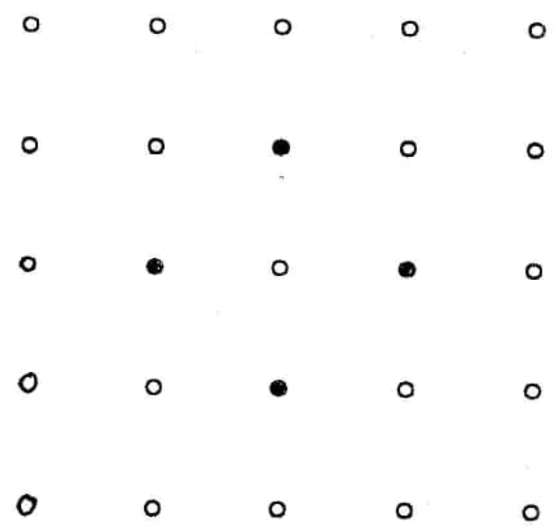
Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. Івана Франка

Методичні вказівки до вивчення спецкурсу

"Цілочислова топологія. Топологічні методи в розпізнаванні образів"

для студентів механіко-математичного факультету



Львів ЛДУ 1999

Рекомендовано до друку
кафедрою алгебри і топології
Протокол №1 від 02.09.1998

Уклали: Тарас Миколайович Радул,
Тарас Онуфрійович Банах

Редактор М.Ріпей

Методичні вказівки до вивчення спецкурсу
"Цілочислова топологія.
Топологічні методи в розпізнаванні образів"
для студентів механіко-математичного факультету

Підписано до друку 08.07.99. Формат 60×84/16. Папір друк.№3.
Друк офсет. Умовн.друк.арк. 0,8. Умовн. фарбо-відб. 0,8.
Обл.вид-арк. 0,9. Зам. 302. Т. 100.

Видавничий центр Львівського державного університету ім. І.Франка. 290602 Львів, вул Університетська, 1.

§1. Елементарна топологія площини

З'ясуємо деякі поняття і факти про топологічні властивості підмножин площини $\mathbb{R}^2$, яку часто утотожнюватимемо з комплексною площиною $\mathbb{C}$. Ми розглядаємо $\mathbb{R}^2$ з природною топологією, що породжена евклідовою метрикою, а кожну підмножину в $\mathbb{R}^2$ – як топологічний підпростір $\mathbb{R}^2$.

Нагадаємо, що простір X називають *зв'язним*, якщо відкрито-замкнутими підмножинами в X є тільки X і $\varnothing$.

Розглянемо будь-який простір X і $x \in X$. *Компонентою зв'язності* точки x називатимемо об'єднання усіх зв'язних підмножин X, що містять x. Легко переконатися, що:

а) кожна компонента є зв'язною замкнутою підмножиною X;

б) якщо A і B – дві різні компоненти X, то $A \cap B = \varnothing$.

Нехай $x_1,\ x_2 \in X$. Неперервним шляхом, що з'єднує точки x_1 і x_2, називають неперервне відображення $\gamma : [0,1] \to X$ таке, що $\gamma(0) = x_1$ і $\gamma(1) = x_2$. Простір X називають *лінійно зв'язним*, якщо для будь-яких точок $x_1,\ x_2 \in X$ існує неперервний шлях, що їх з'єднує.

1.1 Приклад. Розглянемо підмножину $A \subset \mathbb{R}^2$, задану формулою $A = \{(x, sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0, \frac{1}{2\pi}]\} \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$. Як можна бачити, A є зв'язним, але не лінійно зв'язним компактом.

Розглянемо одиничний замкнутий круг $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \le 1\}$ і одиничне коло $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) = 1\}$, де 0 – початок відліку.

1.2 Теорема (Брауера про нерухому точку). *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^2$ таке, що $f(S^1) \subset D$. Тоді існує точка $x \in D$ така, що $f(x) = x$.*

Нехай $P = [a,b] \times [c,d]$, де $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$. Приймемо $J = [-1,1]$ і для кожного відображення $f : J \to P$ позначимо $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$, $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$, де pr_i – проекція на i-ну координату.

1.3 Наслідок. *Нехай $g, h : J \to P$ відображення такі, що $g_1(-1) = a$, $g_1(1) = d$, $h_2(-1) = c$ і $h_2(1) = d$. Тоді $g(J) \cap h(J) \ne \varnothing$.*

Дугою в просторі X називатимемо будь-яке вкладення відрізка в X; *замкнутою простою кривою* – будь-яке вкладення кола в X. Використовуючи Наслідок 1.3, можна довести таку теорему.

1.4 Теорема (Жордана). *Якщо C – проста замкнута крива в $\mathbb{R}^2$, то $\mathbb{R}^2 \setminus C$ має точно дві компоненти, причому C є межею кожної з них.*

Вправи та задачі

1. Довести, що будь-який лінійно зв'язний простір є зв'язним.
2. Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$ і A гомеоморфна множині $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1$ або $x^2 + (y+1)^2 = 1\}$. Довести, що $\mathbb{R}^2 \setminus A$ має точно три компоненти зв'язності.
3. Довести сформульовані в параграфі властивості компонент зв'язності.
4. Довести таке: якщо $K \subset \mathbb{R}^2$ компакт, то існує U – компонента зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus K$ така, що множина $\mathbb{R}^2 \setminus U$ є обмеженою.

§2. Цілочислові образи

Через $\mathbb{Z}$ позначимо підмножину $\mathbb{R}$, що складається з цілих чисел. *Цілочисловою площиною* називаємо множину $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Дві точки p, $q \in \mathbb{Z}^2$ називаємо *8-суміжними*, якщо $|p_i - q_i| \leq 1$ для кожного $i \in \{1, 2\}$. Точки p, $q \in \mathbb{Z}^2$ називають *4-суміжними*, якщо вони є 8-суміжними і відрізняються тільки за однією координатою. Надалі n означатиме 8 або 4.

Для точки $p \in \mathbb{Z}^2$ *n-околом* точки p називатимемо множину всіх точок $\mathbb{Z}^2$ n-суміжних до p і позначатимемо $n(p)$. На рис. 1 і 2 чорними точками зображені 8- і 4-околи точки p відповідно.

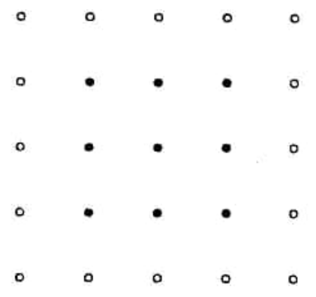


Рис.1

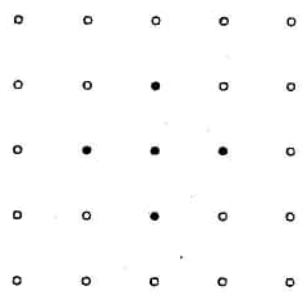


Рис.2

Множини $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ називаємо n-суміжними, якщо існують n-суміжні

точки a і b такі, що $a \in A$ і $b \in B$. Множину $C \subset \mathbb{Z}^2$ називаємо *n-зв'язною*, якщо C не можна зобразити у вигляді двох непорожніх множин, що не є n-суміжними між собою. Ми *n-компонентою* множини D називаємо непорожню n-зв'язну підмножину в D, що не є n-суміжною з жодною іншою точкою в D. На рис. 3 зображено 8-зв'язну множину, що має три 4-компоненти.

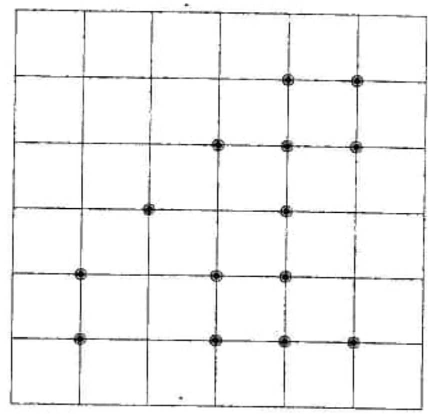


Рис.3

Нехай $p, q \in A \subset \mathbb{Z}^2$. Скінченну впорядковану множину $\{p, a_1, a_2, \ldots, a_n, q\}$ називаємо *n-шляхом* в A, що з'єднує точки p і q, якщо кожен елемент цієї множини n-суміжний з наступним; n-шлях $S = \{p, a_1, a_2, \ldots, a_n, q\}$ називаємо *n-дугою*, якщо p і q є n-суміжні тільки з однією точкою із S, а всі a_i - точно до двох.

2.1. Твердження. *Для $A \subset \mathbb{Z}^2$ еквівалентні такі твердження:*
1) A – n-зв'язна;
2) для будь-яких p і $q \in A$ в A існує n-шлях, що з'єднує p і q;
3) для будь-яких p і $q \in A$ в A існує n-дуга, що з'єднує p і q.

Кожне двоколірне зображення на екрані комп'ютера можемо задати, присвоївши одним точкам із $\mathbb{Z}^2$ значення 1, іншим – 0. Точки зі значенням 1 називатимемо чорними, а точки зі значенням 0 – білими.

Відповідно позначатимемо їх на рисунках у тексті.

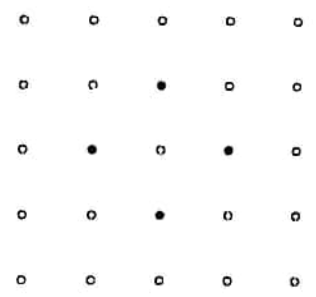


Рис.4

Поштовхом для досліджень в цілочисловій топології була ідея розглядати різні типи зв'язності для множин білих і чорних точок. Це роблять, щоб уникнути парадоксів, типовий приклад яких зображений на рис. 4. Якщо ми розглянемо в цьому випадку тільки 8-зв'язність, то отримаємо, що дискретний аналог кривої Жордана (множина чорних точок) не розбиває множину білих точок; якщо ж розглянемо 4-зв'язність, то цілком незв'язна множина чорних точок розбиває множину білих точок на дві компоненти.

Якщо ж розглянути різні типи зв'язності, то таких парадоксів не трапиться. Сформулюємо це більш конкретно. Множину $C \subset \mathbb{Z}^2$ називатимемо *простою замкнутою n-кривою*, якщо C складається хоча б з чотирьох точок і кожна точка в C є n-суміжною точно до двох інших точок з C.

Для $n \in \{4, 8\}$ приймемо $n' = 8$, якщо $n = 4$, і $n' = 4$, якщо $n = 8$.

2.2. Теорема. *Нехай C – замкнута проста n-крива. Тоді $\mathbb{Z}^2 \setminus C$ має рівно дві n' компоненти.*

Для визначеності і для простоти викладу розглядатимемо множину чорних точок з 8-зв'язністю і множину білих точок з 4-зв'язністю. Відповідно для компонент іноді використовуватимемо назви чорних і білих компонент.

Отже, *цілочисловим образом*, або *образом*, називаємо пару $(\mathbb{Z}^2, A)$, де A – множина чорних точок з 8-зв'язністю, а $\mathbb{Z}^2 \setminus A$ – множина білих точок з 4-зв'язністю. Вважатимемо, що A обмежена множина. Видно, що таке припущення не обмежує загальності.

Якщо $(\mathbb{Z}^2, A)$ – образ, то точку $a \in A$ називають *межовою* точкою, якщо вона 4-суміжна хоча б до однієї білої точки. На рис. 5 межові точки позначені кружечками.

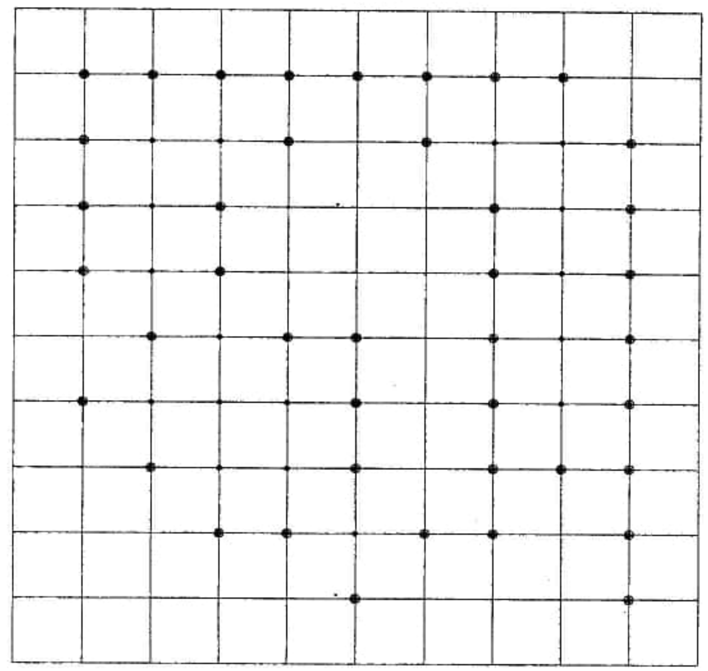


Рис.5

§3. Алгоритми потоншування

Одним з головних у розпізнаванні образів є завдання розділити множину всіх можливих образів на заздалегідь задані класи. Для розв'язання такої задачі застосовують, зокрема, алгоритми потоншування, які зводять, вилучаючи певну множину точок, кожен образ до його кістяка, тобто образу, шириною в одну точку, причому зберігаючи його топологічні властивості. На рис. 6 зображений можливий результат застосування такого алгоритму до зображення цифри 6.

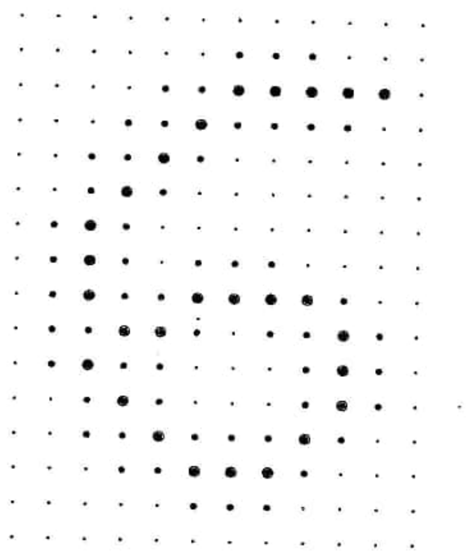


Рис.6

Для прикладу розглянемо алгоритм, запропонований Стефанелі і Розенфельдом, а також дослідимо його властивості. У наступних параграфах опишемо клас алгоритмів потоншування, які зберігають топологічні властивості образів.

Нехай $A \subset \mathbb{Z}^2$ – цілочисловий образ. За кожним i-м кроком алгоритму вилучатимемо з A деяку множину точок A_i, тобто точки множини A_i з чорних стають білими. Очевидно, що вилучати треба межові точки, крім тих, які утворюватимуть кістяк образу (ці точки називатимемо *кінцевими*).

Ми не можемо одночасно вилучати всі межові точки, оскільки компоненти нашого образу можуть зникати. Тому кожен цикл розділимо на чотири підцикли. В кожному підциклі визначатимемо, які точки треба вилучити тільки для межових точок одного типу. Ці типи точок задані їхніми 8-околами на рис. 7, де ікси можуть набувати значення 0 або 1. (Нагадаємо, що 1 позначаємо чорні точки, а 0 – білі).

x	x	x
x	1	x
x	0	x

а

x	0	x
x	1	x
x	x	x

б

x	x	x
0	1	x
x	x	x

в

x	x	x
x	1	0
x	x	x

г

Рис.7

Точки типу а ми називаємо нижніми межовими точками, б – верхніми, в – лівими і г – правими. Для того, щоб ізольовані точки і 8-дуги були незмінними, треба, щоб, принаймні, два ікси були одиницями.

Кінцевими в нас будуть точки, які задовольняють хоча б одну умову з рис. 8 або 9. Треба, щоб на рис. 8 хоча б один x і один y набували значення 1. Ця умова запобігає виникненню так званих контурних шумів.

X	X	X
0	1	0
Y	Y	Y

а

0	X	X
Y	1	X
Y	Y	0

б

Y	0	X
Y	1	X
Y	0	X

в

Y	Y	0
Y	1	X
0	X	X

г

Рис.8

0	1	
1	0	

а

	1	0
	0	1

б

	0	1
	1	0

в

1	0	
0	1	

г

Рис.9

Таким чином наш алгоритм діє за такою схемою. В кожному циклі спочатку виконуємо перший підцикл: беремо точки типу а з рис.7 (причому, принаймні, два ікси набувають значення 1) і ті з них, що не задовольняють жодної умови з рис. 8 і 9, тобто не є кінцевими, змінюють своє значення з 0 на 1, тобто стають білими.

У наступних трьох підциклах те саме відбувається з точками типу б, в і г. Алгоритм закінчується, коли всі точки стають кінцевими. Зауважимо, що наш алгоритм є паралельним, тобто в кожному підциклі приймається рішення про одночасне вилучення усіх межових точок даного типу. Крім того, вилучення точок залежить тільки від значень у точках, 8-суміжних до них.

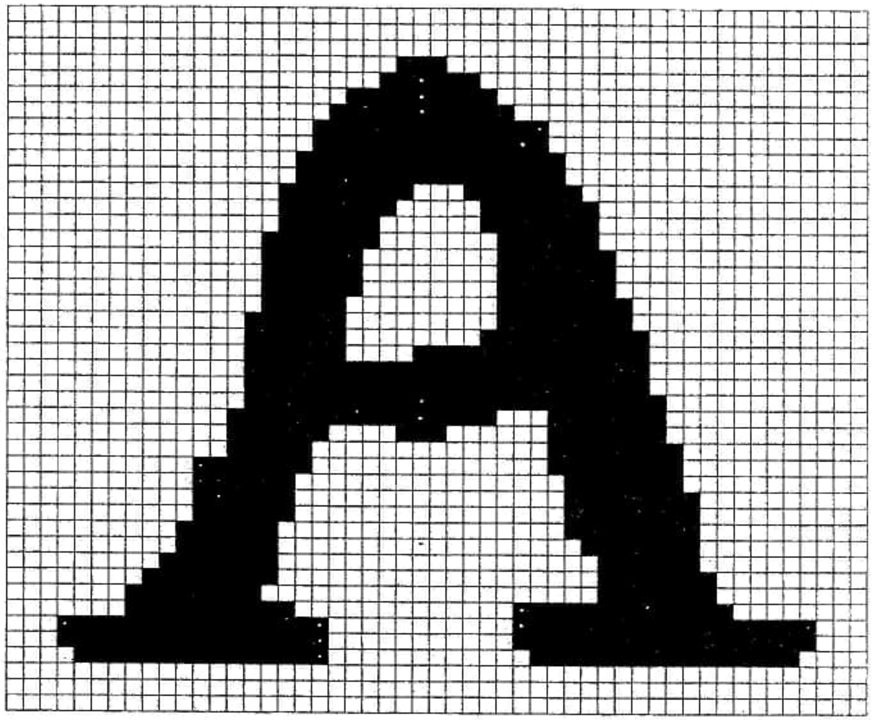


Рис.10

На рис. 10 для прикладу зображений результат застосування наведеного вище алгоритму. Темними квадратами зображений вихідний образ, чорні точки утворюють образ, який отримуємо в результаті. Білими кружечками позначаємо точки, які б могли додатися до кінцевого образу, якби не було умов на x і y в рис. 8. Тобто ці точки утворюють згадані вище контурні шуми.

Тепер розглянемо деякі властивості нашого алгоритму. Дослідимо як один крок впливає на зв'язність образу і доповнення до нього. Очевидно, що жоден крок не може знищити чорну компоненту. Оскільки за кожним кроком вилучаємо тільки межові точки, то не може утворюватися нова біла компонента.

Нехай A – образ до виконання ітерації, B – після виконання. Приймемо $Y = \mathbb{Z}^2 \setminus A$ і $X = A \setminus B$. Розглянемо дві такі теореми.

3.1. Теорема. *Нехай* $\{y_0, x_1, \ldots, x_n, y_1\}$ *– 4-шлях, що з'єднує точки* y_0, $y_1 \in Y$, *причому* $x_i \in X$. *Тоді існує 4-шлях* $\{y_0, y_2, \ldots, y_k, y_1\}$, *що з'єднує точки* y_0 *та* y_1 *і міститься в* Y.

3.2. Теорема. *Нехай* $\{b_0, x_1, \ldots, x_n, b_1\}$ *– 8-шлях, що з'єднує точки* b_0, $b_1 \in B$, *причому* $x_i \in X$. *Тоді існує 8-шлях* $\{b_0, b_2, \ldots, b_s, b_1\}$, *що з'єднує точки* b_0 *і* b_1 *і міститься у* B.

З Теорем 3.1 і 3.2 випливає, що жодна чорна компонента після виконання однієї ітерації не може розділитися на дві, і жодні дві білі компоненти не можуть злитися в одну. Оскільки кожна ітерація має такі властивості, то це справедливо для алгоритму в цілому. Отже, цей алгоритм задовольняє таке означення.

3.3 Означення. Нехай A, B – образи в $\mathbb{Z}^2$, причому $B \subset A$. Кажемо, що операція потоншення A до B зберігає топологію, якщо виконуються дві умови:

1) кожна 8-компонента A містить єдину 8-компоненту B;
2) Кожна 4-компонента $\mathbb{Z}^2 \setminus B$ містить єдину 4-компоненту $\mathbb{Z}^2 \setminus A$.

§4. Прості точки

Точку $p \in A$, де A – образ в $\mathbb{Z}^2$, називаємо *простою*, якщо операція потоншення A до $A \setminus \{p\}$ зберігає топологію.

4.1. Теорема. *Нехай p є неізольованою межовою точкою образу B. Умови еквівалентні:*

1) p – проста точка;

2) p – 8-суміжна до єдиної 8-компоненти $8(p) \cap (B \setminus \{p\})$;

3) p – 4-суміжна до єдиної 4-компоненти $8(p) \setminus B$.

Нехай $P_0, P_1, \ldots, P_n$ є скінченна послідовність образів. Якщо для кожного $1 \leq i < n$ образ P_{i+1} отримуємо викиданням однієї простої точки з P_i, то кажемо, що P_n отримуємо з P_0 *послідовним викиданням простих точок*. Зауважимо, що проста точка в P_i не мусить бути простою в P_0 і, навпаки, точка $p \in P_i$, що є простою в P_0, не мусить бути простою в P_i.

4.2. Теорема. *Потоншення A до B зберігає топологію тоді і лише тоді, коли B можна отримати з A послідовним викиданням простих точок.*

Доведення Теореми 4.2 грунтується на такій лемі.

4.3. Лема. *Нехай потоншення $A \supset B$ зберігає топологію і потоншення $B \supset C$ зберігає топологію. Тоді потоншення $A \supset C$ зберігає топологію.*

Зауважимо, що зворотне твердження до Леми 4.3, взагалі кажучи, неправильне.

Звичайно, що умова збереження топології ще не достатня для описання алгоритму потоншення. Описати математично всі умови, які необхідно накласти на алгоритм, досить складно. Причому в різних ситуаціях, залежних від природи образів, завдання алгоритму можуть бути різними. Але треба, щоб усі алгоритми задовольняли дві вимоги:

а) збереження топології;

б) інваріантність компонент, які є дугами.

Теорема 4.4 описує досить широкий клас алгоритмів, які задовольняють ці умови.

4.4. Теорема. *Нехай φ операція потоншування, яка паралельно вилучає верхні межові точки і залежить тільки від значень у 8-околах цих точок. Операція φ задовольняє умови а і б тоді і лише тоді, коли вона вилучає тільки ті точки p, які:*

1) є простими,

2) в множині $8(p) \setminus \{p\}$ існує хоча б дві чорні точки.

Зауважимо, що наведена вище теорема буде правильною, якщо замість верхніх межових точок розглядати будь-який з чотирьох типів межових точок, визначених у попередньому параграфі.

Алгоритм Стефанеллі-Розенфельда, описаний у попередньому параграфі, задовольняє Теорему 4.4.

§5. Неперервні аналоги цілочислових образів

Зауважимо, що в попередніх параграфах ми досліджували образи, використовуючи чисто комбінаторну техніку. Хоча в нас виникали такі "топологічні" поняття, як зв'язність, компоненти, шлях тощо, але ця теорія була паралельною до неперервної теорії площини.

У цьому параграфі ми пов'язуємо ці теорії, зіставляючи кожний цілочисловий образ A в $\mathbb{Z}^2$ з поліедром $C(A) \subset \mathbb{R}^2$, який називатимемо неперервним аналогом образу A.

Введемо спочатку деякі поняття. Нехай $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ афінно незалежна підмножина в $\mathbb{R}^n$. Її опуклу оболонку $\sigma = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ називатимемо *k-вимірним симплексом*, а точки $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – *вершинами* симплекса σ.

Отже, на площині $\mathbb{R}^2$ 0-вимірними симплексами є точки, 1-вимірними симплексами є відрізки, що з'єднують дві різні точки, 2-вимірними симплексами є невироджені трикутники, а симпленсів більших вимірностей немає.

Поліедрами називаємо підмножини в $\mathbb{R}^n$, що є скінченними об'єднаннями симплексів.

Цілочисловими симплексами в $\mathbb{R}^2$ називаємо всі 0-вимірні симплекси, що містяться у $\mathbb{Z}^2$, 1-вимірні симплекси, що з'єднують пари 8-суміжних точок з $\mathbb{Z}^2$, і, нарешті, ті 2-вимірні симплекси, що є трикутниками зі сторонами $(1, 1, \sqrt{2})$ і вершинами в $\mathbb{Z}^2$.

Для образу $A \subset \mathbb{Z}^2$ неперервним аналогом $C(A) \subset \mathbb{R}^2$ називають об'єднання усіх цілочислових симплексів, усі вершини яких лежать в A. Очевидно, що $C(A)$ буде поліедром. На рис. 11 зображений приклад неперервного аналогу.

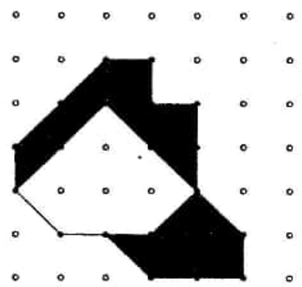


Рис.11

З'ясуємо деякі властивості $C(A)$.

5.1 Лема. *Нехай $A \subset \mathbb{Z}^2$ цілочисловий образ. Для будь-яких a_1, $a_2 \in A$ існує 8-шлях $\{a_1, a_3, \ldots, a_k, a_2\} \subset A$ тоді і тільки тоді, коли існує неперервний шлях в $C(A)$, що з'єднує точки a_1 і a_2.*

5.2 Лема. *Нехай $A \subset \mathbb{Z}^2$ цілочисловий образ. Для будь-яких b_1, $b_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus A$ існує 4-шлях $\{b_1, b_3, \ldots, b_k, b_2\} \subset A$ тоді і тільки тоді, коли існує неперервний шлях у $\mathbb{R}^2 \setminus C(A)$, що з'єднує точки b_1 і b_2.*

Нехай $n \in \{4, 8\}$. Відрізок в $\mathbb{R}^2$, що з'єднує дві n-суміжні точки з $\mathbb{Z}^2$, називаємо *n-суміжністю.*

Використовуючи Леми 5.1 і 5.2, легко довести таку теорему.

5.3 Теорема. *Нехай $A \subset \mathbb{Z}^2$ цілочисловий образ. Тоді $C(A)$ має такі властивості:*

1) $C(A)$ містить усі 8-суміжності з кінцями в A,
2) $\mathbb{R}^2 \setminus C(A)$ містить усі 4-суміжності з кінцями в $\mathbb{Z}^2 \setminus A$,
3) кожна компонента $C(A)$ перетинає $\mathbb{Z}^2$ по 8-компоненті A,
4) кожна компонента $\mathbb{R}^2 \setminus C(A)$ перетинає $\mathbb{Z}^2$ по 4-компоненті $\mathbb{Z}^2 \setminus A$.

Зауважимо, що з Теореми 5.3 і з Теореми Жордана можна вивести Теорему 2.2.

Нагадаємо, що два відображення $f, g : X \to Y$ називають *гомотопними*, якщо існує відображення $H : X \times [0,1] \to Y$ таке, що $H(x,0) = f(x)$ і $H(x,1) = g(x)$ для будь-якого $x \in X$. Підмножину $A \subset X$ називають *ретрактом* X, якщо $r : X \to A$ таке, що $r|A = \mathrm{id}_A$; якщо ж, крім того, відображення r гомотопне відображенню id_X, то A називають *деформівним ретрактом* X.

5.4 Теорема. *Нехай $A \supset B$ цілочислові образи в $\mathbb{Z}^2$. Потоншування A до B зберігає топологію тоді і тільки тоді, коли $C(B)$ є деформівним ретрактом $C(A)$.*

Вправи та задачі

1. Довести, що не існує ретракції $r : D \to S^1$.
2. Нехай $f : D \to D$ відображення таке, що $f(s) = s$ для будь-якої точки $s \in S^1$. Довести, що f неперервне.
3. Нехай U непорожня обмежена підмножина в $\mathbb{R}^2$. Довести, що $\mathbb{R}^2 \setminus U$ не є ретрактом $\mathbb{R}^2$.
4. Довести, що S^1 не стягуваний простір.
5. Вивести з Теореми 5.3 і Теореми Жордана Теорему 2.2.

Список літератури

1. Kong T.Y., Roscoe A.W., Rosenfeld A. *Concepts of digital topology* // Topology and Appl. 1992. Vol.40. P.219-262.
2. Kong T.Y., Rosenfeld A. *Digital topology: Introduction and Survey* // Comp. vision, graphics and image processing. 1989. Vol. 48. P.357-393.
3. Ronse C. *Topological characterization of thinning* // Theoret. Comp. Sci. 1986. Vol.43. P.31-41.
4. Stefanelli R., Rosenfeld A. *Some parallel thinning algorithms for ditgital pictures* // J. Ass. Comp. Math. 1971. Vol.18. P.255-264.