МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
до розділу «Комбінаторика» з курсу «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 112-Статистика освітньо-професійної програми «Статистичний аналіз даних»

Львів 2023

Індивідуальні завдання до розділу «Комбінаторика» з курсу «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 112-Статистика освітньо-професійної програми «Статистичний аналіз даних» / Укл.: І. Б. Базилевич, Л.Є. Базилевич. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. – 32 с.

Укладач: Ірина Богданівна Базилевич
Лідія Євгенівна Базилевич

Рецензент: доктор фізико-математичних наук, професор Я.І. Єлейко

Рекомендовано
кафедрою математичної статистики і диференціальних рівнянь,
протокол № 4 від 18.10.2023.

Вступ

Комбінаторика – це розділ дискретної математики, який широко застосовується в різних галузях теоретичної та прикладної математики, зокрема в інших частинах дискретної математики та в теорії ймовірностей.

В комбінаториці ми маємо справу зі скінченними множинами, що вимагає тільки знання основних означень інтуїтивної теорії множин.

Дані завдання носять елементарний характер і мають на меті ознайомити студентів з основними поняттями комбінаторики, навчити їх "бачити" комбінаторний зміст у різних словесних задачах. Міркування, які приводять до розв'язку цих задач, є складовими частинами при розв'язуванні складніших задач. Варто звернути увагу, що деякі послідовні задачі пов'язані між собою за змістом і для досягнення результату часом легше спочатку розв'язати попередню.

Означення і приклади

Знаходження кількості елементів об'єднання декількох множин

З теорії множин нам відомо, що якщо множина A складається з m елементів, а множина B - з n елементів, то кількість елементів об'єднання цих множин обчислюється за формулою:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \tag{1}$$

тут через $|A|$ позначено кількість елементів множини A, $|B|$ - кількість елементів множини B і т.д.

Зокрема, якщо множини A та B не перетинаються, то ця формула виглядає так:

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ якщо } A \cap B = \emptyset. \tag{2}$$

Формула для знаходження кількості елементів об'єднання n множин A_1, A_2, ... A_n виглядає так:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \tag{3}$$

Приклад 1. *В спеціалізованому магазині за тиждень було куплено 74 процесори, 72 монітори та 35 принтерів. Відомо, що 69 покупців придбало і процесор, і монітор; 22 – і процесор, і принтер; стільки ж – і монітор, і принтер. Відомо теж, що 21 покупець придбав всі три речі. Скільки покупців здійснило ці покупки? Скільки з них купило тільки принтер?*

Розв'язання. Позначимо через A множину куплених процесорів, через B –моніторів, а через C – принтерів. З умови задачі відомо, що $|A| = 74$, $|B| = 72$, $|C| = 35$, $|A \cap B| = 69$, $|A \bigcap C| = |B \cap C| = 22$ і $|A \cap B \cap C| = 21$. Тоді

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$74 + 72 + 35 - 69 - 22 - 22 + 21 = 89.$$

Отже, покупки здійснювало 89 покупців.

Відповідь на друге питання можна отримати по-різному. Ясно, що множину C в свою чергу можна зобразити у вигляді об'єднання трьох множин:

$$C = (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Крім того, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cap B \cap C$ і $(C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cap C) = (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cap (B \cap C) = (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$. Тому $35 = |C \cap \bar{A} \cap \bar{B}| + 22 + 33 - 21$. Отже, $|C \cap \bar{A} \cap \bar{B}| = 12$.

Або можна міркувати так: $A \cup B \cup C = (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cup B)$, причому

$(C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Оскільки $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 74 + 72 - 69 = 77$, то $|C \cap \bar{A} \cap \bar{B}| = |A \cup B \cup C| - |A \cup B| = 89 - 77 = 12$.

Основні правила комбінаторики.

На формулі (2) базується

Правило суми. *Якщо вибір елемента a можна здійснити m способами, а вибір елемента b n способами, причому жоден вибір елемента a не збігається з жодним вибором елемента b, то один з елементів a або b може бути вибраний $m + n$ способами.*

Нагадаємо також, що якщо множина A складається з m елементів, а множина B з n елементів, то кількість елементів у декартовому добутку цих множин обчислюється за формулою:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \tag{4}$$

На цій формулі базується

Правило добутку. *Якщо вибір елемента a можна здійснити m способами, а вибір елемента b незалежно від вибору елемента a n способами, то вибір впорядкованої пари a і b може бути здійснений $m \cdot n$ способами.*

Приклад 2. *Студенти деякої спеціальності у першому семестрі вивчають курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії. На іспит винесено 30 теоретичних питань з лінійної алгебри і 28 теоретичних питань з аналітичної геометрії, а також 40 задач з алгебри і 42 задачі з аналітичної геометрії. Білет на іспит містить два теоретичні питання – одне з алгебри, одне з геометрії і три задачі: дві задачі з алгебри і одна з геометрії або одна з алгебри і дві з геометрії. Скільки існує різних білетів на іспит?*

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює

$$30 \cdot 28 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 42 + 30 \cdot 28 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 41 = 30 \cdot 28 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 80 = 11289600.$$

Перестановки, розміщення та комбінації без повторень

Означення 1. *Довільна впорядкована множина, яка складається з n різних елементів, називається перестановкою без повторень з n елементів.*

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n. Ця кількість дорівнює $n!$.

Приклад 3. *Знайти кількість перестановок чисел $\{1, 2, \dots, 4n\}$ так, щоб кожне число, яке кратне 4, стояло на місці з номером, кратним 4.*

Розв'язання. Кількість чисел, які кратні 4, дорівнює n і їх можна переставляти на місця, кратні 4, $n!$ способами. Решта $4n - n = 3n$ чисел між собою також можна переставляти $(3n)!$ способами. За правилом добутку загальна кількість перестановок дорівнює $(n)!(3n)!$.

Означення 2. *Довільна впорядкована k-елементна підмножина множини, яка складається з n різних елементів, називається розміщенням з n по k.*

Кількість розміщень з n по k позначають A_n^k і обчислюється за формулою $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Приклад 4. *Скількома способами можна скласти розклад на понеділок, якщо учні вивчають 10 предметів, у понеділок 5 уроків і всі уроки є різними.*

Розв'язання. Шукана кількість – це кількість впорядкованих п'ятиелементних підмножин десятиелементної множини, яка дорівнює $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Означення 3. *Довільна k елементна підмножина, яка складається з n різних елементів, називається сполукою або комбінацією з n по k.*

Їх кількість знаходиться за формулою $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ і позначається C_n^k або $\binom{n}{k}$.

Приклад 5. *Скільки існує перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, у яких принаймні одне число стоїть на місці з номером, яке збігається з самим числом?*

Розв'язання. Позначимо через B_i множину перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, у яких число i стоїть на i-му місці, а через B – множину перестановок, в яких принаймні одне число стоїть на місці з номером, яке збігається з самим числом. Очевидно, що $B = B_1 \bigcup \ldots \bigcup B_n$. Відомо, що $|B_1 \bigcup \ldots \bigcup B_n| = |B_1| + \ldots + |B_n| - -|B_1 \bigcap B_2| - |B_{n-1} \bigcap B_n| + \ldots + (-1)^{n-1}|B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_n|$. Для довільного i $|B_i| = (n-1)!$, а для довільного подвійного перетину $|B_i \bigcap B_j| = (n-2)!$. Кількість подвійних перетинів дорівнює кількості двоелементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, тобто C_n^2. Для довільного потрійного перетину $|B_i \bigcap B_j \bigcap B_k| = (n-3)!$. Кількість потрійних перетинів дорівнює кількості триелементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, тобто C_n^3 і т.д. Таким чином,

$$|B| = C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)^3 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n 0! = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!} =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\right).$$

Перестановки, розміщення та комбінації з повтореннями

Означення 4. *Довільна впорядкована множина, яка складається з n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, $\ldots$, n_k елементів k-го типу ($n_1 + \ldots + n_k = n$), називається перестановкою з повтореннями з n по $n_1, \ldots, n_k$.*

Кількість таких перестановок дорівнює $\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$ і позначається $P_n(n_1, \ldots, n_k)$ або $C_n(n_1, \ldots, n_k)$.

Приклад 6. *Скільки дванадцятизначних чисел можна скласти з трьох двійок, чотирьох трійок і п'яти четвірок.*

Розв'язання. Враховуючи те, що кожна цифра може стояти першою, то шукана кількість дорівнює

$$P_{12}(3, 4, 5) = \frac{12!}{3!4!5!} = 27720.$$

Означення 5. *Довільна впорядкована множина, яка складається з k елементів, кожен з яких відноситься до одного з n типів, називається розміщенням з повтореннями з n по k.*

Кількість таких множин дорівнює n^k і цю кількість ми будемо позначати $\bar{A}_n^k$.

Приклад 7. *Скількома способами 20 різних предметів можна розмістити у чотирьох коробках, якщо кожна коробка може вмістити і всі предмети?*

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює 4^{20}.

Означення 6. *Довільна сукупність з k елементів, кожен з яких набуває одне з n значень, називається комбінацією з повтореннями з n по k.*

Кількість таких множин дорівнює $C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$ і позначається $\bar{C}_n^k$ або f_k^n.

Приклад 8. *Скількома способами можна купити 20 вітальних листівок, якщо у магазині є 10 типів листівок?*

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює $\bar{C}_{10}^{20}$.

Поняття генератриси

Означення 7. *Нехай дано числову послідовність $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Суму вигляду $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називають генератрисою цієї послідовності.*

Приклад 9. *Знайти генератрису послідовності $a_n = \frac{1}{n!}$.*

Розв'язання. $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.

Приклад 10. *Знайти кількість комбінацій з повтореннями $\bar{C}_n^k$ за допомогою відповідної генератриси.*

Розв'язання. Згадаємо, що кількість комбінацій з повтореннями задовольняє рекурентному співвідношенню:

$$\bar{C}_n^k = \bar{C}_n^{k-1} + \bar{C}_{n-1}^k.$$

(Елемент першого типу може зустрічатись у вибірці, а може і не зустрічатися. Якщо він є у вибірці, то решту елементів добирається $\bar{C}_n^{k-1}$ способами. Якщо ні — то вибірку можна скласти $\bar{C}_{n-1}^k$ способами. Оскільки ці два випадки незалежні, то отримуємо потрібну формулу.).

Зафіксуємо n і для послідовності $\{\bar{C}_n^k\}_{k=0}^{\infty}$ побудуємо генератрису $A_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{C}_n^k x^k$. Доможимо рекурентне співвідношення на x^k: $\bar{C}_n^k x^k = \bar{C}_n^{k-1} x^k + \bar{C}_{n-1}^k x^k$ і просумуємо по $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_n^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_n^{k-1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_{n-1}^k x^k,$$

або

$$A_n(x) - 1 = x A_n(x) + A_{n-1}(x) - 1,$$

звідки

$$A_n(x) = \frac{A_{n-1}(x)}{1-x}.$$

Маємо знову рекурентне співвідношення, вже від твірної функції, яке легко розв'язується. $A_n(x) = \frac{A_{n-1}(x)}{1-x} = \frac{A_{n-2}(x)}{(1-x)^2} = \dots = \frac{A_1(x)}{(1-x)^{n-1}}$. Але $A_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{C}_1^k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Тому $A_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \dots + C_{n+k-1}^k x^k + \dots$. Маємо $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Метод траєкторій

Для багатьох комбінаторних задач можна вказати таку геометричну інтерпретацію, яка зводить задачу до підрахунку кількості траєкторій, що мають певну властивість.

Приклад 11. *Розглядаємо прямокутну сітку квадратів розміром $m \times n$. Яка кількість найкоротших доріг на цій сітці, які ведуть з лівого нижнього кута (точки (0;0)) в правий верхній кут (точку $(m;n)$)?*

Розв'язання. Кожен найкоротший шлях з точки (0;0) в точку $(m;n)$ – це послідовність довжини $m+n$, яка складається з m горизонтальних і n вертикальних відрізків. Тому загальна кількість шляхів дорівнює кількості способів з послідовності $\{1, 2, \ldots, m+n\}$ вибрати m чисел, які будуть відповідати горизонтальним відрізкам (або вибрати n чисел, які будуть відповідати вертикальним відрізкам). Шукана кількість дорівнює $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$.

Задачі та індивідуальні завдання

1 Знаходження кількості елементів об'єднання декількох множин

1.1 Задачі для практичного заняття

1. (Усно) Заняття з англійської мови відвідує 24 студенти групи, а з німецької – 6. Скільки студентів у групі, якщо:

   (а) заняття відбуваються в один і той же час;

   (б) заняття відбуваються в різний час, причому два студенти ходять і на англійську, і на німецьку?

2. В спеціалізованому магазині, де продаються лижі, лижні палки та черевики за місяць було продано 1000 пар лиж, 500 пар черевиків і 500 пар палок. Відомо, що 400 пар лиж куплено разом з черевиками, 300 пар лиж – разом з палками, 200 пар черевиків разом з палками, а 100 пар лиж – разом з черевиками і палками. Скільки було зроблено покупок?

3. На екзамені абітурієнтам було запропоновано три задачі: з геометрії, алгебри і з тригонометрії. З 1000 учнів задачу з алгебри зробило 800, з геометрії – 700, а з тригонометрії – 600. Задачі з алгебри і геометрії зробило 600 учнів, з алгебри і тригонометрії – 500, з геометрії і тригонометрії – 400, а 300 учнів зробило всі три задачі. Скільки абітурієнтів не зробило жодної задачі?

4. Довести, що кількість натуральних чисел не більших, ніж 1000, які діляться на n, $n \in N$, дорівнює $\left[\frac{1000}{n}\right]$.

5. Знайти кількість натуральних чисел не більших, ніж 1000, які не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5.

6. Знайти кількість натуральних чисел не більших, ніж 1000, які не діляться ні на 6, ні на 10, ні на 15.

7. Знайти кількість простих чисел, не більших, ніж 100.

8. В жорстокому бою не менше, ніж 70% бійців втратили одне око, не менше, ніж 75% – одне вухо, не менше, ніж 80% – одну руку, не менше, ніж 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили і око, і вухо, і руку, і ногу?

1.2 Індивідуальні завдання

1. В одній кав'ярні за день було замовлено 105 чашок кави, 77 тістечок та 48 порцій морозива. Відомо, що 60 клієнтів пили каву і їли тістечка; 38 – пили каву і їли морозиво; 19 – їли і тістечко, і морозиво. Відомо також, що 19 клієнтів замовили і каву, і тістечко, і морозиво.

   (а) Скільки клієнтів відвідало кав'ярню?

   (б) Скільки з них замовили тільки морозиво?

2. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 2000 діляться або на 11, або на 13, але не на 19?

3. З 29 студентів групи 16 відвідує секцію з легкої атлетики, 12 – футбольну секцію, а 8 – секцію карате. Відомо, що троє студентів ходять і на легку атлетику, і на карате; четверо – і на легку атлетику, і на футбол; один студент – і на футбол, і на карате.

   (а) Скільки студентів відвідує всі три секції?

   (б) Скільки студентів ходить на футбол і на карате, але не на легку атлетику?

4. При аналізі опитування виборців виявилось, що 52% не заперечує проти кандидата A, 23% не заперечує проти кандидата B, а 25% не заперечує проти кандидата C. Крім того, 12% вважають для себе прийнятними і кандидата A і кандидата B, 10% – кандидатів A і C, а 3% – кандидатів B і C. 2% виборців допускають для себе всіх трьох кандидатів.

   (а) Скільки процентів виборців не підтримує жодного кандидата?

   (б) Скільки підтримує рівно одного кандидата?

5. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 1000 діляться на 2 або на 3, але не на 5?

6. Вибори голови кооперативу відбувалися так: у бюлетень було внесено три кандидатури A, B та C і потрібно було викреслити небажаного кандидата (кандидатів). Виграє той, хто набере найбільшу кількість голосів. При підрахунку виявилось, що серед 95 бюлетенів 11 є тільки за кандидата A, 9 – тільки за B, а 15 – тільки за C. За всіх трьох проголосувало 20 чоловік, а за двох голоси розподілилися так: 9 подано за A і B, 6 – за A і C, а 4 – за B і C. Зіпсованих бюлетенів не було. Хто з кандидатів виграв вибори?

7. Опитування на одному факультеті виявило, що у вільний час 31% студентів читає наукову фантастику, 25% – детективи, а 8% – поезію. 3% студентів читає і фантастику, і поезію, стільки ж – і детективи, і поезію, а 11% читає і фантастику, і детективи. Відомо також, що 1% студентів читає книжки всіх трьох жанрів.

   (а) Скільки процентів студентів цікавиться тільки поезією?

   (б) Скільки не цікавиться жодним з вказаних жанрів?

8. Кожен студент факультету вивчає принаймні одну іноземну мову. 120 студентів вивчають англійську мову, 23 – німецьку, а 13 – французьку. Двоє студентів вивчає дві іноземні мови, і стільки ж – три.

   (а) Скільки студентів на курсі?

   (б) Скільки вивчає тільки одну іноземну мову?

9. При дослідженні читацьких карток студентів виявилось, що 60% студентів читає журнал A, 55% – журнал B, а 50% – журнал C. 25% студентів читає і журнал A, і журнал B, 40% – і A, і C, 20% – і B, і C, а 10% – всі три журнали.

   (а) Скільки процентів студентів не читає жодного з цих журналів?

   (б) Скільки – тільки журнал C?

10. Знайти кількість натуральних чисел не більших за 1000, які не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 7.

11. З 25 студентів групи 12 відвідує секцію з легкої атлетики, стільки ж – з плавання, а 11 – з тенісу. Відомо, що 4 студентів ходять і на теніс, і на плавання; 5 – і на плавання, і на легку атлетику; 3 – і на легку атлетику, і на теніс.

    (а) Скільки студентів відвідує рівно дві секції?

    (б) Скільки студентів відвідує всі три секції?

12. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 2000 діляться або на 11, або на 19, але не на 13?

13. При аналізі опитування виборців виявилось, що 59% виборців не підтримує кандидата A, 79% не підтримує кандидата B, а 75% – C. Крім того, 45% виборців не підтримує ні A, ні B, 39% – ні A, ні C, 60% – ні B, ні C, а 29% – жодного кандидата.

    (а) Скільки процентів виборців підтримує всіх трьох кандидатів?

    (б) Скільки підтримує тільки кандидата A?

14. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 1000 діляться на 3 або на 5, але не на 2?

15. При опитуванні глядачів виявилося, що 70% з них дивляться комедії, 88% приходять на драми, а 55% – на трагедії. Крім того, 58% глядачів з задоволенням дивляться і комедії, і драми, 40% – комедії і трагедії, а 55% – драми і трагедії.

    (а) Скільки процентів глядачів дивляться постановки всіх трьох жанрів?

    (б) Скільки – тільки трагедії?

16. За день в кав'ярню зайшло 172 відвідувачі. Вони випили 131 чашку кави, з'їли 67 тістечок та 71 порцію морозива. Відомо, що 21 відвідувач замовив і каву, і тістечко, і морозиво, а 11 не замовило нічого. Крім того, відомо, що 61 відвідувач і пив каву, і їв тістечко, а 46 – і пили каву, і їли морозиво.

    (а) Скільки відвідувачів їли і морозиво, і тістечко?

    (б) Скільки з них при цьому не пили кави?

17. 16 студентів групи відвідує волейбольну секцію, 10 – баскетбольну, а 9 – футбольну. Відомо також, що 5 студентів ходять і на волейбол, і на баскетбол; 3 – і на футбол, і на волейбол; 2 – і на футбол, і на баскетбол. Ніхто не ходить на три секції.

   (а) Скільки студентів у групі?

   (б) Скільки з них відвідує рівно дві секції?

18. При аналізі опитування виборців виявилось, що 49% не заперечує проти кандидата A, 18% не заперечує проти кандидата B, а 24% не заперечує проти кандидата C. Крім того, 7% вважають для себе прийнятними і кандидата A і кандидата B, 8% – кандидатів A і C, а 2% – кандидатів B і C. 25% виборців не підтримують жодного кандидата.

   (а) Скільки процентів виборців вважають для себе прийнятними всіх трьох кандидатів?

   (б) Скільки підтримує рівно одного кандидата?

19. Вибори голови кооперативу відбувалися так: у бюлетень було внесено три кандидатури A, B та C і потрібно було викреслити небажаного кандидата (кандидатів). Виграє той, хто набере найбільшу кількість голосів. При підрахунку виявилось, що серед 71 члена кооперативу 9 проголосувало тільки за кандидата A, 15 – тільки за B, а 17 – тільки за C. За всіх трьох проголосувало 4 чоловік, а за двох голоси розподілилися так: 10 подано за A і B, 8 – за A і C, а 41– за B і C. Зіпсованих бюлетенів не було. Хто з кандидатів виграв вибори?

20. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 2000 діляться або на 13, або на 19, але не на 11?

21. Опитування на одному факультеті виявило, що у вільний час 33% студентів читає наукову фантастику, 21% – детективи, а 8% – поезію. 3% студентів читає і фантастику, і поезію, стільки ж – і детективи, і поезію, а 11% читає і фантастику, і детективи. Відомо також, що 2% студентів читає книжки всіх трьох жанрів.

   (а) Скільки процентів студентів цікавиться тільки поезією?

   (б) Скільки цікавиться або детективами, або фантастикою?

22. Кожен студент факультету вивчає принаймні одну іноземну мову. 93 студенти вивчають англійську мову, 23 – німецьку, а 12 – французьку. Двоє студентів вивчає тільки дві іноземні мови, а один – три. Ніхто не вивчає тільки англійську і французьку, чи тільки німецьку і французьку.

   (а) Скільки студентів на курсі?

   (б) Скільки вивчає тільки французьку мову?

23. При дослідженні читацьких карток студентів виявилось, що 60% студентів читає журнал A, 70% – журнал B, а 50% – журнал C. Журнали A і B читає 35% студентів, A і C – 40% студентів, B і C – 25% а 15% – всі три журнали.

   (а) Скільки процентів студентів читає не більше одного журналу?

   (б) Скільки – не менше двох?

24. Секцію з плавання відвідує 11 студентів, з футболу – 7, а з волейболу – 6. Відомо, що троє студентів ходять на плавання і на волейбол, двоє – на плавання на футбол, а один – на футбол, і на волейбол, причому ніхто з них не ходить на всі три секції. 10 студентів, які не відвідують жодної секції, ходять на загальні заняття з фізкультури, а 2 взагалі звільнені від фізкультури за станом здоров'я. Скільки студентів у групі?

25. При аналізі опитування виборців виявилось, що 64% виборців не підтримує кандидата A, 65% не підтримує кандидата B, а 70% – C. Крім того, 38% виборців не підтримує ні A, ні B, 42% – ні A, ні C, 40% – ні B, ні C, а 18% – жодного кандидата.

    (а) Скільки процентів виборців підтримує всіх трьох кандидатів?

    (б) Скільки підтримує кандидатів A і B, але не підтримує C?

26. Знайти кількість натуральних чисел не більших за 1000, які не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 11.

27. Серед артистів театральної трупи 37% бере участь в комедіях, 48% – в драмах, а 55% – в трагедіях. Серед них 20% артистів беруть участь і в комедіях, і в драмах, 12% – комедіях і трагедіях, а 18% – в драмах і трагедіях.

    (а) Скільки процентів артистів бере участь у всіх трьох жанрах?

    (б) Скільки – рівно у двох?

28. Скільки натуральних чисел не більших, ніж 2000 діляться тільки на одне з чисел 11, 13 і 19?

29. При опитуванні глядачів виявилося, що 80% з них дивляться комедії, стільки ж – приходять на драми, а 75% – на трагедії. Крім того, 65% глядачів з задоволенням дивляться і комедії, і драми, стільки ж – комедії і трагедії, а 50% – драми і трагедії.

    (а) Скільки процентів глядачів дивляться постановки всіх трьох жанрів?

    (б) Скільки – тільки трагедії?

30. Знайти кількість натуральних чисел не більших за 1000, які не діляться ні на 2, ні на 5, ні на 11.

2 Основні правила комбінаторики

2.1 Задачі для практичного заняття

1. Школяр добирається до школи або через ліс, або повз озеро. Через ліс ведуть три різні стежки; з дому до озера - 2 стежки, а від озера до школи - 4. Скількома різними способами школяр може добратися до школи?

2. Англійці дають дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо дати їй не більше трьох імен зі списку з 300 імен (способи, які відрізняються порядком, вважаються різними)?

3. Від пункту A до пункту B 999 км. Вздовж дороги, що їх з'єднує, встановлено стовпи, на яких вказана віддаль до даних пунктів: 0 - 999, 1 - 998, 2 - 997, ... , 999 - 0. Скільки серед них таких, які записані двома різними цифрами?

4. Нехай p_1, p_2, $\dots p_n$ - прості різні числа. Скільки різних дільників має число $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$, де α_1, α_2, $\dots \alpha_n$ - натуральні числа? Скільки є дільників, які не діляться на квадрат жодного натурального числа, не рахуючи одиниці?

5. В прямокутну таблицю з m стовпчиками та n рядками проставлені числа $+1$ та -1 так, що добуток чисел в кожному стовпчику та рядочку дорівнює 1. Скількома способами можна це зробити?

6. Яка кількість матриць розміру m на k, елементами яких є числа 0 і 1?

2.2 Індивідуальні завдання

1. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для відправлення листа?

2. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

3. На колі задано n точок. Скільки різних хорд можна через них провести?

4. Скількома способами можна розкласти в дві кишені 5 монет різної вартості?

5. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

6. У селищі проживає 1500 жителів. Доведіть, що принаймні двоє з них має однакові ініціали.

7. Скільки різних дільників має число 151875 (враховуючи саме це число і одиницю)?

8. Коаліції A та B ведуть війну між собою, а n нейтральних держав знаходяться в нерішучості, причому p з них не приєднаються до A, а q не приєднаються до B. Скільки нових ситуацій може скластися в залежності від поведінки нейтральних держав?

9. На залізничній станції є n світлофорів, кожен з яких має два положення: "ввімкнений" і "вимкнений". Скільки різних сигналів можна подати з їх допомогою?

10. Скількома способами можна відзначити на шаховій дошці два квадрати - білий і чорний?

11. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли повернувся, то виявив, що забув код, який складається з п'яти цифр. Пам'ятав тільки, що код містив числа 23 і 57. Яку найбільшу кількість варіантів треба перебрати, щоб відкрити камеру?

12. Скільки тризначних чисел можна утворити, використовуючи тільки один раз цифри:

    (а) 0, 1, 2, 3, 4;
    (б) 5, 6, 7, 8, 9?

13. Автомобільний номер складається з двох букв та п'яти цифр. Скільки різних номерів можна утворити, використовуючи 32 букви української абетки?

14. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами можна піднятися і спуститись з вершини, якщо:

    (а) підйом та спуск відбувається різними шляхами;

(б) можна використовувати і той самий шлях?

15. У їдальні є 3 перші страви, 5 других та 2 треті. Скількома способами можна з них утворити повноцінний обід?

16. Скількома способами можна вибрати голосну і приголосну букву із слів:

    (а) “будинок”;

    (б) “комбінаторика”?

17. З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого та 10 середнього треба вибрати по слову. Скількома способами можна зробити такий вибір?

18. Скільки є п’ятизначних чисел, які однаково читаються справа наліво та зліва на право?

19. Скільки дільників має число 198 (враховуючи саме це число і одиницю)?

20. Скільки різних добутків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 11?

21. Скільки різних танцювальних пар можна утворити з 6 хлопців і 7 дівчат? Скількома способами серед них можна вибрати дві пари, які будуть танцювати одночасно?

22. Є 4 види конвертів без марок і 3 види марок. Є також 5 видів готових конвертів з марками. Скільки є різних способів відправити листа?

23. Скільки є семизначних чисел, які діляться на 5?

24. Скільки різних дільників має число $3^4 \times 5^5$ (враховуючи саме це число і одиницю)?

25. Скільки різних парних добутків можна отримати з множників 2, 3, 5, 7, 11?

26. Скільки різних танцювальних пар можна утворити з 6 хлопців і 5 дівчат? Скількома способами можна вибрати три пари, які будуть танцювати одночасно?

27. Азбука Морзе передає російську букву «е» однією точкою, а букву «э», яка рідко зустрічається, послідовністю з п’яти символів. Чому не можна обійтись послідовностями з не більш як чотирьох символів?

28. Скількома способами з 28 костей доміно можна вибрати дві кістки так, щоб їх можна було прикласти одну до одної?

29. Кидають три гральні кістки. Скількома способами вони можуть випасти так, три верхні грані або однакові, або всі три різні?

30. Яка максимальна кількість жителів може бути у країні, якщо відомо, що у всіх її жителів різні набори зубів?

3 Перестановки без повторень

3.1 Задачі для практичного заняття

1. Скількома способами можна роздати 25 студентам 25 різних білетів?

2. Алхімік знає, що для приготування еліксиру життя потрібно 20 різних речовин. Йому невідомо тільки в якому порядку їх треба змішувати. Скільки всього існує таких порядків?

3. Скількома способами можна розмістити n гостей за одним столом?

4. Нехай стіл круглий і всі місця рівноцінні. Скільки є різних розміщень гостей, якщо розміщення вважати однаковими, коли у кожного гостя той самий сусід справа і той самий сусід зліва?

5. Нехай стіл круглий і всі місця рівноцінні. Скільки є різних розміщень гостей, якщо розміщення вважати однаковими, коли у кожного гостя ті самі сусіди?

6. На полиці є 3 книжки одного автора і 7 книжок інших авторів. Скількома способами їх можна розмістити так, щоб книги одного автора стояли поряд?

7. Скількома способами можна впорядкувати множину {1, 2, ... , 2n} так, щоб кожне парне число мало парний номер?

8. Скільки існує перестановок множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, в яких елементи 1 і 2 стоять поряд в порядку зростання? Поряд, але в довільному порядку? Скільки існує перестановок, в яких числа 1 і 2 не стоять поряд?

3.2 Індивідуальні завдання

1. Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

2. У шаховому турнірі бере участь 7 осіб. Скількома способами вони можуть розподілити місця між собою?

3. Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

4. Скількома способами можуть сісти за стіл 5 жінок і 5 чоловіків так, щоб особи однієї статі не сиділи поряд?

5. На полиці є 4 томики поезії і 9 підручників. Скількома способами їх можна розставити так, щоб всі підручники стояли поряд?

6. На протязі сесії студенти здають чотири іспити, серед яких два – з математичних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб іспити з математики не йшли один за одним?

7. Скількома способами можна 10 різних іграшок роздати 10 дітям так, щоб кожному дісталася принаймні одна іграшка?

8. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ... , n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поряд в порядку зростання?

9. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ... , n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поряд в порядку зростання?

10. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ... , n\}$ так, щоб не всі з чисел 1, 2, 3 стояли поряд?

11. Скільки існує перестановок множини з n елементів, в яких дані два елементи не стоять поряд?

12. Скільки існує перестановок множини з n елементів, в яких дані два елементи стоять поряд?

13. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, ... , 3n\}$ так, щоб числа, кратні 3, стояли на місцях, кратних 3?

14. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, ... , 6n\}$ так, щоб числа, кратні 2 і 3, стояли на місцях, кратних 2 і 3 відповідно?

15. Скількома способами можна вишикувати в колону один за одним n осіб так, щоб особа B стояла безпосередньо за особою A?

16. Скількома способами можна вишикувати в колону один за одним n осіб так, щоб особа B стояла за особою A, але не обов'язково безпосередньо?

17. Скількома способами можна розподілити 10 листів у 10 різних конвертів?

18. Скільки існує перестановок з n чисел, в яких дані три числа не стоять поряд?

19. П'ятнадцятеро дітей взялося для танцю за руки і утворило коло навколо ялинки. Скільки при цьому може бути різних розташувань дітей?

20. 7 хлопчиків і 7 дівчаток взялося за руки і утворило коло для танцю. Скільки можливо різних розташувань дітей, якщо жодні дві дівчинки не повинні стояти поряд?

21. Батько купив для своїх 5 дітей 5 різних подарунків. Скількома способами може він їх роздати так, щоб жодна дитина не залишилась без подарунка?

22. В класі 28 дітей. Скількома способами вони можуть вишикуватися в ряд, якщо першим має стояти староста класу?

23. На чортовому колесі має бути встановлено 35 різних кабінок. Скількома способами це можна здійснити?

24. 10 туристів, серед яких було 3 дітей, піднімаються вузькою стежкою вгору. Скількома способами вони можуть розташуватись один за одним так, щоб діти йшли поряд, але не перші і не останні?

25. 16 дітей катаються на каруселі, де всі місця оформлені по-різному. Скільки може бути різних розміщень дітей? Як зміниться відповідь, якщо всі місця на каруселі однакові?

26. В дівчинки було 30 намистинок: 10 червоних, 10 рожевих і 10 жовтих. Всі намистинки круглі, але різні за розміром. Дівчинка хоче зробити кругле намисто, чергуючи кольори: червоний, рожевий, жовтий. Знову червоний і т.д. Скільки різних намист можна зробити?

27. За стіл для переговорів сідають по 8 лицарів двох ворогуючих сторін. Скількома способами їх можна розсадити так, щоб жодні два лицарі однієї сторони не сиділи поряд?

28. Нехай стіл для переговорів круглий і всі місця за ним рівноправні. Скількома способами можна за ним розмістити по 8 лицарів двох ворогуючих сторін так, щоб жодні два лицарі однієї сторони не сиділи поряд?

29. Скількома способами можна розмістити за столом (всі місця різні) 9 гостей, серед яких двоє хочуть сидіти поряд?

30. На колі задано 12 точок. Скількома способами їх можна позначити числами 1, 2,. . . , 12 так, щоб числа 1, 2 і 3 йшли поряд в порядку зростання за годинниковою стрілкою?

4 Розміщення без повторень

4.1 Задачі для практичного заняття

1. Скількома способами з 25 студентів можна вибрати старосту, профорга і фізорга?

2. Скільки існує телефонних номерів, які містять 5 різних цифр?

3. Скільки існує чотиризначних чисел з усіма різними цифрами?

4. Скільки є п'ятизначних чисел, які однаково читаються справа наліво і зліва направо?

5. Скільки є матриць з n рядків і k стовпчиків з елементами з множини $\{0, 1\}$? Скільки серед них таких, в яких всі рядки різні?

6. Скільки є квадратних матриць розміру n на n, з елементами з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$? Скільки серед них таких, що в кожному рядку всі елементи різні і ніякі два рядки не повторюються?

4.2 Індивідуальні завдання

1. Скільки потрібно словників, щоб безпосередньо робити переклади з української, російської, англійської, німецької та французької мов на будь-яку іншу з них?

2. Скількома способами можна позначити трикутник великими буквами латинського алфавіту?

3. Скільки різних типів білетів із вказанням станції відправлення і станції призначення треба віддрукувати для лінії з 50 станцій?

4. Скількома способами може бути присуджена золота, срібна та бронзова медалі на змаганнях, в яких беруть участь 15 спортсменів?

5. Скількома способами можна зробити триколірний прапор з горизонтальним смугами однакової ширини, якщо є тканини 7 різних кольорів? Розв'язати цю задачу за умови, що серед кольорів обов'язково має бути голубий.

6. Скількома способами серед 30 учнів класу можна обрати старосту, фізорга та редактора стінної газети?

7. Студенти вивчають 7 предметів. У понеділок 4 пари, причому всі дисципліни різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

8. В класі 20 хлопців і 20 дівчат. Для участі у вечері художньої самодіяльності необхідно виділити танцювальний дует, дует співаків і гімнастичний дует. Скількома способами це можна зробити, якщо всі учні співають, танцюють і виконують гімнастичні вправи, але можуть бути задіяні тільки один раз?

9. Скількома способами можна роздати 8 студентам по білету з 15 різних білетів?

10. На вечірці 7 жінок і 9 мужчин. .Скільки різних пар можна утворити для танцю, якщо всі жінки танцюють?

11. Скількома способами можна з повної колоди карт (52 карти) вибрати по одній карті кожної масті? Скількома способами це можна зробити так, щоб всі вибрані карти були різні (не було двох королів, наприклад)?

12. В місцевком вибрано 9 осіб. Серед них треба обрати голову, заступника і культорга. Скількома способами це можна зробити?

13. В батька є 5 різних апельсинів, які він роздасть своїм 8 дітям, причому кожен отримає або один апельсин, або жодного. Скількома способами це можна зробити?

14. Спортивний клуб нараховує 30 членів. Скількома способами з них можна вибрати команду для участі в естафеті на 100+200+400+800 метрів?

15. Компанія з 7 юнаків і 10 дівчат танцює. Скільки є варіантів участі дівчат в танці, якщо всі юнаки танцюють?

16. Воротар 7 разів подає м'яч в гру. Нехай тренер радив йому подавати кожен раз іншому гравцеві. Скількома способами він може це зробити?

17. Скількома способами можна вишикувати п'ятьох осіб в ряд для фотографування? Скількома способами можна це зробити, якщо на фотографії дві особи мають бути на задньому плані, а три на передньому?

18. Футбольна команда визначається складом команди і роллю, яку відіграє в команді кожен гравець. Скільки різних команд можна скласти з 13 гравців, якщо кожен гравець може займати в команді довільне місце? Двоє гравців можуть бути тільки воротарями?

19. Студентові треба здати 4 екзамени за 8 днів. Скількома способами можна це зробити, якщо в один день можна здати не більше, ніж один екзамен?

20. Студентові треба здати 4 екзамени за 8 днів, причому останній екзамен має бути в останній день. Скількома способами можна це зробити?

21. Четверо студентів поселялось в гуртожиток ще тоді, коли було 25 вільних місць. Скількома способами вони могли бути розселені?

22. 20 дітей хочуть кататися на каруселі, де є 16 однакових місць. Скількома способами вони можуть це зробити?

23. 20 дітей хочуть кататися на каруселі, де є 16 різних місць. Скількома способами вони можуть це зробити?

24. В дівчинки є 30 різних за кольором і розміром круглих намистинок. Скількома способами вона може з них зробити кругле намисто з 20 намистинок?

25. Скільки є різних матриць розміру $n \times n$, складених з чисел $\{1, 2, \dots m\}$, $m > n$, в яких в кожному рядочку всі елементи різні?

26. Скільки є різних матриць розміру $n \times n$, складених з чисел $\{1, 2, \dots m\}$, $m > n$, в яких в кожному рядочку всі елементи різні і всі рядки теж різні?

27. На колі задано 12 точок, позначених різними буквами латинського алфавіту. Скільки є різних векторів, що з'єднують ці точки?

28. У Карлсона є 10 різних цукерок. На обід він хоче з'їсти 5, причому для нього має значення, в якій послідовності він це зробить. Скількома способами Карлсон може пообідати?

29. Скільки є всіх натуральних чисел, в яких всі цифри різні?

30. На випускні іспити в ліцеї виносилось 6 предметів: українська мова і література, історія, математика, фізика, інформатика та англійська мова. Перші два предмети обов'язкові і здаються спочатку, а з 4 інших можна вибрати 3. Скільки є послідовностей складання іспитів?

5 Комбінації без повторень

5.1 Задачі для практичного заняття

1. Скількома способами з 25 студентів можна вибрати трьох чергових?

2. Дано n точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести, з'єднуючи точки попарно? Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

3. На площині проведено n прямих так, що ніякі дві з них не паралельні і ніякі три з них не перетинаються в одній точці. Знайти кількість точок перетину цих прямих і кількість утворених ними трикутників.

4. На колі задано n точок. Відомо, що ніякі три хорди, проведені через них, не перетинаються в одній точці. Скільки є точок перетину хорд?

5. Скільки існує чотиризначних чисел, в яких кожна наступна цифра більша (менша) за попередню?

6. Дано натуральні числа від 1 до 30. Скількома способами з них можна вибрати три числа так, щоб їх сума була парна? $[C_{15}^1 \cdot C_{15}^2 + C_{15}^3]$

7. В хокейному клубі 8 нападаючих, 5 захисників і 2 воротарі. Скільки різних варіантів команди можна скласти, якщо на лід виходить воротар, два захисники і троє нападаючих?

5.2 Індивідуальні завдання

1. Скількома способами можна вибрати 3 фарби з 5 фарб?

2. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n кутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?

3. На колі задано 9 точок. Скільки опуклих многокутників з вершинами в цих точках можна побудувати?

4. Правильний многокутник має 35 діагоналей. А скільки сторін?

5. Нехай є k частинок, які розташовані в n різних областях простору. Припустімо, що частинки не відрізняються одна від одної і в кожній області може знаходитися не більше однієї частинки (отже, $k \leq n$). Стан системи описується вказанням областей, в яких розташовані частинки (це модель Фермі-Дірака). Скільки є різних станів системи?

6. На вечірку прийде n гостей, не знайомих між собою. Скільки нових знайомств може відбутися?

7. З 52 членів конференції треба обрати президію з 5 осіб і делегацію з 3 осіб. Скількома способами це можна зробити, якщо члени президії можуть бути делегатами?

8. З 52 членів конференції треба обрати президію з 5 осіб і делегацію з 3 осіб. Скількома способами це можна зробити, якщо члени президії не можуть бути делегатами?

9. Скількома способами можна скласти комісію в складі 3 осіб з 4 подружніх пар, якщо в комісію можуть входити довільні троє з 8 осіб?

10. Скількома способами можна скласти комісію в складі 3 осіб з 4 подружніх пар, якщо в комісію не можуть входити двоє з подружжя?

11. В кімнаті є n лампочок. Скільки є різних способів освітлення кімнати? Скільки є способів освітлення, при яких горить рівно k лампочок?

12. З 10 різних квіток треба скласти букет так, щоб у ньому була непарна кількість квіток. Скількома способами це можна зробити?

13. У бібліотеці є 10 теоретичних підручників з дискретної математики і 5 задачників з цього предмету. Скількома способами можна видати студентам по два теоретичних підручники і два задачники?

14. На класній дискотеці 14 хлопців і 16 дівчат. Скількома способами з них можна вибрати 4 пари для танцю?

15. Скількома способами групу з 15 учнів можна поділити на дві групи так, щоб в першій було 11 осіб, а в другій 4?

16. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з 1 офіцера, 2 сержантів і 20 рядових?

17. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з 1 офіцера, 2 сержантів і 20 рядових, якщо до загону повинен увійти командир роти і старший з сержантів?

18. П'ятеро дівчат і семеро юнаків грають у городки. Скількома способами вони можуть розділитися на дві команди по 6 осіб так, щоб у кожній команді був хоча б один хлопець?

19. Скількома способами колоду з 52 карт можна розділити на дві рівні частини так, щоб у кожній було порівну чорних і червоних карт?

20. У групі навчається 10 хлопчиків і 14 дівчаток. Скількома способами групу можна розділити на дві частини так, щоб у кожній частині була однакова кількість хлопчиків і дівчаток?

21. Скільки різних паралелограмів можна отримати при перетині n паралельних прямих k іншими паралельними прямими?

22. У одного студента є 7 книжок з математики, а в другого – інших 8. Скількома способами вони можуть обміняти 3 книги одного на 3 книги іншого?

23. З колоди, в якій є 52 карти, витягнули 10 карт. У скількох випадках серед них є хоча б один туз?

24. З колоди, в якій є 52 карти, витягнули 10 карт. У скількох випадках серед них є рівно один туз?

25. З колоди, в якій є 52 карти, витягнули 10 карт. У скількох випадках серед них є рівно два тузи?

26. Серед 15 осіб одна подружня пара. Скількома способами з них можна вибрати комісію з 9 осіб так, щоб у неї не ввійшли двоє з подружжя?

27. Скільки є трикутників, вершинами яких є вершини даного шестикутника?

28. Скількома способами з n абонентів можна утворити 4 пари для переговорів?

29. Скількома способами серед 6 мужчин і 5 жінок можна вибрати команду з 6 осіб так, щоб серед них було принаймні дві жінки?

30. Скількома способами можна розставити n нулів і k одиниць так, щоб ніякі одиниці не стояли поряд?

6 Перестановки з повтореннями

6.1 Задачі для практичного заняття

1. Скільки різних "слів" (в тому числі без змісту і без звучання) можна отримати, переставляючи букви у слові "аудиторія"?, "Літостротон"?

2. Скільки є різних послідовностей з чотирьох одиниць, трьох двійок та чотирьох трійок?

3. Скількома способами четверо юнаків можуть запросити до танцю чотирьох з шести дівчат?

4. Скількома способами 20 футбольних команд можна розподілити у 4 групи по 5 команд так, щоб 4 найсильніші команди грали в різних групах?

5. Скількома способами можна n різних предметів розкласти в k різних ящики так, щоб в перший ящик потрапило n_1 предметів, в другий – n_2 предметів, ... в k-ий ящик потрапило n_k предметів $(n + n_2 + \cdots + n_k = n)$?

6. Нехай ми маємо $k \cdot m$ різних предметів і k різних ящиків. Скількома способами їх можна порівну розкласти в ці ящики? Як зміниться відповідь, якщо всі ящики однакові?

6.2 Індивідуальні завдання

1. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи букви у слові "ананас"?

2. Скількома способами можна розділити 15 різних предметів між 3 особами так. Щоб кожному дісталась однакова кількість?

3. Скількома способами можна розділити 20 футбольних команд на 4 підгрупи по 5 команд?

4. Скількома способами можна роздати порівну 4 гравцям 28 костей доміно?

5. Скількома способами можна розселити 8 студентів у три кімнати: одномісну, трьохмісну та чотиримісну?

6. Скількома способами 14 різних підручників з вищої математики можна роздати сімом студентам так, щоб кожен отримав рівно два?

7. Скількома способами можна розподілити 10 спеціалістів по 4 цехах: першому, другому, третьому і четвертому так, щоб у кожен потрапило відповідно 1, 2, 3 і 4 спеціалісти?

8. Скільки різних "слів" (в тому числі без змісту і звучання) можна отримати, переставляючи букви у слові "анонс"?

9. Скількома способами 20 пасажирів може розташуватися у трьох вагонах, якщо у першому є 4 вільні місця, у другому – 7, а у третьому – 9?

10. На першому поверсі 14-ти поверхового будинку зайшло 20 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту так, щоб на 5 поверсі вийшло 3 особи, на 7 – 4 особи, а на 10 – теж 4 особи?

11. Скількома способами можна розфарбувати в червоний, синій та рожевий колір по два з шести предметів?

12. Скількома способами можна розташувати на полиці 5 книжок: 2 однакові романи і 3 різні томики віршів?

13. Скільки сигналів можна передати, міняючи порядок 7 прапорців, серед яких 1 червоний, 2 сині, 3 зелені і 1 білий?

14. На складі 20 найменувань товарів. Скількома способами їх можна розподілити по 3 магазинах, якщо відомо, що в перший магазин повинно бути доставлено 8, в другий – 7 , а в третій – 5 найменувань товарів?

15. Скільки існує різних 7 цифрових чисел з трьох трійок і чотирьох четвірок?

16. Скільки різних "слів" (в тому числі без змісту і без звучання) можна отримати, переставляючи букви у слові "ананас"?

17. Скількома способами можна розбити чотирьох гостей на дві пари?

18. Скількома способами 25 різних кульок можна розкласти в 5 різних коробок так, щоб в кожній коробці було по 5 кульок? Як зміниться відповідь, якщо коробки однакові?

19. Є 99 кульок з написаними на них усіма числами від 1 до 99 (числа підкреслені, тому всі читаються однозначно). Вишиковують числа в ряд і з кожної кульки зліва направо записують першу зліва цифру. При цьому утворюється послідовність довжини 99. Скільки є різних таких послідовностей?

20. Є 99 кульок з написаними на них усіма числами від 1 до 99 (числа підкреслені, тому всі читаються однозначно). Вишиковують числа в ряд і з кожної кульки зліва направо записують першу справа цифру. При цьому утворюється послідовність довжини 99.Скільки є різних таких послідовностей?

21. Вздовж доріжки в парку треба посадити 5 ялинок, 6 кленів і 4 берізки. Скількома способами це можна зробити?

22. Вздовж доріжки в парку треба посадити 5 ялинок, 6 кленів і 4 берізки так, щоб дерева росли симетрично відносно середини доріжки. Скількома способами це можна зробити?

23. Кожен рядок квадратної матриці 6×6 складається з трьох нулів, двох одиниць і однієї двійки. Скільки є різних таких матриць?

24. Кожен рядок квадратної матриці 6×6 складається з трьох нулів, двох одиниць і однієї двійки і всі рядки різні. Скільки є таких матриць?

25. Скількома способами можна переставити 7 одиниць, 4 нулі і 2 двійки так, щоб жодні дві одиниці не стояли поряд?

26. Є 2 одиниці, 3 трійки та 5 двійок, 5 четвірок і 5 п'ятірок. Скількома способами їх можна переставляти так, щоб парні числа стояли на парних місцях?

27. У мами 2 яблука, 3 груші і 4 апельсини. Кожен день вона видає дитині по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблено?

28. Скількома способами можна розташувати білі фігури (короля, ферзя, 2 тури, 2 слони та 2 коней) на першій лінії шахової дошки?

29. Скількома способами з 5 однакових намистинок і 2 більших можна скласти кругле намисто з застібкою? Скільки буде способів, якщо намисто має бути симетричне відносно центру?

30. Скількома способами можна розділити $m + n + s$ студентів на три групи так, щоб в першу групу потрапило m студентів, в другу — n студентів, а в третю — s студентів?

7 Розміщення з повтореннями

7.1 Задачі для практичного заняття

1. Скільки існує п'ятизначних номерів телефону? А шестизначних?

2. Скільки існує функцій, що відображають k-елементну множину A в n-елементну множину B?

3. У деякій країні не було двох жителів з однаковим набором зубів. Яка найбільша кількість жителів цієї країни?

4. Скільки натуральних чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9?

5. Скількома способами можна n різних предметів помістити у k різних ящики, якщо кожен ящик може вмістити всі предмети?

6. Скількома способами можна n різних предметів помістити у k однакових ящики, якщо кожен ящик може вмістити всі предмети?

7. У ліфт 14-ти поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

7.2 Індивідуальні завдання

1. Два листоноші повинні рознести 10 телеграм. Скількома способами вони можуть це зробити?

2. У школі навчається 1200 учнів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали?

3. Скільки функціональних відношень існує на множині з n елементів?

4. Автомобільний номер складається з 4 цифр і 3 букв. Знайти кількість всіх номерів, якщо букв є 30?

5. Скільки існує різних положень, в яких можуть опинитися n перемикачів, якщо кожен з них може бути або ввімкнений, або вимкнений?

6. Скількома способами можна здійснити оббивку 3 крісел 5 сортами тканин рівних кольорів?

7. Скількома способами 15 пасажирів можуть розміститись у трьох вагонах електрички?

8. Треба послати 6 термінових листи. Скількома способами це можна зробити, якщо листи можна послати одним з трьох кур'єрів?

9. Скільки є п'ятизначних чисел, які не містять цифри 9? А цифри 0?

10. На залізничній станції є n світлофорів. Скільки сигналів можна ними передати, якщо світлофор має три стани: або горить зелений, або червоний, або жовтий? Як зміниться відповідь, якщо одночасно може горіти декілька кольорів?

11. Код до сейфу складається з однієї латинської букви і чотирьох цифр. Скільки найбільше варіантів треба відшукати, щоб його віднайти?

12. Скількома способами три листоноші можуть рознести 9 телеграм?

13. Скільки є натуральних чисел, менших за 10^n, які не містять цифри 0?

14. На диск секретного замка нанесено k букв (наприклад, це 26 букв латинського алфавіту). Код складається з трьох букв. Скільки невдалих спроб можна зробити, не знаючи його?

15. Скількома способами з повної колоди карт можна витягнути по одній карті кожної масті?

16. Автомобільний номер складається з однієї, двох, або трьох букв і чотирьох цифр. Скільки є всеможливих номерів, якщо букв є 26?

17. Скількома способами можуть випасти три гральні кістки? В скількох випадках хоча б одна кістка відкриється на шести очках?

18. Скількома способами можуть випасти три гральні кістки? В скількох випадках рівно одна кістка відкриється на шести очках?

19. Четверо студентів здавали екзамен. Скількома способами могли бути поставлені їм оцінки, якщо жоден не отримав незадовільної?

20. Скільки чисел, менших за мільйон, можна отримати за допомогою цифр 7, 8, 9?

21. Скільки чисел, менших за мільйон, можна отримати за допомогою цифр 0, 1, 2?

22. Знайти суму всіх трьохзначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3 і 4.

23. Скільки парних чисел можна скласти з цифр числа 1234, використовуючи кожну цифру не більше одного разу?

24. Скільки є шестизначних чисел, які не містять цифри 1? А цифри 0?

25. У ліфт 16-ти поверхового будинку зайшло на першому поверсі 12 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта, якщо ліфт не зупиняється на 2, 3 і 4 поверхах?

26. У скількох шестизначних числах немає двох однакових цифр, що стоять поряд?

27. Скількома способами можуть розподілитися 15 пронумерованих більярдних куль у 6 лузах?

28. Автомобільний номер складається з 5 цифр і 2 букв. Знайти кількість всіх номерів, якщо букв є 30?

29. Скількома способами можуть випасти дві гральні кістки? В скількох випадках хоча б одна кістка відкриється на шести очках?

30. Листоноша має 12 листів для будинку з 40 квартирами. Скількома способами вони можуть бути розподілені?

8 Комбінації з повтореннями

8.1 Задачі для практичного заняття

1. У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити 8 різних листівок? Скількома способами можна купити 8 листівок, але не обов'язково різних? Скількома способами 8 покупців можуть купити по листівці?

2. Порахувати всі кості доміно як комбінації з повторенням з 7 елементів по 2.

3. Поїзд, в якому їде k пасажирів робить n зупинок. Скількома способами можуть пасажири вийти на цих зупинках? Скільки залишиться способів, якщо враховувати тільки кількість пасажирів (всіх пасажирів вважати однаковими)?

4. Скільки всіх невід'ємних цілих розв'язків має рівняння: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$? Скільки натуральних розв'язків має це рівняння?

5. Скільки всіх невід'ємних цілих розв'язків має нерівність: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq k$?

6. Скількома способами можна n однакових предметів покласти в k різних ящики, якщо кожен ящик може вмістити всі предмети?

8.2 Індивідуальні завдання

1. Записати всі комбінації з повторенням з елементів $\{a, b, c\}$ по два; по три.

2. Скількома способами можна розподілити 6 однакових папок у 3 шухляди стола, якщо кожна з них може вмістити всі папки?

3. Скількома способами можна покласти 15 однакових куль в 5 урн?

4. Скількома способами можна купити 8 тістечок в кондитерській, де є 6 різних сортів?

5. Скільки існує цілих невід'ємних чисел, менших за 10^n, цифри яких розташовані в неспадному порядку?

6. Скількома способами число 11^n можна зобразити у вигляді трьох співмножників? (Зображення, які відрізняються порядком множників, вважати різними, одиницю $1 = 11^0$ теж вважати множником)

7. Скількома способами число 11^n можна зобразити у вигляді трьох співмножників? (Зображення, які відрізняються порядком множників, вважати різними, але одиницю множником не вважати)

8. Скільки є чисел від 1 до 9 999 999 999, в яких сума цифр рівна 5?

9. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 5?

10. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 9?

11. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 10?

12. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 15?

13. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 19?

14. Скільки існує трьохзначних чисел, в яких сума цифр рівна 25?

15. Скількома способами можна 17 однакових куль розкласти в 3 ящики так, щоб у кожному опинилась принаймні одна куля?

16. У вчительки є 3 варіанти контрольного завдання з математики: по 20 екземплярів першого і другого варіантів і 25 екземплярів третього варіанту. На контрольну прийшло 18 школярів. Скількома способами їм можуть бути роздані завдання? Як зміниться відповідь, якщо на контрольну прийде 21 школяр?

17. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^n, в яких сума цифр рівна k, $1 \leq k \leq 9$?

18. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^n, в яких сума цифр рівна 10?

19. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^n, в яких сума цифр рівна k, $11 \leq k \leq 19$, $n \geq 2$? $[\bar{C}_n^k - n \cdot \bar{C}_n^{k-10}]$

20. Скільки є неспадних послідовностей довжини n, складених з невід'ємних цілих чисел, якщо останній член послідовності рівний k?

21. Скільки є неспадних послідовностей довжини n, складених з невід'ємних цілих чисел, які не перевищують k?

22. Скільки є незростаючих послідовностей довжини n, складених з невід'ємних цілих чисел, які не перевищують k?

23. Скільки є невід'ємних цілих чисел, менших 10^n, цифри яких розташовані в незростаючому порядку?

24. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^{10}, в яких сума цифр рівна 8?

25. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^8, в яких сума цифр рівна 10?

26. Скільки є натуральних чисел, менших від 10^9, в яких сума цифр рівна 19?

27. В залі розташовано 3 урни для голосування, в яких знаходилось 53 бюлетені. Скількома способами це можна було зробити, якщо враховувати тільки кількість бюлетенів?

28. Скільки всіх невід'ємних цілих розв'язків має рівняння: $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 20$?

29. Скільки всіх невід'ємних цілих розв'язків має рівняння: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$?

30. Скільки всіх невід'ємних цілих розв'язків має нерівність: $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \leq 15$?

9 Метод рекурентних співвідношень

9.1 Задачі для практичного заняття

1. На скільки частин ділить площину n прямих, якщо ніякі 2 з них не паралельні і ніякі 3 не проходять через одну точку?

2. На скільки частин ділить площину n кіл, якщо всякі 2 кола мають спільну хорду і ніякі 3 з них не проходять через одну точку?

3. На скільки частин ділить простір n площин, якщо ніякі 4 не проходять через одну точку, ніякі 3 площини не мають спільної прямої, але всякі 3 мають спільну точку і ніякі 2 площини не є паралельні?

4. Через точку A в просторі проходить k площин так, що ніякі 2 не мають спільної прямої. На скільки частин вони ділять простір?

5. На скільки частин ділить сферу n площин, які проходять через її центр (ніякі 3 з них не мають спільної прямої)?

6. На скільки частин ділить сферу n кіл, якщо всякі 2 з них перетинаються в 2 точках і ніякі 3 з них не мають спільної точки)?

10 Метод траекторій

10.1 Задачі для практичного заняття

1. Методом траєкторій довести рівність $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

2. Методом траєкторій довести рівність $(C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

3. Методом траєкторій довести рівність $C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 \ldots + C_{n-m}^n C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$.

4. Методом траєкторій довести рівність $C_{n-1}^r + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r$.

5. Методом траєкторій довести рівність $C_{m+k}^m = \sum_{i=0}^m C_{p+i}^i C_{m+k-p-1-i}^{m-i}$, $0 \le p \le k-1$.

6. Методом траєкторій довести рівність $C_{m+k}^m = \sum_{i=0}^p C_p^i C_{m+k-p}^{m-i}$, $1 \le p \le \min\{m, k\}$.

11 Метод генератрис

11.1 Індивідуальні задачі 1.

1. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} a_n = C_m^n, & \text{якщо} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m, \\ \quad 0, & \text{якщо} \quad n \ge m. \end{cases}$

2. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = n(n-1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n = 0, \ldots, N, \\ 0, & \text{якщо} \quad n > N. \end{cases}$

7. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} n+1, & \text{якщо} \quad n = 0, \ldots, N, \\ 0, & \text{якщо} \quad n > N. \end{cases}$

8. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = C_{m+n}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

9. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n = 0, \ldots, k-1, \\ C_n^k, & \text{якщо} \quad n \geq k. \end{cases}$

10. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

11. Знайти твірну функцію для послідовності $C_{n+p-1}^n a^n$, $p \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

12. Знайти твірну функцію для послідовності $C_{n+p-2}^{n-1} a^n$, $p \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

13. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n = 0, \\ \frac{a^n}{n} & \text{якщо} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

14. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n \text{ — непарне}, \\ \frac{a^n}{n!} & \text{якщо} \quad n \text{ — парне}. \end{cases}$

15. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n \text{ — парне}, \\ \frac{a^n}{n!} & \text{якщо} \quad n \text{ — непарне}. \end{cases}$

16. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \frac{c^n}{n!} e^{-c}$, $c > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

17. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = C_m^n \, p^n \, (1-p)^{m-n}$, $p \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$.

18. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{якщо} \quad 0 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{якщо} \quad n > k. \end{cases}$

19. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

20. Знайти твірну функцію для послідовності $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

21. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = (1-x)^{-1}$.

22. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \sqrt{1-x}$.

23. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = (c + dx)^m$.

24. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = x^m(1+x)^m$.

25. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \operatorname{arctg} x^2$.

26. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \arcsin x$.

27. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \ln(1-x)$.

28. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{e^{t^2}}$.

29. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = \frac{1}{m!}(\frac{-x}{1+x})^m$.

30. Знайти загальний член a_n послідовності, для якої твірна функція $A(x) = x^3(1+x)(1-2x)^{-m-1}$.

11.2 Індивідуальні задачі 2.

Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ — дві послідовності, а $A(x)$ і $B(x)$ — відповідно їх твірні функції. Визначити $B(x)$ через $A(x)$, якщо:

1. $\begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 0, \\ a_{n-1} & \text{при} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$
2. $b_n = a_{n+1}$.
3. $b_n = a^n \cdot a_n$.
4. $b_n = na_n$.
5. $b_n = n^2 a_n$.
6. $b_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$.
7. $b_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_n$.
8. $b_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_n$.
9. $b_n = a_{n+1} - a_n$.
10. $b_0 = a_0$, $b_n = a_n - a_{n-1}$ при $n \geq 1$.
11. $b_0 = a_0$, $b_n = a_n - b \cdot a_{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$ при $n \geq 1$.
12. $b_n = a_n + C_k^1 a_{n-1} + C_{k+1}^2 a_{n-2} + \cdots + C_{k+n-1}^n a_0$.
13. $b_n = a_n + b$, $b \in \mathbb{R}$.

    За допомогою рівностей між відповідними твірними функціями, довести такі рівності:

14. $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$ (використати рівність: $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{m+n}$).
15. $\sum\limits_{i=0}^{k} C_{n+i}^n \cdot C_{m+k-i}^m = C_{m+n+k+1}^k$ (використати рівність: $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{(1-x)^{n+m+2}}$).
16. $\sum\limits_{i=0}^{k} C_{n+i}^i \cdot C_{m+k-i}^{k-i} = C_{m+n+k+1}^k$ (використати рівність: $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{(1-x)^{n+m+2}}$).
17. $\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_n^i \cdot C_{m+k-i-1}^{k-i} = C_{n+m}^k$, $n > m$ (використати рівність: $\frac{(1+x)^n}{(1+x)^m} = (1+x)^{n-m}$).
18. $\sum\limits_{i=0}^{2k} (-1)^i C_{n+i}^i \cdot C_{n+2k-i}^{2k-i} = C_{n+k}^k$ (використати рівність: $\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$).
19. $\sum\limits_{i=0}^{2k-1} (-1)^i C_{n+i}^i \cdot C_{n+2k-i-1}^{2k-i-1} = 0$ (використати рівність: $\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$).

20. $\sum\limits_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} C_n^{k-2i} \cdot C_{n-1+i}^i = C_{n-1+k}^k$ (використати рівність: $(1+x)^n \cdot \frac{1}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{(1-x)^n}$).

21. $\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i C_n^i C_n^{k-i} = (-1)^l C_n^l$, якщо $k = 2l$ (використати рівність: $(1+x)^n \cdot (1-x)^n = (1-x^2)^n$).

22. $\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i C_n^i C_n^{k-i} = 0$, якщо $k = 2l-1$ (використати рівність: $(1+x)^n \cdot (1-x)^n = (1-x^2)^n$).

23. $\sum\limits_{i=0}^{\min\{n,k\}} (-1)^{k-i} C_n^i \cdot C_{n+k-i-1}^{k-i} = 0$ при $k \geq 1$ (використати рівність: $(1+x)^n \cdot \frac{1}{(1+x)^n} = 1$).

24. $\sum\limits_{i=0}^{\min\{n,k\}} (-1)^i C_n^i \cdot C_{m+(k-i)}^{k-i} = C_{m-n+k}^k$ при $n < m+1$ (використати рівність: $\frac{(1+x)^n}{(1+x)^{m+1}} = \frac{1}{(1+x)^{m-n+1}}$).

25. $\sum\limits_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^i C_n^i C_{n-1+k-2i}^{n-1} = C_n^k$ (використати рівність: $\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$).

26. Знайти генератрису послідовності, якщо відомо, що $a_0 = 1$ і $\forall n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$.

27. Відомо, що генератриса послідовності $\{a_n\}$ дорівнює $1 + 2t^2 + 4t^3$, генератриса послідовності $\{b_n\}$ дорівнює $2 + 4t + 3t^2 + 2t^4$. Знайти члени послідовності $c_n = \{a_n\} * \{b_n\}$.

28. Відомо, що генератриса послідовності $\{a_n\}$ дорівнює $1 + 4t + 2t^3$, генератриса послідовності $\{b_n\}$ дорівнює $5 + 8t + 14t^2 + 2t^4$. Знайти члени послідовності $c_n = \{a_n\} * \{b_n\}$.

29. Дано послідовність $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Користуючись генератрисою, знайти загальний член послідовності a_n.

30. Відомо, що генератриса послідовності a_n дорівнює $A(t)$. Знайти генератрису послідовності $b_n = a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \ldots + a_n(-1)^0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. – Елементи комбінаторики. К: Вища школа, 1972, 84 с.

2. Олененко А.Я., Ядренко М.Й. Дискретна математика.– Видавничий центр Київського університету, 1997.

3. Теорія ймовірностей. Збірник задач. Під. заг. ред. Скорохода А.В. – К. : Вища школа, 1976. – 384 с.

Формат 60 x 84 $^{1}/_{8}$. Ум. друк. 3,72. Зам. № 10Е.

Видавець і виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007.