МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
до розділу «Випадкові величини» з курсу «Теорія ймовірностей»
для здобувачів вищої освіти спеціальності 112-Статистика
освітньо-професійної програми
«Статистичний аналіз даних»

Львів 2023

Індивідуальні завдання до розділу «Випадкові величини» з курсу «Теорія ймовірностей» для здобувачів вищої освіти спеціальності 112-Статистика освітньо-професійної програми «Статистичний аналіз даних» / Укл.: І. Б. Базилевич, О. А. Ярова. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. – 52 с.

Укладач: Ірина Богданівна Базилевич
Оксана Анатоліївна Ярова

Рецензент: доктор фізико-математичних наук, професор Я.І. Єлейко

Рекомендовано
кафедрою математичної статистики і диференціальних рівнянь,
протокол № 4 від 18.10.2023.

ВАРІАНТ 1

1. Знайти дисперсію випадкової величини ξ – числа появи події A у двох незалежних дослідах, якщо ймовірності появи події A у цих дослідах однакові і відомо, що $M\xi = 1.2$.
2. Дано щільність абсолютно неперервної випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} a(1+x^2), & x \in [-2;2]; \\ 0, & x \notin [-2;2] \end{cases}$.

   Знайти невідому сталу a, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, умовний розподіл ξ при умові, що $\eta = -2$, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	3	4	5
-1	0.1	0.2	0
4	a	0	0.1
7	0	a	0.2

4. Дано функцію розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 3$	$3 < y \le 9$	$9 < y \le 27$	$y > 27$
$x \le -8$	0	0	0	0
$-8 < x \le -4$	0	0.15	0.35	0.35
$-4 < x \le -2$	0	0.35	0.55	0.6
$x > -2$	0	0.45	0.75	1

   Знайти розподіл випадкового вектора.
5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} A, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

   Знайти константу A, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію, коефіцієнт кореляції, умовну щільність ξ при умові $\eta = y$, якщо область D обмежена лініями $x = 4$, $y = 0$, $y = x$.
6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

   а) ξ_1 :

x_i	-1	0	1
p_i	0.2	0.4	0.4

   ξ_2 :

x_i	-1	1
p_i	0.4	0.6

   б) випадкова величина ξ_1 рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$, а випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на відрізку $[0;4]$.
7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкової величини ζ, якщо

   ξ:
$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-4;4], \\ \dfrac{1}{8}, & x \in [-4;4] \end{cases},$$

η:

x_i	-4	0	4
p_i	$1/4$	$1/2$	$1/4$

ζ:

x_i	1	2	3
p_i	$1/4$	$1/2$	$1/4$

8. а) У добру погоду слимак долає 5 м за день, у погану – 3 м. Вважаючи, що обидва стани погоди рівноможливі в кожен день і незалежні в різні дні, оцінити ймовірність того, що за місяць слимак проповзе не менше 140 м.

   б) Перевірити, чи для даної послідовності незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,\ldots$ виконуються умови теореми Чебишова, якщо

   ξ_n:

x_i	-2	0	2
p_i	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1;\, 0.4;\, 0.5)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, стаціонарний розподіл. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 2

.

1. Відомо, що дискретна випадкова величина ξ набуває два значення x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$, причому значення x_1 набувається з ймовірністю $p_1 = 0.2$. Знайти p_2, x_1, x_2, якщо $M\xi = 1.8$, $D\xi = 0.16$.
2. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   Знайти $f_\xi(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi < -0.1\}$, щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi + 2}$.
3. Знайти A, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	3	5	7
-4	0	A	0.2
0	0.2	0	0.2
4	0.1	A	0

4. Дано функцію розподілу випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -3$	$-3 < y \le -1$	$-1 < y \le 2$	$y > 2$
$x \le -2$	0	0	0	0
$-2 < x \le 1$	0	0.2	0.35	0.35
$1 < x \le 3$	0	0.35	0.7	0.75
$x > 3$	0	0.35	0.85	1

Знайти розподіл цього вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} a(x+4y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $x=1$, $x=4$, $y=2$, $y=5$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1,\xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1,\xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	3	4
p_i	0.2	0.8

ξ_2 :

x_i	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.7

б) випадкова величина ξ_1 рівномірно розподілена на відрізку $[0;5]$, а випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на відрізку $[-1;0]$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових векторів ξ,η і твірну функцію для випадкової величини ζ, якщо

ξ : $f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, \ x \in [0;1], \\ 0, \ \ x \notin [0;1], \end{cases}$

η :

x_i	-7	7
p_i	1/2	1/2

ζ :

x_i	0	2	4
p_i	1/3	1/2	1/6

8. а) Дано $M\xi = 1$, $D\xi = 0.04$. Користуючись першою і другою формами нерівності Чебишова оцінити $P\{\xi > 5\}$.

б) Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом розподілу

ξ_n :

x_i	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p_i	1/3	1/3	1/3

Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0; 0; 1)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 3

1. Ймовірність влучення спортсменом у мішень при одному пострілі дорвнює 0.8. Стрільба припиняється при першому невлученні в мішень. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості пострілів, які зробить спортсмен.
2. Щільність випадкової величини ξ дорівнює

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a\cos x, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, \quad x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Знайти параметр a, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ і щільність розподілу випадкової величини $\eta = 2\xi + \frac{\pi}{2}$.

3. Знайти A, розподіл компонент, функцію розподілу, умовний розподіл η при умові, що $\xi = -1$, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), перевірити чи компоненти незалежні, якщо дано його розподіл

$\xi \setminus \eta$	-3	-2	-1
-1	A	0	A
0	0	A	0
1	A	0	A

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -4$	$-4 < y \le -3$	$-3 < y \le 7$	$y > 7$
$x \le -7$	0	0	0	0
$-7 < x \le 3$	0	0	0.1	0.25
$3 < x \le 4$	0	0.05	0.35	0.5
$x > 4$	0	0.25	0.6	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(x^2 + 4y^2\right), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-1	0
p_i	0.7	0.3

ξ_2 :

x_i	3	5
p_i	0.2	0.8

б) випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на відрізку $[-4;0]$,

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2x, \ x \in [0;1], \\ 0, \ \ x \notin [0;1]. \end{cases}$$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$\xi : f_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, \ \ x \le 0, \end{cases}$

η, ζ :

x_i	1	2	3	...	n	...
p_i	$1/2$	$1/4$	$1/8$	...	$1/2^n$	...

8. а) Дано $M\xi = 14$, $D\xi = 0.01$. Оцінити $P\{\xi > 40\}$.

б) Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом розподілу ξ_n :

x_i	$-a$	a
p_i	$\dfrac{n+1}{2n+1}$	$\dfrac{n}{2n+1}$

Чи можна до даної послідовності застосовувати теорему Чебишова?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (1;\ 0;\ 0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 4

1. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного елементу в одному досліді дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості елементів, що відмовили в одному досліді.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ x \in R.$$

Знайти:

а) функцію розподілу $F_\xi(x)$;

б) щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi}$.

3. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	-3	0	3
5	0	0.1	A
10	0.2	A	0.2
15	A	0.2	0

Знайти A, розподіл компонент, функцію розподілу, умовний розподіл η при умові, що $\xi = 2$, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора. Перевірити чи компоненти є незалежними.

4. Дано функцію розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -8$	$-8 < y \le -4$	$-4 < y \le 12$	$y > 12$
$x \le -12$	0	0	0	0
$-12 < x \le 4$	0	0	0.15	0.25
$4 < x \le 8$	0	0.1	0.35	0.65
$x > 8$	0	0.2	0.55	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $y = x$, $y = 0$, $x = 5$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-3	3
p_i	0.5	0.5

ξ_2 :

x_i	-1	1
p_i	0.1	0.9

б) випадкова величина ξ_1 рівномірно розподілена на відрізку $[0;10]$,

$$f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

7. Знайти характеристичну функцію випадкових векторів ξ, η і твірну функцію випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0;1/2]; \\ 0, & x \notin [0;1/2], \end{cases}$$

η:

x_i	-3	-1	1	3
p_i	1/4	1/4	1/4	1/4

ζ:

x_i	0	4	10
p_i	1/3	1/6	1/2

8. а) Дано $M\xi = 100$, $D\xi = 4$. Користуючись першою і другою формами нерівності Чебишова оцінити $P\{\xi > 200\}$.

   б) Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом розподілу $P\{\xi_n = -n\alpha\} = \frac{1}{2n^2}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}$, $P\{\xi_n = n\alpha\} = \frac{1}{2n^2}$. Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0;1;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 5

1. Ймовірність того, що студент правильно відповість на кожне з трьох поставлених питань на іспиті дорівнює 0.8. Оцінку "відмінно" викладач ставить за 3 правильні відповіді, "добре" – за дві, "задовільно" – за одну, „незадовільно" – за три неправильні відповіді. Нехай випадкова величина ξ – це оцінка, яку отримав студент на іспиті. Знайти $M\xi$, $F_\xi(x)$, $D\xi$, $P\{\xi \geq 4\}$.

2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0,2); \\ 0, & x \notin (0,2). \end{cases}$$

   Знайти константу a, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi > 1/2\}$, щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

3. Знайти A, розподіл компонент, функцію розподілу, умовний розподіл ξ при умові, що $\eta = 10$, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), перевірити чи компоненти є незалежними, якщо

$\xi \setminus \eta$	8	9	10
5	0	0.2	A
6	A	0	0.25
7	0	0.15	0

4. Дано фунцію розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \leq -8$	$-8 < y \leq -5$	$-5 < y \leq 12$	$y > 12$
$x \leq -11$	0	0	0	0
$-11 < x \leq 5$	0	0.05	0.25	0.3
$5 < x \leq 8$	0	0.25	0.45	0.7
$x > 8$	0	0.3	0.7	1

Знайти його розподіл.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=\begin{cases} a, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $x=-y$, $y=x$, $y=1$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha=\max(\xi_1,\xi_2)$, $\beta=\min(\xi_1,\xi_2)$, $\eta=\xi_1+\xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	0	3
p_i	0.7	0.3

ξ_2 :

x_i	-2	0
p_i	0.1	0.9

б) випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на відрізку $[-5;0]$,

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{9}, & x\in[0;3],\\ 0, & x\notin[0;3].\end{cases}$$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкової величини ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(1-x), & x\in[-1;1],\\ 0, & x\notin[-1;1],\end{cases},$$

η, ζ :

x_i	0	2	4
p_i	1/4	1/2	1/4

8. а) Прилад складається із десяти незалежно порацюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0.05. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів і середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов за час t виявиться:

i) не меншою 2;

ii) меншою, ніж 2.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n=1,2,\ldots$. Відомо, що

$$f_{\xi_n}(x)=\begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, & x\in\left[-\dfrac{n}{n+1};\dfrac{n}{n+1}\right],\\ 0, & x\notin\left[-\dfrac{n}{n+1};\dfrac{n}{n+1}\right].\end{cases}$$

Чи можна для цієї послідовності застосовувати теорему Чебишова?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8\\ 0.4 & 0.1 & 0.5\\ 0.6 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$ і вектор розподілу початкових ймовірностей $p^{(0)}=(0;1;0)$. Знайти

матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 6

1. Спортсмен, маючи 4 патрони, стріляє до першого влучення в ціль. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0.6. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості використаних спортсменом патронів.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ
$$f_\xi(x) = \begin{cases} Ax^2, & x \in (-1,1); \\ 0, & x \notin (-1,1). \end{cases}$$
Знайти константу A, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ і щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{\xi}{2} + 1$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	0	2	4
-4	a	0	0.2
-2	0.1	a	0
0	0.2	0.1	0.1

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -3$	$3 < y \le 4$	$4 < y \le 7$	$y > 7$
$x \le -7$	0	0	0	0
$-7 < x \le -4$	0	1/4	3/8	3/8
$-4 < x \le 3$	0	1/4	1/2	3/4
$x > 3$	0	3/8	5/8	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)
$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} a, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$
Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $y = 0$, $y = x + 1$, $y = 1 - x$.
6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-4	-2
p_i	1/4	3/4

ξ_2 :

x_i	2	4
p_i	7/8	1/8

б) випадкові величини ξ_1, ξ_2 мають показниковий розподіл з параметрами $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ відповідно.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо ξ: $f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$,

η:

x_i	-30	30
p_i	$1/4$	$3/4$

ζ:

x_i	0	10	20
p_i	$1/2$	$1/4$	$1/4$

8. а) В освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде ввімкнута, дорівнює 0.8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнутих ламп і математичним сподіванням за час T виявиться:
i) меншою за 3;
ii) не меншою, ніж 3.
б) Відомо, що випадкові величини $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ є незалежними і мають розподіл Коші. Чи можна до даної послідовності застосувати теорему Хінчина?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.5; 0.1; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 7

1. Задано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ 0.3, & -4 < x \le 1 \\ 0.7, & 1 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ .

2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A \sin x, & x \in (0, \pi); \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Знайти константу A, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ і щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi}$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	2	3	4
4	0	a	0
6	0.1	0	a
8	0	0.3	0.2

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -4$	$-4 < y \le -1$	$-1 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le -1$	0	0	0.25	0.3
$-1 < x \le 3$	0	0.15	0.65	0.85
$x > 3$	0	0.25	0.8	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(3x^2 - 2y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;1]$, $y \in [-1;0]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	10	20
p_i	0.3	0.7

ξ_2 :

x_i	-10	30
p_i	0.7	0.3

б) випадкова величина ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$, а випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на $[-3; 4]$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, \quad x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases},$$

η:

x_i	-3	0	3
p_i	1/3	1/2	1/6

ζ:

x_i	4	8
p_i	1/4	3/4

8. а) Дисперсія кожної із 1800 незалежних випадкових величин не перевищує 4. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищує за абсолютною величиною 0.2.

   б) Перевірити, чи виконуються умови теореми Чебишова для послідовності незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданих розподілом

   ξ_n :

x_i	$-n$	0	n
p_i	$\frac{1}{2n\sqrt{n}}$	$1-\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2n\sqrt{n}}$

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.2; 0.5; 0.3)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 8

1. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ, яка може набувати два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0.8$ та x_2 ($x_1 < x_2$). Відомо, що $M\xi = 3.4$ і $D\xi = 7.84$.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

   Знайти константу C, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ і щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
1	a	0.1	a
3	0.1	a	0.1
5	a	0.2	a

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \leq -4$	$-4 < y \leq 1$	$1 < y \leq 3$	$y > 3$
$x \leq -4$	0	0	0	0
$-4 < x \leq 1$	0	0.2	0.3	0.3
$1 < x \leq 3$	0	0.4	0.7	0.75
$x > 3$	0	0.4	0.75	1

   Знайти розподіл цього випадкового вектора.
5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=\begin{cases} a\left(3y^2-4x\right), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta=y$ випадкового вектора (ξ,η), якщо область D визначається таким чином: $x\in[-1;0]$, $y\in[-1;1]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha=\max(\xi_1,\xi_2)$, $\beta=\min(\xi_1,\xi_2)$, $\eta=\xi_1+\xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	1	2
p_i	1/9	8/9

ξ_2 :

x_i	-2	-1
p_i	2/3	1/3

б) випадкова величина ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda=4$, а випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на $[-10;-3]$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ,η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, \; x\in[0,2],\\ 0, \; x\notin[0,2],\end{cases}$$

η:

x_i	-8	0	8
p_i	1/6	2/3	1/6

ζ :

x_i	0	1	5
p_i	1/6	1/3	1/2

8. а) Перевірити правило “трьох сиґм” випадкової величини ξ, рівномірно розподіленої на $[0;3]$.

б) Випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ незалежні і мають показниковий розподіл з параметром $\lambda_n=n$ відповідно. Чи виконуються для даної послідовності умови теореми Чебишова?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8\\ 0.4 & 0.1 & 0.5\\ 0.6 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$ і вектор розподілу початкових ймовірностей $p^{(0)}=(0;1;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 9

1. У студентській групі навчається 25 осіб серед яких 5 відмінників. Навмання по списку вибрали 3 особи. Знайти розподіл випадкової величини ξ – кількості відмінників серед трьох вибраних студентів.
2. У крузі радіуса R навмання вибрано точку. Випадкова величина ξ – це відстань від точки до центра круга. Знайти щільність розподілу $f_{\xi}(x)$, функцію розподілу $F_{\xi}(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^3$.
3. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	0	1	5
0	0	0.1	a
1	0.2	0.1	0.2
5	a	0.1	0

Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції даного випадкового вектора (ξ, η). Перевірити чи компоненти є незалежними.

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \le -5$	$-5 < y \le 1$	$1 < y \le 4$	$y > 4$
$x \le -5$	0	0	0	0
$-5 < x \le 1$	0	0.1	0.15	0.4
$1 < x \le 4$	0	0.25	0.55	0.8
$x > 4$	0	0.4	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(4xy + y^2\right), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;1]$, $y \in [0;2]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-10	0	10
p_i	1/3	1/3	1/3

ξ_2 :

x_i	-10	0	10
p_i	1/4	1/2	1/4

б) випадкові величини ξ_1, ξ_2 мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 3$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x \in [-2,2], \\ 0, x \notin [-2,2], \end{cases}$

ζ, η :

x_i	3	6	9
p_i	1/2	1/3	1/6

8. а) Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a, σ^2. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P\{|\xi - a| \geq 2\sigma\}$. Порівняти з точним значенням цієї ймовірності.

   б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають розподіл

   ξ_n :

x_i	$-n$	0	n
p_i	$\frac{1}{2n\sqrt{n}}$	$1-\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2n\sqrt{n}}$

   Чи можна, користуючись безпосередньо означенням, стверджувати, що для цієї послідовності виконується закон великих чисел?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.5;0.1;0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 10

1. При підкиданні симетричної монети гравець отримує одне очко, якщо випаде герб, і не отримує очок, якщо випадає решка. Знайти закон розподілу математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості набраних гравцем очок при двох підкиданнях.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A\ln x, & x \in (1,e); \\ 0, & x \notin (1,e). \end{cases}$$

   Знайти константу A, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та щільність розподілу випадкової величини $\eta = e^{-\xi}$.

3. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	-4	-2	0
-4	0	0.2	0.1
-2	0.05	a	0.15
0	0.15	0.05	a

   Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції даного випадкового вектора (ξ, η). Перевірити чи компоненти є незалежними.

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -4$	$-4 < y \le 2$	$2 < y \le 4$	$y > 4$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le 2$	0	0	0.1	0.3
$2 < x \le 4$	0	0.1	0.4	0.7
$x > 4$	0	0.3	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(4x^3 + 3y^2\right), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	0	10	20
p_i	0.2	0.3	0.5

ξ_2 :

x_i	-20	-10	0
p_i	0.5	0.3	0.2

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2x, \; x \in [0;1], \\ 0, \; x \notin [0;1]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо:

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, \; x \in [1,10], \\ 0, \; x \notin [1,10], \end{cases}$$

ζ, η :

x_i	0	1	2	…	n	…
p_i	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e \cdot 2!}$	…	$\frac{1}{e \cdot n!}$	…

(Зауваження: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$).

8. а) Дано $M\xi = -4$, $D\xi = 1$. Користуючись першою і другою формами нерівності Чебишова оцінити $P\{\xi < -10\}$.

б) Дано послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, які є незалежними і

$$f_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [0;1], \\ 0, \; x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0;0;1)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 11

1. Два спортсмени незалежно один від одного влучають один раз в мішень. Ймовірність влучення для першого спортсмена дорівнює p_1, для другого – p_2. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – сумарної кількості влучення спортсменів.
2. Дано щільність розподілу вв ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in (0,4); \\ 0, & x \notin (0,4). \end{cases}$ Знайти A; функцію розподілу; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η). Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	3	6	9
10	0.15	0	a
15	a	0.05	0
20	0	0.1	0.1

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -8$	$-8 < y \le -4$	$-4 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le -8$	0	0	0	0
$-8 < x \le -4$	0	0	0.05	0.25
$-4 < x \le 1$	0	0.2	0.4	0.6
$x > 1$	0	0.35	0.8	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(2x - 9y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається: $x \in [0;1]$, $y \in [-2;0]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2 :

x_i	0	1
p_i	1/3	2/3

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0,\ \ x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$

η :

x_i	-4	4
p_i	1/2	1/2

ζ :

x_i	1	8	12
p_i	1/9	1/6	13/18

8. а) Математичне сподівання випадкової величини ξ дорівнює 1, а дисперсія – 0.04. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити знизу ймовірності подій $A = \{0.5 < \xi < 1.5\}$ $B = \{0.75 < \xi < 1.35\}$, $B = \{\xi < 2\}$.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданих розподілом

ξ_n :

x_i	-3	0	3
p_i	$\dfrac{n}{n^3+1}$	$1 - \dfrac{2n}{n^3+1}$	$\dfrac{n}{n^3+1}$

Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.5; 0.1; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 12

1. Тричі підкидають правильну монету. Знайти функцію розподілу математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості випадань „герба".
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A(x^2 + 2x), x \in (0;1), \\ 0, \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Знайти константу A; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = 2\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	1	3	7
4	0.1	0.1	a
5	0.2	0.15	0
6	a	0	0.55

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -1$	$-1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le -2$	0	0	0	0
$-2 < x \le 3$	0	0.1	0.2	0.4
$3 < x \le 10$	0	0.35	0.45	0.7
$x > 10$	0	0.55	0.75	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(4x^3 - 8y), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0; 2]$, $y \in [-1; 0]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2 :

x_i	-3	0	3
p_i	1/7	5/7	1/7

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{25}, x \in [0; 5], \\ 0, \quad x \notin [0; 5] \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7}, x \in [0; 7], \\ 0, x \notin [0; 7]. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0;1], \\ 3x^2, x \in [0;1], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	1	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

8. а) ξ – кількість сонячних днів у році для даної місцевості є випадковою величиною із математичним сподіванням 100 днів і середнім квадратичним відхиленням (дисперсією) 20 днів. Оцінити зверху ймовірності подій $A = \{\xi \ge 150\}$, $B = \{\xi \ge 200\}$.

б) Перевірити, чи для даної послідовності незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданих розподілом ξ_n :

x_i	$-\ln(n+1)$	$\ln(n+1)$	0
p_i	$\frac{1}{2n^4}$	$\frac{1}{2n^4}$	$1-\frac{1}{n^4}$

виконуються умови теореми Чебишова?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0; 0.1; 0.9)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 13

1. Три спортсмени влучають в мішень по одному разу незалежно один від одного. Ймовірність влучення для першого спортсмена дорівнює 0.6, для другого – 0.7, для третього – 0.8. Знайти функцію розподілу математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – сумарної кількості влучень трьох спортсменів.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A(1-x^2), x \in (-1;0), \\ \quad 0, \quad x \notin (-1;0). \end{cases}$$

   Знайти константу A; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	4	6	10
10	0.05	0.15	a
20	0	0.1	0.15
30	a	0.05	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -2$	$-2 < y \le 5$	$5 < y \le 7$	$y > 7$
$x \le -2$	0	0	0	0
$-2 < x \le 5$	0	0.05	0.2	0.2
$5 < x \le 7$	0	0.1	0.5	0.6
$x > 7$	0	0.2	0.7	1

   Знайти розподіл цього випадкового вектора.
5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2), (x, y) \in D, \\ \quad 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

   Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена так: $x \in [-3;3]$, $y \in [-3;3]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	0	3
p_i	5/12	7/12

ξ_2 :

x_i	-2	0
p_i	11/12	1/12

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} -2x, \; x \in [-1;0], \\ 0, \; x \notin [-1;0] \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [0;1], \\ 0, \; x \notin [0;1]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

ξ : $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, \; x \in [0;1], \\ 0, \; x \notin [0;1], \end{cases}$

η, ζ :

x_i	3	5	8
p_i	1/2	1/4	1/4

8. а) Оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ, яка рівномірно розподілена на $[a;b]$, відхиляється від $M\xi$ не більше, ніж на $2\sigma_\xi$.

б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають рівномірний розподіл на відрізку $[-5;5]$. Чи можна для цієї послідовності застосовувати теорему Хінчина?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (1;0;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 14

1. Є n заготовок для певної деталі. Ймовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює p. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини ξ – кількості заготовок, що залишаються після виготовлення першої стандартної деталі, якщо $\xi = 0$ у випадку, коли всі деталі виявляться нестандартними.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{\ln 2}\ln(x^2+1), & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi}$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
4	0.1	0	a
8	0	0.05	0.2
12	0.15	a	0.1

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -4$	$-4 < y \le 4$	$4 < y \le 5$	$y > 5$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le 4$	0	$1/14$	$1/14$	$3/14$
$4 < x \le 5$	0	$3/14$	$2/7$	$9/14$
$x > 5$	0	$3/14$	$3/7$	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(2x^2 + 4y^2), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [-3;0]$, $y \in [0;3]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-1	0	1
p_i	$2/9$	$5/9$	$2/9$

ξ_2 :

x_i	0	1
p_i	$4/9$	$5/9$

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2x, x \in [0;1], \\ 0, \ x \notin [0;1] \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, \ x \le 0. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 4, x \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \\ 0, x \notin \left[0; \frac{1}{4}\right], \end{cases}$$

η :

x_i	-8	-4	0
p_i	$1/5$	$2/5$	$2/5$

ζ :

x_i	0	4	7
p_i	0.2	0.3	0.5

8. а) Середня швидкість вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год. Оцінити швидкість вітру на цій висоті з ймовірністю, не меншою за 0.9, якщо $D\xi = 4.5$ км/год.

   б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають нормальний розподіл $N(0;1)$. Чи можна для цієї послідовності застосовувати теорему Хінчина?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0;1;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 15

1. У партії з 10 деталей є три нестандартні. Навмання вибрано три деталі. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості нестандартних деталей серед вибраних двох.
2. Відомо, що

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3F_\xi(x)}{x}, x \in (0;1), \\ 0, \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

   Знайти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, де $\eta = \xi^2$, якщо $F_\xi(x)$ – неперервна функція.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-3	3	4
-3	0	1/18	a
3	1/18	1/3	1/9
4	a	1/9	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -1$	$-1 < y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 5$	0	0	0	0
$5 < x \le 10$	0	0.15	0.3	0.3
$10 < x \le 15$	0	0.35	0.65	0.75
$x > 15$	0	0.35	0.7	1

   Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(4x^3 + 3y^2), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;2]$, $y \in [-1;1]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	3	4
p_i	0.2	0.8

ξ_2 :

x_i	-4	-3
p_i	0.5	0.5

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, \, x < 0, \\ 0, \, x \ge 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \, x > 0, \\ 0, \, x \le 0. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos x + \sin x), \, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, \quad x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	10	18	35
p_i	1/7	3/7	3/7

8. а) Математичне сподівання початкової швидкості польоту даного типу кулі дорівнює 500м/с. Оцінити зверху ймовірність того, що при випробовуванні початкова швидкості кулі виявиться більшою за 700 м/с.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

ξ_n :

x_i	$-n$	0	n
p_i	$\frac{1}{2n^5}$	$1 - \frac{1}{n^5}$	$\frac{1}{2n^5}$

Перевірити, чи для цієї послідовності має місце закон великих чисел.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.4; 0.2; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 16

1. 4 станки розташовані на одній прямій, відстань між кожними сусідніми станками однакова і дорівнює a. Робітник, що обслуговує станки, переходить від станка, на якому робота закінчена, до будь-якого з трьох інших станків. Знайти розподіл випадкової величини η – довжини здійснюваних робітником переходів.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}\left(x^4 + 3x\right), & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	3	9	27
-8	0.15	0.2	0
-4	a	0	0.05
-2	0.1	0.1	a

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \le 3$	$3 < y \le 4$	$4 < y \le 5$	$y > 5$
$x \le -1$	0	0	0	0
$-1 < x \le 4$	0	0.1	0.3	0.3
$4 < x \le 7$	0	0.3	0.5	0.6
$x > 7$	0	0.3	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $y = x - 2$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-7	7
p_i	2/5	3/5

ξ_2 :

x_i	-7	7
p_i	3/8	5/8

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, x \in [-2; 0], \\ 0, \ x \notin [-2; 0]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-5x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	3	15	18
p_i	0.7	0.1	0.2

8. а) Дано щільність розподілу випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2). \end{cases}$ Оцінити $P\{|\xi - M\xi| < 0.5\}$.

   б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають рівномірний розподіл на відрізках $[-1;1]$, $[-2;2]$,..., $[-n;n]$,... відповідно. Чи можна для цієї послідовності застосовувати теорему Хінчина? Теорему Чебишова?
9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1; 0.1; 0.8)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 17

1. На столі лежать 10 однакових на вигляд ручок. Відомо, що 4 з них пишуть синім чорнилом, а решта – чорним. Навмання вибирають дві ручки. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості ручок з синім чорнилом серед вибраних двох.
2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{A}{x}, & x \in (1, e), \\ 0, & x \notin (1, e). \end{cases}$ Знайти константу A; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi}$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-3	-1	2
-2	a	0.15	0
1	0.15	a	0.05
3	0	0.15	0.1

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 3$	$3 < y \le 5$	$5 < y \le 7$	$y > 7$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le 0$	0	0	0.15	0.35
$0 < x \le 4$	0	0.2	0.35	0.75
$x > 4$	0	0.3	0.6	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(5x + 6y), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;4]$, $y \in [0;2]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	1	4
p_i	0.15	0.85

ξ_2 :

x_i	-3	1
p_i	0.2	0.8

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, x \le 0, \\ 0, \quad x > 0. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 32x, \ x \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \\ 0, \ x \notin \left[0; \frac{1}{4}\right], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	0	10	20
p_i	1/7	3/7	3/7

8. а) Ймовірність появи події A у кожному випробовуванні дорівнює $1/2$. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що подія A відбудеться в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробовувань.

б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають рівномірний розподіл на відрізках $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ відповідно. Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (1;0;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 18

1. Розподіл випадкової величини ξ задається формулою: $P\{\xi = k\} = \dfrac{C}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

   Знайти невідому сталу C, ймовірності $P\{\xi = 3\}$, $P\{3 \le \xi \le 7\}$. Чи можна знайти математичне сподівання цієї випадкової величини?

2. На відрізку AB довільним чином вибрано точку M. Випадкова величина ξ – це відстань AM. Знайти $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-4	-3	7
-7	0	0.1	0.15
3	0.05	a	0
4	a	0.05	0.25

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -3$	$-3 < y \le -2$	$-2 < y \le -1$	$y > -1$
$x \le -1$	0	0	0	0
$-1 < x \le 0$	0	0.2	0.2	0.4
$0 < x \le 1$	0	0.2	0.4	0.6
$x > 1$	0	0.4	0.6	1

   Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(7x - 10y), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

   Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається так: $x \in [0; 2]$, $y \in [-1; 0]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

   а) ξ_1 :

x_i	0	3
p_i	0.5	0.5

   ξ_2 :

x_i	-3	0
p_i	0.4	0.6

   б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{x}, x < 0, \\ 0, \ x \ge 0. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x}{8}, x \in [-1; 1], \\ 0, \quad x \notin [-1; 1], \end{cases}$$

η :

x_i	-4	-2	0
p_i	1/8	1/8	3/4

ζ :

x_i	3	5	7
p_i	1/8	1/8	3/4

8. а) Дано $M\xi = 2$, $D\xi = 0.01$. Користуючись нерівністю Чебишова оцінити $P\{1.5 < \xi < 2.5\}$, $P\{\xi < 2\}$.

   б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

   ξ_n :

x_i	$-n^2$	0	n^2
p_i	$\dfrac{1}{5n^4}$	$1-\dfrac{2}{5n^4}$	$\dfrac{1}{5n^4}$

   Перевірити, чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1; 0.1; 0.8)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 19

1. Екзаменатор задає студенту додаткові запитання. Ймовірність того, що студент відповість на довільне з цих питань дорівнює 0.9. Викладач припиняє іспит при першій неправильній відповіді. Знайти закон розподілу математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості додаткових питань, заданих студенту.

2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} A(x^3+1), x \in (-1;0), \\ 0, \quad x \in (-1;0). \end{cases}$

   Знайти константу A; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = 2\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	-8	-4	12
-12	0	0.15	0.1
4	0.1	a	0.2
8	a	0.1	0.15

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \le -3$	$-3 < y \le 0$	$0 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 5$	0	0	0	0
$5 < x \le 10$	0	0	0.1	0.2
$10 < x \le 15$	0	0.2	0.4	0.7
$x > 15$	0	0.3	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 2x$, $y = 2$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-1	2
p_i	$1/4$	$3/4$

ξ_2 :

x_i	-2	1
p_i	$2/3$	$1/3$

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, x < 0, \\ 0, x \geq 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 3e^{3x}, x < 0, \\ 0, x \geq 0. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x \in [-2; 3], \\ 0, \quad x \notin [-2; 3], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	-4	-2	0
p_i	$1/7$	$5/7$	$1/7$

8. а) Ймовірність появи події у кожному випробовуванні дорівнює $1/4$. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ – кількість появ події буде міститись в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробовувань.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

ξ_n :

x_i	-4	0	4
p_i	$\frac{n}{n^2+1}$	$1 - \frac{2n}{n^2+1}$	$\frac{n}{n^2+1}$

Перевірити, чи для цієї послідовності має місце закон великих чисел.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (1; 0; 0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 20

1. Ймовірність того, що покупцеві буде потрібне взуття 40-го розміру, дорівнює 0.4. У взуттєвий відділ зайшло троє покупців. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості тих покупців, яким необхідно купити взуття 40-го розміру.
2. На колі зафіксовано точку O. На цьму ж колі навмання вибрано точку A. Випадкова величина ξ – це кут між OA і дотичною до кола в точці O. Знайти $f_\xi(x)$ та щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-8	-5	12
-11	0.05	a	0.05
5	0.2	0	a
8	0.05	0.2	0.05

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 8$	$8 < y \le 9$	$9 < y \le 10$	$y > 10$
$x \le 5$	0	0	0	0
$5 < x \le 6$	0	0	0.2	0.4
$6 < x \le 7$	0	0.2	0.4	0.85
$x > 7$	0	0.2	0.55	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(3x^2 + 2xy), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена таким чином: $x \in [0;1]$, $y \in [2;4]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	0	3	10
p_i	0.12	0.38	0.5

ξ_2 :

x_i	-1	4
p_i	0.5	0.5

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, & x < 0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2+x}{8}, & x \in [-2;2], \\ 0, & x \notin [-2;2], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	3	10	15
p_i	2/9	1/6	11/18

8. а) Дано $M\xi = 18$, $D\xi = 1$. Користуючись нерівністю Чебишова оцінити $P\{15 < \xi < 21\}$.

   б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ незалежні між собою і мають розподіл

   ξ_n :

x_i	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_i	$\dfrac{1}{2^n}$	$1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$	$\dfrac{1}{2^n}$

   Чи має місце закон великих чисел для цієї послідовності?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (1;0;0)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 21

1. Які з наведених нижче послідовностей є розподілом деякої дискретної випадкової величини:

   а) $P\{\xi = k\} = p^k q^2$, $q = 1-p$, $0 \le p \le 1$, $k = 1,2,\dots$;

   б) $P\{\xi = k\} = p^{n-k} q$, $q = 1-p$, $0 \le p \le 1$, $n > 0$, $k = n, n+1, \dots$;

   в) $P\{\xi = k\} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k = 1,2,\dots$;

   г) $P\{\xi = k\} = \int_k^{k+1} f(x)dx$, $k = 1,2,\dots$; $\int_1^{\infty} f(x)dx = 1$.

2. Дано щільність розподілу випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} A(2-x), & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2). \end{cases}$

   Знайти константу A; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність величини $\eta = \xi^2$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	3	4	7
-7	1/4	1/8	a
-4	0	1/8	1/8
3	a	0	1/8

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 0$	$0 < y \le 2$	$2 < y \le 4$	$y > 4$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le -2$	0	0.2	0.2	0.4
$-2 < x \le 0$	0	0.2	0.4	0.6
$x > 0$	0	0.4	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} a\left(4x^2 + 3y\right), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається так: $x \in [-2;2]$, $y \in [1;3]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1:

x_i	-1	1	2
p_i	1/3	1/3	1/3

ξ_2:

x_i	-2	-1	1
p_i	1/3	1/3	1/3

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0,\ x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0,\ x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-30x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

η, ζ:

x_i	4	12	16
p_i	1/5	2/5	2/5

8. а) Дано $M\xi = -14$, $D\xi = 4$. За допомогою нерівністі Чебишова оцінити $P\{-17 < \xi < -11\}$.

б) Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ має наступний закон розподілу: $P\left\{\xi_n = -\sqrt{n}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $P\left\{\xi_n = \sqrt{n}\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Чи виконується для $\{\xi_n\}$ умови теореми Чебишова?

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1; 0.2; 0.7)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 22

1. Двічі підкидають гральний кубик. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – суми очок, що випали при цьому.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 4x^2, & 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

   Знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi}$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-4	-1	3
-4	0	a	0.05
-1	0.15	a	0.15
3	0.1	0.05	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 2$	$2 < y \le 3$	$3 < y \le 4$	$y > 4$
$x \le 4$	0	0	0	0
$4 < x \le 6$	0	0	0.2	0.2
$6 < x \le 8$	0	0.1	0.3	0.5
$x > 8$	0	0.1	0.6	1

   Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

   Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

   а) ξ_1:

x_i	0	4
p_i	0.7	0.3

ξ_2:

x_i	-1	1
p_i	0.2	0.8

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \cos x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right], \\ 0,\ x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]. \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7} e^{-7(x-3)},\ x > 3, \\ 0, \quad x \le 3, \end{cases}$$

η, ζ:

x_i	4	9	15
p_i	0.3	0.4	0.3

8. а) Закон розподілу випадкової величини ξ визначається формулами

$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{a^2}{b^2},\ P\{\xi = -b\} = P\{\xi = b\} = \frac{a^2}{2b^2},\ (|a| < |b|).$$

Порівняти точне значення ймовірності $P\{|\xi| \ge b\}$ з оцінкою, отриманою за нерівністю Чебишова.

б) Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні і мають показниковий розподіл з параметром $\lambda_n = \dfrac{n}{n+1}$ відповідно. Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.2; 0.4; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 23

1. В урні знаходиться 15 білих і 5 чорних однакових на дотик куль. З урни навмання виймають дві кулі. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості білих куль серед двох вибраних.
2. Відомо, що

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1 - F_\xi(x), x > 0, \\ 0, \quad x \le 0. \end{cases}$$

Знайти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, якщо $\eta = 2\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	-4	1	3
-4	a	0.1	0
1	0.2	a	0.05
3	0	0.05	0.2

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \le -1$	$-1 < y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 1$	0	0	0	0
$1 < x \le 3$	0	0.1	0.2	0.2
$3 < x \le 5$	0	0.2	0.4	0.6
$x > 5$	0	0.3	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(4x^3 + 2y\right), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена так: $x \in [0;3]$, $y \in [4;7]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2:

x_i	-4	0	4
p_i	0.2	0.3	0.5

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, x \in [-5;5], \\ 0, x \notin [-5;5], \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, x \in [0;7], \\ 0, x \notin [0;7], \end{cases}$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-4(x+2)}, x > -2, \\ 0, \quad x \le -2, \end{cases}$$

η, ζ:

x_i	3	7	11
p_i	2/11	5/11	4/11

8. а) При стрільбі було виявлено, що відхилення Δ точки влучення від цілі підлягає нормальному розподілу з математичним сподіванням 0 і дисперсією $4m^2$. Знайти ймовірність того, що $|\Delta| < 3m$.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

ξ_n:

x_i	$-n$	n
p_i	$\frac{1}{n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$

Перевірити, чи виконується для цієї послідовності умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0;0;1)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 24

1. У компанії зібралося 10 молодих людей. Відомо, що 7 з них студенти. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості студентів серед трьох навмання вибраних з компанії осіб.
2. Відомо, що

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2(1 - F_\xi(x)), & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Знайти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, якщо $\eta = -\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	-5	1	4
-5	0.1	0.05	a
1	0.15	a	0
4	0.15	0	0.05

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$1 < y \le 5$	$y > 5$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0	0.1	0.25
$1 < x \le 5$	0	0.2	0.4	0.75
$x > 5$	0	0.35	0.65	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(x^3 + 7y^2), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена так: $x \in [2;3]$, $y \in [-1;1]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	-1	7
p_i	3/4	1/4

ξ_2 :

x_i	0	1
p_i	1/2	1/2

б) випадкова величина ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 5$, а випадкова величина ξ_2 рівномірно розподілена на $[-1;0]$.

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} 3, x \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ 0, x \notin \left[0; \frac{1}{3}\right], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	3	10	20
p_i	1/9	4/9	4/9

8. а) Випадкова величина ξ має рівномірно розподілена на $[6;12]$. Користуючись нерівністю Чебишова, ймовірність того, випадкова величина ξ відхилиться від математичного сподівання не більше, ніж на 3 (необхідно оцінити $P\{|\xi - M\xi| \le 3\}$).

   б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ і

$$f_{\xi_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in [0;n], \\ 0, x \notin [0;n]. \end{cases}$$

   Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1; 0.4; 0.5)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 25

1. В аудиторії є 4 лампи. Ймовірність того,що довільна з них не світить в даний момент дорівнює 0,3. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості ламп, що не світять в даний момент.

2. Задано щільність розподілу випадкової величини ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{1+x^2}, x \in (0;1), \\ 0, \quad x \notin (0;1). \end{cases}$

   Знайти константу A, функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та щільність розподілу випадкової величини $\eta = 2\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-4	2	4
-4	0	0.1	0.2
2	0.1	a	0.1
4	a	0.1	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -4$	$-4 < y \le -2$	$-2 < y \le 0$	$y > 0$
$x \le -4$	0	0	0	0
$-4 < x \le -2$	0	0	0.2	0.3
$-2 < x \le 0$	0	0.05	0.4	0.65
$x > 0$	0	0.2	0.6	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(5x^4 - y\right), (x, y) \in D, \\ \quad 0, \qquad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена так: $x \in [-1;1]$, $y \in [-2;0]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2:

x_i	0	1	2
p_i	1/3	2/9	4/9

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1;0], \\ 0, x \notin [-1;0], \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in [-1;1], \\ 0, x \notin [-1;1]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$\xi \ : f_\xi(x) = \begin{cases} -2x, x \in [-1;0], \\ \quad 0, \ x \notin [-1;0], \end{cases}$

η, ζ:

x_i	2	7	19
p_i	5/19	7/19	7/19

8. а) Дано $M\xi = 18$, $D\xi = 9$. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P\{14 < \xi < 22\}$.

б) Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом розподілу

ξ_n:

x_i	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p_i	1/3	1/3	1/3

Чи можна застосувати до цієї послідовності теорему Чебишова?

10. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.1; 0.7; 0.2)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл

ВАРІАНТ 26

1. Ймовірність того,що студент здасть залік з першого разу дорівнює 0.3, з другого разу – 0.4. Ймовірність того, що студент здасть залік на комісії дорівнює 0.25. Випадковій величині ξ надамо значення 5, якщо студент здасть залік з першого разу; 4 – якщо з другого; 3 – якщо здасть залік на комісії і 2 – у всіх інших випадках. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.
2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ
$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$
Знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta=\xi^2$.
3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ,η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi\setminus\eta$	-8	-4	1
-8	0	0.05	0.1
-4	0.2	a	0.1
1	a	0.25	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi\setminus\eta$	$y\le 3$	$3<y\le 6$	$6<y\le 9$	$y>9$
$x\le 10$	0	0	0	0
$10<x\le 15$	0	0.15	0.15	0.45
$15<x\le 20$	0	0.45	0.5	0.8
$x>20$	0	0.45	0.6	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ,η)
$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=\begin{cases}a(3x^2-2y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$
Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta=y$ випадкового вектора (ξ,η), якщо область D визначена так: $x\in[-2;2]$, $x\in[-2;0]$.
6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha=\max(\xi_1,\xi_2)$, $\beta=\min(\xi_1,\xi_2)$, $\eta=\xi_1+\xi_2$, якщо:

а) ξ_1,ξ_2:

x_i	-4	0	4
p_i	0.2	0.5	0.3

б) $f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & x\in[-2;8],\\ 0, & x\notin[-2;8],\end{cases}$, $f_{\xi_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & x\in[-1;4],\\ 0, & x\notin[-1;4].\end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ,η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi\ : f_{\xi}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{2}\right), x\in[-2;2],\\ \quad 0, \quad x\notin[-2;2],\end{cases}$$

η,ζ :

x_i	8	14	20
p_i	1/7	3/7	3/7

8. а) При визначенні курсу літака середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання дорівнює $\sigma = 2$. Вважаючи математичне сподівання похибки вимірювання рівним нулю, оцінити ймовірність того, що похибка при вимірюванні курсу літака буде більша за 5.

   б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ з розподілом

$$f_{\xi_n}(x)=\begin{cases}n,\ x\in\left[0;\frac{1}{n}\right],\\ 0,\ x\notin\left[0;\frac{1}{n}\right].\end{cases}$$

   Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix}0.1 & 0.4 & 0.5\\ 0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)}=(0.25;0.5;0.25)$.Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 27

1. Два шахісти одного класу проводять 4 гри. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості перемог першого шахіста.
2. Задано щільність розподілу випадкової величини ξ

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}Ae^{x}, x\in(0;1),\\ \ 0,\ \ x\notin(0;1).\end{cases}$$

   Знайти константу A; функцію розподілу $F_{\xi}(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta=\sin\xi$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ,η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \backslash \eta$	-1	2	3
-8	0.1	0.1	a
-4	0.25	0	0.05
1	a	0.1	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 1$	$1 < y \le 3$	$3 < y \le 7$	$y > 7$
$x \le 4$	0	0	0	0
$4 < x \le 5$	0	0.1	0.2	0.4
$5 < x \le 6$	0	0.3	0.55	0.75
$x > 6$	0	0.5	0.75	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a(7x + 3y), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначена так: $x \in [0; 4]$, $y \in [0; 3]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1:

x_i	0	1	2
p_i	1/3	1/3	1/3

ξ_2:

x_i	-2	-1	0
p_i	1/4	1/2	1/4

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1, x \in [0; 1], \\ 0, x \notin [0; 1]. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi \, : f_\xi(x) = \begin{cases} \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, \quad x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

η, ζ:

x_i	1	12	25
p_i	0.3	0.3	0.4

8. а) Середнє споживання електроенергії в травні (за багато років) в заданому мікрорайоні дорівнює 360000 кВт◌год.

   і) Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії в травні поточного року перевищить 10^6 кВт◌год.

   іі) Оцінити ту саму ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40000 кВт◌год.

   б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

$$f_{\xi_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, x \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right], \\ 0, x \notin \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.3; 0.3; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 28

1. Троє осіб зайшло у чотири вагони поїзда. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості пасажирів, які зайшли у перший вагон.
2. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{B}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0;1), \\ 0, \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Знайти константу B; функцію розподілу $F_\xi(x)$; $M\xi$, $D\xi$; щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-2	5	7
-2	0.05	0.15	0
5	0.05	0.25	a
7	0.1	a	0.2

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 4$	$4 < y \le 6$	$6 < y \le 10$	$y > 10$
$x \le 10$	0	0	0	0
$10 < x \le 20$	0	0.05	0.2	0.45
$20 < x \le 30$	0	0.05	0.3	0.7
$x > 30$	0	0.3	0.6	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 0$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2:

x_i	3	4
p_i	1/3	2/3

б) $f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}2x, x\in[0;1],\\ 0, x\notin[0;1],\end{cases}$ $f_{\xi_2}(x)=\begin{cases}1, x\in[0;1],\\ 0, x\notin[0;1].\end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ,η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi: f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+2x), x\in[0;1],\\ 0, \quad x\notin[0;1],\end{cases}$$

η,ζ:

x_i	3	8	20
p_i	1/14	9/14	4/14

8. а) Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів.
   б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ з розподілом

$$f_{\xi_n}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2n}, x\in[-n;n],\\ 0, x\notin[-n;n].\end{cases}$$

   Перевірити, чи для цієї послідовності виконуються умови теореми Чебишова.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix}0.4 & 0.2 & 0.4\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)}=(0.4;0.2;0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 29

1. У групі з 20 студентів троє відмінників. Групу довільним чином поділили на дві підгрупи. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості відмінників, що потрапили в першу підгрупу.
2. Відомо, що

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}F_\xi(x), x\in(0;1),\\ 0, \quad x\notin(0;1).\end{cases}$$

   Знайти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, де $\eta=\sqrt{\xi}$, якщо $F_\xi(x)$ – неперервна функція.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ,η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi\backslash\eta$	-4	4	5
-4	1/14	0	1/7
4	1/7	1/14	a
5	0	1/7	a

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 4$	0	0	0	0
$4 < x \le 8$	0	0.1	0.1	0.3
$8 < x \le 12$	0	0.1	0.15	0.55
$x > 12$	0	0.25	0.5	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a, (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові, що $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D обмежена лініями $y = 2x + 4$, $y = 0$, $x = 0$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1, ξ_2:

p_i	1/7	5/7	x_i	-7	0	7

б) $f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^x, x < 0, \\ 0, x \ge 0. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi : f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + 4x}{3}, x \in [0;1], \\ 0, \quad x \notin [0;1], \end{cases}$$

η, ζ:

x_i	18	40	50
p_i	0.1	0.7	0.2

8. а) Середня кількість сонячних днів у році для даної місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року у цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

ξ_n:

x_i	$-n^2$	0	n^2
p_i	e^{-n}	$1 - 2e^{-n}$	e^{-n}

Перевірити, чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.3; 0.3; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

ВАРІАНТ 30

1. З колоди карт навмання виймають 3 карти. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ – кількості тузів серед трьох вибраних карт.
2. Відомо, що

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3F_\xi(x)}{x}, x \in (0;1), \\ 0, \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Знайти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(x)$, де $\eta = \xi^2$, якщо $F_\xi(x)$ – неперервна функція.

3. Знайти a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію і коефіцієнт кореляції дискретного випадкового вектора (ξ, η), якщо дано його розподіл. Перевірити чи компоненти є незалежними.

$\xi \setminus \eta$	-3	3	4
-3	0	1/18	a
3	1/18	1/3	1/9
4	a	1/9	0

4. Дано функцію розподілу дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	$y \le -1$	$-1 < y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 5$	0	0	0	0
$5 < x \le 10$	0	0.15	0.3	0.3
$10 < x \le 15$	0	0.35	0.65	0.75
$x > 15$	0	0.35	0.7	1

Знайти розподіл цього випадкового вектора.

5. Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \begin{cases} a\left(4x^3 + 3y^2\right), (x, y) \in D, \\ 0, \quad (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайти a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції і умовну щільність ξ при умові $\eta = y$ випадкового вектора (ξ, η), якщо область D визначається таким чином: $x \in [0;2]$, $y \in [-1;1]$.

6. Дано розподіл незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2. Знайти розподіл випадкових величин $\alpha = \max(\xi_1, \xi_2)$, $\beta = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо:

а) ξ_1 :

x_i	3	4
p_i	0.2	0.8

ξ_2 :

x_i	-4	-3
p_i	0.5	0.5

б) $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, x < 0, \\ 0, x \ge 0, \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x > 0, \\ 0, x \le 0. \end{cases}$

7. Знайти характеристичну функцію для випадкових величин ξ, η і твірну функцію для випадкового вектора ζ, якщо

$$\xi: \ f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos x + \sin x), & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

η, ζ :

x_i	10	18	35
p_i	$1/7$	$3/7$	$3/7$

8. а) Математичне сподівання початкової швидкості польоту даного типу кулі дорівнює 500м/с. Оцінити зверху ймовірність того, що при випробовуванні початкова швидкості кулі виявиться більшою за 700 м/с.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ з розподілом

ξ_n :

x_i	$-n$	0	n
p_i	$\frac{1}{2n^5}$	$1-\frac{1}{n^5}$	$\frac{1}{2n^5}$

Перевірити, чи для цієї послідовності має місце закон великих чисел.

9. Дано матрицю перехідних ймовірностей за один крок однорідного ланцюга Маркова $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ і вектор початкових ймовірностей $p^{(0)} = (0.4; 0.2; 0.4)$. Знайти матрицю перехідних ймовірностей за три кроки, $p^{(3)}$, граничні ймовірності. Чи буде цей розподіл ергодичним?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Й. Теория ймовірностей: Збірник задач. – Київ : Вища школа, 1985. – 400 с.
2. Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Олексів І. Я. та ін. Збірник задач з теорії ймовірностей: Навчальний посібник. – Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2000. – 244 с.
3. Єлейко Я. І., Тріщ Б. М. Теорія ймовірностей : Навчальний посібник. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. – 160 с.
4. Базилевич Л. Є., Киричинська І. Б., Кучмінська Х. Й., Микитюк І. В. Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків з розділу «Теорія ймовірностей» курсу «Вища математика» для хіміко-технологічних спеціальностей. – Львів : Державний університет «Львівська політехніка», 1997. – 48 с.
5. Кміть І. Я., Киричинська І. Б., Клюйник І. І. та ін. Індивідуальні завдання з курсу «Теорія ймовірностей» для студентів факультету автоматики та факультету комп’ютерних й інформаційних технологій. – Львів : Державний університет «Львівська політехніка», 1996. – 39 с.

Формат 60 х 84 $^{1}/_{8}$. Ум. друк. арк. 6,05. Зам. № 14Е.

Видавець і виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007.