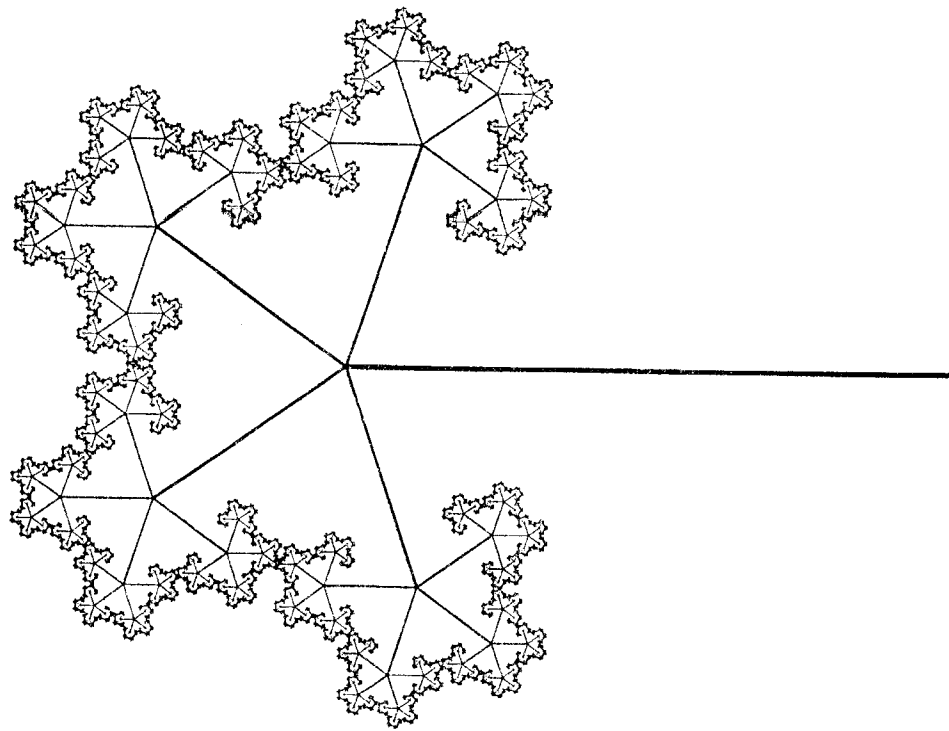


Т.О. Банах, Р.В.Ардан, Т.М. Радул

ДЕТЕРМІНІСТИЧНІ ФРАКТАЛИ



Міністерство Освіти України

Львівський державний університет ім. Ів. Франка

Рекомендовано до друку Радою
механіко-математичного факультету

Протокол №2 від 22.10.1997

Уклали: Тарас Онуфрійович Банах
Роман Володимирович Ардан
Тарас Миколайович Радул

Методичні вказівки до спецкурсу "ФРАКТАЛИ У ГЕОМЕТРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ"

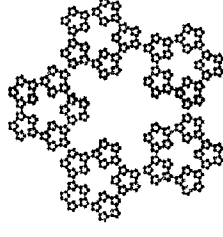
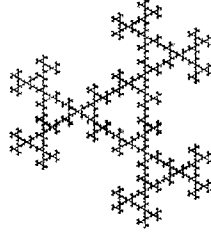
для студентів молодших курсів

Вводиться поняття фрактала та фрактальної вимірності. Розглянуто ймовірнісний алгоритм малювання детерміністичних фракталів.

Тираж 100. Надруковано видавничим центром Львівського державного університету ім. І. Франка.
290602 Львів, вул. Університетська, 1.

ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

1. Обчислити вимірність Колмогорова для фракталів з прикладів 2.1. 2.5.
2. Використовуючи властивість самоподібності, обчислити вимірність фракталів із прикладів 1.1, 1.3, 1.4, 2.1, 2.5.
3. Нехай A_∞ – аттрактор IFS $\{C, w_1, \dots, w_k\}$, де кожне відображення w_i є лінійним, тобто $w_i(z) = a_i z + b_i$ для деяких $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $|a_i| < 1$. Припустимо, що $w_i(A_\infty) \cap w_j(A_\infty) = \emptyset$, якщо $i \neq j$. Використовуючи властивість самоподібності фрактала A_∞ , довести, що $D(A_\infty) = d$, де d – таке (єдине) число, що $|a_1|^d + \dots + |a_k|^d = 1$.
4. Довести властивості $a) - f)$ виміру Хаусдорфа.
5. Довести, що вимірність Хаусдорфа – розривна, як функція з $\text{exp}(\mathbb{N})$ в \mathbb{R} .
6. Навести приклад фракталів, у яких топологічна розмірність дорівнює 1 і співпадає з фрактальною вимірністю.
7. Обчислити фрактальну вимірність наступних двох множин:



Рекомендована Література

1. M. Bamsley. *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
2. G.A. Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, 1992.
3. K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.
4. J. Kudrewicz. *Fraktale i chaos*. Warszawa: WNT, 1996.
5. B.B. Mandelbrot. *The fractal geometry of Nature*. NY: W.H. Freeman and Comp., 1983.

Згідно з останньою властивістю, міра Хаусдорфа є характеристикою підмножини \mathbb{R}^n з нульовою мірою Лебега і може приймати значення від 0 до n включно.

Для знаходження вимірності фракталів можемо використати також властивість самоподібності. Для прикладу, розглянемо криву Коха K . Легко бачити, що вона складається з 4 конгруентних кусків, кожен з яких є зменшеною у 3 рази копією усієї кривої. Тоді для невід'язного числа d " d -вимірний об'єм" кривої K дорівнює

$$V_d(K) = 4 \frac{V_d(K)}{3^d}.$$

Вважаючи, що $V_d(K) \neq 0, \infty$, одержимо $3^d = 4$, звідки $d = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$, що співпадає із значенням вимірності Колмогорова, обчисленою за означенням.

Для вимірів Хаусдорфа і Колмогорова, а також для багатьох інших подібно означуваних вимірів часто використовується спільний термін *фрактальний вимір*. Він істотно відрізняється від так званої *топологічної розмірності*, яка є топологічним інваріантом (на відміну від фрактальних вимірів) і приймає лише цілі значення.

Означення. Нехай X — метричний простір. Топологічна розмірність $\text{ind}(X)$ означається індуктивно:

- 1) $\text{ind}(X) = -1$ тоді і лише тоді, коли $X = \emptyset$;
 - 2) $\text{ind}(X) \leq n$ тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ має окіл, межа якого має топологічний вимір $\leq n - 1$.
- Означимо $\text{ind}(X)$ як найменше з чисел n , для яких $\text{ind}(X) \leq n$.

Наприклад, топологічна розмірність множини Кантора рівна 0, а кінцями Серпінського — 1. Серед різних означень фрактала відліамо наступне означення Мандельброта (котре ми наразі можемо строго подати):

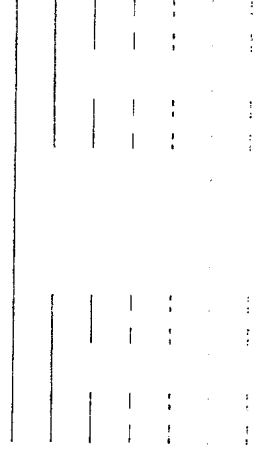
фракталом називаємо множину, фрактальний вимір якої відрізняється від топологічної розмірності.

Це означення також не надто вдале, оскільки існують підмножини площини, гомеоморфні Канторівській множині, з фрактальним виміром рівним 0 (тобто властивість множини бути фракталом не є топологічною).

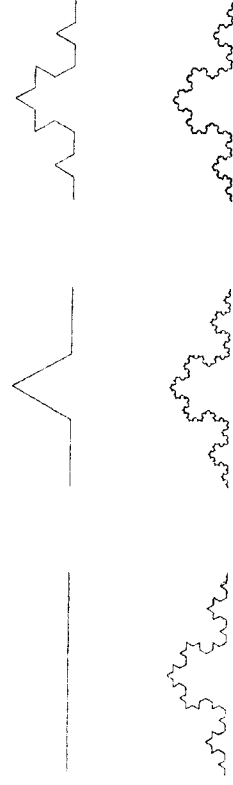
§1. ПОНЯТТЯ ПРО ФРАКТАЛИ

Термін *фрактал* був введений на початку 80-х років Мандельбротом, хоча приклади об'єктів, які тепер прийнято називати фракталами, були відомі давно. Щоби було зрозумілію, про що іде мова, розглянемо декілька класичних прикладів.

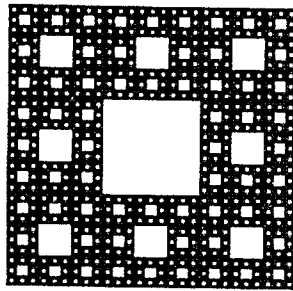
1.1. Множина Кантора (Cantor, 1883). Відрізок $[0,1]$ розділимо на 3 рівні частини і викинемо середній інтервал $(1/3, 2/3)$. Те саме зробимо з двома відрізками, що залишилися: викинемо середню частину кожного з них. Продовжуючи цей процес, в границі одержимо фігуру, що має назву *множина Кантора*. Відомо, що ця множина незлічenna, має нульову міру Лебега і є компактною підмножиною відрізка.



1.2. Крива Коха (Heige von Koch, 1904). Це границя послідовності ламаних f_n , які утворюються наступним чином: f_0 — це відрізок $[0,1]$; далі, середня ланка кожного відрізка ламаної f_n замінюється двома відрізками, як показано на малюнку:



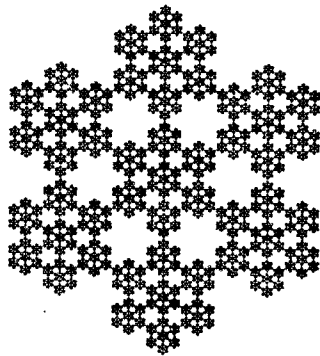
1.3. Килим Серпінського (Sierpiński, 1915).



Це двовимірний аналог множини Кантора. Поділимо квадрат на 9 рівних квадратиків і викинемо центральний (без границі). З восьми квадратиками, що залишилися проробимо таку ж операцію: поділимо на 9 квадратиків і викинемо нейтральний. Продовжувати цю процедуру, в границі одержимо множини, що називається килимом Серпінського.

1.4. Сніжинка (приклад системи ітерованих відображень).

На комплексній площині \mathbb{C} розглянемо правильний шестикутник з центром z_0 та вершинами z_1, \dots, z_6 . Для кожного $i = 0, \dots, 6$ розглянемо відображення $w_i = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}z_i$ — стиск комплексної площини в три рази з центром у точці z_i . Для компактноі підмножини $A \subset \mathbb{C}$ розглянемо множини $W(A) = \bigcup_{i=0}^6 w_i(A)$ і через $W^n(A)$ позначимо n -ту ітерацію відображення W , тобто $W^n(A) = W(W^{n-1}(A))$. Виявляється, що незалежно від вибору початкової множини $A \subset \mathbb{C}$ послідовність $W^n(A)$ збігається до множини, зображеної на рисунку.



1.5. Множина Жуліа (Gaston Julia, Pierre Fatou, 1918-1920). Нехай $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ довідний поліном. Траєкторією точки $z_0 \in \mathbb{C}$ (відносно відображення f) називається послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $z_{n+1} = f(z_n)$ при $n \geq 0$. Множина $K(f)$ всіх точок z_0 з обмеженою траєкторією називається заповненою множиною Жуліа відображення f , а її межа $J(f)$ — множиною Жуліа многочлена f . На малюнку зображено мно-

Означеній вище вимір (Колмогорова) добре придатний до обчислення, але має той недолік, що границя $d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$ не завжди існує. Вимірність, запропонована набагато раніше Хаусдорфом, не має цієї вади, зате має децю заплутаніше означення.

Покриттям B множини F називається сім'я куль (скінченна чи нескінченна), об'єднання яких містить множини F . Для чисел ε, d покладаємо

$$\alpha(d, \varepsilon) = \inf_B \sum_{B \in \mathcal{B}} (\text{diam } B)^d,$$

де інфімум береться по всіма можливим покриттям B множини F кулями діаметру $\leq \varepsilon$. Зауважимо, що величину $\alpha(d, \varepsilon)$ можна трактувати як " d -вимірний об'єм" об'єднання $\cup B$.

Завжди існує скінченна або нескінченна границя

$$\alpha(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(d, \varepsilon).$$

Можна довести, що існує єдине дійсне число $d_0 \geq 0$, для якого $\alpha(d) = \infty$ при $d < d_0$ і $\alpha(d) = 0$ при $d > d_0$. Це число d_0 називається *виміром Хаусдорфа* множини F і позначається через $D(F)$.

Вимір Хаусдорфа тісно пов'язаний з виміром Колмогорова. Якщо прийняти, що B складається з куль діаметра ε , тоді число $\alpha(d, \varepsilon)$ порівняє величини $N(\varepsilon)\varepsilon^d$. Якщо для певного d існує скінченна границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon^d > 0$, тоді d є вимірністю Колмогорова множини F . Для простих фракталів вимірності Хаусдорфа та Колмогорова співпадають. В загальному випадку має місце нерівність $d(F) \geq D(F)$.

Серед властивостей виміру Хаусдорфа зазначимо наступні:

- якщо $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, тоді $D(A) \leq D(B)$;
- якщо $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді $D(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} D(A_n)$ (зокрема кожна злічена підмножина \mathbb{R}^n має нульову вимірність Хаусдорфа);
- якщо $A, B \subset \mathbb{R}^n$, тоді $D(A \times B) \leq D(A) + D(B)$;
- $D(A \cup B) = \max\{D(A), D(B)\}$;
- для ліпшевого відображення $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ $D(f(A)) \leq D(A)$;
- будь-яка підмножина \mathbb{R}^n з додатковою мірою Лебега має вимір Хаусдорфа, рівний n .

назвемо виміром фігури F .

4.1. Приклад. Розглянемо рівносторонній трикутник Серпінського зі стороною 1. Ясно, що його можна покрити 3 квадратиками зі стороною $1/2$, або 9 квадратиками зі стороною $1/4$, або, в загальному, 3^n квадратиками зі стороною $1/2^n$. Приймаючи $\varepsilon = 1/2^n$, одержимо

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585.$$

Повторюючи ці ж міркування, для інших фракталів одержимо

$$d(\text{множина Кантора}) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 0,6309,$$

$$d(\text{крива Коха}) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2618,$$

$$d(\text{спіжінка}) = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,7712,$$

$$d(\text{клитм Серпінського}) = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,8927.$$

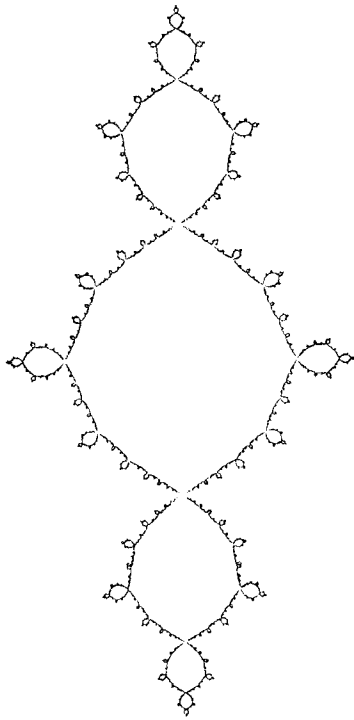
4.2. Приклад. Розглянемо фрактал (квадрат узагальненої множини Кантора), який будується наступним чином: із квадрату зі стороною $a_0 = 1$ викидається симетрично розміщений хрест з шириною ramen $p \cdot a_0$, $0 < p < 1$, і довжиною a_0 . Залишиться чотири квадратиків із стороною $a_1 = a_0(1-p)/2$. Їз кожним квадратиком проробимо цю ж процедуру — викинемо хрест із товщиною ramen $p \cdot a_1$. Продовжуючи у цьому дусі, у границі одержимо фрактал, зображений для $p = 0,5$ на рисунку.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ цей фрактал накривається 4^n квадратиками зі стороною $a_n = a_0((1-p)/2)^n$. Вимірність цього фрактала рівна

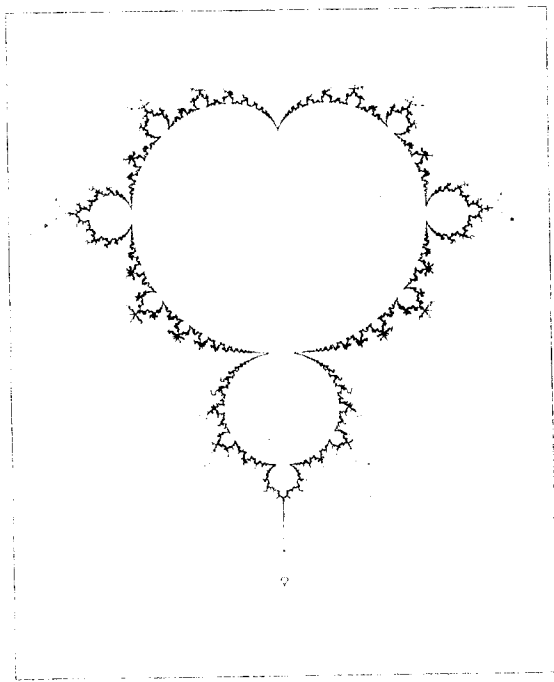
$$d = \frac{\log 4^n}{\log((1-p)/2)^n} = \frac{\log 4}{\log(2/(1-p))} = \frac{\log 4}{\log 2 - \log(1-p)}.$$

і, в залежності від параметра p , приймає значення від 0 до 2. При $p = 0,5$ одержуємо $d = 1$.

жину Жюліа полінома $f(z) = z^2 - 1$.



1.6. Множина Мандельброта (Mandelbrot, 1980). Розглянемо на комплексній площині \mathbb{C} послідовність $\{z_0, z_1, \dots\}$, де $z_0 = 0$ і $z_{n+1} = z_n^2 + c$, а c — деякий (комплексний) параметр. Сукупність тих значень параметра c , для яких послідовність $\{z_n\}$ обмежена, (або, еквівалентно, тих c , для яких нуль належить заповненій множині Жюліа відображення $f(z) = z^2 + c$), утворює так звану множину Мандельброта, межу якої зображено на малюнку.



Які ж спільні риси об'єднують розглянуті множини? Benoit Mandelbrot, який ввів у математичний вжиток цей термін, виділяє наступні три характеристичні риси фракталів:

- ці множини визначаються рекурентними залежностями;
- мають риси самоподібності (частина фрактала подібна до цілого);
- є об'єктами з дробовою вимірністю.

У деяких науково-популярних працях Мандельброта стверджується, що всі об'єкти, котрі виникають у природі, мають фрактальну структуру. Ідеальні фігури, такі як пряма, коло, квадрат - не що інше як абстрактний витвір людського мозку. Дійсно, якщо уважно подивитись навколо (на траву, листя дерев, мороз на шибках, лінію горизонту в горах, бризки морської хвилі), то важко не погодитись з Мандельбротом.

Згадані три властивості фракталів не можуть, однак, служити основою для строгого математичного означення. Одні і ті ж геометричні образи можна означити різними способами. Наприклад, множина Кантора може бути визначена аналітично як множина тих точок відрізка $[0,1]$, у трійковому записі яких відсутня цифра 1. З іншого боку, такий нефрактальний об'єкт як коло може бути визначений рекурентно як замикання множини точок з полярними координатами (r, φ_n) , де $\varphi_{n+1} = \varphi_n + 1$.

Властивість самоподібності характерна також деяким нефрактальним об'єктам, наприклад, відрізку. Про вимірність множин ми детальніше поговоримо у §4. Поки що будемо мати на увазі, що скінченні множини мають вимір 0, відрізок - 1, квадрат - 2. Можна розширити поняття виміру так, щоб вимірність могла бути і дробовою. Ми покажемо пізніше, що розмірність $D(A)$ геометричних об'єктів, котрі ми розглядали, рівна:

$$D(\text{множина Кантора}) = \log 2 / \log 3;$$

$$D(\text{крива Коха}) = \log 4 / \log 3;$$

$$D(\text{килим Серпінського}) = \log 8 / \log 3.$$

Можна провести аналогію між фракталами і деякими класами дійсних чисел. Відомо, що серед дійсних чисел вирізняються цілі, раціональні, ірраціональні, алгебраїчні, обчислювальні. У множині геометричних об'єктів також можна виділити деякі підкласи: ті, якими займа-

ли всі відображення w_1, \dots, w_k - афінні, рекомендується брати ймовірності p_1, \dots, p_k пропорційним коефіцієнтам стиску площі відображеннями w_1, \dots, w_k .

Під коефіцієнтом стиску площі афінним відображенням $w(x, y) = (x', y')$, що задається формулою

$$\begin{cases} x' = ax + by + c, \\ y' = dx + ey + f, \end{cases}$$

ми розуміємо величину $|ad - bd|$, яка рівна площі образу одиничного квадрату (а фактично, будь-якої фігури одиничної площі) при відображенні w .

§4. ФРАКТАЛЬНА ВИМІРНІСТЬ

Однією з найважливіших числових характеристик фракталів є вимір. Поняття виміру з'явилось вже у роботах Евкліда. Відомо, що вимір лінії рівний одиниці, вимір поверхні - 2, а простору - 3. Тільки у ХХ столітті зауважили, що існують геометричні об'єкти, яким не можна приписати жодного цілого числа в якості виміру. Прикладами таких об'єктів є множина Кантора, сніжинка Коха, килим Серпінського та ін. Поняття виміру було узагальнено таким чином, щоб вимір міг приймаєти всі дійсні невід'ємні значення. Мандельброт трактує вимір як одну з основних характеристик фракталів. Існують різні означення виміру, ми розберемо означення Хаусдорфа (1919) та Колмогорова (1958).

Нехай геометричний об'єкт F , що цікавить нас, міститься у n -вимірному евклідовому просторі (в основному ми розглядаємо виміри $n = 2$ і $n = 3$). Накриємо F об'єднанням n -вимірних кубиків зі стороною ε . Нехай $N(\varepsilon)$ - мінімальна кількість ε -кубиків, об'єднання яких покриває F . Очевидно, що якщо F - відрізок, тоді число $N(\varepsilon)$ пропорційне $1/\varepsilon$. Якщо F - квадрат, то $N(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^2$, і $N(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^3$, якщо F - 3-вимірний куб. Існують такі об'єкти F , для яких при малих ε число $N(\varepsilon)$ пропорційне $1/\varepsilon^d$ для деякого $d > 0$ (де d - не обов'язково ціле число). За пропозицією Колмогорова границю (якщо вона існує)

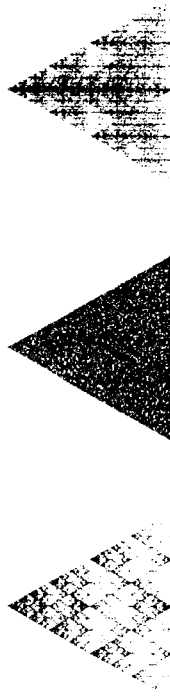
$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

Ймовірність того, що перший кусок співпадає з "відрізком" $a_1 \dots a_n$ рівна $p_{a_1} \times \dots \times p_{a_n} \geq (p_0)^n$. Відповідно, ймовірність того, що серед цих кусків трапляється "відрізок" $a_1 \dots a_n$ не менша за $1 - (1 - (p_0)^n)^m \geq q$. Таким чином, з ймовірністю $\geq q$ існує таке натуральне число $b < m$, що $i_{nb+j} = a_j$ для всіх $1 \leq j \leq n$. Тоді $z_{n(b+1)} = w_{a_n} \circ \dots \circ w_{a_1}(z_{nb}) \in w_{a_n} \circ \dots \circ w_{a_1}(A_\infty)$. Оскільки $z \in w_{a_n} \circ \dots \circ w_{a_1}(A_\infty)$ і для всіх n $z_{n(b+1)}(A_\infty) \leq \lambda^n \text{diam}(A_\infty) < \varepsilon$, то точка $z_{n(b+1)}$ ε -близька до точки z . \square

Таким чином, з ймовірністю 1, будь-яка реалізація ймовірносного алгоритму дає послідовність точок, що заповнюють аттрактор A_∞ . Однак густина цього заповнення суттєво залежить від вибору ймовірностей p_1, \dots, p_k , як покаже наступний приклад:

3.2. Приклад. Нехай z_1, z_2, z_3 — вершини правильного трикутника на комплексній площині \mathbb{C} і z_0 — його центр. Розглянемо наступні чотири стискуєчі відображення комплексної площини: $w_i(z) = z_i + \frac{1}{2}(z - z_i)$ для $i = 1, 2, 3$ і $w_0(z) = z_0 - \frac{1}{2}(z - z_0)$. Кожному відображенню w_i поставимо у відповідність ймовірність p_i . Користуючись ймовірносним алгоритмом, намаємо відповідний аттрактор. Для конкретних значень p_0, p_1, p_2, p_3 одержимо наступні малюнки:

0.7	0.25	0.4
0.1	0.25	0.4
0.1	0.1	0.1
0.1	0.25	0.25



Видно, що контури одержаних фракталів ті самі — це трикутник $z_1 z_2 z_3$, аттрактор IFS $\{X, w_0, w_1, w_2, w_3\}$, але рівномірне заповнення маємо лише для розподілу ймовірностей $p_i = \frac{1}{4}$ для всіх i (з цього ще не слід робити висновок, що для правильного малювання будь-якого детерміністичного фрактала всі p_i мають бути рівними).

При практичній реалізації ймовірносного алгоритму, у випадку, ко-

ється елементарна геометрія, аналітична геометрія, диференціальна геометрія. Якщо геометричні фігури, котрим займається елементарна геометрія, порівнювати з цілими числами, тоді фрактали можна порівняти з обчислюваними числами (типами, для яких існує алгоритм їх обчислення). Питання, чи є дане число обчислюваним, як правило складне, і так само складно сказати, чи є даний геометричний об'єкт фракталом (чи існує алгоритм його малювання). Тим не менше, на даний момент існує чимало чисельних алгоритмів і комп'ютерних програм, що малюють "фрактали", причому ці алгоритми не мають нічого спільного з означенням Мандельброта. Нижче ми розглянемо один із таких алгоритмів, який є надзвичайно цікавим як з математичної точки зору, так і для комп'ютерної графіки. Для теоретичного обґрунтування цього алгоритму нам зручно розширити поняття фрактала і вважати, що

фракталом є будь-яка неворожня компактна підмножина площини.

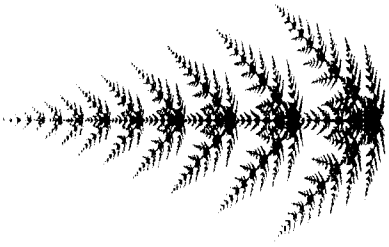
Термін "площина" можна замінити словами "повний метричний простір", але ми не будемо займатися таким розширеним поняттям фрактала (випадок площини найважливіший, оскільки він може бути реалізований на екрані комп'ютера).

§2. СИСТЕМИ ІТЕРОВАНІХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Надалі ми розглядаємо площину \mathbb{R}^2 , яку часом ототожнюємо з комплексною площиною \mathbb{C} і наділемо евклідовою метрикою.

Нехай нам дано k стискуєчих відображень w_1, \dots, w_n площини \mathbb{C} в себе. Нагадаємо, що відображення $f: X \rightarrow X$ метричного простору (X, ρ) називається *стискуєчим*, якщо існує така константа $\lambda < 1$, що $\rho(f(x), f(x')) \leq \lambda \rho(x, x')$ для будь-яких $x, x' \in X$. При цьому, константа λ називається *коефіцієнтом стиску* відображення f .

Аналогічно, як у прикладі 1.4, для компактної підмножини $A \subset \mathbb{C}$ покладемо $W(A) = \bigcup_{i=1}^k w_i(A)$ і позначимо через $W^n(A)$ n -ту ітерацію перетворення W (тобто $W^n(A) = W(W^{n-1}(A))$). Виявляється, що незалежно від початкового вибору компакта A послідовність $\{W^n(A)\}_{n=1}^\infty$ збігається до деякої компактної підмножини \mathbb{C} , яка залежить лише від відображень w_1, \dots, w_k .



2.1. Приклад. Нехай $z_0 = 0$, $z_1 = i$ — дві точки комплексної площини і $\rho = \frac{\pi}{6}$. Розглянемо такі 4 стискуючі відображення: $w_1(z) = z_0 + 0, 2(z - z_0)$, $w_2(z) = z_0 + 0, 5e^{i\rho}(z - z_0)$, $w_3(z) = z_0 + 0, 5e^{-i\rho}(z - z_0)$ і $w_4(z) = z_1 + 0, 8(z - z_1)$. (Зуважимо, що w_1 — це стиск з коефіцієнтом 0,2 відносно точки z_0 , w_2 — стиск з коефіцієнтом 0,8 відносно точки z_1 , а w_2 і w_3 — композиції стисків у два рази з поворотом на 60° відносно точки z_0). Після виконання вищесказаного ітеративного процесу отримаємо “ялишку”:

У чому причина такої дивної ітеративного процесу? Для пояснення цього феномену застосуємо класичну теорему Банаха про нерухому точку. Нагадаємо її формулювання (доведення можна знайти у будь-якому підручнику з функціонального аналізу).

Нехай X — метричний простір з метрикою ρ . Нагадаємо, що повнота множини $\{x_n\}$ точок простору X називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке n_0 , що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ як тільки $n, m \geq n_0$. Метричний простір (X, ρ) називається *повним*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в X має границю. Добре відомо, що комплексна площина \mathbb{C} , наділена евклідовою метрикою, є повним метричним простором.

Точка $x \in X$ називається *нерухомою точкою відображення* $f: X \rightarrow X$, якщо $f(x) = x$.

2.2. Теорема (Банаха про нерухому точку). У повному метричному просторі (X, ρ) будь-яке стискуюче відображення $f: X \rightarrow X$ має нерухому точку $x_\infty \in X$, яка є границею послідовності $\{x_0, x_1, \dots\}$, де x_0 — будь-яка точка X і $x_{n+1} = f(x_n)$. При цьому має місце оцінка

$$\rho(x_n, x_\infty) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \rho(x_0, x_1),$$

де $\lambda < 1$ — коефіцієнт стиску відображення f .

щоб $p_1 + \dots + p_k = 1$. Одержану систему запишемо у вигляді

$$\{X, w_1, \dots, w_k, p_1, \dots, p_k\}.$$

Нехай z_0 — будь-яка точка X . Випадковим чином виберемо число $i_1 \in \{1, \dots, k\}$ так, щоби ймовірність вибору номера j була рівна p_j . Покладемо $z_1 = w_{i_1}(z_0)$. Продовжуючи у тому ж дусі, побудуємо (випадкову) послідовність чисел (i_n) від 1 до k і послідовність точок

$$(3.1) \quad \{z_0, z_1, \dots\}$$

(кожна наступна точка z_n є образом z_{n-1} при відображенні w_{i_n} , де i_n випадково вибране число від 1 до k , причому ймовірність вибору числа j рівна p_j).

Якщо перша точка z_0 належала до атрактора A_∞ IFS $\{X, w_1, \dots, w_k\}$, тоді точки послідовності $\{z_n\}$ випадковим чином блукають по аттрактору (оскільки $w_k(A_\infty) \subset A_\infty = w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A)$). Якщо z_0 не належало аттрактору A_∞ , то достатньо пропустити декілька десятків або сотень членів послідовності $\{z_i\}$, щоб решта з наперед заданою точністю належала аттрактору A_∞ (більш строго, щоб решта належала як завгодно малому наперед заданому околу множини A_∞). Надалі, щоб уникнути ускладнень при формулюванні тверджень, вважаємо, що $z_0 \in A_\infty$.

Послідовність (3.1) не має жодної границі: точки z_n випадково блукаючи заповнюють весь аттрактор з ймовірністю 1. Це випливає із наступного твердження.

3.1. Теорема. Для будь-яких $q < 1$ та $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що з ймовірністю $\geq q$ для будь-якої точки $z \in A_\infty$ знайдеться елемент послідовності $(z_n)_{n=0}^N$, ε -близький до z .

Доведення. Віберемо число n настільки великим, щоб виконувалась нерівність $\lambda^n \text{diam}(A_\infty) < \varepsilon$, де λ — коефіцієнт стиску IFS $\{X, w_1, \dots, w_k\}$. Покладемо $p_0 = \min\{p_1, \dots, p_k\}$ і віберемо число m так, щоби $(1 - (p_0)^n)^m < 1 - q$. Покажемо, що число $N = n \cdot m$ — шукане.

Зафіксуємо довільну точку $z \in A_\infty$. Оскільки $A_\infty = W^n(A_\infty)$, то $z = w_{i_n} \circ \dots \circ w_{i_1}(z')$ для деяких чисел $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ та деякого $z' \in A_\infty$. Розіб'ємо випадкову послідовність i_1, \dots, i_N на m кусків:

$$i_1 \dots i_n \mid i_{n+1} \dots i_{2n} \mid \dots \mid i_{n(m-1)+1} \dots i_{nm}.$$

ючих відображень. Michael Barnsley (ще один засновник фрактальної геометрії) називає *атрактором* або *детерміністичним фракталом*.

Описаний вище алгоритм, у ряді випадків неефективний, оскільки часом вимагає виконання значної кількості операцій. Наприклад, щоб ним методом намалювати ялинку з прикладу 2.1 (з точністю 1/400 довжини ялинки) необхідно обчислити координати 4^{38} точок, що не реально. У наступному параграфі ми розглянемо так звані імовірносний алгоритм малювання фракталів, який є більш придатним для практичного використання, і яким, до речі, намальовані усі фрактали цієї методички.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

- Знайти відстань Хаусдорфа $h(A, B)$, якщо
 - $A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq 1 \mid \operatorname{Re} z| \leq 1\}$ і $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;
 - $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\}$ і $B = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$.
- Вказати систему стискувальних відображень для побудови фракталів 1.1-1.3.
- Оцінити кількість ітерацій, необхідних для практичної реалізації фракталів 1.1-1.3.
- Довести усі сформульовані, але не доведені твердження цього параграфа.

§3. СИСТЕМА ІТЕРОВАНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ. ІМОВІРНОСНИЙ АЛГОРИТМ

Нехай $\{X, w_1, \dots, w_k\}$ – система стискувальних відображень на повному метричному просторі (X, ρ) . Нагадаємо, що ця система породжує стискувальне відображення $W(A) = w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A)$ на просторі фракталів $\operatorname{exp}(X)$. Нехай $A_0 = \{z_0\}$, де z_0 – деяка точка X і $A_{n+1} = W(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Із результатів попереднього параграфу випливає, що послідовність компактів $\{A_n\}$ прямує до атрактора A_∞ IFS $\{Z, w_1, \dots, w_k\}$. Кожна точка $z \in A_\infty$ наближається точками компактів A_n , котрі можна зобразити у виді $w_{i_n} \circ \dots \circ w_{i_1}(z_0)$ для відповідних чисел $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$.

Ідея імовірносного алгоритму наступна: щоб намалювати атрактор A_∞ , будемо послідовність $\{z_n\}$, де z_0 – довільна точка, $z_n = w_{i_n}(z_{n-1})$, і i_n – число від 1 до k , вибране випадковим чином.

Сформулюємо все сказане більш точно. Кожному відображенню w_i поставимо у відповідність додатне число (ймовірність) $p_i \in [0, 1]$ так,

Означимо тепер метричний простір, точками якого є фрактали (тобто обмежені замкнені непорожні підмножини) на площині \mathbb{R}^2 .

Нехай (X, ρ) – повний метричний простір (у всіх подальших застосуваннях це площина з евклідовою метрикою). Позначимо через $\operatorname{exp}(X)$ множину всіх непорожніх компактних підмножин простору X . Зауважимо, що $A \cup B \in \operatorname{exp}(X)$ для будь-яких $A, B \in \operatorname{exp}(X)$. Означимо тепер метрику на $\operatorname{exp}(X)$. Нехай $A, B \in \operatorname{exp}(X)$ — дві компактні підмножини X . Для точок $a \in A$ і $b \in B$ покладемо $\rho(a, B) = \min\{\rho(a, b) \mid b \in B\}$ і $\rho(A, B) = \min\{\rho(a, b) \mid a \in A\}$ – відстані від точок a, b до множин B, A , відповідно. Величина

$$h(A, B) = \max\{\rho(a, B), \rho(A, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

називається відстанню Хаусдорфа між множинами A і B .

Цю ж відстань можна також еквівалентно означити формулою

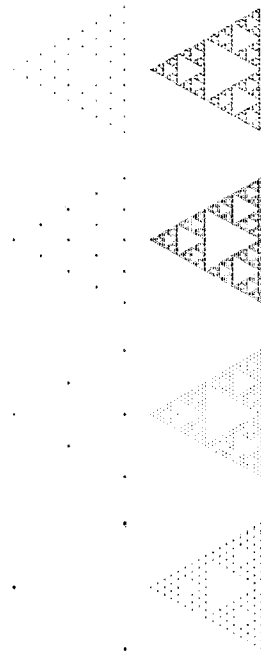
$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

де $O_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid \rho(x, A) < \varepsilon\}$ — ε -окіл множини A в X .

Можна довести, що відстань Хаусдорфа задовільняє всі аксіоми метрики, а саме:

- $h(A, B) = 0$ тоді і лише тоді, коли $A = B$;
- $h(A, B) = h(B, A)$;
- $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

Простір $\operatorname{exp}(X)$ з метрикою Хаусдорфа називається *гіперпростором*, або *простором фракталів*. Можна довести, що цей простір повний, тобто кожна фундаментальна послідовність в $\operatorname{exp}(X)$ збіжна (нагадаємо, що простір (X, ρ) повний). Для прикладу, розглянемо фундаментальну послідовність, збіжну до трикутника Серпінського.



Означимо тепер у просторі $\text{exp}(X)$ операцію, яка називається IFS (Iterated Function System — Система ітерованих відображень).

2.3. Означення. Системою ітерованих відображень (IFS) на метричному просторі (X, ρ) називаємо будь-яку скінченну сім'ю $\{w_1, \dots, w_k\}$ стискуючих відображень на X . Коефіцієнтом стиску такої системи назвемо число $\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, де λ_i — коефіцієнт стиску відображення w_i .

Використовуючи поняття IFS, означимо наступну операцію W , що діє у просторі фракталів $\text{exp}(X)$:

$$W(A) = w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A) \text{ для } A \in \text{exp}(X).$$

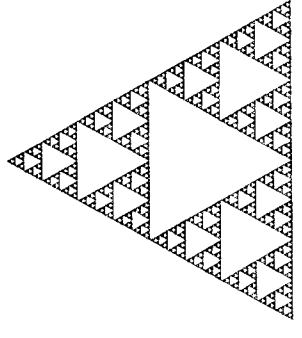
Можна довести, що визначене таким чином відображення $W : \text{exp}(X) \rightarrow \text{exp}(X)$ є стискуючим з коефіцієнтом стиску $\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Застосовуючи теорему Банаха про стискуюче відображення, одержимо, що відображення W має єдину нерухому точку A_∞ , яку можна отримати як границю послідовності $\{A_0, A_1, \dots\}$, де $A_0 \in \text{exp}(X)$ — довільний фрактал (наприклад, точка) і $A_{n+1} = W(A_n)$. Причому для послідовності $\{A_n\}$ справедлива оцінка $h(A_\infty, A_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} h(A_0, A_1)$.

Із усього сказаного випливає, що для зображення фрактала A_∞ на екрані комп'ютера, достатньо зупинитися на n -ому кроці ітерації і малювати компакт A_n , де число n вибирається таким, щоб величина $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} h(A_0, A_1)$ була менша роздільної здатності монітора. Тепер виникає питання: як намалювати компакт A_n ? Для цього зауважимо, що кожна точка $z \in A_n$ зображається у вигляді $z = w_{i_n} \circ w_{i_{n-1}} \circ \dots \circ w_{i_1}(z_0)$, де $z_0 \in A_0$ і i_1, \dots, i_n деякі числа від 1 до k . Перебираючи всі можливі послідовності i_1, \dots, i_n (всього k^n штук) і малюючи точки $w_{i_n} \circ \dots \circ w_{i_1}(z_0)$, $z_0 \in A_0$, одержимо множину A_n . (Персбійр всіма можливими послідовностями i_1, \dots, i_n зручно здійснювати, записуючи коефіцієнти розкладу чисел від 1 до $k^{n+1} - 1$ за основою k).

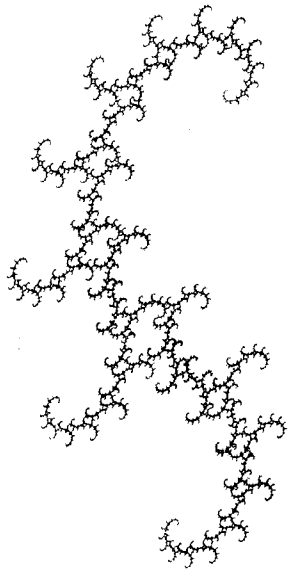
Продістанемо сказане на прикладах.

2.4. Приклад (трикутник Серпінського). Нехай $X = \mathbb{C}$ і z_1, z_2, z_3 — вершини правильного трикутника зі стороною 1. Нехай $w_i(z) = z_i + \frac{1}{3}(z - z_i)$, $i = 1, 2, 3$, — відображення стиску площини \mathbb{C} у два рази відносно точки z_i . Виникає система ітерованих відображень $\{\mathbb{C}, w_1, w_2, w_3\}$ з коефіцієнтом стиску $\lambda = \frac{1}{3}$. Якщо початковий компакт A_0 складався

з однієї точки, тоді компакт A_1 складатиметься з 3 точок, компакт A_2 — з 9, A_n — з 3^n точок. Границя A_∞ послідовності $\{A_0, A_1, \dots\}$ — це трикутник Серпінського, зображений на рисунку. Зауважимо, що за теоремою Банаха, $h(A_\infty, A_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} h(A_1, A_0) = \frac{1}{2^{n-1}} h(A_1, A_0) = 2^{1-n}$ у випадку $A_0 = \{z_1\}$. Отже, якщо роздільна здатність екрану рівна 2^{-n} , то можна зупинитися на n -тому кроці ітерації.



2.5. Приклад (гусеня). На комплексній площині \mathbb{C} розглянемо IFS, $\{\mathbb{C}, w_1, w_2\}$, де $w_1(z) = -0,5z - (1 - 0,1i)$, $w_2(z) = (0,76 + 0,4i)z$. Коефіцієнт стиску цієї системи $\lambda = \max\{0,5, \sqrt{0,76^2 + 0,4^2}\} \approx 0,86$. Для будь-якого початкового $A_0 \in \text{exp}(\mathbb{C})$ послідовність $\{A_0, A_1, \dots\}$ збігасться до множини A_∞ , зображеної на рисунку. Будучи нерухомою точкою, ця множина задовільняє рівняння $A_\infty = w_1(A_\infty) \cup w_2(A_\infty)$, і, таким чином, розпадається на два куски, кожен з яких є зменшеною копією шлуга.



Границю A_∞ послідовності, означеної системою ітерованих стиску-