cos x + x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\sin x + 1), \\
\cos x & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1 & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (\sin^2 x + 2\sin x + 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (2\sin^2 x - 2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (\sin^2 x - 2\sin x + 1) + \\
 & + \widetilde{u}_\xi \cdot (-\cos x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\cos x), \\
2\sin x & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2\sin x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-\sin x + 1), \\
-\cos^2 x & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\tilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\tilde{u}_{\xi\xi} \cdot [\sin^2 x + 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x - 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot [2\sin^2 x - 2 + 2\sin x(-2\sin x) - 2\cos^2 x] +$$

$$+ \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot [\sin^2 x - 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x + 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_\xi \cdot [\cos x - \cos x] + \tilde{u}_\eta \cdot [\cos x - \cos x] = -4.$$

Після відповідних спрощень одержимо рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 1. \tag{43}$$

Інтегруючи це рівняння спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім — по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо загальний розв'язок рівняння (43):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \eta\xi + F(\xi) + G(\eta),$$

де F і G — довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Повернувшись до змінних x та y, здобуваємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x, y) = (y + \cos x - x)(y + \cos x + x) + F(y + \cos x - x) + G(y + \cos x + x), \tag{44}$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ — довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Знайдемо частинну похідну

$$u_y(x,y) = (y+\cos x - x) + (y+\cos x + x) + F'(y+\cos x - x) + G'(y+\cos x + x).$$

Підставимо отримані вирази u, u_y в початкові умови:

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = (x+1)(3x+1) + F(x+1) + G(3x+1) = 1 + 2\sin x, \qquad (45)$$

$$u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 4x + 2 + F'(x+1) + G'(3x+1) = 2 - 2x. \qquad (46)$$

Продиференціюємо рівність (46) по x:

$$6x + 4 + F'(x+1) + 3G'(3x+1) = 2\cos x. \qquad (47)$$

Віднявши від рівності (47) рівність (46), отримаємо

$$G'(3x+1) = \cos x - 2. \qquad (48)$$

Зробимо в (48) заміну змінних $z = 3x+1$, тобто $x = \frac{z-1}{3}$. Тоді $G'(z) = \cos\frac{z-1}{3} - 2$. Звідси $G(z) = 3\sin\frac{z-1}{3} - 2z + C$, де C — довільна стала. Тоді з (45) матимемо

$$F(x+1) = 1 + 2\sin x - (x+1)(3x+1) - 3\sin x + 2(3x+1) - C,$$

тобто $F(x+1) = -3x^2 + 2x + 2 - \sin x - C$. Зробимо заміну змінних $x+1 = s$, звідки $x = s-1$ і

$$F(s) = -3(s-1)^2 + 2(s-1) + 2 - \sin(s-1).$$

Отже, розв'язок вихідної задачі Коші визначений формулою

$$u(x,y) = (y+\cos x - x)(y+\cos x + x) - 3(y+\cos x - x - 1)^2 + 2(y+\cos x - x - 1)+$$

$$+2 - \sin(y+\cos x - x - 1) + 3\sin\frac{y+\cos x + x - 1}{3} - 2(y+\cos x + x).$$

□

Приклад 15.

Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - u_y = 0 \qquad (49)$$

з початковими умовами

$$u|_{y=x+1} = e^{5x+2}, \quad u_y|_{y=x+1} = 2e^{5x+2}. \qquad (50)$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Для цього зводимо наше рівняння до канонічного вигляду. Знаходимо дискримінант рівняння.

$$\Delta(x,y) = \Big(-\frac{3}{2}\Big)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0.$$

Звідси, зокрема, отримуємо висновок, що дане рівняння є гіперболічного типу. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 + 3dxdy + 2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy" , знаходимо

$$dy = \Big(-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\Big)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + dx = 0 \quad \text{або} \quad dy + 2dx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$x + y = C, \quad 2x + y = C.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних

$$\xi = x + y, \quad \eta = 2x + y.$$

Тоді

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

і маємо

$$\begin{aligned}
1\,|\quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2,\\
-1\,|\quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
1\,|\quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2 \cdot \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4,\\
-3\,|\quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4,\\
2\,|\quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в наше рівняння.

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1-3+2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [4-9+4] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [4-6+2] + \widetilde{u}_\xi \cdot [1-1] + \widetilde{u}_\eta \cdot [2-1] = 0 \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_\eta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\eta = 0 \tag{51}$$

— рівняння канонічного вигляду.

Рівняння (51) є еквівалентним системі рівнянь

$$v_\xi - v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{52}$$

Розв'яжемо перше рівняння. Для цього помножимо його на $e^{-\xi}$ і перетворимо так:

$$(ve^{-\xi})_\xi = 0.$$

Звідси отримаємо

$$ve^{-\xi} = G_1(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad v = e^\xi G_1(\eta),$$

де G_1 — довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз v в друге рівняння системи (52):

$$\widetilde{u}_\eta = e^\xi G_1(\eta).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо загальний розв'язок рівняння (51):

$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + e^\xi G(\eta),$$

де F і G — довільні неперервно диференційовні функції (G — первісна від G_1).

Повертаючись до змінних x і y , отримаємо загальний розв'язок даного рівняння:

$$u(x,y) = F(x,y) + e^{x+y} G(2x+y), \tag{53}$$

де F, G — довільні неперервно диференційовані на $\mathbb{R}$ функції.

Підставимо вираз загального розв'язку (53) в початкові умови (50), але спочатку обчислимо похідну знайденого розв'язку

$$u_y(x,y) = F'(x+y) + e^{x+y}G(2x+y) + e^{x+y}G'(2x+y).$$

Тоді з початкових (50) умов маємо

$$u|_{y=x+1} = F(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) = e^{5x+2} + 1, \tag{54}$$

$$u|_{y=x+1} = F'(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) + e^{2x+1}G'(2x+1) = 2e^{5x+2}. \tag{55}$$

Знайдемо функції F, G. Для цього продиференціюємо рівність (54):

$$2F'(2x+1) + 2e^{2x+1}G(3x+1) + 3e^{2x+1}G'(3x+1) = 5e^{5x+2}. \tag{56}$$

Помножимо рівність (55) на 2 і віднімемо отриману рівність від рівності (56):

$$e^{2x+1}G'(3x+1) = e^{5x+2} \Longleftrightarrow G'(3x+1) = e^{3x+1}. \tag{57}$$

Зробимо в (57) заміну змінних

$$p = 3x+1.$$

Тоді $G'(p) = e^p$, звідки маємо

$$G(p) = e^p + C, \quad C - \text{довільна стала.} \tag{58}$$

З рівності (54), врахувавши (58), знаходимо

$$F(2x+1) = e^{5x+2} + 1 - e^{2x+1}(e^{3x+1} + C) \equiv 1 - Ce^{2x+1}.$$

Зробимо тут заміну змінних

$$q = 2x+1.$$

Тоді

$$F(q) = 1 - Ce^q, \tag{59}$$

де C — та ж сама довільна стала, що в (58).

З виразу загального розв'язку (53) і (58) та (59) маємо

$$u(x,y) = 1 - Ce^{x+y} + e^{x+y}(e^{2x+y} + C) \equiv e^{3x+2y} + 1$$

розв'язок нашої задачі.

Приклад 16.

Розв'язати задачу Коші :

$$u_{xx} + u_{xy} + yu_x = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{60}$$

$$u|_{y=2x} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=2x} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

де $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння (9), а для цього зведемо його до канонічного вигляду. Обчислимо дискримінант рівняння (9) :

$$\Delta(x,y) = \frac{1}{4} > 0.$$

Отже, рівняння (60) має гіперболічний тип. Запишемо для нього рівняння характеристик:

$$dy^2 - dxdy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (dy - dx)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy = 0 \quad \text{або} \quad dy - dx = 0.$$

Знайдемо перші інтеграли цих рівнянь :

$$y = C, \quad y - x = C.$$

Отже, для зведення рівняння (60) до канонічного вигляду потрібно зробити в ньому заміну змінних:

$$\xi = y, \quad \eta = y - x. \tag{62}$$

Враховуючи, що $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, знаходимо:

$$\begin{aligned}
&y \mid u_x = \widetilde{u}_\eta \cdot (-1),\\
&0 \mid u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
&1 \mid u_{xx} = \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1)^2,\\
&1 \mid u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1),\\
&0 \mid u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння (60):

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1 \cdot 0] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [1 \cdot (-1)] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)] + (-y) \cdot \widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta} - \xi\widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \xi\widetilde{u}_\eta = 0. \tag{63}$$

Рівняння (63) рівносильне системі рівнянь:

$$v_\xi + \xi v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{64}$$

Розв'яжемо перше з рівнянь системи (64):

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \;\; \text{або} \;\; v = 0.$$

Маємо

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \ln|v|}{\partial \xi} = -\xi \Leftrightarrow \ln|v| = -\xi^2/2 + \ln|G_1(\eta)| \Leftrightarrow$$

$$v(\xi, \eta) = G_1(\eta)e^{-\xi^2/2},$$

де G_1 — довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо отриманий вираз у друге рівняння системи (64):

$$\widetilde{u}_\eta = G_1(\eta)e^{-\xi^2/2}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок рівняння (63):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)e^{-\xi^2/2},$$

де F і G — довільні двічі неперервно-диференційовні функції. Повернемося до змінних x і y (див.(63)) :

$$u(x, y) = F(y) + G(y - x)e^{-y^2/2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{65}$$

— загальний розв'язок рівняння (60).

Підставимо знайдений вираз загального розв'язку в умови (61), але спочатку знайдемо похідну :

$$u_y(x,y) = F'(y) + G'(y-x)\cdot e^{-y^2/2} - G(y-x)\cdot y\cdot e^{-y^2/2}.$$

Тоді з умов (61) маємо

$$u|_{y=2x} = F(2x) + G(x)e^{-2x^2} = \varphi(x), \tag{66}$$

$$u_y|_{y=2x} = F'(2x) + G'(x)e^{-2x^2} - 2xG(x)e^{-2x^2} = \psi(x). \tag{67}$$

Для знаходження F і G продиференціюємо рівність (65):

$$2F'(2x) + G'(x)e^{-2x^2} - 4xG(x)e^{-2x^2} = \varphi'(x), \tag{68}$$

Помножимо рівність (66) на 2 і від отриманої рівності віднімемо рівність (67):

$$G'(x)e^{-2x^2} = 2\psi(x) - \varphi'(x),$$

Звідси

$$G'(x) = [2\psi(x) - \varphi'(x)]e^{2x^2}.$$

Отже, маємо

$$G(x) = \int\limits_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C. \tag{69}$$

Тоді з (69) на підставі (68) маємо

$$F(2x) = \varphi(x) - \left(\int\limits_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-2x^2}.$$

Зробивши заміну змінних $2x = s \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{s}{2}$, отримаємо :

$$F(s) = \varphi\left(\frac{s}{2}\right) - \left(\int\limits_0^{\frac{s}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-s^2/2}. \tag{70}$$

Отже, з (65) на підставі (69), (70) отримуємо розв'язок задачі (60), (61):

$$u(x,y) = \varphi(y/2) - \left(\int\limits_0^{\frac{y}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-y^2/2} +$$

$$+\left(\int\limits_0^{y-x} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt + C\right)e^{-\frac{y^2}{2}} \equiv$$

$$\equiv \varphi(y/2) + \int\limits_{y/2}^{y-x} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2}dt.$$

III. Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (випадок двох незалежних змінних):

$$\begin{aligned}
&\text{а) } u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0;\\
&\text{б) } u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0;\\
&\text{в) } 2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y-2u=0;\\
&\text{г) } (1+x^2)^2u_{xx}+u_{yy}+2x(1+x^2)u_x=0;\\
&\text{д) } y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0;\\
&\text{е) } u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0.
\end{aligned}$$

2. Знайти загальні розв'язки таких рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } 2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}=0;\\
&\text{б) } 2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0;\\
&\text{в) } u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^x.
\end{aligned}$$

3. Знайти розв'язки таких задач Коші:

а) $4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0,$
$\quad u\big|_{y=0}=\sin x, \qquad u_y\big|_{y=0}=1;$

б) $u_{xx}-2u_{xy}=-4e^y,$
$\quad u\big|_{x=0}=e^y, \qquad u_x\big|_{x=0}=y;$

в) $u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}-\sin x\,u_y=0,$
$\quad u\big|_{y=\sin x}=x+\cos x, \qquad u_y\big|_{y=\sin x}=\sin x;$

г) $3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+u_y=0,$
$\quad u\big|_{y=0}=\varphi(x), \qquad u_y\big|_{y=0}=\psi(x);$

д) $u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0,$
$\quad u\big|_{y=\cos x}=0, \qquad u_y\big|_{y=\cos x}=e^{-x/2}\cos x.$

е) $u_{xx}+5u_{xy}+6u_{yy}=0; \qquad u|_{y=x}=3x+2, \quad u_y|_{y=x}=x+1.$

Відповіді:

2. а) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi}+\widetilde{u}_{\eta\eta}-8\widetilde{u}=0, \quad \xi=y-x, \quad \eta=2x;$
б) параболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\eta}+18\widetilde{u}_\xi+9\widetilde{u}_\eta-9\widetilde{u}=0, \quad \xi=x+y, \quad \eta=x;$
в) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi}+3\widetilde{u}_\xi-\widetilde{u}_\eta+2\widetilde{u}=0, \quad \xi=y-x, \quad \eta=2y-x;$
г) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi}+\widetilde{u}_{\eta\eta}=0, \quad \xi=y, \quad \eta=\operatorname{arctg} x;$
д) параболічне всюди, крім початку координат (у початку координат рівняння вироджується)

$$\widetilde{u}_{\eta\eta}-\frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}\widetilde{u}_\xi+\frac{1}{2\eta}\widetilde{u}_\xi=0, \qquad \xi=y^2-x^2, \quad \eta=x^2;$$

е) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi}=0, \quad \xi=x+\operatorname{arctg} y, \quad \eta=x-\operatorname{arctg} y.$

1. а) заміна $\xi=x+y$, $\eta=3x+2y$ зводить до рівняння $\widetilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0$, інтегруючи яке, знаходимо $u(x,y)=F(x+y)+G(3x+2y)$, де F,G — довільні двічі неперервно-диференційовні функції;
б) $u(x,y)=F(y-x)+e^{(x-y)/2}G(y-2x);$
в) $u(x,y)=2e^x+e^{(x+2y)/2}F(x)+G(x+2y).$

3. а) $u(x,y) = \sin(x - \frac{2}{3}y^3) + y + \frac{1}{3}y^3$; в нових змінних $\xi = x - \frac{2}{3}y^3$, $\eta = x + 2y$ вихідне рівняння набуває вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, інтегруючи яке і використовуючи початкові умови, приходимо до відповіді.
б) $u(x,y) = (2 + 2x - e^{2x})e^y + x^2 + xy$; використовується заміна змінних $\xi = y$, $\eta = y + 2x$.
в) $u(x,y) = x + \cos(x - y + \sin x)$; використати заміну змінних $\xi = y - x - \sin x, \eta = y + x - \sin x$.
г) $u(x,y) = \frac{3}{2}e^{-y}\varphi(x+y) - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+3y)}\int\limits_{x+y}^{x+3y} e^{z/2}[3\varphi(z) + 2\psi(z)]dz$; спочатку за допомогою заміни змінних $\xi = x + 3y, \eta = y + x$ звести вихідне рівняння до канонічного вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\tilde{u}_\eta = 0$, інтегруючи яке, можна отримати його загальний розв'язок.
д) $u(x,y) = 2e^{-\frac{1}{4}(2x - y + \cos x)}\cos x \sin \frac{1}{2}(y - \cos x)$; за допомогою заміни змінних $\xi = 2x - y + \cos x, \eta = 2x + y - \cos x$ вихідне рівняння задачі звести до канонічного вигляду $\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_\eta = 0$, загальний розв'язок якого має вигляд $\widetilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + e^{-\xi/4}G(\eta)$, де F і G — довільні двічі неперервно диференційовні функції; повертаючись до старих змінних, отримати загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x,y) = F(2x - y + \cos x) + e^{-\frac{1}{4}(2x - y + \cos x)}G(2x + y - \cos x);$$

далі, використовуючи початкові умови, визначити вигляд функцій F і G.

3 Контрольна робота №1

Варіант №1

Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 4u_{zz} + 2u = 0\,;$

2. $x^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4y^2 u_{yy} + 6u_y = 0\,;$

3. $y^2 u_{xx} + 4e^x y u_{xy} + 5e^{2x} u_{yy} + 4u = 0\,.$

4. Розв'язати задачу Коші:

$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + 3u_y = 0,$

$u\big|_{y=x} = x^2, \quad u_y\big|_{y=x} = 2x.$

Практичне заняття № 4

4 Задача Коші для рівняння коливань

I. Довідкова інформація

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n-ок $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, T – довільне додатне число або $+\infty$. Позначимо

$$Q := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad \overline{Q} := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Розглянемо рівняння

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x,t) \;\Leftrightarrow\; u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{71}$$

де $a > 0$, f – задані, відповідно, стала і неперервна функція, u – невідома функція і

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ – } \textbf{\textit{лапласіан}}, \quad \Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Зауважимо, що коли $n = 1$, то рівняння (71) є рівнянням поперечних коливань струни, коли $n = 2$ – рівнянням поперечних коливань мембрани, а коли $n = 3$ – рівнянням поширення звукових хвиль. Тому рівняння (71) називаємо *рівнянням коливань*.

Задача Коші для рівняння коливань (71): знайти функцію $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, яка поточково задовольняє рівняння (71) в Q і початкові умови

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{72}$$

де φ, ψ – задані неперервні функції.

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (71), (72).

Нагадаємо, що належність функції u до простору $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ означає, що функція u є двічі неперервно диференційовною по $x_1, ..., x_n$ і t в Q та неперервною на $\overline{Q}$ разом з похідними $u_t, u_{x_1}, ..., u_{x_n}$. Крім того, відмітимо, що через $C^{1,0}(\overline{Q})$ позначають простір, складений з функцій $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, які є неперервними на $\overline{Q}$ разом з похідними f_{x_i}, $i = \overline{1,n}$, а через $C^{2,0}(\overline{Q})$ – підпростір простору $C^{1,0}(\overline{Q})$, складений з тих функцій $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, для яких $f_{x_i x_j} \in C(\overline{Q})$, $i,j = \overline{1,n}$.

Розглянемо існування розв'язку задачі (71), (72) у випадках $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

Теорема 4.1. *Розв'язок задачі* (71), (72)

1) у випадку $n = 3$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$ і виражається формулою Кірхгофа

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} \varphi(y)\, dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} \psi(y)\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\, dS_y\,, \quad (x,t) \in Q; \tag{73}$$

2) у випадку $n = 2$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Пуассона

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2-|y-x|^2}}\,dy\right) + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at}\frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2-|y-x|^2}}\,dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2-|y-x|^2}}\,dy\,, \quad (x,t)\in Q\,; \tag{74}$$

3) у випадку $n = 1$ існує при умові, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,, \quad (x,t)\in Q. \tag{75}$$

Тут прийнято такі позначення. У формулі (73) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки простору $\mathbb{R}^3$, $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$ – відстань між точками y і x в $\mathbb{R}^3$, а інтеграл береться по сфері $\{y \,|\, |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, dS_y – елемент площі цієї сфери. У формулі (74) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – точки площини $\mathbb{R}^2$, $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ – відстань між точками y і x, а інтеграл береться по кругу $\{y \,|\, |y-x| \leqslant at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, $dy = dy_1 dy_2$ – елемент площі круга. У формулі (75) x і y є точки прямої $\mathbb{R}$, а інтеграл береться по відрізку $[x-at, x+at]$.

II. Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння коливань

Приклад 17. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (75) маємо

$$u(x,t) = \frac{(x+at)+(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy.$$

Обчислимо

$$\frac{(x+at)+(x-at)}{2} = x,$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy = \frac{1}{2a}\frac{y^3}{3}\Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2a}\frac{(x+at)^3-(x-at)^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{2at((x+at)^2+(x^2-a^2t^2)+(x-at)^2)}{3} = \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3}. \tag{76}$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = x + \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

□

Приклад 18. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (74) маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|y-x|\leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, dy_1 dy_2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \tag{77}$$

Для обчислення інтегралу використаємо узагальнену полярну систему координат:

$$y_1 = x_1 + atr\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + atr\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi,\ 0 < r \leq 1.$$

Легко переконатися, що $dy_1 dy_2 = a^2 t^2 r\, d\alpha dr$. Отож, маємо

$$J(x,t) := \iint\limits_{|y-x|\leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, dy_1 dy_2 =$$

$$= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2 - (atr\cos\alpha)^2 - (atr\sin\alpha)^2}} r\, d\alpha dr =$$

$$= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2(1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) r^2)}} r\, d\alpha dr =$$

$$= at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \int_0^{2\pi} (x_1 x_2 + atr(x_1 \sin\alpha + x_2\cos\alpha) + a^2 t^2 r^2 \cos\alpha \sin\alpha)\, d\alpha.$$

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha\, d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{\pi} \sin 2\alpha\, d\alpha = 0$, отримаємо

$$J(x,t) = \iint\limits_{|y-x|\leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, dy_1 dy_2 = at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \int_0^{2\pi} x_1 x_2\, d\alpha =$$

$$= -2\pi at x_1 x_2 \sqrt{1-r^2}\Big|_0^1 = 2\pi at x_1 x_2.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} J(x,t) = \frac{1}{2\pi a} 2\pi at x_1 x_2 = t x_1 x_2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

□

Приклад 19. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = x_1 x_2 x_3, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (73) маємо

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 \, dS_y\Big), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty). \tag{78}$$

Для обчислення інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = at\}$ на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at\sin\theta\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + at\sin\theta\sin\alpha,\ y_3 = x_3 + at\cos\theta, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2 t^2 \sin\theta \, d\theta d\alpha$. Отож, маємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 \, dS_y = a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (x_1 + at\cos\alpha\sin\theta)(x_2 + at\sin\theta\sin\alpha)(x_3 + at\cos\theta)\sin\theta \, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \big(x_1x_2x_3 + at(x_2x_3\cos\alpha\sin\theta + x_1x_3\sin\theta\sin\alpha + x_1x_2\cos\theta) +$$
$$+ a^2t^2(x_1\sin\theta\sin\alpha\cos\theta + x_2\cos\alpha\sin\theta\cos\theta + x_3\cos\alpha\sin^2\theta\sin\alpha) +$$
$$+ a^3t^3\cos\alpha\sin^2\theta\sin\alpha\cos\theta\big)\sin\theta \, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_2x_3\sin\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_2x_3\sin^2\theta \, d\theta +$$

$$+ a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_3\sin^2\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_2\cos\theta\sin\theta \, d\theta +$$

$$+ a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1\cos\theta\sin^2\theta \, d\theta + a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_2\cos\theta\sin^2\theta \, d\theta +$$

$$+ a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_3\sin^3\theta \, d\theta + a^5t^5 \int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha\cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi}\cos\theta\sin^3\theta \, d\theta.$$

Врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{\pi}\sin 2\theta \, d\theta = 0$, отримаємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1y_2y_3 \, dS_y = 4\pi a^2t^2 x_1x_2x_3.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}4\pi a^2t^2x_1x_2x_3\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(tx_1x_2x_3\Big) = x_1x_2x_3, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 20. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 3t^2, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x_1, \quad u_t\big|_{t=0} = x_2 + 2x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Розв'язок шукаємо за формулою (73)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} y_1\, dS_y\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3)\, dS_y +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y. \tag{79}$$

Для обчислення перших двох інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом at на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at\sin\theta\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + at\sin\theta\sin\alpha,\ y_3 = x_3 + at\cos\theta, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2t^2 \sin\theta\, d\theta d\alpha$. Отож, знаходимо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1\, dS_y = a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_1 + at\cos\alpha\sin\theta)\sin\theta\, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1 \sin\theta\, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha \sin\theta\, d\theta = 4\pi a^2 t^2 x_1;$$

$$\int\limits_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3) dS_y = a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_2 + at\cos\alpha\sin\theta + 2x_3 + 2at\cos\theta)\sin\theta\, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2(x_2 + 2x_3) \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha\, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta +$$

$$+a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 4\pi a^2t^2(x_2 + 2x_3);$$

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y = \int\limits_0^t \frac{3\tau^2 d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^t 3\tau^2(t-\tau)\, d\tau = 4\pi a^2(t^4 - \frac{3}{4}t^4) = 4\pi a^2 \cdot \frac{1}{4}t^4 = \pi a^2 t^4.$$

Тут ми врахували, що інтеграл $\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y$ виражає площу сфери радіуса $a(t-\tau)$ і дорівнює $4\pi a^2(t-\tau)^2$. Відмітимо, що в загальному випадку для обчислення інтеграла

$\displaystyle\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dS_y$ можна використати параметризацію сфери $\{y\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x|=a(t-\tau)\}$ (з центром x і радіусом at) вигляду

$$y_1 = x_1 + a(t-\tau)\sin\theta\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + a(t-\tau)\sin\theta\sin\alpha,\ y_3 = x_3 + a(t-\tau)\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2 x_1\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2 (x_2+2x_3) + \frac{1}{4\pi a^2}\cdot \pi a^2 t^4 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\big(tx_1\big) + t(x_2+2x_3) + \frac{1}{4}t^4 = x_1 + (x_2+2x_3)t + \frac{1}{4}t^4, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty).$$

□

III. Вправи для самостійної роботи

1. Знайти розв'язки таких задач Коші

а) $u_{tt} - a^2\sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_ix_i} = 0, \quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1, \quad x\in\mathbb{R}^3;$

б) $u_{tt} - a^2\sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_ix_i} = ax_1 + bt, \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_2x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1x_2 + x_3, \quad x\in\mathbb{R}^3;$

в) $u_{tt} - a^2\sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_ix_i} = 2x_1x_3t, \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1 + x_2x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1x_2 + x_3, \quad x\in\mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} - \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_ix_i} = (x_1+x_2)t, \quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x_1 + x_2, \quad x\in\mathbb{R}^3;$

д) $u_{tt} - a^2\sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_ix_i} = x_3t^2 + 1, \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 + x_2 + 7, \quad x\in\mathbb{R}^3;$

е) $u_{tt} - a^2u_{xx} = x^3t^2 + 1, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 4, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x, \quad x\in\mathbb{R};$

є) $u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = x_1x_3t^2 + 1, \quad x\in\mathbb{R}^3,\ t\in(0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = 4x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x_3, \quad x\in\mathbb{R}.$

2. Розв'язками яких задач є функції

$$\text{а) } u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} (3y_1 + y_2 + 2y_3) dS_y \ ?$$

$$\text{б) } u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} (y_1 + y_2 - y_3) dS_y \Big) \ ?$$

$$\text{в) } u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} (y_1^2 + y_2 - 2y_3) \cos\tau \, dS_y \ , \ ?$$

Потрібно сформулювати задачі і переконатися, що ці функції є їх розв'язками.

Відповіді:

1. а) $u = x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2$;
б) $u = x_2 x_3 + (x_1 x_2 + x_3)t + axt^2/2 + bt^3/6$.

Практичне заняття № 5

5 Задача Коші для рівняння теплопровідності

I. Довідкова інформація

Нехай n – довільне натуральне число, T – будь-яке додатне число або $+\infty$,

$$Q := \{(x,t) \,|\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n \times (0, T] - \quad \text{напіввідкритий шар,}$$
$$\overline{Q} := \{(x,t) \,|\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n \times [0, T] - \quad \text{замикання } Q.$$

Припустимо, що
$$f \in C(Q), \qquad \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$$
– довільні функції.

Задача Коші для рівняння *теплопровідності*

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{80}$$

полягає у знаходженні функції $u \in C^{2,1}(Q) \cap C_b(\overline{Q})$ (тобто u – функція, яка двічі неперервно диференційовна за змінними $x_1, ..., x_n$ і неперервно диференційовна за змінною t в Q та неперервна і обмежена на $\overline{Q}$), яка задовольняє поточково це рівняння і початкову умову
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{81}$$
Функцію u називають *класичним розв'язком* задачі (80), (81).

Нагадаємо, що тут використано позначення

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \text{де} \;\; \Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{– лапласіан.}$$

Зауважимо, що коли $f = 0$, то рівняння (80) називають однорідним, а якщо $f \neq 0$, то – неоднорідним.

Теорема 5.1. *Якщо φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^n$ функція, а f – неперервна і обмежена разом зі своїми похідними за змінними $x_1, \ldots, x_n$ до другого порядку включно на $\overline{Q}$, то існує обмежений класичний розв'язок задачі* (80), (81) *і він виражається формулою*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\, dy, \tag{82}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, $t \in (0, T]$.

Формулу (82) називають *формулою Пуассона.*

II. Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 21. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 u_{xx} = 2t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{83}$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{84}$$

Розв'язування. В нашому випадку $n = 1$ і тому розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (82) у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \sin y\, dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} (2s)\, dy, \tag{85}$$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y = x + 2a\sqrt{t} z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t}\, dz\,.$$

Тоді

$$v(x,t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin(x + 2a\sqrt{t}z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin x\, \cos(2a\sqrt{t}z)\ dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos x\, \sin(2a\sqrt{t}z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos(2a\sqrt{t}z)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\ \sin(2a\sqrt{t}z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos(2a\sqrt{t}z)\, dz.$$

Тут враховано те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\ \sin(2a\sqrt{t}z)\, dz = 0.$$

Тепер використаємо відому формулу

$$J(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta\xi\, d\xi = \sqrt{\pi} e^{-\beta^2/4}. \tag{86}$$

Отже, одержуємо

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \cdot J(2a\sqrt{t}) = e^{-a^2 t} \sin x. \tag{87}$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (85):

$$w(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} (2s)\, dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{2s\, ds}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\, dy. \tag{88}$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y = x + 2a\sqrt{t-s}\, z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t-s}\, dz$$

і використавши рівність (див. (86)):

$$J(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi}. \tag{89}$$

У результаті отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\, dy = 2a\sqrt{t-s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = 2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-s}.$$

Підставимо отриманий вираз у (88):

$$w(x,t) := \int\limits_{0}^{t} 2s\, ds = t^2. \tag{90}$$

З (87) і (90) одержимо розв'язок вихідної задачі:

$$u(x,t) \equiv v(x,t) + w(x,t) = e^{-a^2 t}\sin x + t^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 22. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{91}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 \sin x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{92}$$

Розв'язування. В даному випадку $n = 2$ і розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (82) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2 t}} y_1 \sin y_2\, dy_1 dy_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty). \tag{93}$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t} z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\, dz_k, \quad k = 1, 2\,.$$

Тоді, врахувавши (89), отримаємо

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2-z_2^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\sin(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_1dz_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\sin(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\sqrt{\pi}x_1+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}z_1\,dz_1\Big)\Big(\sin x_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\,\cos(2a\sqrt{t}z_2)\;dz_2+$$

$$+\cos x_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big).$$

Тепер врахуємо те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}z_1\,dz_1=0,\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_2^2}\sin(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2=0,$$

та використаємо формулу (86). У результаті отримаємо

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}x_1\sin x_2\cdot J(2a\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x_1\sin x_2\cdot\sqrt{\pi}e^{-a^2t}=e^{-a^2t}x_1\sin x_2,\tag{94}$$

$(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty)$. □

Приклад 23. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t-a^2\Delta u=x_1e^{-t},\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,+\infty),\tag{95}$$

$$u\Big|_{t=0}=x_1x_2,\quad x\in\mathbb{R}^2.\tag{96}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (82) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}}y_1y_2\,dy_1dy_2+$$

$$+\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t\frac{ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}}(y_1e^{-s})\,dy_1dy_2,\tag{97}$$

$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\in(0,+\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k=x_k+2a\sqrt{t}z_k\quad\Rightarrow\quad dy_k=2a\sqrt{t}\,dz_k,\ k=\overline{1,2}\,.$$

Тоді

$$v(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}} y_1y_2\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2-z_2^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi}x_1+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}z_1\,dz_1)(\sqrt{\pi}x_2+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}z_2\,dz_2) = x_1x_2. \qquad (98)$$

Тут враховано рівність (89) і те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}z\,dz = 0. \qquad (99)$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (97):

$$w(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}}(y_1e^{-s})\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t \frac{e^{-s}\,ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\,dy_1dy_2. \qquad (100)$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t-s}\,z_k, \quad k=1,2,$$

і використавши рівності (89) і (99):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\,dy_1dy_2 =$$

$$= 4a^2(t-s)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t-s}\,z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\,dz_2\Big) =$$

$$= 4a^2(t-s)x_1(\sqrt{\pi})^2 = 4a^2\pi(t-s)x_1.$$

Підставимо отриманий вираз у (100):

$$w(x_1,x_2,t) = x_1\int\limits_0^t e^{-s}\,ds = x_1(1-e^{-t}). \qquad (101)$$

З (98) і (101) одержимо розв'язок вихідної задачі

$$u(x_1,x_2,t) \equiv v(x_1,x_2,t) + w(x_1,x_2,t) = x_1x_2 + x_1(1-e^{-t}), \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 24. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2\Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{102}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 + \cos x_2, \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{103}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (82) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}}(y_1+\cos y_2)\,dy_1dy_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty). \tag{104}$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t}z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\,dz_k, \quad k = 1,2\,.$$

Тоді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2-z_2^2}\big[x_1 + 2a\sqrt{t}z_1 + \cos(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\big]\,dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}\,dz_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\big[x_1 + 2a\sqrt{t}z_1 + \cos x_2\cos(2a\sqrt{t}z_2) - \sin x_2 \sin(2a\sqrt{t}z_2)\big]\,dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}\big[\sqrt{\pi}(x_1+2a\sqrt{t}z_1) + \cos x_2\cdot\sqrt{\pi}e^{-a^2t}\big]\,dz_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi x_1 + \pi e^{-a^2t}\cos x_2) = x_1 + e^{-a^2t}\cos x_2.$$

Тут ми врахували те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}z_1\,dz_1 = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\sin(2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2 = 0,$$

та використали формулу (86). Отже,

$$u(x_1,x_2,t) = x_1 + e^{-a^2t}\cos x_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty).$$

$\square$

III. Вправи для самостійної роботи

Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $u_t - a^2\Delta u = 3t^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = \sin 2x_1 \sin 3x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
2. $u_t - a^2 u_{xx} = e^t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x, \quad x \in \mathbb{R};$
3. $u_t - a^2\Delta u = e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1 \sin x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
4. $u_t - a^2\Delta u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = \sin x_1 + \cos x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
5. $u_t - a^2\Delta u = x_1 x_2 e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$
$u\big|_{t=0} = \cos x_1 \cos 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$

Відповіді:

1. $u(x_1,x_2,t) = e^{-13a^2t} \sin 2x_1 \sin 3x_2 + t^3.$
2. $u(x,t) = x_1 + (e^t - 1).$
3. $u(x_1,x_2,t) = e^{-a^2t} x_1 \sin x_2 + (1 - e^{-t}).$
4. $u(x_1,x_2,t) = e^{-a^2t}(\sin x_1 + \cos x_2).$
5. $u(x_1,x_2,t) = e^{-5a^2t} \cos x_1 \cos 2x_2 + x_1 x_2 (1 - e^{-t}).$

6 Контрольна робота № 2

Розв'язати задачі Коші для рівняння коливань та рівняння теплопровідності:

1. $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$
   $u\big|_{t=0} = 3(x_1^2 + x_2^2) - 1, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x_1 + x_2 + 1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

2. $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 3x_1 + x_3 t, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$
   $u\big|_{t=0} = x_2^2 + x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x_1 x_2 + x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

3. $u_t - a^2 u_{xx} = 2xe^{2t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$
   $u\big|_{t=0} = 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R};$

4. $u_t - a^2 \Delta u = 3x_1 t^2 + x_2, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$
   $u\big|_{t=0} = x_1 \cos 3x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 .$

Практичне заняття № 7

7 Задачі на знаходження власних значень і власних елементів диференціальних операторів та розвинення функцій в ряди Фур'є

I. Довідкова інформація

Нехай H — сепарабельний дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|$.

Прикладом простору H є простір Лебега $L_2(\Omega)$, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_\Omega |v(x)|^2\,dx < \infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega v(x)w(x)\,dx, \quad v,w \in L_2(\Omega),$$

де Ω — область в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, якщо $n = 1$ і $\Omega = (0,l)$, де $l > 0$ — довільне число, то $L_2(0,l)$ — дійсний гільбертів простір, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v : (0,l) \to \mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l |v(x)|^2\,dx < \infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_0^l v(x)w(x)\,dx, \quad v,w \in L_2(0,l),$$

тобто $L^2(0,l) := L^2(\Omega)$, де $\Omega = (0,l)$.

Нехай задано лінійний оператор

$$A : D(A) \to H,$$

тобто відображення A з H в H таке, що його область визначення $D(A)$ є лінійним підпростором лінійного простору H і для будь-яких $v_1, v_2 \in D(A)$ та $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2.$$

Далі всюди вважаємо, що $D(A)$ — щільна в H множина.

Означення 7.1. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають **замкненим**, якщо з того, що $v_k \underset{k\to\infty}{\to} v$ і $Av_k \underset{k\to\infty}{\to} w$ в H, де $\{v_k\}$ — послідовність елементів з $D(A)$, випливає, що $v \in D(A)$ і $w = Av$.*

Зауваження 7.1. *Якщо лінійний оператор $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to H$ зі щільною в H областю визначення $D(\widetilde{A})$ не є замкненим, то в деяких випадках можна розширити його до замкненого. Необхідною і достатньою умовою реалізації цієї можливості є наявність в оператора $\widetilde{A}$ такої властивості:*

- *для будь-яких послідовностей $\{v_k^{(1)}\}, \{v_k^{(2)}\} \subset D(A)$ таких, що*

$$v_k^{(1)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v, \quad v_k^{(2)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{і} \quad \widetilde{A}v_k^{(1)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w^{(1)}, \quad \widetilde{A}v_k^{(2)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w^{(2)} \quad \text{в} \quad H,$$

правильна рівність

$$w^{(1)} = w^{(2)}.$$

Тоді можна побудувати замкнений лінійний оператор $A : D(A) \to H$ такий, що

$$D(\widetilde{A}) \subset D(A) \quad i \quad Av = \widetilde{A}v \quad \forall v \in D(\widetilde{A}),$$

причому для будь-якого $v \in D(A)$ існує послідовність $\{v_k\} \subset D(\widetilde{A})$ така , що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad i \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Av \quad в \quad H.$$

Це робиться шляхом приєднання до множини $D(\widetilde{A})$ тих елементів $v \in H$, для яких існують елемент $w \in H$ і послідовність $\{v_k\}$ елементів з $D(\widetilde{A})$ такі, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\to} v \quad i \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\to} w \quad в\ H,$$

і покладанням

$$Av := w.$$

□

Нагадаємо, що $H^2(0,l)$ — простір Соболєва, складений з неперервно диференційовних функцій $v : [0,l] \to \mathbb{R}$ таких, що функція v' є абсолютно неперервною на $[0,l]$ і її похідна v'' (яка існує майже всюди на $(0,l)$) є елементом простору $L_2(0,l)$. Простір $H^2(0,l)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^2(0,l)} := \int_0^l [vw + v'w' + v''w'']\,dx.$$

Твердження 7.1. *Припустимо, що $l > 0$ — довільне дійсне число, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — які-небудь дійсні числа такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, і розглядаємо оператор*

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to L_2(0,l),$$

визначений за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \Big\{ v \in C^2([0,l]) \ \Big| \ \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \Big\} \subset L_2(0,l),$$

$$\widetilde{A}v := -v'' \quad \forall v \in D(\widetilde{A}).$$

Тоді розширенням цього оператора до замкненого є оператор

$$A : D(A) \to L_2(0,l)$$

такий, що

$$D(A) := \Big\{ v \in H^2(0,l) \,\Big|\ \ \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \Big\}, \tag{105}$$

$$Av := -v'' \quad \forall v \in D(A). \tag{106}$$

Означення 7.2. ***Спряженим*** *до оператора A називають оператор $A^\star : D(A^\star) \to H$, область визначення $D(A^\star)$ якого складається з тих елементів $w \in H$, для яких існує елемент $w^\star \in H$ такий, що*

$$(Av, w) = (v, w^\star) \quad \forall v \in D(A), \tag{107}$$

і

$$A^\star w = w^\star.$$

Очевидно, що оператор $A^\star$ є лінійним і

$$(Av, w) = (v, A^\star w) \quad \forall v \in D(A),\ \forall w \in D(A^\star).$$

Означення 7.3. *Оператор A, для якого*

$$D(A) \subset D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \quad \forall v \in D(A),$$

тобто правильна тотожність

$$(Av, w) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A), \tag{108}$$

називають ***симетричним****.*

Означення 7.4. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають* **самоспряженим***, якщо $A = A^\star$, тобто*

$$D(A) = D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \ \ \forall v \in D(A).$$

Теорема 7.1. *Оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим тоді і лише тоді, коли він є симетричним і з того, що для $w \in H$ існує $w^\star \in H$, при якому виконується тотожність* (107)*, випливає включення $w \in D(A)$.*

Твердження 7.2. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 7.1, є самоспряженим.*

Доведення. Отже, нехай $v, w \in D(A)$ — довільні. Маємо

$$(Av, w) = \int_0^l (-v''(x))w(x)\ dx = -v'(x)w(x)\Big|_0^l + \int_0^l v'(x)w'(x)\ dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(x)w'(x)\Big|_0^l + \int_0^l v(x)(-w''(x))\, dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(l)w'(l) - v(0)w'(0) + (v, Aw). \tag{109}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$. Це означає, що або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$. У випадку $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$ маємо $v(0) = w(0) = 0$ і тоді

$$v'(0)w(0) - v(0)w'(0) = 0. \tag{110}$$

Якщо $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$, то $v'(0) = v'(l) = 0$, і тоді знову маємо (110). Коли ж $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ (тобто $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 \neq 0$), то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$ і $w'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}w(0)$, а отже правильна рівність (110).

Аналогічно аналізуємо всеможливі випадки значень α_1 та β_1 і отримуємо рівність

$$v'(l)w(l) - v(l)w'(l) = 0. \tag{111}$$

З (109) на підставі (110) і (111) маємо

$$(Aw, v) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A),$$

тобто оператор A є симетричним.

Залишається показати, що коли для деяких $w, w^* \in L_2(0, l)$ маємо

$$(Av, w) = (v, w^*) \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_0^l (-v''(x))w(x)\, dx = \int\limits_0^l v(x)w^*(x)\, dx \;\; \forall v \in D(A),$$

то $w \in D(A)$ і $w^* = Aw$, тобто $w^* = -w''$. Це легко доводиться, виходячи із означення узагальненої похідної другого порядку. □

Означення 7.5. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають невід'ємним, якщо*

$$(Av, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(A). \tag{112}$$

Якщо ж

$$(Av, v) > 0 \quad \forall v \in D(A),\; v \neq 0, \tag{113}$$

то його називають додатним.

Твердження 7.3. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 7.1, у випадку $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ і $\alpha_1\beta_1 \geq 0$ є невід'ємним, причому коли $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$ (це означає, що або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$), то він є додатним, а коли $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то суттєво невід'ємним.*

Доведення. Отже, нехай $v \in D(A)$ — довільне. Тоді маємо

$$(Av, v) = \int_0^l (-v''(x))\, v(x)dx = -v'(x)v(x)\big|_0^l + \int_0^l |v'(x)|^2 dx =$$

$$= -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int_0^l |v'(x)|^2 dx. \tag{114}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$, тобто або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Якщо $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, то $v(0) = 0$, а отже, $v'(0)v(0) = 0$. Така ж рівність буде і коли $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Коли $\alpha_0\beta_0 < 0$, то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$, а отже, $v'(0)v(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}|v(0)|^2 \geq 0$, бо $\frac{\beta_0}{\alpha_0} < 0$.

Аналогічно розглядаючи різні випадки значень α_1 і β_1, приходимо до висновку, що $-v'(l)v(l) \geq 0$, якщо $\alpha_1\beta_1 \geq 0$. Тоді з (114) маємо, що $(Av, v) \geq 0$.

Якщо $(Av, v) = 0$, то з (114) маємо, що $v'(x) = 0\; \forall x \in [0, l]$, $v'(0)v(0) = 0$ і $v'(l)v(l) = 0$. Очевидно, що $v(x) = C$, $x \in [0, l]$, де C — стала, і при $\beta_0 \neq 0$ або $\beta_1 \neq 0$ маємо $C = 0$, а при $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$ отримаємо, що C —- довільна стала. Це означає те, що нам було потрібно показати. □

Означення 7.6. *Кажуть, що число $\lambda \in \mathbb{R}$ є власним значенням оператора $A : D(A) \to H$, якщо існує ненульовий елемент $w \in D(A)$, такий, що*

$$Aw = \lambda w, \tag{115}$$

Елемент w називають ***власним елементом*** *оператора A, відповідний власному значенню λ.*

Легко переконатися, що множина $V(\lambda^*)$, складена з власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, разом з нульовим елементом, є лінійним підпростором у просторі $D(A)$. Цей підпростір називають власним підпростором, відповідним власному значенню Розмірність підпростору $V(\lambda^*)$ або, іншими словами, максимальна кількість лінійно незалежних власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, називають **кратністю власного значення** λ^*. Кратність власного значення може бути як скінченою так і нескінченною.

Теорема 7.2. *Якщо оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим, то будь-які два власні елементи цього оператора, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними. Крім того, якщо оператор A ще і невід'ємний (відповідно, додатний), то його власні значення є невід'ємними (відповідно, додатними).*

Означення 7.7. *Оператор $B : H \to H$ називають компактним, якщо для будь-якої обмеженої послідовності $\{v_k\} \subset H$ (тобто $v_k \in H$ і $\|v_k\| \leq C$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, де $C > 0$ — стала, яка від k не залежить) послідовність $\{Bv_k\}$ містить збіжну в H підпослідовність.*

Твердження 7.4. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $K(\cdot,\cdot) : [0,l]\times[0,l] \to \mathbb{R}$ — задана неперервна функція. Тоді оператор $B : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$, визначений за правилом:*

$$\big(Bv\big)(x) = \int\limits_0^l K(x,y)v(y)\,dy, \quad x \in [0,l], \tag{116}$$

є компактним.

Твердження 7.5. *Нехай $A : D(A) \to L_2(0,l)$ — оператор, який визначений у формулюванні твердження 7.1, і $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ та $\alpha_1\beta_1 \geq 0$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ оператор $(cI+A)^{-1}$, який називають резольвентою оператора A, є визначеним на всьому просторі $L_2(0,l)$ і компактним.*

Доведення. Отже, нехай $c > 0$ — довільна фіксована стала. Спочатку доведемо, що для довільного елемента $w \in L_2(0,l)$ існує тільки один елемент $v \in H^2(0,l)$ такий, що

$$-v''(x) + cv(x) = w(x), \quad x \in (0,l), \tag{117}$$

$$\alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0. \tag{118}$$

Як випливає з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку функція v, яка задовольняє (117), (118) може існувати і бути єдиною тоді і лише тоді, коли функція $v(x)$, $x \in [0,l]$, що задовольняє рівність

$$-v''(x) + cv(x) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{119}$$

і крайові умови (118), може бути лише нульовою. Покажемо, що при $c > 0$ це так. Припустимо, що маємо функцію v, яка задовольняє (119), (118). Помножимо рівність (119) на цю функцію та проінтегруємо здобуту рівність по $[0,l]$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_0^l \left[-v''(x)v(x) + c|v(x)|^2\right]\,dx = 0. \tag{120}$$

Оскільки

$$\int_0^l \big(-v''(x)\big)v(x)\,dx = -v''(x)v(x)\Big|_0^l + \int_0^l \big|v'(x)\big|^2\,dx = -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int_0^l \big|v'(x)\big|^2\,dx,$$

то рівність (120) перепишемо у вигляді

$$-v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int_0^l \Big[\big|v'(x)\big|^2 + c\big|v(x)\big|^2\Big]\,dx = 0. \tag{121}$$

Міркуючи так як при доведені твердження 7.3, отримуємо, що $-v'(l)v(l)+v'(0)v(0) \geq 0$. Звідси і з (121) випливає, що $v = 0$. Зауважимо, що коли або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, то і при умові $c = 0$ матимемо $v = 0$.

Визначимо функцію Гріна:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{W(y)}, & \text{якщо} \;\; 0 \leq x \leq y, \\ \\ \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{W(y)}, & \text{якщо} \;\; y \leq x \leq l, \end{cases} \tag{122}$$

де v_1 — функція, що задовольняє (119) і першу з крайових умов (118), а v_2 — функція, що задовольняє (119) і другу з крайових умов (118), а

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [0,l],$$

— визначник Вронського, побудований за функціями v_1 і v_2.

Як відомо з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку, коли $w \in C\big([0,l]\big)$, то єдина функція $v \in C^2([0,l])$, яка задовольняє (117), (118), має зображення

$$v(x) = \int_0^l G(x,y)w(y)\,dy = \int_0^x G(x,y)w(y)\,dy + \int_x^l G(x,y)w(y)\,dy =$$

$$= v_2(x)\int_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1(x)\int_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x \in [0,l]. \tag{123}$$

Це означає, що

$$v'(x) = v_2'(x)\int_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1'(x)\int_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x \in [0,l],$$

$$v''(x) = v_2''(x)\int_0^x \frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy + v_1''(x)\int_x^l \frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy + w(x) \text{ для майже всіх } x \in [0,l].$$

Звідси видно, що функція v, задана формулою (123) при $w \in L_2(0,l)$, належить простору $H^2(0,l)$ і задовольняє (117) майже скрізь та крайові умови (118), тобто обернений оператор $(cI + A)^{-1}$ визначний на всьому просторі $L_2(0,l)$, причому $(cI+A)^{-1}w = v$, де $w \in L_2(0,l)$ — довільна, а v визначена формулою (123), тобто формула (123) визначає оператор $(cI + A)^{-1} : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$. А так як $G \in C\big([0,l] \times [0,l]\big)$, то цей оператор, як показано у твердженні 7.4, є компактним. $\square$

Теорема 7.3. *Нехай лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє такі умови:*
• *він є самоспряженим і невід'ємним (відповідно, додатним),*
• *для деякої сталої $c \geq 0$ оператор $(cI + A)^{-1}$ (тобто обернений до оператора $cI + A$ або, іншими словами, резольвента оператора A) визначений на всьому просторі H і компактний.*

Тоді власні значення оператора A є невід'ємними (відповідно, додатними), мають скінчені кратності і точкою скупчення є і тільки $+\infty$, а з власних елементів оператора A можна утворити ортонормовану базу в H, а точніше існує ортонормована база $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H така, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{124}$$

де

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ..., \quad \text{причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{125}$$

і в ланцюжку нерівностей (125) *кожне власне значення оператора A повторюється стільки разів, яка його кратність.*

Означення 7.8. *Скажемо, що лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), якщо він задовольняє умови теореми 7.3.*

Зауваження 7.2. *Якщо лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), то послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$, про які говориться в теоремі 7.3, шукаємо так. Спочатку шукаємо всі власні значення λ_j°, $j \in \mathbb{N}$, оператора A (вони є невід'ємними числами), нумеруючи їх так, щоби вони утворювали монотонну зростаючу послідовність, тобто $0 \leq \lambda_1^\circ < \lambda_2^\circ < \ldots < \lambda_k^\circ < \ldots$, і знаходимо відповідні їм власні підпростори $V(\lambda_j^\circ)$. Як відомо, будь-які два власні елементи оператора A, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними. В кожному власному підпросторі $V(\lambda_j^\circ)$ (він скінченновимірний) вибираємо ортонормомовану базу $w^*_{(j,s)}, s \in \{1, \ldots, q_j\}$, де q_j — кратність власного значення λ_j°, і вводимо позначення $\lambda^*_{(j,s)} := \lambda_j^\circ$, $s \in \{1, \ldots, q_j\}$. Впорядкуємо множину $\{(j\,, s) \,|\, j \in \mathbb{N}, s \in \{1, \ldots, q_j\}\}$ так, що (j_1, s_1) передує (j_2, s_2), якщо або $j_1 < j_2$, або $j_1 = j_2$ і $s_1 < s_2$, і задамо монотонно зростаюче відображення μ множини $\mathbb{N}$ в цю множину (тобто, якщо $l_1 < l_2$, то $\mu(l_1) = (j_1, s_1)$ передує $\mu(l_2) = (j_2, s_2)$). Тоді визначаємо*

$$w_k := w^*_{\mu(k)}, \quad \lambda_k := \lambda^*_{\mu(k)}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що в ланцюжку рівностей/нерівностей (125) *кожне власне значення оператора A повторяється підряд стільки раз, яка його кратність.*

Наслідок 7.1. *Існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора $A : D(A) \to L_2(0, l)$, визначеного у формулюванні твердження 7.1 при умові $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ та $\alpha_1\beta_1 \geq 0$, так, що*

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{126}$$

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ..., \; \text{причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{127}$$

і $\lambda_1 = 0$ у випадку $\beta_0 = \beta_1 = 0$, а в інших випадках значень α_0, β_0 і α_1, β_1 маємо $\lambda_1 > 0$.

Доведення. Ми вже з'ясували, що (див. твердження 7.2, 7.3, 7.5), що оператор A є самоспряженим, додатним у випадку, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і суттєво невід'ємним у випадку, якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, а також встановили, що для довільного $c > 0$ оператор $(cI + A)^-1$ є визначеним на $L_2(0, l)$ і компактним, тобто оператор A задовольняє умову

(SNC). Зі сказаного безпосередньо випливає, що власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. Звідси і теореми 7.3 безпосередньо випливає наше твердження.

Уточнимо спосіб знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ і переконаємося, що в (127) всі нерівності, крім першої, є обов'язково строгими, тобто всі власні значення є однократними. Для цього зауважимо, що із означення оператора A випливає, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \end{cases} \tag{128}$$

Оскільки $H^2(0, l)$ — простір Соболєва, то w'' — узагальнена похідна w другого порядку за Соболєвим. Як було раніше сказано, $H^2(0, l) \subset C^1([0, l])$, а отже, з рівняння задачі (390) маємо $w'' \in C([0, l])$, тобто задачу (390) розв'язуємо в просторі $C^2([0, l])$ (похідна w'' є класичною і неперервною на $[0, l]$).

Отож, нам потрібно знайти числа λ такі, що задача (390) має ненульові розв'язки. Як вже було сказано, коли або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, то такі числа є тільки серед додатних чисел, а якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, то нуль є таким числом, а решта — серед додатних чисел.

Спочатку припустимо, що маємо перший випадок, тобто або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, а отже, $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

яке запишемо у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{129}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (129) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{130}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{131}$$

і підставимо вирази (130) і (131) в крайові умови задачі (390):

$$\begin{cases} \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) \equiv \alpha_0 C_2\sqrt{\lambda} + \beta_0 C_1 = 0, \\ \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) \equiv \alpha_1(-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + \beta_1(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{132}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення λ, при яких система (132) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки і підставити їх у (130). У результаті цього будуть знайдені власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A.

Зведемо систему (132) до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} \beta_0 C_1 + \alpha_0\sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ (-\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l)C_1 + (\alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l)C_2 = 0. \end{cases} \tag{133}$$

Система (133) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0\sqrt{\lambda} \\ -\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l & \alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + (\alpha_0\alpha_1\lambda - \beta_0\beta_1)\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{134}$$

Аналізуючи різні випадки значень $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, в кожному з них отримаємо зліченну кількість додатних коренів рівняння (134). Найбільш загальний та складний випадок будемо мати, коли $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq 0,\ \alpha_0\alpha_1 \neq 0,\ \beta_0\beta_1 \neq 0$. Тоді рівняння (134) рівносильне рівнянню

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}(\alpha_0\alpha_1\sqrt{\lambda} + \frac{\beta_0\beta_1}{\sqrt{\lambda}}).$$

Розв'язуючи графічно, бачимо, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Ці корені і будуть власними значеннями нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (133) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга або має значення нуль, або виражається через першу. Це означає, що множина всіх власних функцій, відповідних одному і тому ж власному значенню, доповнена нульовою функцією, утворюють одновимірний лінійний підпростір простору $L_2(0,l)$, який має вигляд $\{Cw^* \mid C \in \mathbb{R}\}$, де w^* — одна із власних функцій. Отож, ми встановили, що власні значення оператора A є однократними. Впорядкуємо додатні корені рівняння (134) в порядку зростання їх величин, тобто у вигляді

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ... \tag{135}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдемо власну функцію за формулою (130) при $\lambda = \lambda_k$ і значеннях C_1 і C_2, знайдених із системи (133) при $\lambda = \lambda_k$ за додаткової умови

$$\int_0^l |w(x)|^2 dx = 1$$

(умові нормування). Позначимо отриману власну функцію через w_k. Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$.

Аналогічно розглядаємо випадок $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. $\square$

Як було сказано вище, для будь-якого $v \in H$ маємо маємо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k, \quad \text{де } \ \widehat{v}_k = (v, w_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7.4. *Припустимо, що оператор A задовольняє умову* (***SNC***). *Тоді*

$$D(A) = \{v \in H \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\widehat{v}_k|^2 < \infty\}, \quad Av = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widehat{v}_k w_k, \quad \text{якщо} \;\; v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k. \tag{136}$$

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 25. *Нехай* $l > 0$ *— яке-небудь фіксоване число, а* $A : D(A) \to L_2(0,l)$ *оператор, заданий за правилом* (105), (106), *де* $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, *тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0,l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$*, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A*;*
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := x + 1,\ x \in (0,l);$ *б)* $f(x,t) := x\sin t,\ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 7.1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (126), (127), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 7.1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{137}$$

Отож, нам потрібно знайти значення $\lambda > 0$ такі, що задача (137) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{138}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (303) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{139}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{140}$$

і підставимо вирази (420) і (421) в крайові умови задачі (137):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{141}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (422) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (422) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda} l = 0. \tag{142}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda} l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda} l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{143}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (420) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k} x, \quad x \in [0, l], \tag{144}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k} x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\sqrt{\lambda_k} x\, dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{145}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0, l],$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x+1) \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big((x+1) \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - (-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \Big) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(1 + (-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int\limits_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x\sin t)\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l x\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= -\sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\Big) =$$

$$= -\sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(0 - \frac{2l}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}((-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi+2\pi k}) = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\sin t\,,\quad t\in(0,+\infty).$$

□

Приклад 26. *Нехай* $l>0$ — *яке-небудь фіксоване число, а* $A: D(A)\to L_2(0,l)$ *оператор, заданий за правилом* (105), (106), *де* $\alpha_0=1, \beta_0=0, \alpha_1=1, \beta_1=0$, *тобто*

$$D(A) := \{v\in H^2(0,l)\mid v'(0)=0,\ v'(l)=0\},\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0,l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$, *складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x):=2x+1,\ x\in(0,l)$; *б)* $f(x,t):=(x-1)e^t,\ (x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 7.1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (126), (127), причому $\lambda_1=0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 7.1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w''=\lambda w, & x\in(0,l),\\ w'(0)=0, & w'(l)=0.\end{cases}\tag{146}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda\geqslant 0$ такі, що задача (146) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w''=\lambda w,\tag{147}$$

у випадках 1) $\lambda=0$ та 2) $\lambda>0$.
1) Нехай $\lambda=0$, тоді маємо рівняння

$$-w''=0.$$

Будь-який його розв'язок якого має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо ці сталі, підставивши розв'язок у крайові умови задачі (146). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто $w_0(x) = C_2$, $x \in [0, l]$, де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_0(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{148}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{149}$$

2) Нехай $\lambda > 0$ і запишемо рівняння (147) у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{150}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \mu^2 = -\lambda \Longleftrightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (150) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{151}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{152}$$

і підставимо вирази (429) і (430) в крайові умови задачі (146):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{153}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (431) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (431) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{154}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{155}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (429) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad x \in [0, l], \tag{156}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} C_1^2 \int\limits_0^l \Big(1 + \cos 2 \frac{\pi k}{l} x\Big) \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x \, dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{157}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int\limits_0^l \varphi(x) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l (2x + 1) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} (l^2 + l) = \sqrt{l}(l + 1) \, ,$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x) w_k(x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (2x + 1) \cos \frac{\pi k}{l} x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big((2x + 1) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - 2 \int\limits_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx \Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big(0 + \frac{2l}{\pi k} \cos \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l \Big) = 2 \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_0(t) := \int\limits_0^l f(x, t) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l (x - 1) e^t \, dx = e^t \cdot \sqrt{\frac{1}{l}} \Big(\frac{l^2}{2} - l\Big) = \sqrt{l} \Big(\frac{l}{2} - 1\Big) \cdot e^t \, ,$$

$$\widehat{f_k}(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x-1)e^t \cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x-1)\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx = e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (x-1)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx =$$

$$= e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k}\Big((x-1)\sin\frac{\pi k}{l}x\Big|_0^l - \int_0^l \sin\frac{\pi k}{l}x\,dx\Big) = e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k}\Big(0 + \frac{l}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{l}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1)\cdot e^t = a_k e^t, \quad t \in (0,+\infty), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1),\ k \in \mathbb{N}.$ □

Приклад 27. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом* (105), (106), *де $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

де $h_1 > 0$ — задане число.
Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := \cos x,\ x \in (0,l)$; б) $f(x,t) := 2x\cos t,\ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 7.1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (126), (127), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 7.1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{158}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (158) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння задачі (158) і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{159}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (324) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{160}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{161}$$

і підставимо вирази (325) і (326) в крайові умови задачі (158):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{162}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (327) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (327) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{163}$$

звідки

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \tag{164}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{lh_1}. \tag{165}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{166}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (327) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (325) і кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}x), \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{167}$$

де C_1 — ненульова стала, яку знаходимо з умови нормування:

$$\int_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{168}$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x \in [0,l], \tag{169}$$

де M_k визначено в (333).

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ (див. (169)) і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$ (див.(331)), складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A.

Зауваження 7.0.1. *Вирази власних елементів w_k, $k \in \mathbb{N}$, оператора A можна спростити. Справді, використавши рівність* (329), *маємо*

$$\cos\sqrt{\lambda_k}x - \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x = \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}(\cos\sqrt{\lambda_k}x\sin\sqrt{\lambda_k}l - \cos\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x) =$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{170}$$

Отож, звідси та (167) *для довільного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо*

$$w_k(x) := C_1\frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x) = \widetilde{C}_1\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}$$

де $\widetilde{C}_1 := C_1\dfrac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}$ — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування:

$$\int_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1^2\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1^2\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1.$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використавши рівність (329)*:*

$$\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1-(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$\widetilde{C}_1^2 \cdot \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1 = \widetilde{M}_k := \Big(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\Big)^{-1/2}. \tag{171}$$

Отож,

$$w_k(x) = \widetilde{M}_k \sin\sqrt{\lambda_k}(l - x), \quad x \in [0, l], \quad \text{де } \widetilde{M}_k := \Big(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\Big)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{172}$$

— ортонормована база в $L^2(0, l)$ складена з власних елементів оператора A, а відповідна їй числова послідовність з власних чисел має вигляд (331).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою $\{w_k\}$, використавши вирази (172):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = \widetilde{M}_k \int_0^l \cos x \sin\sqrt{\lambda_k}(l - x)\, dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2} \int_0^l \big(\sin(x(1 - \sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k} l) + \sin(-x(1 + \sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k} l)\big)\, dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(-\frac{1}{1 - \sqrt{\lambda_k}} \cos(x(1 - \sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k} l)\Big|_0^l + \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda_k}} \cos(-x(1 + \sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k} l)\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(-\frac{1}{1 - \sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k} l) + \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k} l)\Big) =$$

$$= -\widetilde{M}_k \frac{\sqrt{\lambda_k}}{1 - \lambda_k}\Big(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k} l\Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x, t) w_k(x)\, dx = \widetilde{M}_k \int_0^l (2x \cos t) \sin\sqrt{\lambda_k}(l - x)\, dx =$$

$$= 2\cos t \cdot \widetilde{M}_k \int_0^l x \sin\sqrt{\lambda_k}(l - x)\, dx = 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(x \cos\sqrt{\lambda_k}(l - x)\Big|_0^l - \int_0^l \cos\sqrt{\lambda_k}(l - x)\, dx\Big) =$$

$$= 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}(l - x)\Big|_0^l\Big) = 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} l\Big) \cdot \cos t =$$

$$= b_k \cos t, \quad t \in (0, +\infty), \quad \text{де} \quad b_k := 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} l\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Приклад 28. *Нехай* $l > 0$ *— яке-небудь фіксоване число, а* $A : D(A) \to L_2(0, l)$ *оператор, заданий за правилом* (105), (106), *де* $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, *тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

де h_2 *— задане число.*
Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0, l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$*, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A*;*
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := x - 1$, $x \in (0, l)$*;* *б)* $f(x, t) := e^x \sin t$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 7.1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (126), (127), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 7.1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ w'(0) = 0, \quad w'(l) + h_2 w(l) = 0. \end{cases} \tag{173}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (173) має ненульові розв'язки. Отже, розглянемо рівняння задачі (173) і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{174}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (174) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{175}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{176}$$

і підставимо вирази (175) і (176) в крайові умови задачі (173):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) + h_2 w(l) \equiv (-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + h_2(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{177}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (327) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (177) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{178}$$

Перетворимо отримане рівняння так

$$-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = \frac{h_2}{\sqrt{\lambda}}. \tag{179}$$

Позначимо $\mu := \sqrt{\lambda}l$ і здобуваємо рівняння

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{h_2 l}{\mu}.$$

Розв'язуючи його графічно, переконуємося, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{180}$$

— власні значення нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (175) і знаходимо

$$w_k(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N},$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо з умови нормування:

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad .$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використовуючи (179), так:

$$\int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (1+\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k}}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1+(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$C_1^2\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = H_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{181}$$

Отже, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$, складена з власних елементів оператора A, є така:

$$w_k(x) = H_k\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad \text{де} \;\; H_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{182}$$

а відповідну їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складена з власних власних значень оператора A, визначена в (180).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0,l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = H_k \int\limits_0^l (x-1)\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big((x-1)\sin\sqrt{\lambda_k}x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx\Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big((l-1)\sin\sqrt{\lambda_k}l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\cos\sqrt{\lambda_k}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big((l-1)\sin\sqrt{\lambda_k}l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(\cos\sqrt{\lambda_k}l - 1)\Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int\limits_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = H_k \int\limits_0^l (e^x \sin t)\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= \sin t \cdot H_k \int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx, \quad t \in (0,+\infty).$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx = e^x\cos\sqrt{\lambda_k}x\Big|_0^l + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^l e^x \sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= e^l\cos\sqrt{\lambda_k}l - 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\big(e^x\sin\sqrt{\lambda_k}x\Big|_0^l - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^l e^x\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx\big) =$$

$$= e^l\big(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\big) - 1 - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l e^x\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx.$$

Звідси

$$\big(1+\frac{1}{\lambda_k}\big)\int\limits_0^l e^x\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx = e^l\big(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\big) - 1,$$

$$\int\limits_0^l e^x\cos\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{e^l\big(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\big) - 1}{1+\frac{1}{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{f}_k(t) := c_k \sin t, \quad t \in (0, +\infty), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{де} \;\; c_k := \frac{e^l\left(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\right) - 1}{1 + \frac{1}{\lambda_k}} H_k\,.$$

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0, l)$ оператор, заданий за правилом (105),(106).

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x)$, $x \in (0, l)$; б) $f(x, t)$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$,
якщо

1. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 0, \;\beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \,|\, v(0) = 0, \; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = \cos 2x$, $x \in (0, l)$; $f(x, t) = (x + 2)t^3$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$;

2. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \,|\, v'(0) = 0, \; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = 2x + 3$, $x \in (0, l)$; $f(x, t) = x^2(t + 1)$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$;

3. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \,|\, v'(0) - h_1 v(0) = 0, \; v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_1 — задане число;

$\varphi(x) = 3x + 2$, $x \in (0, l)$; $f(x, t) = e^x t^3$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$;

4. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \,|\, v(0) = 0, \; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_2 — задане число;

$\varphi(x) = \sin 3x$, $x \in (0, l)$; $f(x, t) = (x + 2)e^{2t}$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$;

5. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \,|\, v'(0) - h_1 v(0) = 0, \; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де $h_1, \; h_2$ — задані числа;

$\varphi(x) = 2x - 1$, $x \in (0, l)$; $f(x, t) = x(t + 3)$, $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Практичне заняття № 8

8 Розв'язування мішаних задач для рівняння коливання струни з однорідними крайовими умовами методом рядів Фур'є

I. Довідкова інформація

Завдання: Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{183}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{184}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{185}$$

де

• $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,

• $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,

• $\varphi, \psi \in L^2(0,l)$, $f \in C([0,T]; L^2(0,l))$ – задані функції.

Розв'язування.

1-ий крок. Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{186}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (384) – (386) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{187}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{188}$$

Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок задачі (384) – (386) – це слабкий розв'язок задачі (388),(389). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (384) – (386), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (388), (389).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad w'' + \lambda w = 0, \quad x \in (0,l), \tag{189}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{190}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (390) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (391), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l], \ t \in [0,T], \tag{191}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (384) – (386) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{192}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{193}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (403) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (384) і початкові умови (386) замість u (крайові умови (385) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (401)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x\in[0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (404).

Дивлячись на рівності (404), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z''+a^2\lambda_k z=\widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k, \quad z'(0)=\psi_k. \end{cases} \tag{194}$$

При наших умовах на φ,ψ і f ряд (403) збігається в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 29. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad (x,t)\in Q:=(0,l)\times(0,T], \tag{195}$$

$$u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=l}=0, \quad t\in(0,T], \tag{196}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \quad x\in[0,l], \tag{197}$$

де $l>0,\ T>0$ – довільно задані і фіксовані числа.

Розв'язування.

1-ий крок. Введемо позначення вхідних даних

$$f(x,t):=x\sin t, \quad (x,t)\in Q, \qquad \varphi(x):=x+1, \quad \psi(x):=0, \quad x\in[0,l],$$

задачі (360) – (362) і зведемо її до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор

$$A:D(A)\to L_2(0,l)$$

за правилом:

$$D(A):=\{v\in H^2(0,l)\mid v(0)=0,\ v'(l)=0\}, \quad Av=-v'' \ \ \forall v\in D(A), \tag{198}$$

а також позначення:

$$[0,T]\ni t\mapsto u(t):=u(x,t),\ x\in[0,l]; \quad [0,T]\ni t\mapsto f(t):=f(x,t),\ x\in[0,l];$$

$$\varphi:=\varphi(x), \quad \psi:=\psi(x), \quad x\in[0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (360) – (362) є слабким розв'язком задачі

$$u''+a^2Au=f(t), \quad t\in(0,T], \tag{199}$$

$$u(0)=\varphi, \quad u'(0)=\psi. \tag{200}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (410), (411).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$0\le\lambda_1\le\lambda_2\le ...\le\lambda_k\le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0\neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w\in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w''=\lambda w, \quad x\in(0,l), \\ w(0)=0, \quad w'(l)=0. \end{cases} \tag{201}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda>0$ такі, що задача (370) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (370), яке можна записати у вигляді

$$w''+\lambda w=0. \tag{202}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2+\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu^2=-\lambda \quad\Rightarrow\quad \mu_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}\,i, \;\; i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (371) має вигляд

$$w(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x, \quad x\in[0,l], \tag{203}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x\in[0,l], \tag{204}$$

і підставимо вирази (420) і (421) в крайові умови задачі (370):

$$\begin{cases} w(0)\equiv C_1=0, \\ w'(l)\equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0. \end{cases} \tag{205}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda>0$, при яких система рівнянь (422) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (422) маємо

$$C_1=0, \quad C_2\neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l=0. \tag{206}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{207}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (420) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{208}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{209}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \; t \in [0, T], \tag{210}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)}\Big(1 + (-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\Big)^2 \cdot \sin t = a_k \cdot \sin t, \quad t \in [0, T],$$

$$a_k := (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi + 2\pi k}\Big)^2.$$

Тут ми використали результати розв'язування прикладу 7 практичного заняття №7.

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (360) – (362) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{211}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, & k \in \mathbb{N}.\end{cases} \tag{212}$$

Умови (440) на коефіцієнти ряду (439) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (360) і умови (362), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (379)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x),\, x \in [0,l],\ k \in \mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси випливають рівності (440).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (440), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (439)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_k \sin t, & t \in (0,T],\\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{213}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0. \tag{214}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\, B_k \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (442).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (441) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t, \ \ z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2\lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = a_k \ \Rightarrow$$

$$d_k := \frac{a_k}{a^2\lambda_k - 1} \tag{215}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_k - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$).

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (441). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (360) – (362) є (див. (439)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t)\sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad t \in [0,T],$$

де $\lambda_k,\ \widehat{\varphi}_k,\ \widehat{\psi}_k,\ d_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

□

Приклад 30. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l)\times(0,T], \tag{216}$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{217}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{218}$$

де $l > 0,\ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,*

$$f(x,t) := (x-1)e^t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x+1, \quad x \in [0,l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (444) – (446) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A) \tag{219}$$

і позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (444) – (446) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{220}$$

$$u'(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{221}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок даної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (298), (299).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення оператора A є невід'ємними і нуль є його власним значенням, бо $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{222}$$

Шукаємо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робимо точно так як в прикладі 8 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \ge 0$ такі, що задача (300) має ненульові розв'язки. Розглянем цю задачу у випадках: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.
1) Нехай $\lambda = 0$, тоді маємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in [0,l], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (300), підставивши цей вираз у крайові умови задачі (300). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$w(x) = C_2, \quad x \in [0,l],$$

— всеможливі власні функції, відповідні власному значенню λ_0. Виберемо значення C_2 за умови нормування

$$1 = \int\limits_0^l |w_0(x)|^2\,dx = C_2^2 \int\limits_0^l dx = C_2^2 l \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{223}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{224}$$

2) Тепер нехай $\lambda > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (300), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{225}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \;\; i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (303) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{226}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{227}$$

і підставимо вирази (429) і (430) в крайові умови задачі (300):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{228}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (431) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (431) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{229}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \;\; k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{230}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (429) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{231}$$

де C_1 — ненульова стала, — всеможливі власні функції, що відповідають власному значенню λ_k. Виберемо значення C_1 за умови нормування

$$1 = \int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x\,dx = C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} C_1^2 \int\limits_0^l \Big(1 + \cos 2\frac{\pi k}{l} x\Big)\,dx = C_2^2 \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad x \in [0,l], \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{232}$$

3-ий крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x),\ t \in [0,T], \tag{233}$$

де

$$\widehat{\varphi}_k = \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = 0\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\widehat{\psi}_0 := \int\limits_0^l \varphi(x) w_0(x)\,dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l (2x+1)\,dx = \sqrt{\frac{1}{l}}(l^2 + l) = \sqrt{l}(l+1)\,,$$

$$\widehat{\psi}_k = \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx = 2\sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int\limits_0^l f(x,t) w_0(x)\,dx = a_0 e^t\,, \quad a_0 := \sqrt{l}\Big(\frac{l}{2} - 1\Big), \ \ t \in [0,T],$$

$$\widehat{f}_k(t) = \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = a_k \cdot e^t\,, \quad a_k := \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1), \qquad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (444) – (446) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad t \in [0,T], \tag{234}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_0''(t) = \widehat{f}_0(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_0(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad \widehat{u}_0'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{235}$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{236}$$

Умови (313), (314) на коефіцієнти ряду (312) отримують так. Припустимо, що ряд (312) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (444) та умови (446). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (311)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \quad \Rightarrow \quad w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

отримаємо рівності

$$\widehat{u}_0''(t)w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x) = \widehat{f}_0(t)w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T],$$

$$\widehat{u}_0(0)w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x) = \widehat{\varphi}_0 w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l],$$

$$\widehat{u}_0'(0)w_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x) = \widehat{\psi}_0 w_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x) \quad x \in [0,l].$$

Звідси маємо задачі для знаходження функцій $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

З (313) випливає, що функція $\widehat{u}_0$ (відповідний коефіцієнт ряду (312)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' = a_0 e^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{237}$$

а з (313) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (312)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_k e^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0. \end{cases} \tag{238}$$

Розв'яжемо спершу задачу (315). Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі, проінтегрувавши рівняння двічі:

$$z = a_0 e^t + A_0 t + B_0, \quad t \in [0,T],$$

де A_0, B_0 – довільні сталі.

Підставимо цей вираз повного загального розв'язку рівняння даної задачі в її початкові умови для знаходження значень сталих $A_0,\ B_0$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = a_0 e^t + A_0, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv a_0 + B_0 = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) \equiv a_0 + A_0 = \widehat{\psi}_0.$$

Звідси

$$A_0 = \widehat{\psi}_0 - a_0, \quad B_0 = \widehat{\varphi}_0 - a_0.$$

Отже,

$$\widehat{u}_0(t) = a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0, \quad t \in [0,T].$$

Тепер розв'яжемо задачу (316) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (316) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k e^t,\ z'' = d_k e^t \quad \Rightarrow \quad d_k e^t + a^2\lambda_k d_k e^t = a_k e^t \Rightarrow \quad (1 + a^2\lambda_k)d_k = a_k$$
$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{a_k}{1 + a^2\lambda_k}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (316).

Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Звідси маємо

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Отож, сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є (див. (312)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}\big[a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0\big] +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \big[(\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t\big] \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T].$$

□

Приклад 31. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{239}$$

$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{240}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{241}$$

де $l > 0, \ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,*

$$f(x,t) := 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (317) – (319) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0, \ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{242}$$

і позначення

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t), \ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t), \ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (317) – (319) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{243}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{244}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (321), (322).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення оператора є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{245}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (це робиться точно так як в прикладі 9 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (323) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (323), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{246}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (324) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{247}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{248}$$

і підставимо вирази (325) і (326) в крайові умови задачі (323):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{249}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (327) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (327) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{250}$$

звідки

$$-h_1 \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \tag{251}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{lh_1}. \tag{252}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{253}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (327) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A, тобто власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля, підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (325) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{254}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^l \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big)^2 \, dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{ \int\limits_0^l \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big)^2 \, dx } \right)^{-1}. \tag{255}$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big), \quad x \in [0, l], \tag{256}$$

де M_k визначено в (333).

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \, t \in [0, T], \tag{257}$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x) \, dx = M_k \int_0^l \cos x \cdot \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big) \, dx,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x) \, dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x) \, dx = M_k \int_0^l (2x \cos t) \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big) \, dx =$$
$$= b_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

де

$$b_k := 2 M_k \int_0^l \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big) x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (317) – (319) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{258}$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in [0,T], \\ \quad \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{259}$$

цей ряд в рівняння (317) і умови (319), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (335)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \quad \Rightarrow \quad w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad t \in (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x).$$

З рівностей (337) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (336)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = b_k \cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{260}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \cos t, \ t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_k \sin t, \quad z'' = -d_k \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_k \cos t + a^2\lambda_k d_k \cos t = a_k \cos t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1) d_k = b_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{b_k}{a^2\lambda_k - 1}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (338). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k} B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t - d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k} B_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{u}_k(t) := \big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

і сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Big[\big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t +$$
$$+ d_k \sin t\Big]\Big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}x\Big), \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

□

III. Завдання для самостійної роботи

4. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := (x+2)t^3, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos 2x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

5. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u_x|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := x^2(t+1), \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x+3, \quad x \in [0,l].$$

6. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := e^x t^3, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 3x+2, \quad x \in [0,l].$$

7. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := (x+2)e^{2t}, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \sin 3x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l].$$

8. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані,

$$f(x,t) := x(t+3), \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x-1, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 9

Контрольна робота №3

Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

де $l = j,\ T = j+1,$

$$f(x,t) := (jx + j + 1)t^j, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos jx, \quad \psi(x) := j+2, \quad x \in [0,l],$$

1) $\alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,$

2) $\alpha_0 = 1,\ \beta_0 = -j, \quad \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,$

3) $\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = j,$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Практичне заняття № 10

Розв'язування мішаних задач для рівняння коливання струни з однорідними крайовими умовами третього роду методом рядів Фур'є

I. Довідкова інформація

Завдання: Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{261}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{262}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{263}$$

де

- $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі, причому $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\varphi, \psi \in L^2(0,l)$, $f \in C([0,T]; L^2(0,l))$ – задані функції.

Розв'язування.

1-ий крок. Запишемо задачу Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{264}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in (0,l).$$

Отже, задача (384) — (386) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{265}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{266}$$

Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок задачі (384) — (386) – це слабкий розв'язок задачі (388), (389). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (384) — (386), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (388), (389).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \quad \text{причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad w'' + \lambda w = 0, \quad x \in (0,l), \tag{267}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{268}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (390) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (391), і знаходження цих розв'язків, називають *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язують в просторі $C^2[0,l]$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{269}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (384) – (386) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{270}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{271}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (403) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (384) і початкові умови (386) замість u (крайові умови (385) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (401)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}'_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (404).

Дивлячись на рівності (404), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{272}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (403) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 32. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{273}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{274}$$

$$u|_{t=0} = x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l], \tag{275}$$

де $a > 0, \ l > 0, \ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x,t) := x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := x+1, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in (0,l).$$

і зведемо задачу (360) – (362) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор

$$A : D(A) \to L_2(0,l)$$

за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0, \ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{276}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t), \ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t), \ x \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in (0,l).$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (360) – (362) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{277}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{278}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (360) – (362), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (410), (411).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{279}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (370) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (370), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{280}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (371) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{281}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{282}$$

і підставимо вирази (420) і (421) в крайові умови задачі (370):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{283}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (422) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (422) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{284}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{285}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (420) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \tag{286}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}C_2^2\int\limits_0^l (1-\cos\frac{-\pi+2\pi k}{l}x)\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}C_2^2\Big(x - \frac{l}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{l}x\Big)\Big|_{x=0}^{x=l} = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi+2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x\in[0,l], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{287}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x\in[0,l],\ t\in[0,T], \tag{288}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(1+(-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\sin t = a_k\cdot\sin t, \quad t\in[0,T],$$

$$\text{де}\quad a_k := (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2.$$

Тут ми використали результати розв'язування прикладу 7 практичного заняття №7.

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (360) – (362) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{289}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, & k\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{290}$$

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (440), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (439)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases}z'' + a^2\lambda_k z = a_k\sin t, & t\in(0,T],\\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k.\end{cases} \tag{291}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0. \tag{292}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\ B_k \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (442).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (441) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t,\ \ z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2\lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = a_k \ \Rightarrow$$

$$d_k := \frac{a_k}{a^2\lambda_k - 1} \tag{293}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_k - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$).

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (441). Підставимо вираз повного загального розв'язку в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$

$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (360) – (362) є (див. (439)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t) \sin \sqrt{\lambda_k}x, \quad t \in [0,T],$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Приклад 33. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = (x-1)e^t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{294}$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{295}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2x+1, \quad x \in [0,l], \tag{296}$$

де $a > 0, l > 0,\ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x,t) := (x-1)e^t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x+1, \quad x \in (0,l).$$

і зведемо задачу (444) — (446) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A) \tag{297}$$

і позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in (0,l).$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (444) – (446) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{298}$$

$$u'(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{299}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок даної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (298), (299).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2[0,l]$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{300}$$

Шукаємо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робимо точно так як в прикладі 8 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (300) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.
1) Нехай $\lambda = 0$, тоді одержуємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in [0, l], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (300), підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови задачі (300). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$w_0(x) = C_2, \quad x \in [0, l],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_0(x)|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{301}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{302}$$

2) Тепер нехай $\lambda > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (300), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{303}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (303) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{304}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{305}$$

і підставимо вирази (429) і (430) в крайові умови задачі (300):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{306}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (431) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (431) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{307}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{308}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (429) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{309}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi k}{l}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^2 \int\limits_0^l \Big(1 + \cos 2\frac{\pi k}{l}x\Big)\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \ \ k \in \mathbb{N},$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi k}{l}x, \quad x \in [0, l], \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{310}$$

3-ий крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^\infty \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^\infty \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=0}^\infty \widehat{f}_k(t) w_k(x), \ \ t \in [0, T], \tag{311}$$

де

$$\widehat{\varphi}_k = \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = 0\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\widehat{\psi}_0 := \int\limits_0^l \varphi(x) w_0(x)\, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l (2x + 1)\, dx = \sqrt{\frac{1}{l}}(l^2 + l) = \sqrt{l}(l + 1)\,,$$

$$\widehat{\psi}_k = \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int\limits_0^l f(x, t) w_0(x)\, dx = a_0 e^t\,, \quad \text{де} \ \ a_0 := \sqrt{l}\Big(\frac{l}{2} - 1\Big), \ \ t \in [0, T],$$

$$\widehat{f}_k(t) = \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = a_k \cdot e^t\,, \quad \text{де } a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (444) – (446) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad t \in [0,T], \tag{312}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_0''(t) = \widehat{f}_0(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_0(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad \widehat{u}_0'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{313}$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{314}$$

З (313) випливає, що функція $\widehat{u}_0$ (відповідний коефіцієнт ряду (312)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' = a_0 e^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{315}$$

а з (313) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (312)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_k e^t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0. \end{cases} \tag{316}$$

Розв'яжемо спершу задачу (315). Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі, проінтегрувавши рівняння двічі:

$$z = a_0 e^t + A_0 t + B_0, \quad t \in [0,T],$$

де A_0, B_0 – довільні сталі.

Підставимо цей вираз повного загального розв'язку рівняння даної задачі в її початкові умови для знаходження значень сталих A_0, B_0. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = a_0 e^t + A_0, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv a_0 + B_0 = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) \equiv a_0 + A_0 = \widehat{\psi}_0.$$

Звідси

$$A_0 = \widehat{\psi}_0 - a_0, \quad B_0 = \widehat{\varphi}_0 - a_0.$$

Отже,

$$\widehat{u}_0(t) = a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0, \quad t \in [0,T].$$

Тепер розв'яжемо задачу (316) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (316) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k e^t,\ z'' = d_k e^t \quad \Rightarrow \quad d_k e^t + a^2\lambda_k d_k e^t = a_k e^t \Rightarrow \quad (1 + a^2\lambda_k)d_k = a_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{a_k}{1 + a^2\lambda_k}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (316).

Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Звідси маємо

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Отож, сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є (див. (312)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}\big[a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0\big] +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \big[(\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t\big] \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad (x,t) \in [0,l]\times[0,T].$$

$\square$

Приклад 34. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{317}$$

$$(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{318}$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l], \tag{319}$$

де $a > 0$ $l > 0,\ T > 0,\ h_0 > 0$ *— довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x,t) := 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l],$$

і зведемо задачу (317) – (319) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{320}$$

і позначення

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (317) – (319) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{321}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{322}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (321), (322).

2-ий крок. Всі власні значення оператора є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{323}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (323) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (323), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{324}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (324) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \quad x \in [0, l], \tag{325}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x, \quad x \in [0, l], \tag{326}$$

і підставимо вирази (325) і (326) в крайові умови задачі (323):

$$\begin{cases} w'(0) - h_0 w(0) \equiv C_2 \sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases} \tag{327}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (327) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (327) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_0 & \sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda} l & \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_0 \sin \sqrt{\lambda} l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0, \tag{328}$$

звідки

$$-h_0 \sin \sqrt{\lambda} l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_0}. \tag{329}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda} l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{l h_0}. \tag{330}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{331}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (327) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A, тобто власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля, підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (325) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{332}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1)^2 \int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{333}$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x \in [0,l], \tag{334}$$

де M_k визначено в (333).

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T], \tag{335}$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l \cos x\cdot\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l (2x\cos t)\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx =$$
$$= b_k\cos t, \quad t \in [0,T],$$

де

$$b_k := 2M_k\int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)x\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (317) – (319) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{336}$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in [0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{337}$$

З рівностей (337) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (336)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = b_k\cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{338}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \cos t, \ t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_k \sin t, \quad z'' = -d_k \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_k \cos t + a^2\lambda_k d_k \cos t = a_k \cos t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = b_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{b_k}{a^2\lambda_k - 1}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (338). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k, B_k. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t - d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{u}_k(t) := \big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T],$$

і сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Big[\big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t +$$

$$+ d_k \sin t\Big]\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0,\ h_0 > 0,\ h_1 > 0$ — довільні фіксовані сталі. Знайдіть сильно узагальнений розв'язок даної мішаної задачі для рівняння коливання струни:

1.
$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = xe^{2t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \\
u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \\
u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 3, \quad x \in [0,l].
\end{gathered}
$$

2.
$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \\
u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \\
u_x|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l].
\end{gathered}
$$

3.
$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 3e^{3t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \\
(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \\
u|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad x \in [0,l].
\end{gathered}
$$

4.
$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\cos 2t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \\
u_x|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \\
u|_{t=0} = 3x, \quad u_t|_{t=0} = 4, \quad x \in [0,l].
\end{gathered}
$$

5.
$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x + 3, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \\
(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \\
u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 3x, \quad x \in [0,l].
\end{gathered}
$$

Практичне заняття № 11

Розв'язування мішаних задач для рівняння коливання струни з неоднорідними крайовими умовами методом рядів Фур'є

І. Довідкова інформація

Завдання: Знайти *сильно узагальнений* розв'язок $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ *мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{339}$$

з неоднорідними крайовими умовами

$$(\alpha_0\widetilde{u}_x + \beta_0\widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1\widetilde{u}_x + \beta_1\widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{340}$$

та початковими умовами

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{341}$$

де

- $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in L^2(0,l),\ \ \widetilde{f} \in C([0,T]; L^2(0,l)),\ \ \mu_0, \mu_1 \in C^2([0,T])$ — задані функції, причому або $\mu_0 \ne 0$, або $\mu_1 \ne 0$.

Розв'язування.
0-ий крок. Шукаємо функцію $h \in C^2(\overline{Q})$, яка задовольняє крайові умови (385), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{342}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{343}$$

де $p, q, r \in C^2([0,T])$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (342). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази w і w_x в умови (342):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2 p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною, її покладемо рівною, наприклад, нулеві.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (384) — (386) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{344}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_{tt} - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad (u+h)_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_{tt} + h_{tt} - a^2u_{xx} - a^2h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0u_x + \beta_0u)|_{x=0} + (\alpha_0h_x + \beta_0h)|_{x=0} = \mu_0(t),\ (\alpha_1u_x + \beta_1u)|_{x=l} + (\alpha_1h_x + \beta_1h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad u_t|_{t=0} + h_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Отож, врахувавши (342), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{345}$$

$$(\alpha_0u_x + \beta_0u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1u_x + \beta_1u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{346}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{347}$$

де
$f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_{tt}(x,t) + a^2h_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q;\ \ \varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0), \ \ \psi(x) := \widetilde{\psi}(x) - h_t(x,0),\ x \in [0,l]$.

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (345) — (347) маємо $\widetilde{u} = u,\ \widetilde{f} = f,\ \widetilde{\varphi} = \varphi,\ \widetilde{\psi} = \psi$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком задачі (345) — (347). Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0v'(0) + \beta_0v(0) = 0,\ \alpha_1v'(l) + \beta_1v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{348}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l],$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (345) — (347) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{349}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{350}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (345) — (347) — це слабкий розв'язок задачі (388), (389). Тому шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (345) — (347), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (388), (389).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \quad \text{причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{351}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{352}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (390) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (391), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля.* Відмітимо, що розв'язки цієї задачі належать простору $C^2[0,l]$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \; x \in [0,l],$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \; t \in [0,T], \tag{353}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (345) — (347) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{354}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{355}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (403) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (345) і початкові умови (347) замість u (крайові умови (346) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (401)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (404).

Дивлячись на рівності (404), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{356}$$

Очевидно, що рівняння задачі (527) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{357}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (527).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (528). Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\, B_k \in \mathbb{R} \text{ — довільні сталі},$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (528).

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{358}$$

де A_k, B_k — довільні сталі. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (527), отримаємо

$$\begin{cases} A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \\ B_k a\sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0) = \widehat{\psi}_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0) \\ B_k = \dfrac{\widehat{\psi}_k - \overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}}. \end{cases}$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := \big(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0)\big)\cos a\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{\widehat{\psi}_k - \overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda_k}\,t + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T]. \tag{359}$$

!!! Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі (527) методом неозначених коефіцієнтів.

• Якщо

$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos\omega t + b_k \sin\omega t,$$

де ω — стала така, що $\omega \neq a\sqrt{\lambda_k}$ для кожного $k \in N$ (може бути $a_k = 0$ або $b_k = 0$), то частковий розв'язок шукають у вигляді

$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos\omega t + d_k \sin\omega t,$$

де c_k і d_k знаходять за формулами

$$c_k = \frac{a_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}, \quad d_k = \frac{b_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}.$$

• Якщо ж $f_k(t) = a_k t + b_k$, то

$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$

де $c_k = \dfrac{a_k}{a^2\lambda_k}, \quad d_k = \dfrac{b_k}{a^2\lambda_k}.$

• Якщо $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, то

$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$

де $c_k = \dfrac{a_k}{\lambda_k a^2 + \omega^2}.$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (403) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція $\widetilde{u}$ належить цьому ж простору, тобто функція $\widetilde{u}$ задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. Отож, сильно узагальненим розв'язком задачі (384) — (386) є функція

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x) + p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

де $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N},\ p, q, r$ знайдені вище. □

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 35. *Нехай $l > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Знайдіть сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{360}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0,T], \tag{361}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{362}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки $\mu_0 \neq 0$ і $\mu_1 \neq 0$, то в задачі робимо заміну невідомої функції:

$$\widetilde{u} = u + h,$$

де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що

$$h|_{x=0} = \mu_0(t), \quad h_x|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in [0, T]. \tag{363}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x,t) := p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (363), тобто

$$r(t) = \mu_0(t), \quad 2lp(t) + q(t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, T].$$

Звідси, поклавши $p(t) = 0,\ t \in [0, T]$, знаходимо $r(t) = \mu_0(t),\ q(t) = \mu_1(t),\ t \in [0, T]$, тобто

$$h(x,t) := x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Маємо

$$u_{tt} - \sin t - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} + \sin t = \sin t, \quad u_x|_{x=l} + 1 = 1, \quad t \in (0, T],$$
$$u|_{t=0} + x = x + 1, \quad u_t|_{t=0} + 1 = 0, \quad x \in [0, l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції u:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{364}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \tag{365}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \tag{366}$$

де

$$f(x,t) := (x+1)\sin t, \quad (x,t) \in Q; \qquad \varphi(x) := 1, \quad \psi(x) := -1, \quad x \in [0, l].$$

1-ий крок. Зведемо задачу (364) — (366) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{367}$$

а також позначення:

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (364) — (366) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0, T], \tag{368}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{369}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (410), (411).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{370}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (370) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (370), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{371}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (371) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{372}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{373}$$

і підставимо вирази (420) і (421) в крайові умови задачі (370):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{374}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (422) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (422) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{375}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{376}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (420) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{377}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{378}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \; t \in [0, T], \tag{379}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l 1\cdot\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx\,,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (-1)\cdot\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\sin t\cdot\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\cdot\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = a_k\cdot\sin t, \quad t \in [0, T]\,,$$

$$a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\cdot\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (364) — (366) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{380}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{381}$$

Умови (440) на коефіцієнти ряду (439) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (364) і умови (366), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (379)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси випливають рівності (440).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (440), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (439)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_k \sin t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{382}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0,T], \quad A_k, \ B_k \in \mathbb{R} \text{ — довільні сталі,}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k — стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t, \ \ z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2\lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1) d_k = a_k \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{a_k}{a^2\lambda_k - 1}. \tag{383}$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (441). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k, B_k. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$

$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (360) — (362) є (див. (439)) сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$ ряду

$$\widetilde{u}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t\right] \sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. $\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $a > 0,\ l > 0,\ T > 0$ — довільно задані сталі. Розв'язати мішані задачі для рівняння коливання струни:

1.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{3t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = 4e^{3t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l].$$

2.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 2\cos 3t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4\cos 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \sin x, \quad x \in [0,l].$$

3.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3\sin 2t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 1, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 4\sin 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x+2, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \cos 2x, \quad x \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(\widetilde{u}_x - 2\widetilde{u})|_{x=0} = 2e^{2t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3xt, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{(}u_x - 2u)|_{x=0} = 2t, \quad (\widetilde{u}_x + 3\widetilde{u})|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x+3, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 12

Мішані задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани. Метод Фур'є

I. Довідкова інформація

Завдання: Нехай

- $p > 0,\ q > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := (0,p) \times (0,q), \quad Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{384}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{385}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{386}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0\ ,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0\ ,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$
- $\varphi, \psi \in L_2(\Omega),\ f \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ — задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Як відомо, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань — це слабкий розв'язок задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v_x(0,y) + \beta_0 v(0,y) = 0,\ \alpha_1 v_x(p,y) + \beta_1 v(p,y) = 0,$$

$$\gamma_0 v_y(x,0) + \delta_0 v(x,0) = 0, \quad \gamma_1 v_y(x,q) + \delta_1 v(x,q) = 0\},$$

$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{387}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, задача (384) — (386) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{388}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{389}$$

Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок задачі (384) — (386) — це слабкий розв'язок задачі (388), (389). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (384) — (386), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (388), (389).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{390}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 w_x(0, y) + \beta_0 w(0, y) = 0, \quad \alpha_1 w_x(p, y) + \beta_1 w(p, y) = 0, \quad y \in (0, q), \\ \gamma_0 w_y(x, 0) + \delta_0 w(x, 0) = 0, \quad \gamma_1 w_y(x, q) + \delta_1 w(x, q) = 0 \quad x \in [0, p]. \end{cases} \tag{391}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (390) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (391), а також шукаємо ці розв'язки (фактично, в просторі $C^2(\overline{\Omega})$).

Розв'язки задачі (390), (391) шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = X(x)Y(y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{392}$$

Для знаходження X і Y підставимо вираз w вигляду (392) у рівняння (390) і умови (391):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{393}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0)Y(y) + \beta_0 X(0)Y(y) = 0, \quad \alpha_1 X'(p)Y(y) + \beta_1 X(p)Y(y) = 0, \\ \gamma_0 X(x)Y'(0) + \delta_0 X(x)Y(0) = 0, \quad \gamma_1 X(x)Y'(q) + \delta_1 X(x)Y(q) = 0 \end{cases} \tag{394}$$

Поділимо рівність (393) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda. \tag{395}$$

Оскільки ліва і права частина рівності (395) залежать від різних незалежних змінних (відповідно, x та y), то ці частини є сталими і однаковими, тобто існує стала ν така, що

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu, \quad x \in [0, p], \ y \in [0, q].$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{396}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (396) отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, & \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, & \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \end{cases} \tag{397}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, \quad \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0, \end{cases} \tag{398}$$

які пов'язані із задачею (390), (391) співвідношеннями (392) і

$$\lambda = \nu + \omega. \tag{399}$$

Спочатку знаходимо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (397), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le ... \le \nu_k \le ..., \quad \text{причому } \ \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Потім знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^\infty$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (398), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_m \le ..., \quad \text{причому } \ \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тоді вводимо позначення:

$$w_{k,m}(x,y) := X_k(x) Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Відомо, що система $\big\{w_{k,m} \,\big|\, k,m \in \mathbb{N}\big\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \ \text{ в } \ \Omega, \quad k,m \in \mathbb{N}. \tag{400}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\, m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k=1,\, m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \tag{401}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \ t \in [0,T], \tag{402}$$

де для кожних $k, m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_{k,m} := \int_\Omega \varphi(x,y) w_{k,m}(x,y)\, dxdy, \quad \widehat{\psi}_{k,m} := \int_\Omega \psi(x,y) w_{k,m}(x,y)\, dxdy,$$

$$\widehat{f}_{k,m}(t) := \int_\Omega f(x,y,t)w_{k,m}(x,y)\,dxdy, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (384) — (386) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(t)w_k(x,y), \quad (x,y,t) \in \overline{Q}, \tag{403}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_{k,m}\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t) = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_{k,m}(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad \widehat{u}'_{k,m}(0) = \widehat{\psi}_{k,m}, \end{cases} \quad k,\, m \in \mathbb{N}. \tag{404}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (403) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (384) і початкові умови (386) замість u (крайові умови (385) для суми ряду виконуються за рахунок належності $w_{k,m}$ до $D(A)$, $k,m \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (401), (402)) і рівності (400), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t)\right] w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t)w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t) \in \Omega \times (0,T],$$

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(0)w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m}w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0)w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m}w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_{k,m}\}$, маємо рівності (404).

Дивлячись на рівності (404), бачимо, що для кожних $k,m \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_{k,m}z = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \psi_{k,m}. \end{cases} \tag{405}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (403) збігається в просторі $C([0,T]; L_2(\Omega))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 36. *Нехай* $p > 0$, $q > 0$, $T > 0$ *— довільно задані і фіксовані числа,* $\Omega := (0,p) \times (0,q)$, $Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q, \tag{406}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{407}$$

$$u|_{t=0} = xy + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{408}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,y,t) := (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q; \quad \varphi(x,y) := xy+1, \quad \psi(x,y) := 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

і зведемо задачу (406) — (408) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid v(0,y) = 0,\ v_x(p,y) = 0,\ v_y(x,0) = 0,\ v_y(x,q) = 0\},$$

$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{409}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (406) — (408) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{410}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{411}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (410), (411).

2-ий крок. Знаходимо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{412}$$

з крайовими умовами

$$w(0,y) = 0, \quad w_x(p,y) = 0, \quad w_y(x,0) = 0, \quad w_y(x,q) = 0. \tag{413}$$

Розв'язки задачі (412), (413) шукаємо у вигляді

$$w(x,y) = X(x)Y(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{414}$$

Підставимо вираз w у рівняння (412) і крайові умови (413):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{415}$$

$$\begin{cases} X(0)Y(y) = 0, \quad X'(p)Y(y) = 0, \\ X(x)Y'(0) = 0, \quad X(x)Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{416}$$

Поділимо рівність (415) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{417}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (416) маємо

$$\begin{cases} X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \end{cases} \tag{418}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{419}$$

Знайдемо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (418), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le ... \le \nu_k \le ..., \quad \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення $\nu > 0$ такі, що задача (418) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (418). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\nu \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння задачі (418) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\nu}x + C_2 \sin\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{420}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$X'(x) = -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}x + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{421}$$

і підставимо вирази (420) і (421) в крайові умови задачі (418):

$$\begin{cases} X(0) \equiv C_1 = 0, \\ X'(l) \equiv -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}p + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}p = 0. \end{cases} \tag{422}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\nu > 0$, при яких система рівнянь (422) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (422) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \ne 0, \quad \cos\sqrt{\nu}p = 0. \tag{423}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\nu}p = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\nu}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\nu}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \nu_k = \left(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{424}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ν, C_1, C_2 у вираз (420) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$X_k(x) = C_2 \sin \sqrt{\nu_k} x, \quad x \in [0, p], \tag{425}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^p |X_k|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2 \sqrt{\nu_k} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}}\,.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{X_k\}$ в $L^2(0,p)$ і числова послідовність $\{\nu_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\nu_k = \left(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \sqrt{\nu_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x, \quad x \in [0,p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{426}$$

Тепер знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (419), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_m \le ..., \quad \text{причому} \;\; \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всі значення $\omega \ge 0$ такі, що задача (419) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\omega = 0$; 2) $\omega > 0$.
1) Нехай $\omega = 0$, тоді маємо рівняння

$$Y'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$Y(y) = C_1 y + C_2, \quad y \in [0,q], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (419), підставивши цей вираз у крайові умови цієї задачі. Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$Y_0(y) = C_2, \quad y \in [0,q],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^q |Y_0(y)|^2 \, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^q dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 q = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{q}}\,.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\omega_0 = 0 \tag{427}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad x \in [0,q]. \tag{428}$$

2) Тепер розглянемо випадок $\omega > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (419). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\omega \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega}\, i, \;\; i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (419) має вигляд

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega} y + C_2 \sin\sqrt{\omega} y, \quad y \in [0, q], \tag{429}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$Y'(y) = -C_1\sqrt{\omega} \sin\sqrt{\omega} y + C_2\sqrt{\omega} \cos\sqrt{\omega} y, \quad y \in [0, q], \tag{430}$$

і підставимо вирази (429) і (430) в крайові умови задачі (419):

$$\begin{cases} Y'(0) \equiv C_2\sqrt{\omega} = 0, \\ Y'(q) \equiv -C_1\sqrt{\omega} \sin\sqrt{\omega} q + C_2\sqrt{\omega} \cos\sqrt{\omega} q = 0. \end{cases} \tag{431}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\omega > 0$, при яких система рівнянь (431) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (431) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\omega} q = 0. \tag{432}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\omega} q = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\omega} q > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\omega} q = \pi m, \;\; m \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \;\; m \in \mathbb{N}. \tag{433}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ω, C_1, C_2 у вираз (429) і для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$Y_m(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega_m} y, \quad y \in [0, q], \tag{434}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |Y_m(y)|^2\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2\sqrt{\omega_m} y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2 \frac{\pi k}{q} y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} C_1^2 \int\limits_0^q \left(1 + \cos 2\frac{\pi k}{q} y\right) dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \frac{q}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{q}}\,.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{Y_m\}_{m=0}^\infty$ в $L_2(0, q)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\omega_m\}_{m=0}^\infty$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \cos\sqrt{\omega_m} y \equiv \sqrt{\frac{2}{q}} \cos\frac{\pi m}{q} y, \quad y \in [0, q], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{435}$$

Введемо позначення:

$$w_{k,m}(x,y) := X_k(x)Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Відомо, що система $\left\{w_{k,m} \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \ \text{в} \ \Omega, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{436}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k,\, m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \ \ (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{437}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \ \ (x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T], \tag{438}$$

де для кожних $k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$\widehat{\varphi}_{k,m} := \int_\Omega \varphi(x,y) \cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega (xy+1) \cdot X_k(x)Y_m(y)\,dxdy =$$
$$= \int_0^p xX_k(x)\,dx \int_0^q yY_m(y)\,dy + \int_0^p X_k(x)\,dx \int_0^q Y_m(y)\,dy =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^p x \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q y\cos\frac{\pi m}{q}y\,dy +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q \cos\frac{\pi m}{q}y\,dy =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Big[-x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p + \int_0^p \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\Big] + \frac{q}{\pi m}\Big[y\sin\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q -$$
$$- \int_0^q \sin\frac{\pi m}{q}y\,dy\Big] - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p \cdot \frac{q}{\pi m}\sin\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q\Big) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big(\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Big|_0^p + \frac{q^2}{\pi^2 m^2}\cos\frac{\pi m}{q}y\Big|_0^q - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}(0-1)\cdot\frac{q}{\pi m}(0-0)\Big) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Big((-1)^{k+1}\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2} + ((-1)^m - 1)\frac{q^2}{\pi^2 m^2}\Big), \quad k,m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\varphi}_{k,0} := \int_\Omega \varphi(x,y) \cdot w_{k,0}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega (xy+1) \cdot X_k(x)Y_0(y)\,dxdy =$$
$$= \int_0^p xX_k(x)\,dx \int_0^q yY_0(y)\,dy + \int_0^p X_k(x)\,dx \int_0^q Y_0(y)\,dy =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q y\,dy +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx \int_0^q dy = ..., \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\psi}_{k,m} := \int_\Omega \psi(x,y)\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega 0\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = 0, \quad k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0,$$

$$\widehat{f}_{k,m}(t) := \int_\Omega f(x,y,t)\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}}\int_\Omega (x+y)\cos t\cdot \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\cos\frac{\pi m}{q}y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\cos t\cdot\int_\Omega (x+y)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\cos\frac{\pi m}{q}y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\cos t\cdot\Big[\int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q \cos\frac{\pi m}{q}y\,dy +$$

$$+\int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q y\cos\frac{\pi m}{q}y\,dy\Big] = ... = a_{k,m}\cos t, \quad t\in[0,T],\ k,m\in\mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_{k,0}(t) := \int_\Omega f(x,y,t)\cdot w_{k,0}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\int_\Omega (x+y)\cos t\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\cos t\cdot\int_\Omega (x+y)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\cos t\cdot\Big[\int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q dy +$$

$$+\int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q y\,dy\Big] = ... = a_{k,0}\cos t, \quad t\in[0,T],\ k\in\mathbb{N},$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (406) — (408) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{u}_{k,m}(t)w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t)\in\overline{Q}, \tag{439}$$

де функції $\{\widehat{u}_{k,m}\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t) = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_{k,m}(0) = \varphi_{k,m}, \quad \widehat{u}'_{k,m}(0) = \psi_{k,m} \quad k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0.\end{cases} \tag{440}$$

Умови (440) на коефіцієнти ряду (439) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (406) і умови (408), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (437)) і рівність (436). У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t)\right]w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{f}_{k,m}(t)w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{u}_{k,m}(0)w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_{k,m}w_{k,m}(x,y), \quad (x,y)\in\overline{\Omega},$$

$$\sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси випливають рівності (440).

Знайдемо $\{\widehat{u}_{k,m}\}$. Дивлячись на рівності (440), бачимо, що для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ (відповідний коефіцієнт ряду (439)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_{k,m} z = a_{k,m} \cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_{k,m}. \end{cases} \tag{441}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільних фіксованих $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_{k,m} z = 0. \tag{442}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_{k,m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_{k,m}}\, i.$$

Тоді

$$z = A_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + B_{k,m} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t, \quad t \in [0,T], \quad A_{k,m},\ B_{k,m} \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (442).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (441) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_{k,m} \cos t, \quad t \in [0,T],$$

де $d_{k,m}$ — стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_{k,m} \sin t, \ \ z'' = -d_{k,m} \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_{k,m} \cos t + a^2\lambda_{k,m} d_{k,m} \cos t = a_{k,m} \cos t \Rightarrow$$

$$(a^2\lambda_{k,m} - 1) d_{k,m} = a_{k,m} \ \Rightarrow d_{k,m} := \frac{a_{k,m}}{a^2\lambda_{k,m} - 1}, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{443}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_{k,m} - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$).

Отож, маємо

$$z = A_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + B_{k,m} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + d_{k,m} \cos t, \quad t \in [0,T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (441). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_{k,m},\ B_{k,m}$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_{k,m} a\sqrt{\lambda_{k,m}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + a\sqrt{\lambda_{k,m}} B_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t - d_{k,m} \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_{k,m} + d_{k,m} = \widehat{\varphi}_{k,m},$$

$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}B_{k,\,m} = \widehat{\psi}_{k,\,m}.$$

Звідси

$$A_{k,\,m} = \widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}, \quad B_{k,\,m} = \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}}\,,$$

а значить,

$$\widehat{u}_{k,\,m}(t) = \big(\widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}\big)\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}}\sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + d_{k,m}\cos t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (406) — (408) (див. (439)) є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(\Omega))$ ряду

$$u(x,y,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\big[\big(\widehat{\varphi}_{k,\,m} - d_{k,\,m}\big)\cos a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,\,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}}\sin a\sqrt{\lambda_{k,\,m}}t +$$

$$+d_{k,\,m}\cos t\big]X_k(x)Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T],$$

де $\lambda_{k,\,m}$, $\widehat{\varphi}_{k,\,m}$, $\widehat{\psi}_{k,\,m}$, $d_{k,\,m}, X_k, Y_m$ для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $p > 0, q > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p)\times(0,q)$, $Q := \Omega\times(0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння коливань прямокутної мембрани:

1.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = (x^2+y)\cos 2t, \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=p}=0, \quad (y,t)\in(0,q)\times(0,T], \\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=q}=0, \quad (x,t)\in[0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0}=2xy, \quad u_t|_{t=0}=y, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

2.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = (2x+y)\cos 3t, \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=p}=0, \quad (y,t)\in(0,q)\times(0,T], \\ u_y|_{y=0}=0, \quad u|_{y=q}=0, \quad (x,t)\in[0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0}=5x+y, \quad u_t|_{t=0}=2x, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

3.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = (2x+y)\sin 2t, \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \quad u|_{x=p}=0, \quad (y,t)\in(0,q)\times(0,T], \\ u|_{y=0}=0, \quad u_y|_{y=q}=0, \quad (x,t)\in[0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0}=3x+2y, \quad u_t|_{t=0}=y, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

4.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = (x^2+y)e^{2t}, \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=p}=0, \quad (y,t)\in(0,q)\times(0,T], \\ u_y|_{y=0}=0, \quad u_y|_{y=q}=0, \quad (x,t)\in[0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0}=3x-y, \quad u_t|_{t=0}=3xy, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

5.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = 2xyt+1, \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\begin{cases} (u_x-u)|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=p}=0, \quad (y,t)\in(0,q)\times(0,T], \\ u|_{y=0}=0, \quad u_y|_{y=q}=0, \quad (x,t)\in[0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0}=2x+1, \quad u_t|_{t=0}=3y, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}.$$

Практичне заняття № 13

Контрольна робота №4

1. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,3) \times (0,15], \tag{444}$$

$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = \mu_0(t), \quad \widetilde{u}_x|_{x=3} = \mu_1(t), \quad t \in (0,15], \tag{445}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \varphi(x), \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,3], \tag{446}$$

де

$$f(x,t) := (2x+1)e^{5t}, \quad (x,t) \in Q; \qquad \mu_0(t) := \sin 2t, \quad \mu_1(t) := 3t+2, \quad t \in (0,15];$$

$$\varphi(x) := 5, \quad \psi(x) := 3x+7, \quad x \in [0,3].$$

2. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,7) \times (0,12],$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\widetilde{u}_x + 2\widetilde{u})|_{x=7} = \mu_1(t), \quad t \in (0,12],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \varphi(x), \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,7],$$

де

$$f(x,t) := (x+2)(2t+3), \quad (x,t) \in Q, \qquad \mu_0(t) = e^t, \quad \mu_1(t) = t+2, \quad t \in (0,12],$$

$$\varphi(x) := 3, \quad \psi(x) := x-1, \quad x \in [0,7].$$

3. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання прямокутної мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q := (0;2) \times (0;5) \times (0;10],$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad (y,t) \in (0,2) \times (0,10], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=2} = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,10], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega} := (0;1) \times (0;3),$$

де

$$f(x,y,t) := (2x+y)e^t, \quad (x,y,t) \in Q, \qquad \varphi(x,y) := 3x\sin y, \quad \psi(x,y) := 7y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Практичне заняття № 14

Розв'язування мішаних задач для рівняння теплопровідності в стержні методом рядів Фур'є

І. Довідкова інформація

Нехай $l > 0$, $T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в стержні* полягає у знаходженні функції $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{447}$$

крайові умови

$$(\alpha_0\widetilde{u}_x + \beta_0\widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1\widetilde{u}_x + \beta_1\widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{448}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{449}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \geqslant 0$,
- $\mu_0, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (447) — (449), якщо

$$\mu_0,\ \mu_1 \in H^2(0,T), \quad \widetilde{\varphi} \in L^2(0,l), \quad \widetilde{f} \in C([0,T]; L^2(0,l)).$$

Розв'язування.

0-ий крок. Цей крок робимо, якщо або $\mu_0 \neq 0$, або $\mu_1 \neq 0$ (крайові умови неоднорідні). Спочатку шукаємо функцію $h \in H^2(Q)$, яка задовольняє крайові умови (448), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{450}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{451}$$

де $p, q, r \in H^2(0,T)$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (537). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази h і h_x в умови (537):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нульовою.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (447) — (449) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{452}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$
$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2 u_{xx} - a^2 h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} + (\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \, (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} + (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$
$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Отож, врахувавши (537), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{453}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{454}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{455}$$

де $f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_t(x,t) + a^2 h_{xx}(x,t), \ (x,t) \in Q, \quad \varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0), \ x \in [0,l].$

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді у формулюванні задачі (540) — (542) маємо $u = \widetilde{u}, \ f = \widetilde{f}, \ \varphi = \widetilde{\varphi}$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності (540) — (542) є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \ \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{456}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t), \ x \in [0,l]\,; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t), \ x \in (0,l),$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (540) — (542) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{457}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{458}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (540) — (542) — це слабкий розв'язок задачі (457), (458). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (540) — (542), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (457), (458).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_k \leqslant ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{459}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{460}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (459) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (518), і знаходження цих розв'язків, називають *задачею Штурма-Ліувілля.*

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{461}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad f_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (540) — (542) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{462}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{463}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (525) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (540) і початкові умови (542) замість u (крайові умови (541) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (524)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (526).

Дивлячись на рівності (526), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{464}$$

Очевидно, що рівняння задачі (527) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{465}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (527).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (528). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t} z' + a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{a^2\lambda_k t} z\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{a^2\lambda_k t} z = A_k, \quad t \in [0,T], \tag{466}$$

де A_k — довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (528) має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0,T], \tag{467}$$

де A_k — довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{468}$$

де A_k — довільна стала.

Для знаходження розв'язку задачі (527) підставимо вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (527). У результаті отримаємо

$$A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \quad \Rightarrow \quad A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0)) e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T]. \tag{469}$$

Підставивши знайдені вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, у ряд (525), отримаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (540) — (542), оскільки при наших умовах на φ і f ряд (525) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопрвідності. $\square$

Зауваження 8.1. *Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі* (527) *методом неозначених коефіцієнтів.*

- *Якщо*

$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t,$$

де ω, a_k, b_k *— сталі (може бути* $a_k = 0$ *або* $b_k = 0$*), то частковий розв'язок шукають у вигляді*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos \omega t + d_k \sin \omega t,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у неоднорідне рівняння.*

- *Якщо ж* $f_k(t) = a_k t + b_k$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (527).

- *Якщо* $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$

де c_k *знаходять із лінійних алгебраїчного рівняння, яке отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (527).

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 37. *Нехай* $l > 0$, $T > 0$ *— довільно задані і фіксовані числа,* $Q := (0, l) \times (0, T]$. *Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в стержні*

$$\widetilde{u}_t - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x, t) \in Q, \tag{470}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T], \tag{471}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad x \in [0, l], \tag{472}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки крайові умови не є однорідними, то в задачі робимо заміну невідомої функції:

$$\widetilde{u}(x, t) = u(x, t) + h(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що

$$h|_{x=0} = \sin t, \quad h_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T]. \tag{473}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x, t) := p(t) x^2 + q(t) x + r(t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (473), тобто

$$r(t) = \sin t, \quad 2lp(t) + q(t) = 1, \quad t \in [0, T].$$

Звідси, поклавши $p(t) = 0,\ t \in [0,T]$, знаходимо $r(t) = \sin t,\ q(t) = 1,\ t \in [0,T]$, тобто

$$h(x,t) := x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Маємо

$$u_t + \cos t - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} + \sin t = \sin t, \quad u_x|_{x=l} + 1 = 1, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} + x = x + 1, \quad x \in [0,l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції u:

$$u_t - a^2 u_{xx} = -\cos t + x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \tag{474}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{475}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad x \in [0,l]. \tag{476}$$

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,t) := -\cos t + x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 1, \quad x \in [0,l],$$

і зведемо задачу (474) — (476) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \qquad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{477}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (474) — (476) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{478}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{479}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (474) — (476), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (478), (479).

2-ий крок. Знаходимо власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A, а для цього зауважимо, що на підставі означення оператора A отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{480}$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (480) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (480), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{481}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (610) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{482}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{483}$$

і підставимо вирази (611) і (612) в крайові умови задачі (480):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{484}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (613) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (613) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{485}$$

Розв'язавши рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ з врахуванням того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, отримаємо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

звідки визначаємо власні значення оператора A:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{486}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у формулу (611) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{487}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l \frac{1}{2}\big(1 - \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\, dx = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_2^2\big(x - \frac{l}{-\pi + 2\pi k}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\Big|_{x=0}^{x=l} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ складена з власних елементів оператора A, є такою:

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x\in[0,l], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{488}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x\in[0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x\in(0,l), \ t\in[0,T], \tag{489}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx \ = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l 1\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\,,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l(-\cos t + x\sin t)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= -\cos t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx + \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = a_k\cdot\sin t + b_k\cdot\sin t,$$

$$t\in[0,T]\,, \quad a_k := -\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx, \quad b_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (474) — (476) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in\overline{Q}, \tag{490}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ задовольняє рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k,\end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{491}$$

Умови (491) на коефіцієнти ряду (490) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (474) і умови (476), врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (619)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x),\, x\in[0,l], \ k\in\mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (491).

Знайдемо $\widehat{u}_k$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Дивлячись на рівності (491), бачимо, що функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (490)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos t + b_k \sin t, \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k \,. \end{cases} \tag{492}$$

Розв'яжемо цю задачу. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times\frac{dt}{z} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k\,dt, \;\; z = 0 \quad\Rightarrow\quad \ln|z| = -a^2\lambda_k\,t + \ln|A_k|, \;\; z = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ — довільна стала}, \tag{493}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T],$$

де c_k, d_k — сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-c_k \sin t + d_k \cos t + a^2\lambda_k(c_k \cos t + d_k \sin t) = a_k \cos t + b_k \sin t \quad\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos t & : & a^2\lambda_k c_k + d_k = a_k \\ \sin t & : & -c_k + a^2\lambda_k d_k = b_k \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^4\lambda_k^2 + 1,$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 1 \\ b_k & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k a_k - b_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & a_k \\ -1 & b_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k b_k + a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k - b_k}{a^4\lambda_k^2 + 1}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k b_k + a_k}{a^4\lambda_k^2 + 1}. \tag{494}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ — довільна стала},$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (492). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k\, t} + c_k \cos t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (470) — (472) є (див. (490)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду

$$\widetilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k\, t} + c_k \cos t + d_k \sin t\right] \sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, c_k, d_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в стержні:

1.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x^2 t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = t - 1, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x, \quad x \in [0,l].$$

2.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x-1)e^t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = e^t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad x \in [0,l].$$

3.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = e^x t^2, \quad (x,t) \in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 2, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos x, \quad x \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{2t}, \quad (x,t) \in Q,$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = e^{2t}, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \sin 3x, \quad x \in [0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = \sin t, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 2\sin t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 15

Розв'язування мішаних задач для рівняння теплопровідності в круговому диску методом рядів Фур'є

I. Довідковий матеріал

1. *Рівнянням Бесселя* називають рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{495}$$

де $\nu = \text{const} \geqslant 0$, x — незалежна змінна, що приймає значення в $\mathbb{R}$.

Оскільки коефіцієнт рівняння (495) при y'' в точці $x = 0$ перетворюється в нуль, то його розв'язки можуть мати особливості при $x = 0$. Враховуючи це, а також те, що ліва частина рівняння (495) не змінюється при заміні x на $-x$, приходимо до висновку, що нам достатньо розглядати це рівняння на промені $(0, +\infty)$.

Розв'язки рівняння (495) шукають, враховуючи його вироджуваність при $x = 0$, у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{496}$$

де $\rho \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розв'язками рівняння (495) є функції Бесселя

$$J_{\pm\nu}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\pm\nu + m + 1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m\pm\nu}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{497}$$

ν-го порядку, причому, коли ν – не ціле (і, очевидно, що додатне), то функції J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними, а коли $\nu = n \in \mathbb{N}$, то $J_{-n} = (-1)^n J_n$, звідки, зокрема, випливає, що J_n і J_{-n} є лінійно залежними. Тому вводять в розгляд функцію Вебера

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $\nu > 0$ – не ціле, і

$$Y_n(x) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \tag{498}$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Твердження 8.1. *Повний загальний розв'язок рівняння* (495) *на промені* $(0, +\infty)$ *має вигляд*

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \ \text{— довільні сталі.}$$

Зауваження 8.2. *Сім'я функцій Бесселя J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, володіє, зокрема, такими властивостями:*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{зокрема}, \quad J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(x^\rho J_\rho(x))' = x^\rho J_{\rho-1}(x), \quad \textit{зокрема}, \quad J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$J_{\rho+1}(x) = \frac{2\rho}{x} J_\rho(x) - J_{\rho-1}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

2. Нехай
- $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 < l^2\}$ – круг радіуса l з центром в початку координат,
- $\Gamma := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 = l^2\}$ – коло радіуса l з центром в початку координат (воно обмежує Ω),
- $Q := \Omega \times (0, T]$ – циліндр з основою Ω і твірною, паралельною осі t,
- $\Sigma := \Gamma \times (0, T]$ – бічна поверхня циліндра Q.

Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{499}$$

крайову умову

$$\text{або} \ \ u\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \ \ \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\Big)\Big|_\Sigma = \mu \tag{500}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{501}$$

де $a > 0$, $h > 0$, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, $f : Q \to \mathbb{R}$ – задані, $\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$, ν – одинична зовнішня нормаль до Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – похідна u по нормалі ν.

Нас цікавить проблема ***знаходження*** *сильно узагальненого* розв'язку задачі (499) — (501), якщо

$$\varphi \in L_2(\Omega), \quad f \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Перейдемо в цій задачі до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{502}$$

У результаті, врахувавши, що якщо $\widetilde{u}(r, \theta) := u(x_1, x_2)$, то

$$\Delta u = \widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta},$$

отримаємо ***задачу***: знайти функцію $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta}\big) = \widetilde{f}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in \widetilde{Q} := (0, l) \times \mathbb{R} \times (0, T], \tag{503}$$

крайові умови

$$\widetilde{u}(r, \theta + 2\pi, t) = \widetilde{u}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in (0, l] \times \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,\theta,t) < \infty, \quad (\alpha_1 \widetilde{u}_r + \beta_1 \widetilde{u})|_{r=l} = 0, \quad (\theta,t) \in \mathbb{R}\times(0,T], \tag{504}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta) \in [0,l]\times\mathbb{R}, \tag{505}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\widetilde{\varphi} : [0,l]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f} : (0,l)\times\mathbb{R}\times(0,T] \to \mathbb{R}$ – задані функції, причому
  $\widetilde{\varphi}(r,\theta+2\pi) = \widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta) \in (0,l]\times\mathbb{R}$,
  $\widetilde{f}(r,\theta+2\pi,t) = \widetilde{f}(r,\theta,t), \quad (r,\theta,t) \in (0,l]\times\mathbb{R}\times[0,T]$.

Увага!!! Далі будемо розглядати випадок, коли задані функції $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ явно від змінної θ не залежать. Тоді від цієї змінної не буде залежати і розв'язок $\widetilde{u}$ отриманої задачі, а отже, задача матиме простіший вигляд. Для її розв'язування використовують ваговий простір $L_2(\rho;0,l)$, де $\rho(r) := r,\ r \in (0,l)$, складений з вимірних функцій $v : (0,l) \to \mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr < \infty$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком і породженою ним нормою:

$$(v,w)_{L_2(\rho;\,0,\,l)} := \int\limits_0^l rv(r)w(r)\,dr, \quad \|v\|_{L_2(\rho;\,0,\,l)} := \Big(\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr\Big)^{1/2}, \quad v,w \in L_2(\rho;0,l).$$

3. Далі розглядаємо ***задачу***, розв'язування якої є метою нашого заняття.

Нехай $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l)\times(0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску* полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = f(r,t), \quad (r,t) \in Q := (0,l)\times(0,T], \tag{506}$$

крайові умови

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{507}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r \in [0,l], \tag{508}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R},\ f : Q \to \mathbb{R}$ – задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (506) — (508), якщо

$$\varphi \in L_2(\rho;0,l), \quad f \in C([0,T];L_2(\rho;0,l)).$$

Схема розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho;0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho;0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v \in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad (\alpha_1 v' + \beta_1 v)|_{r=l} = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}),$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, задача (506) – (508) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{509}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{510}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (506) – (508) – це слабкий розв'язок задачі (509), (510). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (506) – (508), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (509), (510).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(\rho;0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, які складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' - \frac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \tag{511}$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{512}$$

Як уже говорилося раніше, задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (511) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (512), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* (і фактично розв'язуємо в просторі $C^2((0,l])$).

Покажемо, що всі власні значення оператора A є додатними, якщо $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_1 = 0$. Для цього домножимо рівняння (511) на r і врахувавши, що $rw'' + w' = (rw')'$, запишемо:

$$-(rw')' = \lambda r w, \quad r \in (0,l), \tag{513}$$

Нехай w – ненульовий розв'язок задачі (511), (512), тобто власний елемент оператора A. Домножимо рівність (513) на w і проінтегруємо здобуту рівність по проміжку $(0,l)$:

$$-\int_0^l (rw')'w\,dr = \lambda\int_0^l r|w|^2\,dr \quad \Leftrightarrow \quad -rw'w\Big|_0^l + \int_0^l r|w'|^2\,dr = \lambda\int_0^l r|w|^2\,dr.$$

Відмітимо, що $-rw'w\Big|_0^l \geqslant 0$. Справді, якщо або $\alpha_1 = 0$, або $\beta_1 = 0$, то, відповідно, або $w(l) = 0$, або $w'(0) = 0$, а отже, $-lw'(l)w(l) = 0$, а якщо $\alpha_1\beta_1 > 0$, то $-lw'(l)w(l) = \dfrac{l\beta_1}{\alpha_1}|w(l)|^2 \geqslant 0$. Враховуючи сказане, отримуємо

$$\lambda \geqslant \int_0^l r|w'|^2\,dr \Big/ \int_0^l r|w|^2\,dr \geqslant 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w'(r) = 0 \ \ \forall r \in [0,l] \quad \Leftrightarrow \ w(r) = C \ \ \forall r \in [0,l], \ \ \text{де } C \text{ – стала.}$$

На підставі цього і другої з крайових умов (512) отримуємо, що якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\lambda > 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, то $\lambda \geqslant 0$, зокрема, 0 є власним значенням.

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так. Перш за все зауважимо, що коли $\lambda = 0$, то з рівняння (513) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси ще раз випливає, що коли $\beta_1 \neq 0$, то $w \equiv 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (512) має вигляд $w'(l) = 0$, то $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, коли $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (512) має вигляд $w'(l) = 0$, то маємо

$$\lambda_0 = 0, \quad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \ r \in [0,l]. \tag{514}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння (511) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0, +\infty), \tag{515}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{516}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \ \ x = \sqrt{\lambda} r,$$

то

$$w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty). \tag{517}$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0,+\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0,+\infty), \ \ C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі,} \tag{518}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (515) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0,l], \ \ C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі.} \tag{519}$$

Легко знайти, що

$$w' = C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \sqrt{\lambda} Y_0'(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0,l],$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Враховуючи це (тобто, що $\lim\limits_{r\to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$), з першої з крайових умов (512) отримаємо $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов (512) маємо

$$C_1 \big[\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l)\big] = 0, \quad C_1 \neq 0\text{– довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l) = 0\,. \tag{520}$$

Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$\alpha_1 \frac{\mu}{l} J_0'(\mu) + \beta_1 J_0(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{521}$$

Як відомо, рівняння (521) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2, \ k \in \mathbb{N}, \tag{522}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (519))

$$w_k(r) := M_k J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad r \in [0,l], \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{523}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ стала $M_k > 0$ така, що $\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2\, dr = 1$, тобто

$$M_k := 1/\Big(\int\limits_0^l r \big|J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big)\big|^2\, dr\Big)^{1/2}.$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \ \ r \in [0,l], \quad f(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \ \ r \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{524}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l rf(r,t)w_k(r)\,dr, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (506) – (508) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{525}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{526}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (525) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (506) і початкові умови (508) замість u (крайові умови (507) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (524)) і те, що

$$w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k'(r) = -\lambda_k w_k(r), \quad r \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0)w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (526).

Дивлячись на рівності (526), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{527}$$

Очевидно, що рівняння задачі (527) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{528}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (527).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (528). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z' + a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z = 0 \Leftrightarrow \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{a^2\lambda_k t}z = A_k, \quad t \in [0,T], \tag{529}$$

де A_k – довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (528) має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0,T], \tag{530}$$

де A_k – довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (527), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0, T], \tag{531}$$

де A_k – довільна стала. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (527), отримаємо

$$A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \quad \Rightarrow \quad A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0, T], \tag{532}$$

а значить, розв'язок нашої задачі має вигляд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \big[(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t)\big] J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{533}$$

При наших умовах на φ і f ряд (533) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(\rho; 0, l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. □

Зауваження 8.3. *Якщо маємо задачу*

$$\widetilde{u}_t - a^2(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r) = \widetilde{f}(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{534}$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1\widetilde{u}_r + \beta_1\widetilde{u})|_{r=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{535}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r), \quad r \in [0, l], \tag{536}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – *сталі такі, що* $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $\mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$ — *задані функції, причому* $\mu_1 \neq 0$, *тобто друга з крайових умов* (507) *є неоднорідною, то спочатку робимо*

0-ий крок. *Шукаємо функцію* $h \in H^2(Q)$, *яка задовольняє крайову умову* (535), *тобто*

$$(\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{537}$$

Функцію h *можна шукати у вигляді*

$$h(r,t) = a(t)r + b(t), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{538}$$

де $a, b \in H^2(0,T)$ – *функції від змінної* t, *які вибирають такими, щоби виконувалася умова* (537).

Для знаходження a *і* b *шукають похідну* $h_r(r,t) = a(t)$ *і підставляють вирази* h *і* h_r *в умову* (537):

$$\alpha_1 a(t) + \beta_1(la(t) + b(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T].$$

Звідси знаходять a *і* b. *Оскільки маємо одне рівняння, а невідомих функцій – дві, то одна з функцій* a, b *може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нулеві.*

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (534) – (542) *роблять заміну*

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{539}$$

де u – нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2\big[(u+h)_{rr} + \frac{1}{r}(u+h)_r\big] = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+}(u+h) < \infty, \quad (\alpha_1(u+h)_r + \beta_1(u+h))|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) - a^2(h_{rr} + \frac{1}{r}h_r) = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) + \lim_{r\to 0+} h(r,t) < \infty, \, (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} + (\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \varphi(r).$$

Отож, врахувавши (537)*, для нової невідомої функції u отримаємо задачу*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{540}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{541}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r \in [0,l], \tag{542}$$

де $f(r,t) := \widetilde{f}(r,t) - h_t(r,t) + a^2(h_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}h_r(r,t)), \quad \varphi(r) := \widetilde{\varphi}(r) - h(r,0).$

Відмітимо, що коли $\mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (534) – (542) *маємо $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{f} = f$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$) і починаємо з 1-го кроку.*

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 38. *Нехай $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \tag{543}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{544}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l]. \tag{545}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(r,t) := r^2 \cos 2t, \quad (r,t) \in Q, \qquad \varphi(r) := 1, \quad r \in [0,l],$$

і зведемо задачу (543) – (545) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho; 0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho; 0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v \in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad v'(l) = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}), \tag{546}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (543) – (545) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{547}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{548}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (543) – (545), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (547), (548).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' - \dfrac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \\ \lim\limits_{r \to 0+} w(r) < \infty, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{549}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (549) має ненульові розв'язки. Перш за все зауважимо, що у випадку $\lambda = 0$ з рівняння задачі (549) (після множення на $-r$) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси та з крайових умов випливає, що $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, маємо

$$\lambda_0 = 0, \qquad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad r \in [0,l]. \tag{550}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння задачі (549) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0, +\infty),$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{551}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \quad x = \sqrt{\lambda}\, r,$$

то

$$w(r) = y(x), \quad w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \;\; C_1,\; C_2 \; \text{– довільні сталі,} \tag{552}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (549) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l], \;\; C_1,\; C_2 \; \text{– довільні сталі.} \tag{553}$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Тоді з першої з крайових умов задачі (549), зважаючи на те, що $\lim\limits_{r \to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$, отримаємо, що $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов задачі (549) маємо

$$C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{ – довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_1(\sqrt{\lambda} l) = 0 \tag{554}$$

(тут використана рівність $J_0'(x) = -J_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$). Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$J_1(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{555}$$

Як відомо, рівняння (555) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k \to \infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{556}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (553))

$$w_k(r) := C_1 J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big), \quad r \in [0, l],\; C_1 \neq 0 \text{ — довільна стала,} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{557}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо значення C_1 таким, щоби функція w_k була нормованою, тобто виконувалась умова

$$\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2 \, dr \equiv C_1^2 \int\limits_0^l r \big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big)\big|^2 \, dr = 1. \tag{558}$$

Маємо

$$\int\limits_0^l r\big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big)\big|^2\,dr=\Big[x=\frac{\mu_k}{l}r,\quad r=\frac{l}{\mu_n}x,\quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big]=\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx.$$

Далі нам будуть потрібні такі відомі для функцій Бесселя рівності

$$J_0'(x)=-J_1(x),\quad (xJ_1(x))'=xJ_0(x),\quad (x^2J_2(x))'=x^2J_1(x),$$

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x),\quad x\in(0,+\infty).$$

Враховуючи це та використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx=\int\limits_0^{\mu_k}|J_0(x)|^2\,d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}|J_0(x)|^2\Big|_0^{\mu_k}-\int\limits_0^{\mu_k}x^2J_0(x)J_0'(x)\,dx=$$

$$=\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}+\int\limits_0^{\mu_k}xJ_1(x)\,d(xJ_1(x))=\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}+\frac{|xJ_1(x)|^2}{2}\Big|_0^{\mu_k}=\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}.$$

Звідси та з (558) знаходимо

$$C_1^2\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}=1\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{\sqrt{2}}{lJ_0(\mu_k)}=:M_k.$$

Отож, власними функціями є

$$w_k(r):=M_kJ_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big),\quad r\in[0,l],\quad k\in\mathbb{N}. \tag{559}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_kw_k(r),\quad r\in[0,l],\quad f(r,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(r),\quad r\in(0,l),\ t\in[0,T], \tag{560}$$

де

$$\widehat{\varphi}_0:=\int_0^l r\varphi(r)w_0(r)\,dr\;=\frac{\sqrt{2}l}{2},$$

а для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k:=\int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr\;=M_k\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr=$$

$$\Big[\text{заміна}:\quad x=\frac{\mu_k}{l}r,\quad r=\frac{l}{\mu_n}x,\quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big]$$

$$=M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k}xJ_0(x)\,dx=M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k}(xJ_1(x))'\,dx=M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k}=0\,,$$

$$\widehat{f}_0(t):=\int_0^l rf(r,t)w_0(r)\,dr=\frac{\sqrt{2}}{l}\int_0^l r^3\cos 2t\,dr=\frac{\sqrt{2}l^3}{4}\cos 2t=a_0\cos 2t,\quad a_0:=\frac{\sqrt{2}l^3}{4},$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l r f(r,t) w_k(r)\,dr = M_k \int_0^l r\cdot r^2\cos 2t\cdot J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr = \cos 2t\cdot M_k\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr =$$
$$= a_k\cos 2t,\quad t\in[0,T]\,,$$

де

$$a_k := M_k\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr = \Big[\text{заміна}:\quad x=\frac{\mu_k}{l}r,\quad r=\frac{l}{\mu_n}x,\quad dr=\frac{l}{\mu_k}\,dx\Big] =$$
$$= M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^4\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx.$$

Знаходимо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx = \int\limits_0^{\mu_k} x^2 (xJ_1(x))'\,dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2\int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\,dx =$$

$$= -2\int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\,dx = -2\int\limits_0^{\mu_k}(x^2J_2(x))'\,dx = -2x^2J_2(x)\Big|_0^{\mu_k} = -2(\mu_k)^2 J_2(\mu_k) =$$

$$= -2(\mu_k)^2\big(\frac{2}{\mu_k}J_1(\mu_k) - J_0(\mu_k)\big) = 2(\mu_k)^2 J_0(\mu_k).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (543) – (545) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_k(t) w_k(r),\quad (r,t)\in\overline{Q}, \tag{561}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0)=\varphi_k, & \end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{562}$$

Умови (562) на коефіцієнти ряду (561) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (543) і умови (545), врахувавши розвинення φ,ψ і f в ряди Фур'є (див. (560)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k\quad\Rightarrow\quad w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k' = -\lambda_k w_k(r),\ \ r\in[0,l],\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(r),\quad (r,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_k(0) w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(r),\quad r\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (562).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Дивлячись на рівності (562), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (561)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos 2t, \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k \,. \end{cases} \tag{563}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Перш за все розглянемо випадок $k = 0$. Оскільки $\lambda_0 = 0$, то рівняння задачі (563) має вигляд $z' = a_0 \cos 2t$, повний загальний якого має вигляд $z = \frac{a_0}{2} \sin 2t + A_0$, де A_0 — довільна стала. Звідси та з початковою умовою задачі (563) матимемо $z(0) \equiv A_0 = \varphi_0$. Отож, ми отримали

$$\widehat{u}_0(t) := \frac{a_0}{2} \sin 2t + \varphi_0, \quad t \in [0, T]. \tag{564}$$

Тепер розглянемо випадок $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (563). Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times \frac{dt}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k \, dt, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = -a^2\lambda_k \, t + \ln|A_k|, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k \, t}, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} - \text{довільна стала}, \tag{565}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T],$$

де c_k, d_k – сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-2c_k \sin 2t + 2d_k \cos 2t + a^2\lambda_k(2c_k \cos 2t + 2d_k \sin 2t) = a_k \cos 2t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos 2t & : & 2a^2\lambda_k c_k + 2d_k = a_k \\ \sin 2t & : & -2c_k + 2a^2\lambda_k d_k = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 4(a^4\lambda_k^2 + 1),$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 2 \\ 0 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 2a^2\lambda_k a_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & a_k \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}. \tag{566}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,}$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (563). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k \,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (543) – (545) є (див. (561)) сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(\rho; 0, l))$ ряду

$$u(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{l}\Big[\frac{a_0}{2}\sin 2t + \varphi_0\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k\cos 2t + d_k \sin 2t\Big] J_0\Big(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{l}r\Big), \ (r,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, c_k, d_k для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

□

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0,\ h_1 > 0$ – довільно задані і фіксовані числа. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в круговому диску:

1.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = t^2, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 4, \quad r \in [0,l].$$

2.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = e^{2t}, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = r^2 + 2, \quad r \in [0,l],$$

3.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = (r^2 - 1)e^t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (u_r + h_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2(t+1), \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 2, \quad r \in [0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = 2t^3, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) = 5, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = l^2 - r^2, \quad r \in [0,l].$$

6.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2 t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l,t) + h_1\widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 7, \quad r \in [0,l].$$

(Завдання №6 бажано зробити, але не обов'язково)

Практичне заняття № 16

Контрольна робота №5

Варіант № 1

1. $\widetilde{u}_t - 4\widetilde{u}_{xx} = (x+1)t, \quad (x,t) \in Q := (0;4) \times (0;10],$

$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{u}|_{x=4} = 2t, \quad t \in (0;10],$

$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos 3x, \quad x \in [0;4].$

2. $u_t - 9\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = 2r^2 t, \quad (r,t) \in Q := (0;3) \times (0;6],$

$\lim\limits_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r(3,t) = 0, \quad t \in (0;6],$

$u|_{t=0} = 3, \quad r \in [0;3].$

Практичне заняття № 17

Крайові задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області. Метод рядів Фур'є

I. Довідкова інформація

Завдання: Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{567}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{568}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| > 0$, $|\gamma_1| + |\delta_1| > 0$,
  $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$, $\gamma_0\delta_0 \le 0$, $\gamma_1\delta_1 \ge 0$,

- $\omega, \sigma \in L_2(0,q)$, $\varphi, \psi \in L_2(0,p)$, $f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Крайову задачу для рівняння Пуассона далі коротко називатимемо задачею (567), (568).

Зауважимо, що крайові умови (568) задані на межі області Ω, яка є прямокутником, тобто на сторонах прямокутника. Цих умов є чотири (відповідно до сторін прямокутника) і ми будемо розрізняти дві пари крайових умов: перша – умови на вертикальних сторонах, тобто при $x = 0$ та $x = p$ (вони записані в першому рядку формулювання умов (568)), друга – умови на горизонтальних сторонах, тобто при $y = 0$ та $y = q$ (вони записані в другому рядку формулювання умов (568)). Для безпосереднього застосування методу рядів Фур'є потрібно, щоби одна з пар крайових умов була однорідною, тобто або $\omega = 0$ і $\sigma = 0$, або $\varphi = 0$ і $\psi = 0$. Якщо це не так, то потрібно або зробити заміну шуканої функції на іншу, для якої задача буде ідентичною до даної, але з парою однорідних умов, або розбити дану задачу на дві ідентичні з даною, але які мають хоча би одній парі однорідних крайових умов. Детальніше про це скажемо пізніше, а зараз розглянемо задачу (567), (568), коли $\omega = 0, \sigma = 0$, і покажемо як її розв'язувати.

Завдання I: Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{569}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{570}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| > 0$, $|\gamma_1| + |\delta_1| > 0$,
  $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$, $\gamma_0\delta_0 \le 0$, $\gamma_1\delta_1 \ge 0$,

- $\varphi, \psi \in L_2(0,p)$, $f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.

1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(p) + \beta_1 v(p) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{571}$$

а також позначення:

$$[0,q] \ni y \mapsto u(y) := u(x,y),\ x \in [0,p]; \quad (0,q) \ni y \mapsto f(y) := f(x,y),\ x \in (0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,p].$$

Отже, задача (569), (570) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y \in (0,q), \tag{572}$$

$$\gamma_0 u'(0) + \delta_0 u(0) = \varphi, \quad \gamma_1 u'(q) + \delta_1 u(q) = \psi. \tag{573}$$

Сильно узагальнений розв'язок задачі (569), (570) будемо шукати за схемою відшукання слабкого розв'язку задачі (572), (573).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,p)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,p), \tag{574}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(p) + \beta_1 w(p) = 0. \tag{575}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (574), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (575), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2[0,p]$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося раніше. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{576}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p], \tag{577}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad x \in (0,p), \ y \in (0,q), \tag{578}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^p \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^p \psi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{f}_k(y) := \int_0^p f(x,y) w_k(x)\, dx, \ y \in (0,q). \tag{579}$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (569), (570) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \overline{\Omega} = [0,p] \times [0,q], \tag{580}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y) = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{581}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (580) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (569) і другу пару крайових умов (570) замість u (перша пара крайових умов (570) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (577) — (579)) і рівності (576), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, отримаємо рівності (581).

Дивлячись на рівності (581), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 z'(0) + \delta_0 z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 z'(q) + \delta_1 z(q) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{582}$$

Розв'язуємо задачу (582) при довільно вибраному і зафіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (582) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{583}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (582).

Рівняння (583) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - \lambda_k = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (583) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}y}, \quad y \in [0, q], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k y + B_k, \quad y \in [0, q], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (582). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(y) e^{-\sqrt{\lambda_k}y} + b_k(y) e^{\sqrt{\lambda_k}y}, \quad y \in [0, q],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(y) \\ b_k'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(y) \end{pmatrix}, \quad y \in [0, q].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(y)$ і $b_k'(y)$ для довільного фіксованого $y \in [0, q]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(y) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ \widehat{f}_k(y) & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k}y}\widehat{f}_k(y),$$

$$\triangle_{2,k}(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \widehat{f}_k(y) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}y}\widehat{f}_k(y), \quad y \in [0, q].$$

Звідси маємо

$$a_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^y e^{\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad b_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_y^q e^{-\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds,$$

$y \in [0, q]$, а значить, функція $z = \overset{*}{z}(y)$, $y \in [0, q]$, де

$$\overset{*}{z}(y) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^y e^{-\sqrt{\lambda_k}(y-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_y^q e^{\sqrt{\lambda_k}(y-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad y \in [0, q],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (582). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (582) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}(y), \quad y \in [0, q]. \tag{584}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}{}'(y), \quad y \in [0, q]. \tag{585}$$

З крайових умов задачі (582), врахувавши (584), (585), маємо

$$\gamma_0\big(- A_k \sqrt{\lambda_k} + B_k \sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0)\big) + \delta_0\big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0)\big) = \widehat{\varphi}_k,$$

$$\gamma_1\big(- A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}{}'(q)\big) + \delta_1\big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}(q)\big) = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k} A_k + d_{1,k} B_k = P_k \\ c_{2,k} A_k + d_{2,k} B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{586}$$

Підставивши (586) в (584), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, коефіцієнтів ряду (580). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (580) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. □

Завдання II: Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0, p) \times (0, q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{587}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in [0, q], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad x \in (0, p), \end{cases} \tag{588}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| > 0$, $|\gamma_1| + |\delta_1| > 0$,
  $\alpha_0\beta_0 \leq 0$, $\alpha_1\beta_1 \geq 0$, $\gamma_0\delta_0 \leq 0$, $\gamma_1\delta_1 \geq 0$,

- $\omega, \sigma \in L_2(0, q)$, $f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0, q)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, q) \mid \gamma_0 v'(0) + \delta_0 v(0) = 0,\ \gamma_1 v'(q) + \delta_1 v(q) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{589}$$

а також позначення:

$$[0, p] \ni x \mapsto u(x) := u(x, y),\ y \in [0, q]; \quad (0, p) \ni x \mapsto f(x) := f(x, y),\ y \in (0, q);$$

$$\omega := \omega(y), \quad \sigma := \sigma(y), \quad x \in [0, q].$$

Отже, задача (587), (588) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(x), \quad x \in (0, p), \tag{590}$$

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \omega, \quad \alpha_1 u'(p) + \beta_1 u(p) = \sigma. \tag{591}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (587), (588), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (590), (591).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0, q)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\delta_0 \neq 0$, або $\delta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\delta_0 = 0$ і $\delta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0, q)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad y \in (0, q), \tag{592}$$

з крайовими умовами

$$\gamma_0 w'(0) + \delta_0 w(0) = 0, \quad \gamma_1 w'(q) + \delta_1 w(q) = 0. \tag{593}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (592), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (593), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2([0,q])$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{594}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\omega(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(y), \quad \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(y), \quad y \in [0,q], \tag{595}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{596}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\omega}_k := \int_0^q \omega(y) w_k(y)\, dy, \quad \widehat{\sigma}_k := \int_0^q \sigma(y) w_k(y)\, dy, \quad \widehat{f}_k(x) := \int_0^q f(x,y) w_k(y)\, dy,\ x \in (0,p).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (587), (588) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{597}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x) = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\sigma}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{598}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (597) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (587) і першу пару крайових умов (588) замість u (друга пара крайових умов (588) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення ω, σ і f в ряди Фур'є (див. (595), (596)) і рівності (594), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x)\right] w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\omega}_k w_k(y), \quad y \in [0,q],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\sigma}_k w_k(y), \quad y \in [0,q].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (621).

Дивлячись на рівності (621), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 z'(0) + \beta_0 z(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 z'(p) + \beta_1 z(p) = \widehat{\sigma}_k. \end{cases} \tag{599}$$

Розв'язуємо задачу (599) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (599) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{600}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (599).

Рівняння (600) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння: $\mu^2 - \lambda_k = 0$. Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (600) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k x + B_k, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (599). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(x) e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + b_k(x) e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(x) \\ b_k'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0,p].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(x)$ і $b_k'(x)$ для довільного фіксованого $x \in [0,p]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ \widehat{f}_k(x) & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k}x}\widehat{f}_k(x),$$

$$\triangle_{2,k}(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \widehat{f}_k(x) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}x}\widehat{f}_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси маємо

$$a_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad b_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{-\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad x \in [0,p],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}(x),\ x \in [0,p]$, де

$$\overset{*}{z}(x) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{-\sqrt{\lambda_k}(x-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{\sqrt{\lambda_k}(x-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad x \in [0,p],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (599). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (599) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} x} + \overset{*}{z}(x), \quad x \in [0, p]. \tag{601}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} x} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} x} + \overset{*}{z}{}'(x), \quad x \in [0, p]. \tag{602}$$

З крайових умов задачі (599), врахувавши (601), (602), маємо

$$\gamma_0\big(- A_k \sqrt{\lambda_k} + B_k \sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0)\big) + \delta_0\big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0)\big) = \widehat{\omega}_k,$$

$$\gamma_1\big(- A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} p} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} p} + \overset{*}{z}{}'(p)\big) + \delta_1\big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} p} + \overset{*}{z}(p)\big) = \widehat{\sigma}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k} A_k + d_{1,k} B_k = P_k \\ c_{2,k} A_k + d_{2,k} B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{603}$$

Підставивши (603) в (601), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнтів ряду (620). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (620) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. □

Примітка. Якщо в задачі (567), (568) нема жодної пари однорідних умов, тобто котрась із функцій φ або ψ і яка-небудь із функцій ω або σ відмінні від нуля, то можна зробити одне із двох: 1) ввести нову невідому функцію $\widetilde{u}$ за правилом $u = \widetilde{u} + \widetilde{w}$, де $\widetilde{w}$ – задана функція, що задовольняє одну з пар крайових умов (ця функція вибирається цілком аналогічно як на практичному занятті №14); 2) подати розв'язок даної задачі як суму розв'язків подібних задач, але з потрібними для реалізації методу рядів Фур'є крайовими умовами, а точніше, шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (567), (568) у вигляді

$$u = u_1 + u_2,$$

де u_1 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{1,xx} + u_{1,yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{1,x} + \beta_0 u_1)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_{1,x} + \beta_1 u_1)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0, q), \\ (\gamma_0 u_{1,y} + \delta_0 u_1)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_{1,y} + \delta_1 u_1)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0, p], \end{cases}$$

а u_2 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{2,xx} + u_{2,yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{2,x} + \beta_0 u_2)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_{2,x} + \beta_1 u_2)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0, q), \\ (\gamma_0 u_{2,y} + \delta_0 u_2)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_{2,y} + \delta_1 u_2)|_{y=q} = 0, \quad x \in [0, p]. \end{cases}$$

Приклад 39. *Нехай* $p > 0$, $q > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа,* $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. *Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області* $\Omega := (0,p) \times (0,q)$*:*

$$u_{xx} + u_{yy} = x \cos 2y, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{604}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ u|_{y=0} = x + 1, \quad u|_{y=q} = 2, \quad x \in [0,p]. \end{cases} \tag{605}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(x,y) := x \cos 2y, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad \varphi(x) := x + 1, \quad \psi(x) := 2, \quad x \in [0,p],$$

і зведемо задачу (604), (605) до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,p) \mid v(0) = 0, \ v'(p) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{606}$$

а також позначення:

$$[0,q] \ni y \mapsto u(y) := u(x,y), \ x \in [0,p]; \quad (0,q) \ni y \mapsto f(y) := f(x,y), \ x \in (0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,p].$$

Отже, задача (604), (605) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y \in (0,q), \tag{607}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(q) = \psi. \tag{608}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (604) – (605), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (607), (608).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,p), \\ w(0) = 0, \quad w'(p) = 0. \end{cases} \tag{609}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ такі, що задача (609) має ненульові розв'язки в просторі $C^2[0,p]$. Як відомо, ці значення можуть бути тільки серед додатних чисел. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (609), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{610}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння, врахувавши, що $\lambda > 0$:

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \;\; i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (610) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,p], \tag{611}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,p], \tag{612}$$

і підставимо вирази (611) і (612) в крайові умови задачі (609):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(p) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}p + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}p = 0. \end{cases} \tag{613}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (613) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (613) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}p = 0. \tag{614}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}p = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{615}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (611) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,p], \tag{616}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^p |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^p \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^p \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,p)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}x, \quad x \in [0,p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{617}$$

Очевидно, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{618}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p], \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{619}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^p \varphi(x) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p (x+1) \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\, dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \Big((x+1) \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \Big|_0^p - \int\limits_0^p \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\, dx \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - \frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \Big|_0^p \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - (-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \Big) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(1 + (-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^p \psi(x) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p 2 \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\, dx =$$

$$= -2\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \Big|_0^p = 2\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)},$$

$$\widehat{f}_k(y) := \int_0^p f(x,y) w_k(x)\, dx = \int_0^p f(x,y) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^l x \cos 2y \cdot \sin \sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p x \sin \sqrt{\lambda_k} x\, dx = \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^l x \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\, dx =$$

$$= -\cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(x \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \Big|_0^p - \int\limits_0^p \cos \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx \Big) =$$

$$= -\cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(0 - \frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \Big|_0^p \Big) =$$

$$= \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2p}{(-\pi + 2\pi k)} ((-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi + 2\pi k}) = (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{p}} \Big(\frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \Big)^2 \cdot \cos 2y =$$

$$= a_k \cdot \cos 2y, \quad y \in (0,q), \quad \text{де} \quad a_k := (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{p}} \Big(\frac{2p}{-\pi + 2\pi k} \Big)^2.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (604), (605) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{620}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y) = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k(q) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{621}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (620) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (587) і другу пару крайових умов (588) замість u (перша пара крайових умов (588) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (595)) і рівності (618), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(q) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (621).

Дивлячись на рівності (621) і вираз $\widehat{f}_k$, бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = a_k \cos 2y, \quad y \in (0,q), \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z(q) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{622}$$

Розв'яжемо задачу (622) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (622). Оскільки це рівняння є лінійним, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{623}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (622).

Рівняння (623) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\lambda_k.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння задачі (622) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y}, \quad y \in [0,q],$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Знайдемо частковий розв'язок рівняння задачі (622). Оскільки вільний член цього рівняння є квазімногочленом, то використаємо метод неозначених коефіцієнтів. Отож, записуємо проєкт часткового розв'язку рівняння задачі (622) у вигляді

$$z = b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{624}$$

де b_k – поки що неозначений коефіцієнт, значення якого знаходимо за умови, що дана функція є розв'язком нашого рівняння. Для знаходження значення b_k підставимо проєкт розв'язку в рівняння задачі (622):

$$-4b_k \cos 2y - \lambda_k b_k \cos 2y = a_k \cos 2y \quad \Rightarrow \quad -(\lambda_k + 4)b_k = a_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_k = -\frac{a_k}{\lambda_k + 4}.$$

Підставивши знайдене значення b_k у вираз (624), отримаємо частковий розв'язок рівняння задачі (622).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (622) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q]. \tag{625}$$

З крайових умов задачі (622) маємо

$$z(0) = \widehat{\varphi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k + B_k = \widehat{\varphi}_k - b_k,$$

$$z(q) = \widehat{\psi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} = \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Введемо позначення:

$$P_k := \widehat{\varphi}_k - b_k, \quad R_k := \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Отже, значення A_k і B_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_k + B_k = P_k \\ e^{-\omega_k T} A_k + e^{\omega_k T} B_k = R_k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера. Знаходимо

$$\triangle_k := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda_k} q} - e^{-\sqrt{\lambda_k} q} = e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big) \neq 0 \;\; \text{оскільки} \sqrt{\lambda_k} \neq 0,$$

$$\triangle_{1,k} := \begin{vmatrix} P_k & 1 \\ R_k & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k, \quad \triangle_{2,k} := \begin{vmatrix} 1 & P_k \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & R_k \end{vmatrix} = R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k} = \frac{P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}}, \tag{626}$$

$$B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k} = \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{627}$$

На підставі (626) і (627) з (625) отримаємо

$$\widehat{u}_k(y) = \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)} - \frac{a_k}{\lambda_k + 4} \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{628}$$

– коефіцієнт ряду (620).

Отже, сильно узагальнений розв'язок крайової задачі (604), (605) (див. (620)) є сумою збіжного в просторі $L^2(\Omega)$ ряду

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)} - \frac{a_k}{\lambda_k + 4} \cos 2y \Big] \sin \sqrt{\lambda_k} x, \tag{629}$$

$(x,y) \in \overline{\Omega}$, де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, a_k, P_k, R_k для кожних $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. $\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0, p) \times (0, q)$. Знайти сильно узагальнені розв'язки крайових задач для рівняння Пуассона в прямокутній області:

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 2y, \quad u|_{x=p} = y, \quad y \in (0, q), \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad x \in [0, p]; \end{cases}$$

2.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2x \cos 3y, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad y \in (0, q), \\ u_y|_{y=0} = 5 \sin x, \quad u_y|_{y=q} = 2x + 1, \quad x \in [0, p]; \end{cases}$$

3.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2xe^y, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 2y, \quad u|_{x=p} = \sin y, \quad y \in (0, q), \\ u|_{y=0} = 3 \sin x, \quad u_y|_{y=q} = 2, \quad x \in [0, p]; \end{cases}$$

4.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2xy + 1, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (u_x - u)|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad y \in (0, q), \\ u|_{y=0} = 2x + 1, \quad u_y|_{y=q} = \cos x, \quad x \in [0, p]. \end{cases}$$

Практичне заняття № 18

Розв'язування крайових задач для рівняння Лапласа і Пуассона в кругових областях методом рядів Фур'є

I. Довідкова інформація

Завдання №1: Нехай

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < l^2\}$ — круг радіуса $l > 0$,
- $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l^2\}$ — межа Ω — коло радіуса l,
- ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в крузі***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

де

$$g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad p \in C(\partial\Omega), \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\ \alpha_1+\beta_1 > 0.$$

$\square$

Перехід до запису задачі в полярній системі координат

Для розв'язування даної задачі перейдемо в ній до полярної системи координат:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r \in [0,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Покладаючи

$$u(r,\theta) := w(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad f(r,\theta) := g(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \psi(\theta) := p(l\cos\theta, l\sin\theta),$$

отримаємо задачу

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (0,l), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{630}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \quad r \in (0,l], \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{631}$$

$$u(0,\theta) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l,\theta) + \beta_1 u(l,\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{632}$$

Тут і далі під умовою $u(0,\theta) < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі $(0,0)$.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+2\pi) \ \ \forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad f(r,\theta) = f(r,\theta+2\pi) \ \ \forall r \in (0,l),\ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Введемо лінійний простір $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ визначених на $\mathbb{R}$ і неперервних та 2π-періодичних функцій, тобто $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ для будь-яких $\theta \in \mathbb{R}$. На ньому задамо скалярний добуток і відповідну норму за правилами:

$$(v,w) = \int_0^{2\pi} v(\theta)w(\theta)\,d\theta, \quad \|v\| = \Big(\int_0^{2\pi} |v(\theta)|^2\,d\theta\Big)^{1/2}.$$

Так введений простір не є повним і його поповнення позначимо через $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$. Очевидно, що $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ є складений з функцій $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ таких, що $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ для майже всіх $\theta \in \mathbb{R}$.

Схема розв'язування задачі (630) — (632).

1-ий крок. Введемо оператор $A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, поклавши

$$D(A) := H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Позначимо

$$[0, l] \ni r \mapsto u(r) := u(r, \theta), \ \theta \in \mathbb{R}, \quad (0, l) \ni r \mapsto f(r) := f(r, \theta), \ \theta \in \mathbb{R},$$

$$\psi := \psi(\theta), \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Тоді отримаємо задачу

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (0, l), \tag{633}$$

$$u(0) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l) + \beta_1 u(l) = \psi, \tag{634}$$

де умова $u(0) < \infty$ означає, що

$$\varlimsup_{r\to 0+} \|u(r)\|_{L_{2,2\pi}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Задача (633), (634) є узагальненням задачі (630) — (632). Сильно узагальнений розв'язок задачі (630) — (632) будемо шукати як слабкий розв'язок задачі (633), (634), використовуючи метод рядів Фур'є.

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{635}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{636}$$

Покажемо, що $\lambda \geqslant 0$. Справді, якщо функція $w \neq 0$ є розв'язком задачі (635) при деякому значенні λ, то домноживши рівність (636) на w, проінтегруємо отриману рівність по θ від 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} w''(\theta)w(\theta)\, d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\, d\theta = 0.$$

Звідси, інтегруючи частинами та враховуючи 2π-періодичність функції w, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\, d\theta = \lambda \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\, d\theta,$$

звідки

$$\lambda = \int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\, d\theta \Big/ \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\, d\theta \geqslant 0.$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (636) при $\lambda = 0$. Підставимо отриманий вираз повного загального розв'язку в умову періодичності:

$$C_1(\theta + 2\pi) + C_2 = C_1\theta + C_2, \ \ \theta \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0, \ \ C_2 - \text{довільна стала}.$$

Звідси випливає, що нуль є власним значенням, а відповідні йому власні функції мають вигляд $w = C_2$, $r \in (0, l]$. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2 \, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{637}$$

– відповідно власне значення і відповідна йому нормована власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Характеристичне рівняння для рівняння (636) має вигляд

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (636) має вигляд

$$w = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{638}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\big[\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] + C_2\big[\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Звідси, після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$[C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta] \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{639}$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, а це означає, що

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \ \ m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{640}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (640) у рівність (639). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (638) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$, у вигляді

$$w(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{641}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (641) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (641), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зі сказанного вище випливає, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{642}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складеною з власних значень оператора A і для якої

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{643}$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots \ .$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{644}$$

$$f(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{645}$$

$r \in (0,l)$, $\theta \in \mathbb{R}$, де

$$\widehat{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \, d\theta,$$

$$\widehat{\psi}_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad \widehat{\psi}_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin m\theta \, d\theta, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \, d\theta,$$

$$\widehat{f}_{2m}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad \widehat{f}_{2m+1}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin m\theta \, d\theta, \quad r \in (0,l), \ m \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Сильно узагальнений розв'язок задачі (630) — (632) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{646}$$

$r \in (0, l],\ \theta \in \mathbb{R}$, де коефіцієнти ряду (646) визначаються рівностями та умовами

$$\widehat{u}_1(r)'' + \frac{1}{r}\widehat{u}_1(r)' = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0, l), \tag{647}$$

$$\widehat{u}_1(r)(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}_1(r)'(l) + \beta_1 \widehat{u}_1(r)(l) = \widehat{\psi}_1; \tag{648}$$

$$\widehat{u}''_{2m}(r) + \frac{1}{r}\widehat{u}'_{2m}(r) - \frac{m^2}{r^2}\widehat{u}_{2m}(r) = \widehat{f}_{2m}(r), \quad r \in (0, l), \tag{649}$$

$$\widehat{u}_{2m}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m}(l) = \widehat{\psi}_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}; \tag{650}$$

$$\widehat{u}''_{2m+1}(r) + \frac{1}{r}\widehat{u}'_{2m+1}(r) - \frac{m^2}{r^2}\widehat{u}_{2m+1}(r) = \widehat{f}_{2m+1}(r), \quad r \in (0, l), \tag{651}$$

$$\widehat{u}_{2m+1}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m+1}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m+1}(l) = \widehat{\psi}_{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{652}$$

Відмітимо, що рівності і умови (647) – (652) безпосередньо випливають з таких міркувань: формально підставляємо ряд (646) в рівняння (630) та умови(632) і використовуємо рівності (643) та лінійну незалежність системи функцій $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Як легко переконатися, коефіцієнти ряду (646) мають бути (див. (647) – (652)) розв'язками задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0, l), \tag{653}$$

$$z(0) < \infty, \qquad \alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{654}$$

де $k \in \mathbb{N},\ m := [k/2]$. Тут і далі $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$.

Розв'яжемо задачу (653), (654). Очевидно, що, враховуючи лінійність рівняння (653), потрібно знайти вираз повного загального розв'язку цього рівняння (він буде містити дві довільні сталі) і, підставивши цей вираз у крайові умови (654), визначити відповідні сталі.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (653). Для цього помножимо це рівняння на r^2:

$$r^2 z'' + r z' - m^2 z = r^2 \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0, l), \tag{655}$$

Очевидно, що рівняння (655) є рівнянням Ейлера. Зводимо його до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною змінних: $r = e^t,\ r \in [0, +\infty),\ t \in \mathbb{R}$. Для цього запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\mu(\mu - 1) + \mu - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0.$$

Тоді, як випливає з теорії рівнянь Ейлера, для функції $p(t) = z(r)$ при $r = e^t$ отримаємо рівняння

$$p'' - m^2 p = q_k(t), \quad \text{де} \ \ q_k(t) := e^{2t}\widehat{f}_k(e^t). \tag{656}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами і його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння

$$p'' - m^2 p = 0 \tag{657}$$

і часткового розв'язку даного рівняння. Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (657). Оскільки

$$\mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\, m, \ \text{якщо}\ m \in \mathbb{N}, \ \text{і}\ \mu_1 = 0, \ \text{якщо}\ m = 0,$$

то маємо повний загальний розв'язок рівняння (657) у вигляді

$$p = A + Bt, \quad \text{якщо } m = 0,$$

$$p = Ae^{mt} + Be^{-mt}, \quad \text{якщо } m \in \mathbb{N},$$

де A, B – довільні сталі.

Далі шукаємо частковий розв'язок $\overset{*}{p}_k$ рівняння (656) або методом варіації сталих або, якщо вільний член даного рівняння є квазімногочленом, методом неозначених коефіцієнтів.

Тоді повний загальний розв'язок рівняння (656) має вигляд

$$p = A_1 + B_1 t + \overset{*}{p}_1(t), \quad \text{якщо } k = 1,$$

$$p = A_k e^{mt} + B_k e^{-mt} + \overset{*}{p}_k(t), \quad \text{якщо } k > 1,$$

де A_k, B_k – довільні сталі, $k \in \mathbb{N}$.

Звідси, вертаючись до змінної r (зауважимо, що $e^{\lambda t} = (e^t)^\lambda = r^\lambda$) і позначаючи $\overset{*}{z}_k(r) := \overset{*}{p}_k(\ln r),\ r \in (0, l)$, отримаємо

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо } k = 1,$$

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо } k > 1,$$

– повний загальний розв'язок рівняння (653).

Тоді з крайових умов (654) маємо

$$z(0) < \infty \quad \Rightarrow \quad B_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{658}$$

$$\alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) + \beta_1(A_1 + \overset{*}{z}_1(l)) = \widehat{\psi}_1, \quad \alpha_1(A_k m l^{m-1} + \overset{*}{z}{}_k'(l)) + \beta_1(A_k l^m + \overset{*}{z}_k(l)) = \widehat{\psi}_k, \quad k > 1,$$

звідки

$$A_1 = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_1(l)\big]/\beta_1, \quad A_k = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_k'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_k(l)\big]/\big[\alpha_1 m l^{m-1} + \beta_1 l^m\big]. \tag{659}$$

Отже, ми знайшли розв'язок $z = A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0, l]$, задачі (653), (654), звідки

$$\widehat{u}_k(r) := A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0, l],$$

для довільного $k \in \mathbb{N},\ m = [k/2]$.

Тоді для отримання сильно узагальненого розв'язку задачі () – () потрібно підставити отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (646).

Зауваження 1. З вище сказаного очевидно випливає, що коли $\widehat{f}_k = 0$ і $\widehat{\psi}_k = 0$, то розв'язком задачі (653), (654) є тільки функція $z = 0,\ r \in (0, l]$.

Зауваження 2. Відмітимо, що повний загальний розв'язок рівняння (653), яке є лінійним другого порядку, можна знайти безпосередньо, не роблячи заміни змінних. Для цього нагадаємо, що повний загальний розв'язок цього рівняння є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{660}$$

і часткового розв'язку даного неоднорідного рівняння.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (660). Спочатку розглянемо випадок $m \in \mathbb{N}$. Відшукаємо фундаментальну систему розв'язків даного рівняння, тобто будемо шукати два лінійно незалежних його розв'язки. Ці розв'язки спробуємо знайти у вигляді $z = r^\mu$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Для знаходженя значень μ обчислимо $z' = \mu r^{\mu-1}$, $z'' = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}$ і підставимо отримані вирази у рівняння (660):

$$\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + \mu r^{\mu-2} - m^2\mu r^{\mu-2} = 0 \quad \forall r \in (0,l) \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\, m.$$

Отже, функції $z = r^m$, $z = r^{-m}$, $r \in (0,l]$, є лінійно незалежними розв'язками рівняння (660), а тому

$$z = Ar^m + Br^{-m}, \quad r \in (0,l], \quad A, B \text{ – довільні сталі,} \tag{661}$$

– повний загальний розв'язок цього рівняння.

Тепер розглянемо випадок $m = 0$, тобто рівняння

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 0, \quad r \in (0,l). \tag{662}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну: $y := z'$. Отримаємо

$$y' + \frac{1}{r}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dr} = -\frac{y}{r} \;\Big|\times\frac{dr}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r},\ y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y = -\ln r + \ln|B|,\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = B/r, \quad B \text{ – довільна стала.}$$

Звідси маємо $z' = B/r$, а отже,

$$z = A + B\ln r, \quad r \in (0,l], \quad A, B \text{ – довільні сталі,} \tag{663}$$

– повний загальний розв'язок рівняння (662).

Частковий розв'язок рівняння (653) можна шукати методом варіації сталих. Спочатку розглянемо випадок $k > 1$. Дивлячись на (661), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (653):

$$z = a_k(r)r^m + b_k(r)r^{-m}, \quad r \in (0,l], \tag{664}$$

де a_k, b_k – функції, які знаходимо за умови, що функція (664) є розв'язком рівняння (653). Вирази a_k, b_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(r) \\ b_k'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0,l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(r)$ і $b_k'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0,l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -2mr^{-1},$$

$$\triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & r^{-m} \\ \widehat{f}_k(r) & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -r^{-m}\widehat{f}_k(r),$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} r^m & 0 \\ mr^{m-1} & \widehat{f}_k(r) \end{vmatrix} = r^m\widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l].$$

Звідси маємо

$$a_k'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = \frac{1}{2m} r^{-m+1} \widehat{f}_k(r); \quad a_k(r) = -\frac{1}{2m} \int\limits_r^l s^{-m+1} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad r \in (0,l];$$

$$b_k'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = -\frac{1}{2m} r^{m+1} \widehat{f}_k(r); \quad b_k(r) = -\frac{1}{2m} \int\limits_0^r s^{m+1} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad r \in (0,l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_k(r)$, $r \in (0,l]$, де

$$\overset{*}{z}_k(r) := -\frac{1}{2m} r^m \int\limits_r^l s^{-m+1} \widehat{f}_k(s)\, ds - \frac{1}{2m} r^{-m} \int\limits_0^r s^{m+1} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad r \in (0,l],$$

– частковий розв'язок рівняння (653).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (653) у випадку $k > 1$ має вигляд

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0,l], \quad A_k, B_k \text{ – довільні сталі.} \tag{665}$$

Тепер розглянемо випадок $k = 1$ (тоді $m = 0$). Дивлячись на (663), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (653):

$$z = a_1(r) + b_1(r) \ln r, \quad r \in (0,l], \tag{666}$$

де a_1, b_1 – функції, які знаходимо за умови, що функція (666) є розв'язком рівняння (653). Вирази a_1, b_1 знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'(r) \\ b_1'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_1(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0,l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0'(r)$ і $b_0'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0,l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{vmatrix} = r^{-1}, \quad \triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \ln r \\ \widehat{f}_1(r) & r^{-1} \end{vmatrix} = -\widehat{f}_1(r) \ln r,$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{f}_1(r) \end{vmatrix} = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0,l].$$

Звідси маємо

$$a_1'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = -\widehat{f}_1(r) r \ln r; \quad a_0(r) = \int\limits_r^l h(s) s \ln s\, ds;$$

$$b_1'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = r \widehat{f}_1(r); \quad b_1(r) = \int\limits_0^r \widehat{f}_1(r) s\, ds, \quad r \in (0,l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_1(r)$, $r \in (0,l]$, де

$$\overset{*}{z}_1(r) := \int\limits_r^l \widehat{f}_1(s) s \ln s\, ds + \int\limits_0^r \widehat{f}_1(s) s\, ds \cdot \ln r, \quad r \in (0,l],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (653) при $k = 1$.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (653) у випадку $k = 1$ має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_1(r), \qquad r \in (0, l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.} \tag{667}$$

Зауваження 3. Частковий розв'язок рівняння (653), коли

$$\widehat{f_k}(r) = a_k r^{\rho},\ r \in (0, l), \quad \text{де} \ \ \rho \in \mathbb{R},\ \rho \neq \pm m - 2,$$

можна шукати методом неозначених коефіцієнтів у вигляді

$$z = b_k r^{\rho+2}, \quad r \in (0, l],$$

де b_k – неозначений коефіцієнт. Справді, обчисливши $z' = b_k(\rho+2)r^{\rho+1},\ z'' = b_k(\rho+2)(\rho+1)r^{\rho}$ і підставивши ці вирази в рівняння (653), отримаємо

$$b_k(\rho+2)(\rho+1)r^{\rho} + b_k(\rho+2)r^{\rho} - m^2 b_k r^{\rho} = a_k r^{\rho}, \ \ r \in (0, l), \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\rho+2)^2 - m^2)b_k = a_k \quad \Leftrightarrow \quad b_k = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2},$$

тобто частковий розв'язок матиме вигляд

$$z = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2} r^{\rho}, \quad r \in (0, l].$$

Аналогічно як вище наведено розв'язують і такі завдання:

Завдання №2: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > l^2\} \text{ — зовнішність круга радіуса } l>0,$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l^2\} \text{ — межа } \Omega \text{ — коло радіуса } l,$$

$$\nu \text{ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона поза кругом***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

$$w \text{ – обмежена},$$

де

$$p \in C(\partial\Omega), \quad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R},\ \alpha_0\beta_0 \geqslant 0,\ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l,+\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \quad r \in [l,+\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l} = \psi(\theta), \quad u\big|_{r=+\infty} < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Тут і далі під умовою $u\big|_{r=+\infty} < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі нескінченності.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r,\theta) = f(r,\theta+2\pi), \quad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Завдання №3: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, l_1^2 < x^2+y^2 < l_2^2\} \text{ — кільце, обмежене колами радіусів } l_1>0, l_2>0,$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ — межа } \Omega,$$

$$\Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l_1^2\} \text{ — коло радіуса } l_1,$$

$$\Gamma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l_2^2\} \text{ — коло радіуса } l_2,$$

$$\nu \text{ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в кільці***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2,$$

де
$$p_1 \in C(\Gamma_1),\, p_2 \in C(\Gamma_2), \quad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega),$$
$$\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R},\; \alpha_0\beta_0 \leqslant 0,\; |\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\; \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\; |\alpha_1| + |\beta_1| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l_1, l_2), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in [l_1, l_2], \quad \theta \in \mathbb{R},$$
$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l_1} = \varphi(\theta), \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)\big|_{r=l_2} = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi), \quad \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r,\theta) = f(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (l_1, l_2),\; \theta \in \mathbb{R}.$$

$\square$

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад № 1. Знайти у вигляді ряду Фур'є функцію $u(r,\theta)$, $(r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}$, яка є розв'язком ***крайової задачі для рівняння Пуассона в крузі***

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, r^{1/2}, \quad (r,\theta) \in (0,l) \times \mathbb{R}, \tag{668}$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{669}$$

$$u(0,\theta) < \infty, \quad u(l,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{670}$$

де $l > 0$ — задане число.

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор $A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ за правилом

$$D(A) = H^2_{\rm loc}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

та введемо векторні функції

$$[0,l] \ni r \mapsto u(r) := u(r,\theta), \;\; \theta \in \mathbb{R}, \qquad (0,l) \ni r \mapsto f(r) := f(r,\theta), \;\; \theta \in \mathbb{R},$$

$$\psi := \psi(\theta), \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (668) – (670) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (0,l), \tag{671}$$

з крайовими умовами

$$u(0) < \infty, \quad u(l) = \psi. \tag{672}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$Aw_k = \lambda_k w_k,\ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{673}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{674}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \text{ – довільні сталі,}$$

– повний загальний розв'язок рівняння (674) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності та нормування отримуємо, що

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{675}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (674):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (674) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{676}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умов періодичності та нормування отримаємо, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{677}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots\ . \tag{678}$$

3-ій крок. Введемо позначення

$$f(r,\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}r^{1/2}, \quad (r,\theta) \in (0,l) \times \mathbb{R}; \quad \psi(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

і розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{\psi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1}\sin m\theta, \tag{679}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0$, якщо $k \notin \{6, 11\}$, і $\widehat{\psi}_6 = 2,\ \widehat{\psi}_{11} = 5$;

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, r^{1/2} =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_1(r) = 2r^{1/2},\ \widehat{f}_k(r) = 0,\ r \in (0,l),\ k > 1$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (668) – (670) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{680}$$

$(r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (680) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{681}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{682}$$

де $m := [k/2]$ — ціла частина числа $k/2$.

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{f}_k, \widehat{\psi}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_1,\ \widehat{\psi}_6,\ \widehat{\psi}_{11}$, то *тільки* коефіцієнти $\widehat{u}_1,\ \widehat{u}_6,\ \widehat{u}_{11}$ ряду (680) є відмінними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_1$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 2r^{1/2}, \quad r \in (0,l), \tag{683}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 0, \tag{684}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_6$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (0,l), \tag{685}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 2, \tag{686}$$

а коефіцієнт $\widehat{u}_{11}$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{25}{r^2}z = 0, \quad r \in (0,l), \tag{687}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 5. \tag{688}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (683), (684). Повний загальний розв'язок відповідного рівнянню (683) однорідного рівняння має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r, \quad r \in (0,l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_1 r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (683):

$$(5/2)(3/2)b_1 r^{1/2} + 5/2 b_1 r^{1/2} = 2r^{1/2} \;\Big|\; : r^{1/2} \;\Big|\; \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad 10b_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 0,8.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (683) має вигляд $z = 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0,l]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (683) має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0,l].$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_1, B_1:

$$B_1 = 0, \quad A_1 + 0,8l^{5/2} = 0 \ \Rightarrow \ A_1 = -0,8l^{5/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_1(r) = -0,8l^{5/2} + 0,8r^{5/2} \equiv 0,8(r^{5/2} - l^{5/2}), \quad r \in (0,l].$$

Тепер розв'яжемо задачу (685), (686). Повний загальний розв'язок рівняння (685) має вигляд

$$z = A_6 r^3 + B_6 r^{-3}, \quad r \in (0,l], \quad A_6, B_6 - \text{довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (686), отримаємо

$$B_6 = 0, \quad A_6 l^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A_6 = 2l^{-3}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_6(r) = 2l^{-3}r^3, \quad r \in (0,l].$$

Залишилося розв'язати задачу (687), (688). Повний загальний розв'язок рівняння (687) має вигляд

$$z = A_{11}r^5 + B_{11}r^{-5}, \quad r \in (0,l], \quad A_{11},\ B_{11} - \text{довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (686), отримаємо

$$B_{11} = 0, \quad A_{11}l^5 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad A_{11} = 5l^{-5}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_{11}(r) = 5l^{-5}r^5, \quad r \in (0,l].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (680). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (668) – (670):

$$u(r,\theta) = \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}}(r^{5/2} - l^{5/2}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^5 \sin 5\theta, \quad (r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}.$$

Приклад № 2. Знайти у вигляді ряду Фур'є функцію $u(r,\theta)$, $(r,\theta)\in[0,l]\times\mathbb{R}$, яка є розв'язком ***крайової задачі для рівняння Пуассона в зовнішності круга***

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r,\theta),\quad (r,\theta)\in(l,+\infty)\times\mathbb{R}, \tag{689}$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi),\quad \theta\in\mathbb{R}, \tag{690}$$

$$u(l,\theta)=\varphi(\theta),\quad u(+\infty,\theta)<\infty,\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{691}$$

де $l>0$;

$$f(r,\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}r^{-3/2}\cos\theta,\quad r\in(l,+\infty),\ \theta\in\mathbb{R};\quad \varphi(\theta)=\frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A: D(A)\to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A)=H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A),$$

та введемо позначення

$$[l,+\infty)\ni r\mapsto u(r):=u(r,\theta),\ \theta\in\mathbb{R},\quad (l,+\infty)\ni r\mapsto f(r):=f(r,\theta),\ \theta\in\mathbb{R},$$

$$\psi:=\psi(\theta),\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (689) – (691) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u''+\frac{1}{r}u'-\frac{1}{r^2}Au=f(r),\quad r\in(l,+\infty), \tag{692}$$

з крайовими умовами

$$u(l)=\varphi,\quad u(+\infty)<\infty. \tag{693}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k=\lambda_k w_k,\ k\in\mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw=\lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w''=\lambda w,\quad w(\theta)=w(\theta+2\pi),\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{694}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w''+\lambda w=0,\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{695}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda=0$; 2) $\lambda>0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda=0$. Тоді

$$w''=0\quad\Leftrightarrow\quad w'=C_1\quad\Leftrightarrow\quad w=C_1\theta+C_2,\quad \theta\in\mathbb{R},\quad C_1,C_2-\text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (695) при $\lambda=0$.

З умов періодичності і нормування отримуємо, що

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{696}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (695):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (695) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{697}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умов періодичності і нормування отримаємо, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \dots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \dots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{698}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \dots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \dots\ . \tag{699}$$

3-ій крок. Введемо позначення

$$f(r,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{-3/2}\cos\theta, \quad (r,\theta) \in (l,+\infty)\times\mathbb{R}, \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R},$$

і розвинемо ці функції в ряди Фур'є за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 3\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1}\sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{700}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 4$, і $\widehat{\varphi}_7 = 5$;

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi}} r^{-5/2}\cos\theta =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta,$$

$(r,\theta) \in (l,+\infty)\times\mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_2(r) = (3/4)r^{-5/2}$, $\widehat{f}_k(r) = 0$, $r \in (l,+\infty)$, $k \neq 2$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (689) – (691) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(r)w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{701}$$

$(r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (701) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{702}$$

$$z(l) = \widehat{\varphi}_k, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{703}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k,\ \widehat{f}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_2,\ \widehat{\varphi}_7$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_2,\ \widehat{u}_7$ ряду (701) є відміними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_2$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{1}{r^2}z = \frac{3}{4}r^{-5/2}, \quad r \in (l,+\infty), \tag{704}$$

$$z(l) = 0, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{705}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_7$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (l,+\infty), \tag{706}$$

$$z(l) = 5, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{707}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (704), (705). Повний загальний розв'язок рівняння (704) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1}, \quad r \in [l,+\infty), \quad A_2, B_2 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_2 r^{-1/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (704):

$$(-1/2)(-3/2)b_2 r^{-5/2} - 1/2 b_2 r^{-5/2} - b_2 r^{-5/2} = \frac{3}{4}r^{-5/2} \;\Big|\; : r^{-5/2} \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 = -1.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (704) має вигляд $z = -r^{-1/2},\ \ r \in [l,+\infty)$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (704) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1} - r^{-1/2}, \ \ r \in [l,+\infty).$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_2, B_2:

$$A_2 = 0, \quad B_2 l^{-1} - l^{-1/2} = 0 \ \Rightarrow\ B_2 = l^{1/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_2(r) = l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}, \ \ r \in [l,+\infty).$$

Тепер розв'яжемо задачу (706), (707). Повний загальний розв'язок рівняння (706) має вигляд

$$z = A_7 r^3 + B_7 r^{-3}, \quad r \in [l,+\infty), \quad A_7, B_7 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (707), отримаємо

$$z(+\infty) < \infty \quad \Rightarrow \quad A_7 = 0, \quad z(l) = 5 \quad \Rightarrow \quad B_7 l^{-3} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad B_7 = 5l^3.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_7(r) = 5l^3 r^{-3}, \quad r \in [l, +\infty).$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (701). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (689) – (691):

$$u(r,\theta) = \frac{l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{l}{r}\right)^3 \sin 3\theta, \quad r \in [l, +\infty), \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Приклад № 3. Знайти у вигляді ряду Фур'є функцію $u(r,\theta)$, $(r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}$, яка є розв'язком ***крайової задачі для рівняння Пуассона в кільці***:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = \frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2} \cos 2\theta, \quad (r,\theta) \in (l_1, l_2) \times \mathbb{R}, \tag{708}$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in [l_1, l_2], \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{709}$$

$$u(l_1, \theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}} \sin 4\theta, \quad u_r(l_2, \theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{710}$$

де $0 < l_1 < l_2 < +\infty$ — задано.

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо векторні функції

$$[l_1, l_2] \ni r \mapsto u(r) := u(r,\theta), \ \theta \in \mathbb{R}, \quad (l_1, l_2) \ni r \mapsto f(r) := f(r,\theta), \ \theta \in \mathbb{R},$$

$$\psi := \psi(\theta), \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (708) – (710) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r} u' - \frac{1}{r^2} Au = f(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{711}$$

з крайовими умовами

$$u(l_1) = \varphi, \quad u'(l_2) = \psi. \tag{712}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k$, $k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{713}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{714}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (714) при $\lambda = 0$.

З умов періодичності і нормування отримуємо, що

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{715}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (714):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (714) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{716}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

З умов періодичності і нормування отримуємо, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \dots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \dots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{717}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \dots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \dots\ . \tag{718}$$

3-ій крок. Введемо позначення вхідних даних

$$f(r,\theta) = \frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2} \cos 2\theta, \quad r \in (l_1, l_2), \;\theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 4\theta, \quad \psi(\theta) = 0, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

і розвинемо їх в ряди Фур'є за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 4\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1}\sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{719}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 9$, і $\widehat{\varphi}_9 = 7$;

$$0 =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{\psi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1}\sin m\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{720}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0,\ k \in \mathbb{N}$;

$$\frac{9}{\sqrt{\pi}}r^{1/2}\cos 2\theta =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta,$$

$(r,\theta) \in (l_1, l_2) \times \mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_4(r) = 9r^{1/2},\ \widehat{f}_k(r) = 0,\ r \in (l_1, l_2),\ k \neq 4$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (708) – (710) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(r)w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{721}$$

$(r,\theta) \in [l_1, l_2] \times \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (721) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{722}$$

$$z(l_1) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(l_2) = \widehat{\psi}_k, \tag{723}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k, \widehat{\psi}_k, \widehat{f}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_4,\ \widehat{\varphi}_9$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_4,\ \widehat{u}_9$ ряду (721) є відміними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_4$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{4}{r^2}z = 9r^{1/2}, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{724}$$

$$z(l_1) = 0, \quad z'(l_2) = 0, \tag{725}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_9$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{16}{r^2}z = 0, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{726}$$

$$z(l_1) = 7, \quad z'(l_2) = 0. \tag{727}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (724), (725). Повний загальний розв'язок рівняння (724) має вигляд

$$z = A_4r^2 + B_4r^{-2}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_4, B_4 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_4r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (724):

$$(5/2)(3/2)b_4r^{1/2} + 5/2b_4r^{1/2} - 4b_4r^{1/2} = 9r^{1/2}\ \Big|\ : r^{1/2} \times 4 \quad \Rightarrow \quad b_4 = 4.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (724) має вигляд $z = 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (724) має вигляд

$$z = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, отримуємо систему рівнянь для знаходження значень A_4, B_4:

$$A_4 l_1^2 + B_4 l_1^{-2} + 4l_1^{5/2} = 0, \quad 2A_4 l_1 - 2B_4 l_2^{-3} + 10l_2^{3/2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad l_1^2 A_4 + l_1^{-2} B_4 = -4l_1^{5/2}, \quad 2l_1 A_4 - 2l_2^{-3} B_4 = -10l_2^{3/2}.$$

Звідси знаходимо значення A_4, B_4 і записуємо

$$\widehat{u}_4(r) = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Тепер розв'язуємо задачу (726), (727). Повний загальний розв'язок рівняння (726) має вигляд

$$z = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_9, B_9 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (727), отримаємо

$$A_9 l_1^4 + B_9 l_1^{-4} = 7, \quad 4A_9 l_2^3 - 4B_9 l_2^{-5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_1^4 A_9 + l_1^{-4} B_9 = 7, \quad 4l_2^3 A_9 - 4l_2^{-5} B_9 = 0.$$

Звідси знаходимо значення A_9, B_9 і записуємо

$$\widehat{u}_9(r) = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k, \ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (721). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (708) – (710):

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}) \cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(A_9 r^4 + B_9 r^{-4}\big) \sin 4\theta, \quad (r,\theta) \in [l_1, l_2] \times \mathbb{R}.$$

III. Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати крайові задачі для рівнянь еліптичного типу:

1)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=0} < \infty, \quad u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta, \quad r \in (0,l),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

2)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=0} < \infty, \quad u_r\,|_{r=l} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin^3\theta, \quad r \in (0,l),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

3)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=0} < \infty, \quad (u_r + 2u)\,|_{r=l} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 4\theta, \quad r \in (0,l),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

4)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\,; \; u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=l_1} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta, \quad u\,|_{r=l_2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta, \quad r \in (l_1,l_2),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

5)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=l} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta, \quad u\,|_{r=+\infty} < \infty, \qquad r \in (l,+\infty),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

6)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}r^{1/2}\cos 2\theta\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta, \quad u\,|_{r=+\infty} < \infty,$$

$$r \in (l,+\infty),\, \theta \in \mathbb{R}.$$

7)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}r^{1/2}\cos 2\theta\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$$

$$u\,|_{r=0} < \infty, \quad u\,|_{r=l} = \psi(\theta), \quad r \in (0,l),\, \theta \in \mathbb{R},$$

де $\psi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, причому $\psi(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$, якщо $\theta \in [0, 2\pi]$.

Практичне заняття № 20

Контрольна робота №6

1.

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega := (0,p) \times (0,q),$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = \omega(y), \quad u_x|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0,q), \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases}$$

де

В.1: $p = 3, \ q = 2; \ \ f(x,y) := 3e^{2x}y, \quad (x,y) \in \Omega;$
$\varphi(x) := \sin 2x, \ \psi(x) := 5, \ x \in [0,p]; \quad \omega(y) := 0, \ \sigma(y) := 0, \ y \in (0,q).$

В.2: $p = 4, \ q = 3; \ \ f(x,y) := 3xe^{y}, \quad (x,y) \in \Omega;$
$\varphi(x) := 0, \ \psi(x) := 0, \ x \in [0,p]; \quad \omega(y) := 3\cos y, \ \sigma(y) =: y, \ y \in (0,q).$

В.3: $p = 2, \ q = 5; \ \ f(x,y) := 3x\cos 2y, \quad (x,y) \in \Omega;$
$\varphi(x) := 2x, \ \psi(x) := 5x+1, \ x \in [0,p]; \quad \omega(y) := 0, \ \sigma(y) := 0, \ y \in (0,q).$

2.

В. 1: $\Delta u = 3r^{3/2}\cos 3\theta\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$

$u\,|_{r=0} < \infty, \quad u\,|_{r=4} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 2\theta + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sin 6\theta, \quad r \in (0,4),\ \theta \in \mathbb{R}.$

В. 2: $\Delta u = 3r^{7/4}\cos\theta\,; \ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$

$u\,|_{r=3} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta, \quad u\,|_{r=5} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad r \in (3,5),\ \theta \in \mathbb{R}.$

В. 3: $\Delta u = 3r^{-7/4}\,; \quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),$

$u\,|_{r=2} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos 5\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 7\theta, \quad u\,|_{r=+\infty} < \infty, \qquad r \in (2,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$

Практичне заняття № 20

Розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна

I. Довідкова інформація

Нехай $n \geq 2$ — довільне фіксоване натуральне число, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma := \partial\Omega$ — межа області Ω. Вважаємо, що Γ — гладка поверхня і $\nu_x = (\nu_{1,x}, ..., \nu_{n,x})$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ в точці $x \in \Gamma$.

Нагадаємо, що

$$\Delta u := u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i}$$

— дія оператора Лапласа на функцію $u \in C^2(\Omega)$. Також відмітимо, що функцію u називають *гармонічною*, якщо вона є класичним розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{728}$$

тобто u належить простору $C^2(\Omega)$ і $\Delta u(x) = 0$ для кожного $x \in \Omega$.

Задача Діріхле для рівняння Лапласа полягає у знаходженні функції $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, яка є розв'язком рівняння Лапласа (728) і задовольняє умову

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{729}$$

де $\varphi \in C(\Gamma)$ — задана функція.

Зауважимо, що в деяких випадках, коли область Ω є необмеженою, для коректності задачі (728), (729) потрібно накладати певні обмеження на поведінку її розв'язку на нескінченності (умову регулярності).

Фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа називають функцію

$$E_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & \text{якщо } n = 2, \\ \\ \dfrac{1}{\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{якщо } n > 2, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

де ω_n — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$ (зокрема, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$), $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Отож, маємо

$$E_2(x) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

— *фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа* на площині,

$$E_3(x) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа у тривимірному просторі.

Означення 8.1. ***Функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа*** *називають функцію*

$$G_n(x,y) := E_n(x-y) + g_n(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \times \overline{\Omega}, \quad x \neq y, \tag{730}$$

де $g_n(x,y)$, $(x,y) \in \Omega\times\overline{\Omega}$, *така функція, що для кожного* $x \in \Omega$ *функція* $g_n(x,\cdot)$ *належить* $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *і є гармонічною в* Ω, *тобто*

$$\Delta_y g_n(x,y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

та задовольняє крайову умову

$$g_n(x,y) = -E_n(x-y), \quad \textit{коли} \;\; y \in \Gamma,$$

тобто

$$G_n(x,y) = 0, \quad \textit{коли} \;\; y \in \Gamma.$$

Теорема 8.1. *Якщо функція* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *є розв'язком задачі Діріхле (728), (729), то вона має зображення*

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial \nu_y}\, \varphi(y)\, dS_y, \quad x \in \Omega, \tag{731}$$

де G_n *— функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа.*

Підкреслимо, що теорема 8.1 говорить тільки про зображення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, але не гарантує, що по формулі (731) можна знайти цей розв'язок, коли відомо, що $\varphi \in C(\Gamma)$. Однак ми можемо за формулою (731) знайти функцію u, а потім перевірити, чи вона є розв'язком даної задачі.

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Для задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{732}$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \tag{733}$$

де
- $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$ — куля радіуса $R > 0$ з центром в початку координат,
- $\Gamma := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ — сфера радіуса R з центром в початку координат,

потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) знайти інтегральне зображення розв'язку.

Розв'язування.

1) Функцію Гріна шукатимемо у вигляді

$$G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} + g_3(x,y), \quad |x| \leqslant R, \;\; |y| \leqslant R, \;\; x \neq y, \tag{734}$$

де функція g_3 така, що для кожного x, $|x| < R$, маємо

$$\Delta_y g_3(x,y) = 0, \text{ якщо } |y| < R, \quad \text{і} \quad g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}, \text{ якщо } |y| = R. \tag{735}$$

Спробуємо знайти вираз g_3 у випадку $0 < |x| < R$, $|y| \leqslant R$ у вигляді

$$g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{a(x)}{|x^*-y|}, \tag{736}$$

де x^* — точка, яка симетрична до точки x відносно сфери Γ, тобто x^* — лежить на промені з початком в точці 0, який проходить через точку x, і $|x^*||x| = R^2$, тобто

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x, \tag{737}$$

а функція a вибирається за умови, щоби виконувалася крайова умова з (735), тобто

$$\frac{a(x)}{|x^*-y|} = \frac{1}{|x-y|}, \quad 0 < |x| < R, \quad |y| = R. \tag{738}$$

Легко бачити, що

$$\Delta_y \frac{a(x)}{|x^*-y|} = 0, \quad |y| < R, \;\; 0 < |x| < R, \quad \text{для довільної функції } \; a.$$

Очевидно, що із рівності (738) з врахуванням, що $|y| = R$, випливає такий ланцюжок рівностей

$$\begin{gathered} a(x)|x-y| = |x^*-y| \quad \Leftrightarrow \quad a^2(x)|x-y|^2 = |x^*-y|^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)(x-y)\cdot(x-y) = (x^*-y)\cdot(x^*-y) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)[|x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2] = |x^*|^2 - 2x^*\cdot y + |y|^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)[|x|^2 - 2xy + R^2] = |x^*|^2 - 2x^*\cdot y + R^2. \end{gathered} \tag{739}$$

Тут і далі для векторів $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ через $x \cdot y$ позначаємо скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$, тобто $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

На підставі (737) маємо

$$|x^*|^2 - 2x^*\cdot y + R^2 = \frac{R^4}{|x|^2} - 2\frac{R^2}{|x|^2}x\cdot y + R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}[R^2 - 2x\cdot y + |x|^2].$$

Звідси та з (739) одержуємо $a^2(x) = \frac{R^2}{|x|^2}$, тобто

$$a(x) = \frac{R}{|x|}. \tag{740}$$

Отже, з (736) і (740) маємо

$$g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{|x||x^*-y|}, \quad \text{якщо } \; 0 < |x| \leqslant R, \;\; |y| \leqslant R, \quad x \neq y, \quad \text{коли } |x| = |y| = R.$$

Оскільки

$$|x||x^*-y| = |x||x^*|\Big|\frac{x^*}{|x^*|} - \frac{y}{|x^*|}\Big| \to R^2 \quad \text{при} \quad |x| \to 0,$$

то остаточно знаходимо

$$g_3(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{R}{|x||x^*-y|}\,, & \text{якщо } \ 0<|x|\leqslant R, \\ & \qquad |y|\leqslant R,\ x\neq y,\ \text{коли } |x|=|y|=R. \\ -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R}\,, \quad \text{якщо } \ x=0, \end{cases} \tag{741}$$

Отже, шукана функція Гріна має вигляд

$$G_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{1}{|x-y|} - \dfrac{R}{|x||x^*-y|}\Big), & \text{якщо } \ 0<|x|\leqslant R, \\ & \qquad |y|\leqslant R,\ x\neq y. \\ \dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{1}{|y|} - \dfrac{1}{R}\Big), \quad \text{якщо } \ x=0, \end{cases} \tag{742}$$

2) Нехай $0<|x|<R$, $|y|=R$. Знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x|}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|}\Big). \tag{743}$$

Використавши те, що $\nu_y = \frac{1}{R}y \equiv \frac{1}{R}(y_1,y_2,y_3)$ (бо точка y лежить на сфері з центром в початку координат і радіусом $R>0$) і

$$\frac{\partial w(y)}{\partial\nu_y} := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w(y)}{\partial y_i}\cdot\nu_{i,y} = \nabla_y w(y)\cdot\nu_y,$$

де $\nu_y = (\nu_{1,y},\nu_{2,y},\nu_{3,y})$, $\ \nabla_y w(y) = \big(\frac{\partial w(y)}{\partial y_1},\frac{\partial w(y)}{\partial y_2},\frac{\partial w(y)}{\partial y_3}\big)$, $y\in\mathbb{R}^3$, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|} &= \nabla_y\frac{1}{|x-y|}\cdot\nu_y = -\frac{1}{|x-y|^2}\,\nabla_y|x-y|\cdot\frac{1}{R}y = \\ &= \frac{1}{R|x-y|^3}(x-y)\cdot y = \frac{x\cdot y-|y|^2}{R|x-y|^3} = \frac{x\cdot y-R^2}{R|x-y|^3},\end{aligned} \tag{744}$$

бо $|y|=R$.

Аналогічно знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|} = \frac{x^*\cdot y-R^2}{R|x^*-y|^3}, \quad |y|=R. \tag{745}$$

З рівності (738), врахувавши (740), маємо

$$\frac{R}{|x||x^*-y|} = \frac{1}{|x-y|}, \quad |y|=R,$$

звідки

$$\frac{1}{|x^*-y|^3} = \frac{|x|^3}{R^3|x-y|^3}. \tag{746}$$

Врахувавши (737), отримаємо

$$x^*\cdot y-R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}x\cdot y-R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}[x\cdot y-|x|^2]. \tag{747}$$

Підставивши (746) і (747) в (745), здобудемо

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x^*-y|} = \frac{|x|[x\cdot y - |x|^2]}{R^2|x-y|^3}. \tag{748}$$

Тепер на підставі (744) і (748) з (743) отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y}G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi R}\Big(\frac{x\cdot y - R^2}{|x-y|^3} - \frac{x\cdot y-|x|^2}{|x-y|^3}\Big) = \frac{1}{4\pi R}\;\frac{|x|^2-R^2}{|x-y|^3}, \quad 0<|x|<R,\ |y|=R. \tag{749}$$

На підставі (742) легко знайти

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y}G_3(0,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \nu_y}\Big(\frac{1}{|y|}-\frac{1}{R}\Big) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y|^2}\,\nabla|y|\cdot\frac{1}{R}y = -\frac{1}{4\pi R}\frac{1}{|y|^3}\,y\cdot y = -\frac{1}{4\pi R^2}.$$

Звідси та з (749) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y}G_3(0,y) = \lim_{|x|\to 0}\frac{\partial}{\partial \nu_y}G_3(x,y),$$

тобто формулу (749) можна використати і у випадку $x=0$.

Врахувавши формулу

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial \nu_y}G_3(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

для розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в тривимірній області, на підставі (749) отримаємо інтегральне зображення розв'язку задачі (732), (733):

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\varphi(y)\,dS_y, \quad |x|<R.$$

Цю формулу називають *формулою Пуассона* розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.

Приклад 2. Для задачі Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі:

$$\Delta u = 0, \quad x\in\Omega, \tag{750}$$

$$u|_\Gamma = \varphi, \tag{751}$$

де
- $\Omega := \{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_3>0\}$ — півпростір в $\mathbb{R}^3$,
- $\Gamma := \{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_3=0\}$ — площина в $\mathbb{R}^3$,

потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) знайти інтегральне зображення розв'язку $u\in C^2(\Omega)\cap C_b(\overline{\Omega})$. якщо $\varphi\in C_b(\Gamma)$
3) розв'язати дану задачу, коли $\varphi(x)=2,\ x\in\Omega$.
Тут і далі під $C_b(G)$ розуміємо простір неперервних на $G\subset\mathbb{R}^3$ функцій.

Розв'язування.
1) Будемо використовувати взаємно однозначне відображення Γ на $\mathbb{R}^2$, визначене за правилом $(x_1,x_2,0)\to(x_1,x_2)=:x'$, і приймемо, що $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2,0)$. Також для зручності і лаконічності викладу домовимося, що $(x_1,x_2,x_3)=(x',x_3)$ і $(y_1,y_2,y_3)=(y',y_3)$, де, відповідно, $x'=(x_1,x_2)$ та $y'=(y_1,y_2)$.

Функцію Гріна шукатимемо у вигляді

$$G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} + g_3(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega},\ x \neq y, \tag{752}$$

де функція g_3 така, що для кожного $x \in \Omega$ маємо

$$\Delta_y g_3(x,y) = 0, \text{ якщо } \ y \in \Omega, \quad \text{і} \quad g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}, \text{ якщо } \ y \in \Gamma.$$

Запишемо g_3 у вигляді

$$g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\widetilde{x}-y|} \equiv -E_3(\widetilde{x}-y), \quad x,y \in \overline{\Omega},\ y \neq x \in \Gamma, \tag{753}$$

$\widetilde{x} = (x', -x_3)$ — точка $\mathbb{R}^3$, яка симетрична до x відносно координатної площини Γ. Очевидно, що функція g_3 задовольняє потрібні умови.

Отже, зі сказанного вище випливає, що функція Гріна нашої задачі має вигляд

$$G_3(x,y) := \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|\widetilde{x}-y|}\Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{1/2}} - \frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{1/2}}\Big). \tag{754}$$

2) Для знаходження інтегрального зображення розв'язку даної задачі використаємо формулу (731), де $n=3$, а G_3 визначено в (754).

Оскільки $\nu_y = (0,0,-1)$, то

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial \nu_y}\Big|_{\Gamma} = -\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial y_3}\Big|_{y_3=0}, \quad x \in \Omega. \tag{755}$$

Знайдемо при $x \neq y$:

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial y_3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|\widetilde{x}-y|}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\Big(\frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{1/2}} - \frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{1/2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{x_3-y_3}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{3/2}} + \frac{x_3+y_3}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{3/2}}\Big).$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial \nu_y}\Big|_{y_3=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_3}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{3/2}}, \quad x \in \Omega,\ y' \in \mathbb{R}^2. \tag{756}$$

На підставі (731), (755) і (756) отримуємо інтегральне зображення розв'язку нашої задачі

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x_3\varphi(y_1,y_2)}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+x_3^2)^{3/2}}\,dy_1dy_2, \quad x \in \Omega. \tag{757}$$

3) Якщо $\varphi(x') = 2,\ x' \in \mathbb{R}^2$, то на підставі (757) маємо розв'язок у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{2x_3}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{3/2}}\, dy', \quad x \in \Omega. \tag{758}$$

Обчислимо цей розв'язок. Для цього зробимо в підінтегральному виразі заміну змінних:

$$y_1 = x_1 + r\cos\theta,\ y_2 = x_2 + r\sin\theta, \quad 0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{759}$$

Тоді матимемо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{2x_3}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{3/2}}\, dy' = \frac{x_3}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{r\, dr}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}}\, d\theta =$$

$$= x_3 \int\limits_0^{+\infty} \frac{2r\, dr}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}} = -2x_3 \frac{1}{(r^2 + x_3^2)^{1/2}} \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = 2.$$

Отже, розв'язком задачі є функція $u(x) := 2,\ x \in \mathbb{R}^3$.

III. Завдання для самостійної роботи

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

де $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \,|\, -\infty < x_1 < +\infty,\ x_2 > 0\}$, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок, якщо

$$\varphi(x_1) := \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |x_1| \leqslant R, \\ 0, & \text{якщо} \quad |x_1| > R, \end{cases}$$

де $R > 0$ — задане число.
4) знайти розв'язок, якщо

$$\varphi(x_1) := \frac{x_1}{x_1^2 + 1}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \qquad u|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2),\ x_2 > 0, \quad u|_{x_2=0} = \varphi_2(x_1),\ x_1 > 0,$$

де $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0, x_2 > 0\}$, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок даної задачі, якщо $\varphi_1(x_2) = 1$, $x_2 > 0$, і $\varphi_2(x_1) = 0$, $x_1 > 0$.

3. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{x_1^2+x_2^2=R^2} = \varphi_1(x_1, x_2),$$

де $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$, $R > 0$ — задане число, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок при $\varphi(x_1, x_2) = 2$, $x_1^2 + x_2^2 < R^2$.

4. Знайти значення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, заданого в кулі радіуса $R > 0$, у точках діаметра, який з'єднує його північний ($\theta = 0$) і південний ($\theta = \pi$) полюси при заданих крайових умовах:

$$u(r, \psi, \theta)\big|_{r=R} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{якщо} \ \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases} \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

5. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області Ω, де
1) $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, -\infty < x_1 < +\infty,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$ — двогранний кут;
2) $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2,\ x_3 > 0\}$ — півкуля.

Практичне заняття № 21

Інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа

I. Довідкова інформація

1.1. Інтегральне перетворення Фур'є

Спочатку розглянемо ***одновимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Введемо в розгляд функційний простір

$$S = \Big\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \,\Big|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^q |u^{(p)}(x)| < \infty \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Big\}.$$

Визначимо інтегральне перетворення Фур'є за правилом

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

для кожного $u \in S$.

Легко переконатися, що $\mathcal{F}_{x\to\xi} : S \to S$ — бієктивне відображення і обернене відображення визначене за правилом

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Властивості одновимірного перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S$ правильні рівності

$$\widehat{u^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \tag{760}$$

$$\widehat{u}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-ix)^k u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \tag{761}$$

2°. Нехай $u, v \in S$ – довільні, а

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) v(x-y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

— згортка функцій u і v. Припустимо, що

$$\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x), \quad \widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} v(x),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{762}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{763}$$

Тепер розглянемо ***багатовимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Для цього введемо ще такі позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число.

Для будь-яких $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ покладемо $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j$. Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел. Через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (тут $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,n}$) позначаємо мультиіндекс, а через $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – його довжину. Введемо ще такі позначення: $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $D_j := \frac{1}{i}\partial_j \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D := (D_1, \ldots, D_n)$.

Далі вважатимемо, що $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, а також $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} := (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv (-i)^{|\alpha|}\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$,

$D^\alpha u := (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Очевидно, що $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Введемо функційний простір

$$S := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^q |\partial^\alpha u(x)| < \infty \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Визначимо багатовимірні пряме та обернене інтегральні перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_{x \to \xi} : S \to S, \quad \mathcal{F}_{\xi \to x}^{-1} : S \to S$$

за правилами

$$\mathcal{F}_{x \to \xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{764}$$

$$\mathcal{F}_{\xi \to x}^{-1} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{765}$$

Властивості багатовимірного інтегрального перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S_n$ правильна рівність

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{766}$$

$$D^\alpha \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi}((-x)^\alpha u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{767}$$

2°. Нехай $u, v \in S_n$ – довільні, а $\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$, $\widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = (\sqrt{2\pi})^n \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{768}$$

$$\mathcal{F}_{\xi \to x}^{-1}(\widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi)) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{769}$$

Тут і далі $u * v$ – згортка функцій u і v. Нагадаємо, що *згорткою* функцій u і v з S називають функцію $w \in S$, яка визначена за правилом:

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Покажемо, що

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} e^{-b\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{770}$$

де $b > 0$ — стала.

Розв'язування. Маємо

$$\mathcal{F}_{\xi\to x}\, e^{-b\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2} e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2 + i\xi x}\, d\xi. \tag{771}$$

Зауважимо, що

$$-b\xi^2 + i\xi x = -b(\xi^2 - \frac{ix}{b}\xi) = -b((\xi - \frac{ix}{2b})^2 + \frac{x^2}{4b^2}) = -b(\xi - \frac{ix}{2b})^2 - \frac{x^2}{4b}.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2 + i\xi x}\, d\xi = e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b(\xi - \frac{ix}{2b})^2}\, d\xi = \left[\eta = \sqrt{b}(\xi - \frac{ix}{2b}),\ d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{b}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{772}$$

Тут ми використали відому рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}$.

III. Завдання для самостійної роботи

Знайти інтегральне перетворення Фур'є таких функцій:

1. $f(x) := e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R};$

2. $f(x) := \begin{cases} 2x+1, & \text{якщо } x \in [-2;3], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-2;3]; \end{cases}$

3. $f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0;\pi]. \end{cases}$

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачі:

4. Знайти $u \in H^2(\mathbb{R})$ таке, що

$$u'' - 4u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $f(x) := \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-1;1], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-1;1]. \end{cases}$

5. Знайти $u \in H^2(\mathbb{R})$ таке, що

$$u'' - 9u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $f(x) := \begin{cases} 3\cos 2x, & \text{якщо } x \in [-\pi/2;\pi/2], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-\pi/2;\pi/2]. \end{cases}$

Знайти інтегральне перетворення Лапласа таких функцій:

6. $f(t) := e^{-t}, \quad t \in [0,+\infty);$

7. $f(t) := \begin{cases} t, & \text{якщо } t \in [0;5], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0;5]; \end{cases}$

8. $f(t) := \sin 3t, \quad t \in [0,+\infty).$

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

9. $\begin{cases} u'' + u = \cos 2t, & t \in [0,+\infty), \\ u(0) = 1, & u'(0) = 2; \end{cases}$

10. $\begin{cases} u'' - u = e^{2t}, & t \in [0,+\infty), \\ u(0) = 2, & u'(0) = -1. \end{cases}$

Практичне заняття № 22

Розв'язування задач математичної фізики методом інтегрального перетворення Фур'є

I. Довідкова інформація

Розглянемо ***одновимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Нехай

$$S := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \,\Big|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^q |u^{(p)}(x)| < \infty \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

— простір Шварца швидкоспадних функцій.

Визначимо інтегральне перетворення Фур'є за правилом

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

для кожного $u \in S$.

Відомо, що $\mathcal{F} : S \to S$ — бієктивне відображення і обернене відображення визначене за правилом

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi x}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Через $L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ позначимо гільбертів простір, складений з (класів еквівалентних) вимірних функцій $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx < \infty$, зі скалярним добутком і нормою, відповідно,

$$(u, w) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \|u\| := \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx \Big)^{1/2},$$

де $\overline{z}$ — комплексно-спряжене до z число.

Відомо, що оператор $\mathcal{F} : S \to S$ можна розширити до оператора $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, причому для будь-якої функції $u \in L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ маємо $\mathcal{F}u = \widehat{u}$, де $\widehat{u} = \lim\limits_{R\to+\infty} \widehat{u}_R$, $\widehat{u}_R := \int_{-R}^{R} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$, $R > 0$, і границя береться в просторі $L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Властивості одновимірного перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S$ правильні рівності

$$\widehat{u^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \tag{773}$$

$$\widehat{u}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-ix)^k u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \tag{774}$$

2°. Нехай $u, v \in S$ – довільні, а

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) v(x-y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

— згортка функцій u і v. Припустимо, що

$$\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x), \quad \widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{775}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{776}$$

Тепер розглянемо ***багатовимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Для цього введемо ще такі позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Для будь-яких $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ покладемо $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j$.

Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел. Через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (тут $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, n}$) позначаємо мультиіндекс, а через $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – його довжину.

Введемо ще такі позначення:

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n), \quad D_j := \frac{1}{i}\partial_j \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D := (D_1, \ldots, D_n).$$

Далі вважатимемо, що $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, а також $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} := (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv (-i)^{|\alpha|}\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$, $D^\alpha u := (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Очевидно, що $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Введемо функційний простір

$$S := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^q |\partial^\alpha u(x)| < \infty \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Визначимо багатовимірні пряме та обернене інтегральні перетворення Фур'є

$$\mathcal{F} : S \to S, \quad \mathcal{F}^{-1} : S \to S$$

за правилами

$$\mathcal{F}_{x \to \xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{777}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{778}$$

Властивості багатовимірного інтегрального перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S_n$ правильна рівність

$$\widehat{D^\alpha} u(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{779}$$

$$D^\alpha \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}_{x \to \xi}((-x)^\alpha u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{780}$$

2°. Нехай $u, v \in S_n$ – довільні, а $\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$, $\widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x \to \xi} u(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{781}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}(\widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi)) = (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{782}$$

Тут і далі $u * v$ – згортка функцій u і v. Нагадаємо, що *згорткою* функцій u і v з S називають функцію $w \in S$, яка визначена за правилом:

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Приклад 40. *Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності:*

$$u_t - a(t)u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T], \tag{783}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{784}$$

де $\varphi \in S$.

Розв'язування. Подієемо перетворенням Фур'є на рівняння (783) і початкову умову (784), а точніше, помножимо рівності (783), (784) на $e^{-ix\xi}$ і проінтегруємо по x від $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-ix\xi}\,dx - a(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-ix\xi}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{u_t}(\xi,t) - a(t)\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{785}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{u|_{t=0}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{786}$$

Поклавши

$$\widehat{u}(\xi,t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$

отримаємо

$$\widehat{u_t}(\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx\Big)_t = \widehat{u}_t(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{787}$$

$$\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = (i\xi)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t). \tag{788}$$

Отож, для функції $\widehat{u}$ отримуємо задачу

$$\widehat{u}_t(\xi,t) + a(t)\xi^2\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{789}$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{790}$$

Цю задачу можна трактувати як задачу Коші для звичайного диференціального рівняння, а точніше, лінійного рівняння першого порядку, з незалежною змінною t і параметром ξ. Для цього замінимо в (789) символ t на s і домножимо отриману рівність для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $s \in (0,T]$ на $e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}$, де $\widetilde{a}(s) = \int\limits_0^s a(\tau)\,d\tau$, $s \in [0,T]$ (очевидно, що $\widetilde{a}$ – первісна a і $\widetilde{a}(0) = 0$):

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2} + a(s)\xi^2\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2} = \widehat{f}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R},\ s \in (0,T]. \tag{791}$$

Легко бачити, що

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}+a(s)\xi^2\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}=\Big(\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\Big)_s,\quad \xi\in\mathbb{R},\ s\in(0,T].$$

Звідси та з (791) здобуваємо

$$\Big(e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{u}(\xi,s)\Big)_s=e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{f}(\xi,s).$$

Проінтегруємо отриману рівність за s від 0 до t:

$$e^{\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{u}(\xi,t)-\widehat{u}(\xi,0)=\int\limits_0^t e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{f}(\xi,s)\,ds,\quad \xi\in\mathbb{R},\ t\in(0,T].$$

Звідки, врахувавши умову (790) і поділивши на $e^{\widetilde{a}(t)\xi^2}$, отримаємо

$$\widehat{u}(\xi,t)=e^{-\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi)+\int\limits_0^t e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}\widehat{f}(\xi,s),\quad \xi\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]. \tag{792}$$

Для знаходження розв'язку задачі (783), (784) нам потрібно здійснити обернене перетворення Фур'є функції $\widehat{u}$, заданій в (792), тобто

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in(0,T].$$

Тоді

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{-\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi)\Big)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\int\limits_0^t e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}\widehat{f}(\xi,s)\,ds\Big),\quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]. \tag{793}$$

Відмітимо, що коли покласти

$$G(x,t,s):=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le s\le t\le T, \tag{794}$$

то (793) можна записати, використовуючи перетворення Фур'є згортки функцій, у вигляді

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(y)G(x-y,t,0)\,dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y,s)G(x-y,t,s)\,dyds,\quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]. \tag{795}$$

Функцію G називають *функцією Гріна задачі Коші для рівняння (783)*.

Знайдемо вираз функції Гріна G. Для цього покажемо, що

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}}e^{-\frac{x^2}{4[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T]. \tag{796}$$

Справді, зафіксувавши довільно вибрані значення t і s такі, що $0\leqslant s<t\leqslant T$, та ввівши позначення $b:=\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)>0$, отримаємо

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\,e^{-b\xi^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\xi^2}e^{i\xi x}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\xi^2+i\xi x}\,d\xi. \tag{797}$$

Зауважимо, що

$$-b\xi^2 + i\xi x = -b(\xi^2 - \frac{ix}{b}\xi) = -b\big((\xi - \frac{ix}{2b})^2 + \frac{x^2}{4b^2}\big) = -b(\xi - \frac{ix}{2b})^2 - \frac{x^2}{4b}.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2+i\xi x}\,d\xi = e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b(\xi-\frac{ix}{2b})^2}\,d\xi = \Big[\eta = \sqrt{b}(\xi - \frac{ix}{2b}),\ d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{b}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{798}$$

Тут ми використали відому рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\pi}$. Отож, маємо

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\, e^{-b\xi^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}.$$

З (797), врахувавши (798), матимемо (796), а отже, на підставі (794) отримаємо

$$G(x,t,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}} e^{-\frac{x^2}{4[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}}, \quad -\infty < x + \infty,\ 0 \leqslant s < t \leqslant T.$$

Отож, розв'язком задачі (783), (784) є функція

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{2\sqrt{\pi \widetilde{a}(t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\widetilde{a}(t)}}\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} f(y,s) \frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}}\,dyds, \tag{799}$$

$x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T]$.

Приклад 2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{800}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{801}$$

де $T > 0$; $a = \mathrm{const} > 0$; $\Delta = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j}$ – оператор Лапласа; $f \in C(\overline{Q})$, $f(\cdot,t) \in S$ для кожного $t \in [0,T]$; $\varphi \in S$.

Розв'язування. Подіємо перетворенням Фур'є на рівності (800) і (801):

$$\widehat{u_t}(\xi,t) - a^2 \widehat{\Delta u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{802}$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{803}$$

Легко переконатись у правильності таких рівностей

$$\widehat{u_t}(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t) e^{-i(x,\xi)}\,dx = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\,dx\Big)_t = \widehat{u}_t(\xi,t), \tag{804}$$

$$\widehat{\Delta u}(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} e^{-i(x,\xi)}\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j} e^{-i(x,\xi)}\,dx = -\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\Big)\widehat{u}(\xi,t) = -|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t), \tag{805}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]$.

Отже, рівність (802) на підставі (804) і (805) можна записати так:

$$\widehat{u}_t(\xi,t) + a^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T], \tag{806}$$

де

$$\widehat{f}(\xi,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t) e^{-i(x,\xi)}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$$

Звідси та з умови (803) знайдемо вираз $\widehat{u}$. Для цього замінимо в (806) символ t на s і домножимо отриману рівність для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $s \in (0,T]$ на $e^{a^2|\xi|^2 s}$:

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s} + a^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s} = \widehat{f}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ s \in (0,T]. \tag{807}$$

Легко бачити, що

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(\xi)|\xi|^2} + a(s)|\xi|^2\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s} = \Big(\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}\Big)_s, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ s \in (0,T].$$

Звідси та з (807) здобуваємо

$$\Big(e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{u}(\xi,s)\Big)_s = e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{f}(\xi,s).$$

Проінтегруємо отриману рівність за s від 0 до t:

$$e^{a^2|\xi|^2 t}\widehat{u}(\xi,t) - \widehat{u}(\xi,0) = \int\limits_0^t e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{f}(\xi,s)\,ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T].$$

Звідки, врахувавши умову (803) і поділивши на $e^{a^2|\xi|^2 t}$, отримаємо

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}\widehat{\varphi}(\xi) + \int\limits_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}\widehat{f}(\xi,s), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]. \tag{808}$$

Для знаходження розв'язку задачі (800), (801) нам потрібно здійснити обернене перетворення Фур'є функції $\widehat{u}$, заданій в (808), тобто

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in (0,T].$$

Тоді

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{-a^2|\xi|^2 t}\widehat{\varphi}(\xi)\Big) + \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\int\limits_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}\widehat{f}(\xi,s)\Big), \tag{809}$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]$.

Відмітимо, що коли покласти

$$G(x,t,s) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le s \le t \le T, \tag{810}$$

то (809) можна записати, використовуючи перетворення Фур'є згортки функцій, у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y) G(x-y,t,0)\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y,s) G(x-y,t,s)\,dyds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]. \tag{811}$$

Функцію G називають *функцією Гріна задачі Коші для рівняння (800)* і вона може бути записана у вигляді

$$G(x,t,s) := \frac{1}{\big(2a\sqrt{\pi(t-s)}\big)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant s < t \leqslant T. \tag{812}$$

Тоді розв'язок задачі (800) і (801) має вигляд

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\big(2a\sqrt{\pi t}\big)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(2a\sqrt{\pi(t-s)}\big)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\,dyds, \tag{813}$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]$.

III. Завдання для самостійної роботи

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для рівнянь з частинними похідними:

1.

$$u_t - 2tu_{xx} + u_x = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.

$$u_t - 3t^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(x_1,x_2,t), \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3.

$$u_t - 4t^3(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(x_1,x_2,x_3,t), \quad (x_1,x_2,x_3,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2,x_3), \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Практичне заняття № 23

Розв'язування задач математичної фізики методом інтегрального перетворення Лапласа

І. Довідкова інформація

Розглянемо функційний простір $K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ складений з функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ таких, що

1) функція f є кусково-неперервною, тобто на кожному відрізку $[a,b]$ існує не більше, ніж скінченна кількість точок розриву, причому кожна з них є точкою розриву першого роду (t_0 — точка розриву першого роду для функції f, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{t\to t_0-0} f(t) = f(t_0-0) < \infty$ і $\lim\limits_{t\to t_0+0} f(t) = f(t_0+0) < \infty$, причому або в точці t_0 функція f не визначена, або $f(t_0-0)\neq f(t_0+0)$),

2) $f(t)=0$ при $t<0$,

3) існують сталі $M\geqslant 0$ і α, для яких правильна нерівність

$$|f(t)|\leqslant Me^{\alpha t},\quad t\in[0,+\infty). \tag{814}$$

Для функції $f\in K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ визначають інтегральне перетворення Лапласа за правилом:

$$\mathcal{L}_{t\to p}f(t)=\widehat{f}(p):=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt,\quad p:=\eta+i\xi\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,p:=\eta>\alpha, \tag{815}$$

де α — стала з нерівності (814).

Відомо, що функція $\widehat{f}:\Pi_\alpha\to\mathbb{C}$ є аналітичною на півплощині

$$\Pi_\alpha:=\{p\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,p>\alpha\},$$

і обернене перетворення визначене формулою Мелліна:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\widehat{f}(p):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\widehat{f}(p)e^{pt}dp\,,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{816}$$

де $\sigma>\alpha$ — довільне фіксоване число.

Відмітимо, що для функції $g:[0,l]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ($l>0$ — яке-небудь фіксоване число) такої, що для кожного $x\in[0,l]$ функція $g(x,\cdot)$ належить простору $K(\mathbb{R};\mathbb{C})$, причому існують сталі $M\geqslant 0$ і α такі, що

$$|g(x,t)|\leqslant Me^{\alpha t},\quad (x,t)\in[0,l]\times[0,+\infty),$$

можна визначити перетворення Лапласа за змінною t:

$$\mathcal{L}_{t\to p}g(x,t)=\widehat{g}(x,p):=\int\limits_0^{+\infty} g(x,t)e^{-tp}dt,\quad x\in[0,l],\quad p\in\Pi_\alpha.$$

Розглянемо ***метод інтегрального перетворення Лапласа для розв'язування задач математичної фізики***.

Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число. Позначимо $Q := (0, l) \times (0, +\infty)$, $\overline{Q} := [0, l] \times [0, +\infty)$.

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{C}$ таку, що

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{817}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)\Big|_{x=0} = \mu_0(t), & t \in (0, +\infty), \\ (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)\Big|_{x=l} = \mu_1(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases} \tag{818}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \tag{819}$$

де $a > 0$, $f \in C(\overline{Q})$, $\mu_0, \mu_1 \in C([0, +\infty))$, $\varphi, \psi \in C([0, l])$, α_0, β_0, α_1, β_1 — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \geqslant 0$.

Будемо вважати, що існують сталі $M \geqslant 0$ і α такі, що

$$|f(x, t)| + |\mu_0(t)| + |\mu_1(t)| \leqslant M e^{\alpha t}, \quad x \in [0, l], \ t \in [0, +\infty),$$

і шукатимемо розв'язок $u \in C^2(\overline{Q})$ задачі (817) — (819) такий, що

$$|u(x, t)| + |u_t(x, t)| + |u_x(x, t)| + |u_{tt}(x, t)| + |u_{xx}(x, t)| \leqslant M e^{\alpha t}, \quad x \in [0, l], \ t \in [0, +\infty). \tag{820}$$

Для цього припустимо, що такий розв'язок існує і знайдемо його зображення за допомогою перетворення Лапласа. При цьому вважаємо, що

$$\mu_0(t) = \mu_1(t) = f(x, t) = u(x, t) = 0, \quad x \in [0, l], \ t \in (-\infty, 0). \tag{821}$$

Підставимо розв'язок задачі в рівняння (817) і умови (818) та (819) і на отримані рівності подієм перетворенням Лапласа:

$$\mathcal{L}_{t\to p}[u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t)] = \mathcal{L}_{t\to p} f(x, t),$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}[\alpha_0 u_x(0, t) + \beta_0 u(0, t)] = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t),$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}[\alpha_1 u_x(l, t) + \beta_1 u(l, t)] = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t).$$

Позначимо

$$\widehat{u}(x, p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, u(x, t) \equiv \int\limits_0^{+\infty} u(x, t) e^{-tp} dt,$$

$$\widehat{f}(x, p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, f(x, t), \quad \widehat{\mu}_k(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, \mu_k(t), \ \ k = 0, 1.$$

На підставі властивостей перетворення Лапласа маємо

$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{tt}(x, t) = p^2 \widehat{u}(x, p) - p u(x, 0) - u_t(x, 0) = p^2 \widehat{u}(x, p) - p\varphi(x) - \psi(x), \quad x \in [0, l], \ p \in \Pi_\alpha,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{xx}(x, t) = (\mathcal{L}_{t\to p} u(x, t))_{xx} = \widehat{u}_{xx}(x, p), \quad x \in [0, l], \ p \in \Pi_\alpha.$$

Отже, зі сказаного випливає, що $\widehat{u}$ задовольняє рівності

$$p^2 \widehat{u}(x, p) - a^2 \widehat{u}_{xx}(x, p) = \widehat{f}(x, p) + p\varphi(x) + \psi(x), \ \ x \in (0, l), \ p \in \Pi_\alpha, \tag{822}$$

$$\begin{cases} \alpha_0\widehat{u}_x(0,p) + \beta_0\widehat{u}(0,p) = \widehat{\mu}_0(p), \\ \alpha_1\widehat{u}_x(l,p) + \beta_1\widehat{u}(l,p) = \widehat{\mu}_1(p), \end{cases} \quad p \in \Pi_\alpha. \tag{823}$$

Нехай $p \in \Pi_\alpha$ — довільне фіксоване. Позначимо

$$z(x) := \widehat{u}(x,p), \quad h(x) := -\frac{\widehat{f}(x,p) + p\varphi(x) + \psi(x)}{a^2}, \quad x \in [0,l],$$

$$\gamma_0 := \widehat{\mu}_0(p), \quad \gamma_1 := \mu_1(p).$$

Після ділення рівності (822) на $(-a^2)$ стає очевидним, що функція z є розв'язком крайової задачі

$$z'' - \frac{p^2}{a^2}z = h(x), \quad x \in (0,l), \tag{824}$$

$$\alpha_0 z'(0) + \beta_0 z(0) = \gamma_0, \quad \alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \gamma_1. \tag{825}$$

Оскільки (824) є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, то розв'язок задачі (824), (825) шукаємо так: спочатку знаходимо повний загальний розв'язок рівняння (824), він буде містити дві довільні сталі, а потім знайдемо ці сталі, задовольняючи умови (825). Повний загальний розв'язок рівняння (824) є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \frac{p^2}{a^2}z = 0 \tag{826}$$

і часткового розв'язку неоднорідного рівняння (824).

Оскільки рівняння (826) є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку записуємо і розв'язуємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mu_{1,2} = \pm\frac{p}{a}.$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (826) має вигляд

$$z = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x}, \quad x \in [0,l], \;\; C_1, \; C_2 \; \text{— довільні сталі.}$$

Далі знаходимо частковий розв'язок $\overset{*}{z}(x)$, $x \in [0,l]$, рівняння (824) і записуємо повний загальний розв'язок рівняння (824) у вигляді

$$z = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \overset{*}{z}(x), \quad x \in [0,l], \;\; C_1, \; C_2 \; \text{— довільні сталі.} \tag{827}$$

Підставляємо вираз (827) у крайові умови (825) і знаходимо значення C_1 і C_2, при яких формула (827) задає розв'язок задачі (824), (825).

Припустимо, що значення C_1, C_2 знаходяться однозначно. Тоді шукаємо функцію $\widehat{u}(x,p)$, $x \in [0,l]$, $p \in \Pi_\alpha$, і розв'язок задачі (817) — (819) визначаємо за формулою

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\widehat{u}(x,p), \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 41. *Знайти перетворення Лапласа функції*

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \text{якщо } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Маємо

$$\mathcal{L}_{t\to p}f(t) = \widehat{f}(p) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}e^{-tp}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+p)t}dt = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-(1+p)t}dt =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{1+p}e^{-(1+p)t}\Big|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{1+p}[e^{-(1+p)b}-1] = \frac{1}{1+p}.$$

□

Приклад 42. *Розв'язати методом інтегрального перетворення Лапласа мішану задачу для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty), \tag{828}$$

$$u\Big|_{x=0} = \mu_0(t), \quad u\Big|_{x=l} = \mu_1(t), \;\; t \in (0,+\infty), \tag{829}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{830}$$

Тут $l > 0$ — яке-небудь число, $\mu_k \in C([0,+\infty))$ і $|\mu_k(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$, $k = 0,1$, для деяких сталих $M \geqslant 0$, α.

Розв'язування. Припустимо, що розв'язок $u \in C^2(\overline{Q})$ задачі існує, причому виконується умова (820). Підставимо його в рівняння (828) та умови (829) і (830). У результаті отримаємо рівності

$$u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty), \tag{831}$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_1(t), \qquad t \in (0,+\infty), \tag{832}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{833}$$

Подіємо на рівності (831) і (832) перетворенням Лапласа, використавши умови (833):

$$\mathcal{L}_{t\to p}[u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t)] = 0,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}u(0,t) = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t), \;\; \mathcal{L}_{t\to p}u(l,t) = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t).$$

Поклавши тут

$$\widehat{u}(x,p) := \mathcal{L}_{t\to p}u(x,t) \equiv \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-tp}dt, \qquad p \in \Pi_\alpha,$$
$$\widehat{\mu}_0(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t), \;\; \widehat{\mu}_1(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$

та врахувавши, що

$$\mathcal{L}_{t\to p}u_{tt}(x,t) = p^2\widehat{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) = p^2\widehat{u}(x,p), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}u_{xx}(x,t) = (\mathcal{L}_{t\to p}u(x,t))_{xx} = \widehat{u}_{xx}(x,p), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$

отримаємо умови на $\widehat{u}$:

$$p^2\widehat{u}(x,p) - a^2\widehat{u}(x,p) = 0, \qquad x \in [0,l], \quad p \in \Pi_\alpha, \tag{834}$$

$$\widehat{u}(0,p) = \widehat{\mu}_0(p), \quad \widehat{u}(l,p) = \widehat{\mu}_1(p). \tag{835}$$

Нехай $p \in \Pi_\alpha$ — довільне фіксоване. Позначимо

$$z(x) := \widehat{u}(x,p), \quad x \in [0,l], \quad \gamma_0 := \widehat{\mu}_0(p), \quad \gamma_1 := \widehat{\mu}_1(p).$$

Тоді з (834) і (835) (після ділення (834) на $(-a^2)$) випливає, що z є розв'язком крайової задачі

$$z'' - \frac{p^2}{a^2}z = 0, \tag{836}$$

$$z(0) = \gamma_0, \quad z(l) = \gamma_1. \tag{837}$$

Розв'яжемо цю задачу. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (836), яке є лінійним зі сталими коефіцієнтами. Запишемо його характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\mu^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mu_{1,2} = \pm\frac{p}{a}.$$

Звідси маємо повний загальний розв'язок рівняння (836):

$$z = C_1e^{-\frac{p}{a}x} + C_2e^{\frac{p}{a}x}, \;\; x \in [0,l], \;\; C_1, \; C_2 - \text{довільні сталі}. \tag{838}$$

Підставимо вираз (838) в крайові умови (837):

$$\left.\begin{array}{r} z(0) = C_1 + C_2 = \gamma_0 \\ z(l) = C_1e^{-\frac{p}{a}l} + C_2e^{\frac{p}{a}l} = \gamma_1 \end{array}\right\} \tag{839}$$

Систему (839) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & e^{\frac{p}{a}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо її методом Крамера. Для цього знайдемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & e^{\frac{p}{a}l} \end{vmatrix} = e^{\frac{p}{a}l} - e^{-\frac{p}{a}l} = 2\sinh\frac{p}{a}l,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_0 & 1 \\ \gamma_1 & e^{\frac{p}{a}l} \end{vmatrix} = \gamma_0e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_0 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & \gamma_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 - \gamma_0e^{-\frac{p}{a}l},$$

де $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ — синус гіперболічний.

Отож, маємо

$$C_1 = \frac{\gamma_0e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1}{2\sinh\frac{p}{a}l}, \;\; C_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_0e^{-\frac{p}{a}l}}{2\sinh\frac{p}{a}l}.$$

Звідси і (838) отримуємо

$$z = [(\gamma_0 e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1)e^{-\frac{p}{a}x} + (\gamma_1 - \gamma_0 e^{-\frac{p}{a}l})e^{\frac{p}{a}x}](2\sinh\frac{p}{a}l)^{-1} \equiv [\gamma_0(e^{\frac{p}{a}(l-x)} - e^{-\frac{p}{a}(l-x)}) +$$
$$+ \gamma_1(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x})](2\sinh\frac{p}{a}l)^{-1} \equiv \gamma_0 \frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \gamma_1 \frac{\sinh\frac{p}{a}x}{\sinh\frac{p}{a}l},$$
$$x \in [0,l],\ p \in \Pi_\alpha.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}(x,p) = \widehat{\mu}_0(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \widehat{\mu}_1(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}x}{\sinh\frac{p}{a}l}, \quad x \in [0,l], \quad p \in \Pi_\alpha,$$

тобто

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{u}(x,p)e^{pt}dp \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\widehat{\mu}_0(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \widehat{\mu}_1(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}x}{\sinh\frac{p}{a}l}\right]e^{pt}\,dp,$$
$$(x,t) \in \overline{Q},$$

де $\alpha < \sigma$ — яке-небудь фіксоване число. $\square$

III. Вправи для самостійної роботи

Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішані задачі для рівняння коливання струни:

1.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{x=0} = e^t, \quad u_x\Big|_{x=l} = \cos t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l],$$

2.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty),$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=l} = \cos 2t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 3, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l],$$

Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності:

3.

$$u_t - a^2 u_{xx} = 3\sin x, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty),$$
$$u_x\Big|_{x=0} = e^t, \quad u\Big|_{x=l} = t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

Практичне заняття № 24

Контрольна робота №7

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \qquad u|_{x_1=0} = \varphi(x_2), \ x_2 \in \mathbb{R},$$

де $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0\}$, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок, якщо

В. 1: $\varphi(x_2) := \begin{cases} 3x_2 + 1, \text{ коли } \ x_2 \in [-5, 5], \\ 0, \text{ коли } \ x_1 \notin [-5, 5]. \end{cases}$ **В. 2:** $\varphi(x_2) := \begin{cases} 4x_2 + 2, \text{ коли } \ x_2 \in [0, 7], \\ 0, \text{ коли } \ x_1 \notin [0, 7]. \end{cases}$

2. Використовуючи дискретне інтегральне перетворення, розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

якщо
В. 1: $l = 2,\ T = 5,\ a = 2,\ f(x, t) = (3x + 2)\sin t,\ \alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,$
$\varphi(x) = 3x + 2.$
В. 2: $l = 4,\ T = 8,\ a = 3,\ f(x, t) = (2x + 1)e^{2t},\ \alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,$
$\varphi(x) = 4x + 3.$

3. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для рівняння з частинними похідними:

$$u_t - a(t) u_{xx} + b(t) u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

якщо
В. 1: $a(t) = 5t^4,\ b(t) = 2t.$ **В. 2:** $a(t) = 3t^2,\ b(t) = 6t^5.$