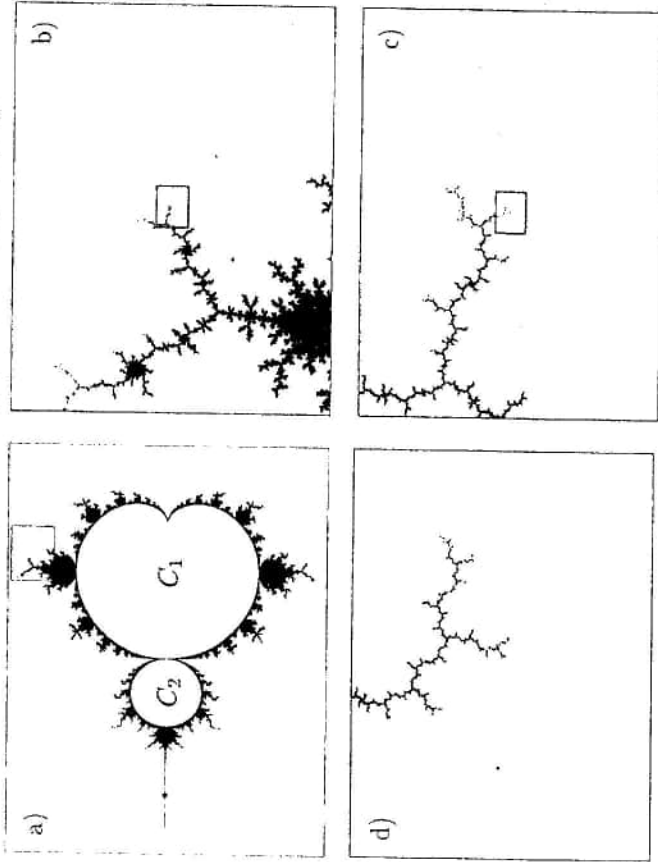


Множина Мандельброта (а) та її збільшені фрагменти в околі точки  $c = i$  ( $C_1$ ) та  $C_2$  - області значень параметра  $c$ , при яких відображення  $P_c(z) = z^2 + c$  має стабільну циклічну орбіту порядку 1 та 2).



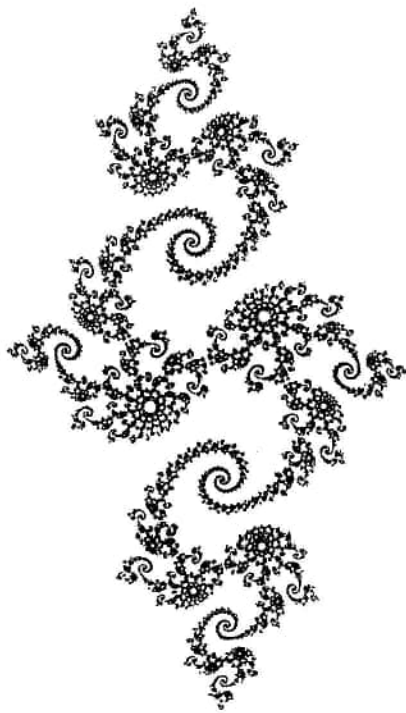
#### Рекомендована Література

1. Т.О.Банах, Р.В.Ардан, Т.М.Радул. *Детерміністичні Фрактали*. Львів, 1997.
2. J.Kudrewicz. *Fraktale i chaos*. Warszawa: WNT, 1996.
3. А.Н.Шарковскій, С.Ф.Коляда, А.Г.Сивак, В.В.Федоренко. *Динамика одномерных отображений*. Київ: Наукова Думка, 1986.
4. В.В.Mandelbrot. *The fractal geometry of Nature*. NY: W.H.Fredman and K°, 1983.
5. *Chaos and Fractals: The Mathematics behind the Computer Graphics*. Amer. Math. Soc., 1989.
6. *Complex Dynamical Systems: The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets*. Amer. Math. Soc., 1994.
7. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities*. Springer-Verlag, 1992.

Т.О. Банах, Р.В.Ардан, Т.М. Радул

# ФРАКТАЛИ

## ТА ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ



## Міністерство Освіти України

### Львівський державний університет ім.Ів.Франка

Рекомендовано до друку Радою  
механіко-математичного факультету

Протокол №2 від 22.10.1997

Уклали: Тарас Онуфрійович Банас  
Роман Володимирович Ардан  
Тарас Миколайович Радул

Методичні вказівки до спецкурсу

### "ФРАКТАЛИ У ГЕОМЕТРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ"

для студентів молодших курсів

Досліджуються фрактали, що виникають при вивченні динамічних систем. Особлива увага приділена множинам Жуліа та Мандельброта.

---

Тираж 100. Надруковано видавничим центром Львівського державного університету ім.І.Франка.  
290602 Львів, вул. Університетська, 1.

## ПОНЯТТЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

"Все тече, все змінюється", говорили древні; сучасній математик, почувши цю фразу, згадає про динамічні системи. Ось про них ми і поведемо мову у цій методичці, причому акцент зробимо на фракталах, що виникають при вивченні динамічних систем. Перейдемо до точних означень. Для топологічного простору  $X$  позначимо через  $Map(X)$  множину всіх (неперервних) відображень  $X \rightarrow X$ , котра разом із операцією композиції утворює напівгрупу з тотожним відображенням  $id_X : X \rightarrow X$  у якості одиниці.

Будь-який процес на  $X$  (тобто перетворення простору  $X$  в часі) може бути описаний функцією  $f : [0, \infty) \rightarrow Map(X)$  такою, що  $f_0 = id_X$ . Тоді  $f_t(x)$  можна трактувати як положення точки  $x \in X$  у момент часу  $t$ , а множину  $\{f_t(x) : t \in [0, \infty)\}$  як траєкторію точки  $x$ .

*Динамічною системою* на  $X$  називається таке відображення  $f : [0, \infty) \rightarrow Map(X)$ , що  $f_{t+\tau} = f_t \circ f_\tau$  для будь-яких  $t, \tau \in [0, \infty)$ . Іншими словами, динамічна система на  $X$  – це гомоморфізм напівгруп  $[0, \infty)$  та  $Map(X)$ .

При чисельних обчисленнях зв'язаних з динамічними системами, неперервний час  $[0, \infty)$  замінюють часом дискретним. При цьому виникають так звані *каскади* (динамічні системи з дискретним часом) тобто такі відображення  $f : \mathbb{N} \rightarrow Map(X)$ , що  $f_{n+m} = f_n \circ f_m$ . Каскади мають дуже просту структуру. Дійсно, оскільки  $f_n = f_1 \circ \dots \circ f_1$ , то відображення  $f_n$  є  $n$ -тою ітерацією відображення  $f_1$ . Тобто динамічна система з дискретним часом (далі ми розглядаємо лише такі системи) повністю задається відображенням  $f_1$ . Тому надалі ми ототожнюватимемо динамічні системи з породжуючими їх відображеннями  $\varphi = f_1$ .

Введемо тепер деякі базові поняття, пов'язані з динамічними системами. Нехай  $\varphi : X \rightarrow X$  – відображення метричного простору  $(X, d)$ , що породжує динамічну систему  $(X, \varphi)$ .

*Орбітою*, або *траєкторією* точки  $x \in X$  називається послідовність  $\{\varphi^n(x)\}_{n=0}^\infty$ . Характер та поведінка орбіт дає змогу провести деяку класифікацію. Будемо називати точку  $x \in X$

- *фіксованою*, або *нерухомою*, якщо  $\varphi(x) = x$  (еквівалентно, якщо орбіта  $x$  складається з єдиної точки);
- *циклическою порядку  $n$* , якщо  $\varphi^n(x) = x$ , але  $\varphi^i(x) \neq x$  для  $i < n$ ;
- *передциклическою*, якщо  $\varphi^k(x)$  – циклічна точка для деякого  $k \geq 1$ ;

при  $k > n$ .

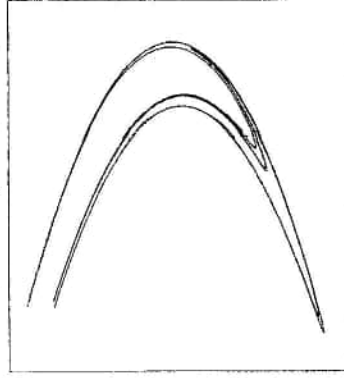
Простими прикладами атракторів та реперерів є фіксовані точки та циклічні орбіти, проте трапляються також більш складні об'єкти, так звані "дивні" атрактори та реперери, які можуть мати, наприклад, дробовий вимір Хаусдорфа. Багато прикладів таких об'єктів зустрінемо у наступних розділах. Наразі розглянемо декілька простих прикладів динамічних систем.

**1.1. Приклад.** Рекурентно задана послідовність  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  відома під назвою *последовательности Фибоначчи* (1202). Два перших значення цієї послідовності повністю її визначають. Відношення двох сусідніх виразів послідовності Фібоначчі  $u_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$  задовольняє рівняння  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ . Відображення  $\varphi(u) = 1 + \frac{1}{u}$  визначає динамічну систему на півосі  $X = (0, \infty)$ . Ця система має єдину нерухому точку  $u_\infty = (1 + \sqrt{5})/2$ , котра є атрактором, множина притягання якого є весь простір  $X$ .

**1.2. Приклад.** Нехай  $X = (\exp(\mathbb{R}^2), h)$  - простір фракталів на  $\mathbb{R}^2$  з метрикою Гаусдорфа  $h$ . Розглянемо відображення  $W$  на  $X$ , породжене системою стискуючих відображень  $W(B) = w_1(B) \cup \dots \cup w_k(B)$ . Відображення  $W$  має в просторі  $X$  єдину фіксовану точку  $A_\infty = W(A_\infty)$ , котра є атрактором, множина притягання якого є все  $X$ . Як і у прикладі 1.1, динамічна система  $(X, W)$  має дуже просту структуру, проте простір  $X$  дещо складніший.

**1.3. Приклад.** Атрактор Гемона (Hénon) (1969).

Розглянемо послідовність точок  $P_n = (x_n, y_n)$  площини  $\mathbb{R}^2$ , визначену рекурентно  $x_{n+1} = by_n + 1 - ax_n^2$ ,  $y_{n+1} = x_n$ . Відображення  $F$ , що ставить у відповідність точки  $P_n$  точку  $P_{n+1}$ , є оборотним відображенням з якобіаном рівним  $-b$ . Для досить широкої області параметрів  $a, b$  динамічна система  $(\mathbb{R}^2, F)$  має "дивний атрактор", зображений на рисунку при  $a = 1, 4, b = 0, 3$  і початкового  $P_0 = (0, 0)$ .



Особливу роль при вивченні динамічних систем відіграє поняття стабільності. Говоримо, що динамічна система  $(X, \varphi)$  *стабільна на множині*  $S \subset X$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для довільних  $x, x' \in S$  та  $n \in \mathbb{N}$  із  $\rho(x, x') < \delta$  випливає  $\rho(\varphi^n(x), \varphi^n(x')) < \varepsilon$ . Іншими словами, динамічна система  $(X, \varphi)$  стабільна на  $S$ , якщо сім'я відображень  $\{\varphi^n\}$  *однострійно неперервна* на  $S$ . Точку  $x \in X$  назвемо *стабільною*, якщо динамічна система  $(X, \varphi)$  стабільна в деякому околі точки  $x$ . Відповідно, орбіту точки  $x$  будемо називати *циклічною*, *редукційною*, *стабільною* чи *нестабільною*, якщо такою є точка  $x$ .

Точку  $z \in X$  назвемо *ω-граничною* для траєкторії  $\{\varphi^n(x)\}$ , якщо існує така монотонна послідовність  $\{n_k\}$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{n_k}(x) = z$  (тобто деяка підпослідовність послідовності  $\{\varphi^n(x)\}$  прямує до  $z$ ). Множина всіх  $\omega$ -граничних точок називається *Ω-граничною множиною* траєкторії  $\{\varphi^n(x)\}$  і позначається через  $\Omega(x)$ . Легко бачити, що  $\Omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}_X \{\varphi^k(x) \mid k \geq n\}$ , звідки випливає, що для компактних  $X$  множина  $\Omega(x)$  неперервна і замкнена.

Підмножина  $I \subset X$  називається *інваріантною підмножиною* динамічної системи  $(X, \varphi)$ , якщо  $\varphi(I) = I$ .

Прикладами інваріантних множин є фіксовані точки, циклічні орбіти та  $\Omega$ -граничні множини. Очевидно, що об'єднання та перетин інваріантних множин знову є інваріантними множинами. Інформація про інваріантні підмножини часто проливає світло на структуру динамічної системи. Особливо цікавими в цьому плані є  $\Omega$ -граничні множини. Деякі з них мають властивість притягувати, або відштовхувати сусідні траєкторії. Такі множини називають відповідно атракторами та реперерами.

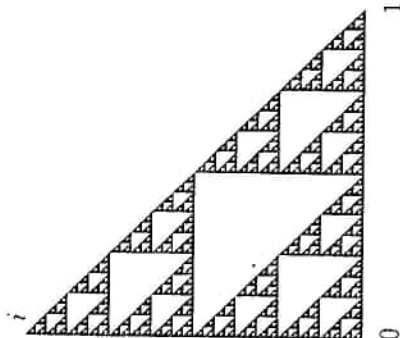
Компактна інваріантна підмножина  $A \subset X$  називається *атрактором* динамічної системи  $(X, \varphi)$ , якщо існує такий окіл  $U(A)$  множини  $A$ , що для будь-якого  $x \in U(A)$  траєкторія  $\{\varphi^n(x)\}$  прямує до множини  $A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Множину всіх  $x \in X$ , траєкторія яких прямує до  $A$ , називаємо *множиною притягання* атрактора  $A$ . Деколи в означення атрактора включають також умову мінімальності у сенсі, що  $A$  не містить іншого атрактора.

Компактна інваріантна підмножина  $B \subset X$  називається *реперером* динамічної системи  $(X, \varphi)$ , якщо існує такий окіл  $U(B)$  множини  $B$ , що для будь-якої точки  $x \in U(B)$ ,  $x \notin B$ , існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $\varphi^n(x) \notin U(B)$

1.4. Приклад. Розглянемо відображення  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  комплексної площини, що задається формулою

$$\varphi(z) = \begin{cases} 2z - i, & \text{якщо } z \in V = \{z: \operatorname{Im}(z) \geq 0, 5\}; \\ 2z, & \text{якщо } z \in L = \{z: \operatorname{Im}(z) < 0, 5, \operatorname{Re}(z) \leq 0, 5\}; \\ 2z - 1, & \text{якщо } z \in P = \{z: \operatorname{Im}(z) < 0, 5, \operatorname{Re}(z) > 0, 5\}. \end{cases}$$

Множини:  $V$  (верхня),  $L$  (ліва) та  $P$  (права) в сумі покривають всю площину  $\mathbb{C}$ . Зауважимо, що функція  $\varphi(z)$  є "оберненою" до IFS  $\{C: w_1 = (z+i)/2, w_2 = z/2, w_3 = (z+1)/2\}$ .



Розглянемо динамічну систему  $(\mathbb{C}, \varphi)$ . Траєкторії  $\{\varphi^n(z_0)\}$  найчастіше прямують до нескінченності. Множина  $T$  точок  $z_0$  з обмеженою траєкторією є трикутником Серпінського з вершинами у точках  $0, 1, i$ . Ця множина є репером динамічної системи  $(\mathbb{C}, \varphi)$ . Множина  $T$  містить нескінченну кількість циклічних орбіт якого завгодно порядку. Визначимо їх. Кожній циклічній орбіті  $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ , де  $z_n = z_0$ , припишемо адресу  $[a_0, \dots, a_{n-1}]$  наступним чином: кожне  $a_i$  є одним із символів  $i, 0, 1$ , залежно від того, в яку множинку потрапляє точка  $z_i$ :  $V, L$ , чи  $P$ . Тоді циклічну орбіту з адресою  $[a_0, \dots, a_{n-1}]$  можна записати як

$$(1) \quad \{z_0, (2z_0 - a_1), (2^2 z_0 - 2a_1 - a_2), (2^3 z_0 - 2^2 a_1 - 2a_2 - a_3), \dots, (2^{n-1} z_0 - 2^{n-2} a_1 - \dots - 2a_{n-2} - a_{n-1})\}.$$

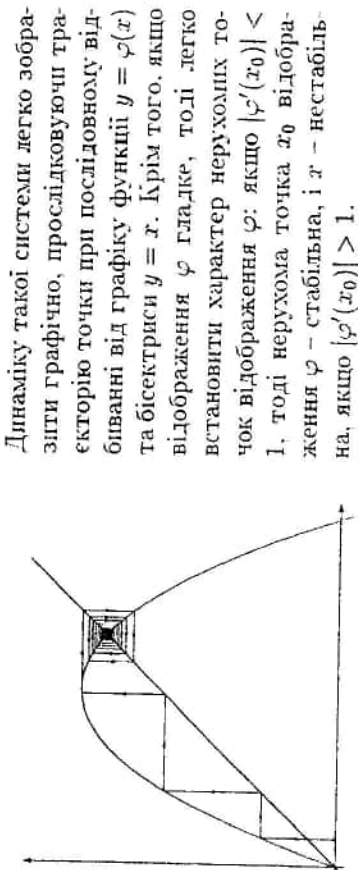
Оскільки  $z_0 = z_n$ , то  $z_n = 2^n z_0 - 2^{n-1} a_1 - \dots - 2a_{n-1} - a_n$ , отже,

$$(2) \quad z_0 = \frac{1}{2^n - 1} (2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n).$$

Таким чином, під кожною адресою є лише одна циклічна орбіта, що виражається формулою (1) з початковою точкою  $z_0$ , яку можна знайти із (2).

## Одновимірні динамічні системи. Точки віфуркації

У даному параграфі ми розглядаємо динамічні системи, породжені неперервними відображеннями  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  прямої.



Динаміку такої системи легко зобразити графічно, прослідковуючи траєкторію точки при послідовному відбиванні від графіку функції  $y = \varphi(x)$  та бісектриси  $y = x$ . Крім того, якщо відображення  $\varphi$  гладке, тоді легко встановити характер нерухомих точок відображення  $\varphi$ : якщо  $|\varphi'(x_0)| < 1$ , тоді нерухома точка  $x_0$  відображення  $\varphi$  - стабільна, і  $x$  - нестійка, якщо  $|\varphi'(x_0)| > 1$ .

Почнемо із найпростішого випадку, коли  $\varphi(x) = ax + b$  - лінійне відображення. Легко бачити, що при  $a \neq 1$  відображення  $\varphi$  має єдину нерухому точку  $x_0 = \frac{b}{1-a}$ . Ця точка є стабільною (атрактором), якщо  $|a| < 1$ , і нестійкою (реперелором) при  $|a| > 1$ . При  $a = -1$  будь-яка точка  $x \neq x_0$  є стабільною циклічною точкою порядку 2 (разом з тим її орбіта не є атрактором). Зауважимо, що значення  $a = \pm 1$  у деякому розумінні критичні: при переході параметра  $a$  через ці значення поведінка динамічної системи якісно змінюється (наприклад, при переході  $a$  через  $-1$  нерухома точка  $x_0$  стає нестійкою і перетворюється з атрактора у реперелор; крім того, в момент  $a = -1$  з'являється безліч циклічних точок порядку 2, які потім знову зникають). Така ситуація є типовою.

Нехай на просторі  $X$  задана сім'я неперервних відображень  $\varphi_\lambda: X \rightarrow X$ , залежна від параметра  $\lambda$ . Ті значення параметра  $\lambda$ , при переході через які динамічна система якісно змінює свою поведінку, називаються *точками біфуркації* (мала зміна параметра в околі точки біфуркації спричиняє *катастрофу* - якісну зміну стану динамічної системи).

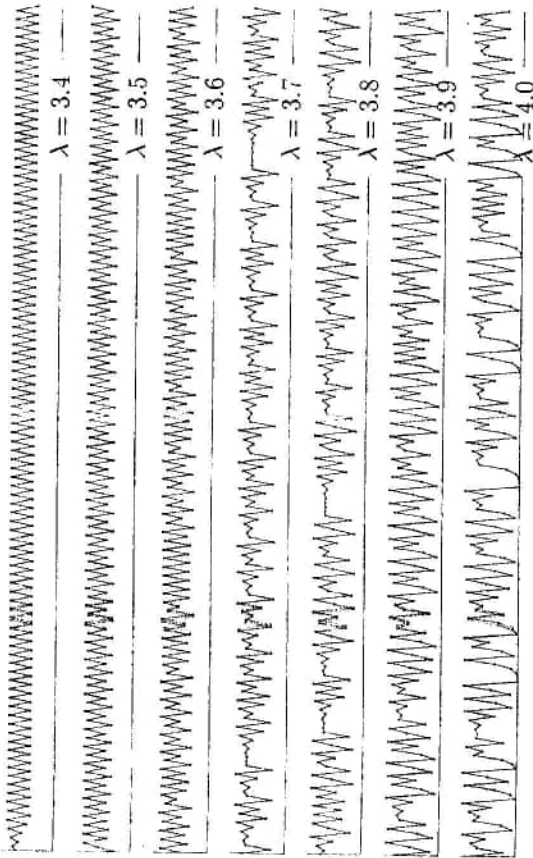
Виникнення точок біфуркації прослідкуємо на ще одному (більш змістовному) прикладі. Розглянемо динамічну систему  $(I, \varphi_\lambda)$ , де  $\varphi_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  - многочлен 2-го степеня, залежний від параметра  $\lambda$ , визначений на відрізьку  $I = [0, 1]$ . Така динамічна система у дуже спро-

шеному вигляді описує еволюцію колонії живих організмів. Припустимо, що колонія живе у середовищі, котре здатне прогнати не більше ніж  $N$  індивідів. Розмножуються організми за таким правилом: чисельність організмів  $k_{n+1}$  у  $n+1$  момент часу пропорційна населеності  $k_n$  у  $n$ -ий момент часу та об'єму вільного простору  $N - k_n$ , тобто  $k_{n+1} = \mu \cdot k_n(N - k_n)$ . Позначаючи через  $x_n = \frac{k_n}{N}$  відносну населеність, одержимо  $x_{n+1} = (\mu \cdot N)x_n(1 - x_n)$ , тобто еволюція цієї системи описується функцією  $\varphi_\lambda$ , де  $\lambda = \mu N$ . При цьому коефіцієнт відображає рівень плодювості організмів.

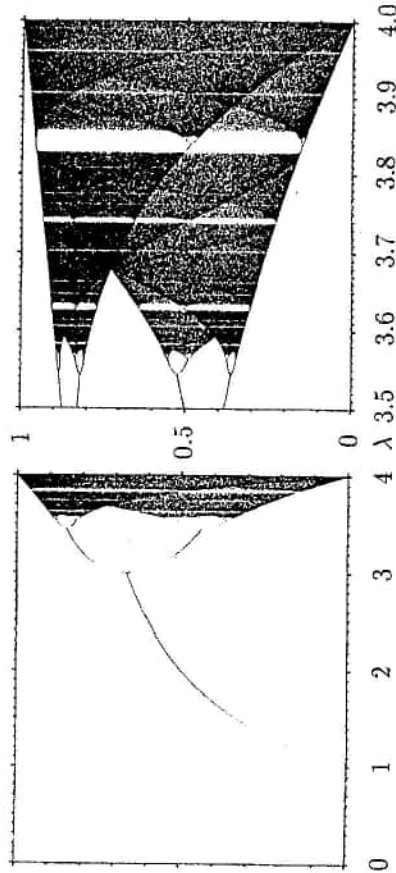
Дослідимо динаміку системи  $(I, \varphi_\lambda)$  при різних  $\lambda$ . Перш за все, зауважимо, що біологічний сенс мають лише значення коефіцієнта  $\lambda \in [0, 4]$  (у цьому випадку  $\varphi_\lambda(I) \subset I$ ). Нескладно перевірити, що при  $\lambda \in [0, 1]$  функція  $\varphi_\lambda$  має єдину нерухому точку  $x_0 = 0$ . Ця точка є аттрактором системи (тобто при будь-якому початковому  $x_0$  система еволюціонує до загинелі). При  $\lambda > 1$  ситуація змінюється (значення  $\lambda_0 = 1$  є точкою біфуркації). З'являється ще одна нерухома точка  $1 - \frac{1}{\lambda}$  відображення  $\varphi_\lambda$ , а точка 0 стає нестійкою, відштовхуючою. Характер цієї нової нерухомої точки змінюється від значення  $\lambda$ : при  $1 < \lambda \leq 3$  ця точка є аттрактором (і, як наслідок, є стабільною фіксованою точкою відображення  $\varphi_\lambda$ ). Тобто відносна чисельність з часом стабілізується до певних  $1 - \frac{1}{\lambda}$  (як, до речі, не білями  $\approx 2/3$ ). Значення  $\lambda_1 = 3$  знову є точкою біфуркації. При переході через значення  $\lambda_1 = 3$  нерухома точка  $1 - \frac{1}{\lambda}$  стає нестійкою, натомість з'являється шкільна орбіта періоду 2, котра при  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$  є аттрактором. Тобто, послідовність  $(x_n)$  з часом стабілізується і осцилює, приймаючи два значення. При  $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$  ця орбіта втрачає стабільність, зате з'являється шкільна орбіта порядку 4, яка стабільна при  $\lambda < \lambda_3 \approx 3,544 \dots$ . Далі події розвиваються у тому ж дусі: з кожної новою точкою біфуркації  $\lambda_n$  з'являється шкільна орбіта порядку  $2^{n-1}$ , яка стабільна при  $\lambda < \lambda_{n+1}$ . Послідовність  $(\lambda_n)$  має границю  $\lambda_\infty \approx 3,56995 \dots$

При  $\lambda > \lambda_\infty$  біфуркації мають іншу природу. Існує спадна послідовність  $\lambda'_n$  точок біфуркації, що прямує до  $\lambda_\infty$ . Якщо  $\lambda = \lambda'_n$ , тоді траєкторія екстремальної точки  $x_0 = 0,5$  є передциклічною і після скінченної кількості кроків стає шкільною орбітою порядку  $2^n$ . Жодна із цих орбіт не є стабільною. При  $\lambda \in (\lambda'_{n-1}, \lambda'_n)$  траєкторії точок прямують до аттрактора, котрий складається із  $2^n$  відрізків.

На поданих нижче графіках для різних значень  $\lambda$  зображено початковий відрізок траєкторії точки  $x_0 \in I$ , вибраної випадковим чином. По осі абсцис відкладено (лискретний) час, по осі ординат - значення  $x_n$ . Для наглядності сусідні точки з'єднано відрізками ламаної.



На наступних двох малюнках показана залежність аттрактора динамічної системи  $(I, \varphi_\lambda)$  від параметра  $\lambda$  (так званий графік Фейгенбаума).





## МНОЖИНИ ЖУЛІА

У цьому параграфі ми розглянемо частковий випадок динамічних систем, а саме, систем, породжених раціональними функціями на розширеній комплексній площині  $\mathbb{C}$ . Нагадаємо, що  $\mathbb{C}$  – комплексна площина, розширена нескінченно-віддаленою точкою  $\infty$ . Множину  $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$  тожнюємо зі сферою (Рімана), причому гомеоморфізм між  $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$  та комплексною площиною  $\mathbb{C}$  здійснюється за допомогою стереографічної проєкції. Через  $\rho(z, z')$  позначасмо відстань між точками  $z, z'$  на сфері Рімана. Точка  $\infty$  трактується нарівні з іншими точками. Зокрема відстань  $\rho(z, \infty)$  мала, якщо  $z$  лежить зовні досить великого круга в  $\mathbb{C}$ . Нагадаємо, що раціональним називається відображення  $W: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , що зображається як частка

$$W(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_0}{b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_0}$$

двох поліномів. Легко бачити, що функція  $W$  продовжується до неперервного відображення  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  розширеної комплексної площини.

Таким чином, виникає динамічна система  $(\mathbb{C}, W)$ , вивчення якої ми присвяtimo даній параграф. Особливу увагу буде приділено двом множинам, пов'язаним із динамічною системою  $(\mathbb{C}, W)$  – множині Жуліа та множині Фату. За означенням, *множиною Жуліа* відображення  $W$  називається множина  $J(W)$  всіх нестабільних точок динамічної системи  $(\mathbb{C}, W)$ ; доповнення  $F(W) = \mathbb{C} \setminus J(W)$  до множини Жуліа називається *множиною Фату*. Ці множини називають так на честь двох французьких математиків – П'єра Фату та Гастона Жуліа, котрі у 1918–1920 роках оцілювали ряд фундаментальних робіт, присвячених вивченню динамічних систем на комплексній площині.

Нагадаємо, що точка  $x \in \mathbb{C}$  називається *стабільною*, якщо динамічна система  $(\mathbb{C}, W)$  стабільна в деякому околі точки  $x$ . У свою чергу, динамічна система  $(\mathbb{C}, W)$  *стабільна* на множині  $S \subset \mathbb{C}$ , якщо сім'я  $\{W^n\}$  ітерацій  $W$  одностайно неперервна на  $S$  (тобто для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для довільних  $z, z' \in S$  та довільного натурального  $n$  із  $\rho(z, z') < \delta$  випливає  $\rho(W^n(z), W^n(z')) < \varepsilon$ ).

Для шкільних точок існує зручна ознака стабільності. Нагадаємо, що точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  називається *циклічною точкою порядку  $n$* , якщо  $W^n(z_0) = z_0$ . Очевидно, що  $z_0$  є циклічною точкою порядку  $n$  відображення  $W$  тоді і лише тоді, коли  $z_0$  – нерухома точка відображення

$G = W^n$ . Значення  $\lambda = G'(z_0)$  похідної функції  $G$  називається *декрементом* циклічної точки  $z_0$ . Розписуючи  $G'$  як похідну композиції функцій, одержимо

$$\lambda = W'(z_0) \cdot W'(z_1) \cdot \dots \cdot W'(z_{n-1}),$$

тобто декремент  $\lambda$  залежить від цілої орбіти  $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$  точки  $z_0$ . Нескладно довести, що циклічна точка  $z_0$  стабільна, якщо  $|\lambda| < 1$ , і нестабільна, якщо  $|\lambda| > 1$ . Цей факт дозволяє ввести наступне

**Означення.** Циклічну точку  $z_0$  назовемо

- *суперстабільною*, якщо  $\lambda = 0$ ;
- *стабільною* (або *притягуючою*), якщо  $|\lambda| < 1$ ;
- *нейтральною*, якщо  $|\lambda| = 1$ ;
- *нестабільною* (або *відштовхуючою*), якщо  $|\lambda| > 1$ .

Те ж стосується орбіти  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$  точки  $z_0$ .

Стабільним циклічним орбітам відповідають так звані множини притягання. А саме, множина

$$P(z_0; G) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} G^k(z) = z_0\}, \text{ де } G = W^n,$$

називається множиною притягання фіксованої точки  $z_0$  відображення  $G$  (або циклічної точки відображення  $W$ ). Об'єднання таких множин

$$P^+(z_0; W) = P(z_0; G) \cup P(z_1; G) \cup \dots \cup P(z_{n-1}; G)$$

називається *множиною притягання циклічної орбіти*  $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ .

З означень множин Жуліа та Фату випливають наступні факти:

- (1) Множина Фату – відкрита, а множина Жуліа – замкнена в  $\mathbb{C}$ .
- (2) Множини Фату та Жуліа – інваріантні відносно відображення  $W$ , тобто  $W(J(W)) = J(W)$  та  $W(F(W)) = F(W)$ .
- (3) Стабільні циклічні точки та їх множини притягання містяться у множині Фату.
- (4) Нестабільні циклічні точки належать множині Жуліа  $J(W)$ .
- (5) Множина  $J(W)$  непорожня.

При дослідженні множин Жуліа та Фату важливу роль відіграє наступна теорема, що виводиться із класичної теореми Пікара.

**3.1. Теорема (Монтеля).** Нехай  $\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  — сім'я аналітичних функцій, визначена на відкритій множині  $U \subset \mathbb{C}$ . Якщо існують три точки  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , які не належать до множини значень  $\mathcal{F}$ , тобто

$$\{a, b, c\} \cap \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) = \emptyset,$$

то сім'я  $\mathcal{F}$  однотайно неперервна на кожній компактній підмножині  $K \subset \bar{U}$  (такі сім'ї називаються *нормальними*).

Із теореми Монтеля випливає, що якщо  $U$  є околом точки  $z_0 \in J(W)$ , тоді множина значень, які приймають функції  $\{W^n : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  для  $n = 1, 2, \dots$  заповнює цілу площину  $\mathbb{C}$  за винятком максимум двох точок, які називаються *винятковими* точками. Ці точки не залежать від вибору  $z_0 \in J(W)$ . Наприклад, для  $W(z) = z^2$  винятковими є точки  $z = 0$  і  $z = \infty$ . Виняткові точки, якщо існують, то або належать множині Фату, або є циклічними точками порядку  $\leq 2$ .

Якщо відображення  $W$  є поліномом (степеня  $> 1$ ), тоді множина Жуліа  $J(W)$  обмежена. Це випливає із замкненості  $J(W)$  у  $\mathbb{C}$  і того факту, що  $\infty$  є стабільною нерухомою точкою відображення  $W$ . Оскільки множина Жуліа інваріантна, тобто  $W(J(W)) = J(W)$ , то орбіта кожної точки  $z \in J(W)$  також обмежена.

**Означення.** *Заповненою множиною Жуліа* полінома  $W$  називається множина  $K(W)$  точок  $z \in \mathbb{C}$ , орбіта яких обмежена.

Виявляється, що множина Жуліа  $J(W)$  полінома  $W$  співпадає з межею множини  $K(W)$ . Дійсно, оскільки сім'я ітерацій  $\{W^n\}$  нестабільна в будь-якому околі  $U$  довільної точки  $z \in J(W)$ , то, згідно теореми Монтеля, значення  $\{W^n(U)\}$  заповнюють всю комплексну площину  $\mathbb{C}$  за винятком, можливо, двох точок. Зокрема, множина значень  $\{W^n(U)\}$  необмежена, і, отже,  $z$  не може бути внутрішньою точкою множини  $K(W)$ . З іншого боку, якщо  $z$  — точка на межі множини  $K(W)$ , тоді її орбіта обмежена, але в будь-якому околі  $U \ni z$  існують точки з необмеженою орбітою. Звідси випливає, що сім'я ітерацій  $\{W^n\}$  не є однотайно неперервною на  $U$ , і, як наслідок,  $z \in J(W)$ .

Повернемося тепер до загального випадку раціонального відображення  $W$ . Крім звичайних (додатніх) траєкторій точок, природно розглядати також зворотні (від'ємні) траєкторії.

Від'ємною півтраєкторією точки  $z_0$  назвемо будь-яку послідовність  $\{z_{-n}, z_{-n+1}, \dots, z_{-1}, z_0\}$ , де  $W(z_{-n}) = z_{-n+1}$ .

Об'єднання

$$T^-(z_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} W^{-k}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \exists k \geq 0 \text{ з } W^k(z) = z_0\}$$

всіх від'ємних півтраєкторій називається *повною від'ємною півтраєкторією* точки  $z_0$ .

Наступне твердження є дещо глибшим наслідком теореми Монтеля.

**3.2. Твердження.** Множина Жуліа має наступні властивості:

- (1) Або  $J(W) = \mathbb{C}$ , або  $J(W)$  має порожню внутрішність.
- (2) Якщо  $z$  не є винятковою точкою відображення  $W$ , тоді множина точок скупчення повної від'ємної півтраєкторії  $T^-(z)$  містить множину Жуліа  $J(W)$ .
- (3) Повна від'ємна півтраєкторія  $T^-(z)$  будь-якої точки  $z \in J(W)$  всюди щільна в  $J(W)$ .
- (4)  $J(W)$  не має ізольованих точок.
- (5)  $J(W)$  є замиканням множини нестабільних циклічних точок.
- (6) Множина Жуліа  $J(W)$  співпадає з межею множини притягання будь-якої стабільної циклічної орбіти.

Розглянемо наразі декілька конкретних прикладів.

**3.3. Приклад.** Нехай  $W(z) = z^k$ ,  $k > 1$ . Заповненою множиною Жуліа цього відображення є замкнений одиничний круг  $U = \{z : |z| \leq 1\}$ . Множиною Жуліа відображення  $W$  є одиничне коло — межа  $U$ .

Для комплексного параметра  $c$  покладемо  $P_c(z) = z^2 + c$  (зокрема,  $P_0(z) = z^2$ ).

**3.4. Приклад.** Розглянемо відображення  $P_{-2}(z) = z^2 - 2$ . Множиною Жуліа цього відображення є відрізок  $I = \{z : \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \in [-1, 1]\}$ . Легко перевірити, що орбіта будь-якої точки  $z \in I$  обмежена. Покажемо, що орбіти точок  $z \notin I$  необмежені. Щоб довести це, зауважимо, що відображення  $H(z) = z + \frac{1}{z}$  гомеоморфно відображає

доповнення  $\mathbb{C} \setminus U$  одиничного круга на доповнення  $\mathbb{C} \setminus I$ . Легко бачити, що  $H \cap P_0 = P_{-2} \cap H$ . Зафіксуємо будь-яке  $z \notin I$ . Існує таке  $w \notin U$ , що  $H(w) = z$ . Із рівності  $H \cap P_0 = P_{-2} \cap H$  випливає, що образ орбіти  $\{P_0^n(w)\}$  точки  $w$  під дією відображення  $H$  співпадає з орбітою  $\{P_{-2}^n(z)\}$  точки  $z$ , і як наслідок, ця орбіта необмежена. Тобто  $z \notin K(P_{-2})$  і, отже,  $K(P_{-2}) = I$  (оскільки множина  $K(P_{-2}) = I$  має порожню внутрішність).

На жаль,  $c = 0$  та  $c = -2$  - єдині значення параметра  $c$ , при якому множина Жюлія відображення  $P_c(z) = z^2 + c$  допускає точний опис. В інших випадках застосовують чисельні методи. Існує декілька алгоритмів побудови множин Жюлія. Практично всі вони ґрунтуються на пунктах 1 і 6 твердження 3.2. Тут варто зауважити, що, згідно п.1, нетривіальні множини Жюлія мають порожню внутрішність, тому те, що ми бачимо на екрані комп'ютера як множину Жюлія, насправді є її околом.

Найчастіше для малювання множин Жюлія використовують п.б твердження 3.2. Нехай  $z_*$  - будь-яка фіксована точка відображення  $W$ . Враховуючи максимальну роздільну здатність монітора, для кожної точки екрана  $z_0$  обчислимо таку кількість членів послідовності  $\{W^k(z_0)\}$ , аби бути певним, що ця послідовність прямує до точки  $z_*$ . Тоді починаємо точку  $z_0$  вибраним кольором. Таким чином, одержимо множину притягання  $P(z_*, W)$  фіксованої точки  $z_*$ ; межа цієї множини, згідно властивості 6, є множиною Жюлія функції  $W$ . Можна вкористати декілька кольорів для позначення множин притягання різних фіксованих стабільних точок. Якщо відображення  $W$  не має стабільної фіксованої точки, знаходимо стабільну циклічну точку і відповідно модифікуємо алгоритм.

У випадку, коли  $W(z) = a_m z^m + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  - поліном, спочатку малюємо заповнену множину Жюлія  $K(W)$  відображення  $W$ , а потім знаходимо її межу. Алгоритм малювання множини  $K(W)$  наступний: вибираємо деяке достатньо велике  $N$  та  $B > 0$ . Для кожної точки  $z$  екрана обчислимо початковий відрізок  $\{W^n(z)\}_{n=1}^N$  її орбіти. Якщо  $|W^n(z)| \leq B$  для всіх  $n < N$ , то вважаємо, що орбіта точки  $z$  обмежена, а сама точка  $z$  належить множині  $K(W)$ . Величину константи  $B$  достатньо вибрати такою, щоб для всіх дійсних  $x > B$  справджувалась нерівність  $|a_m| x^m - \sum_{i=0}^{m-1} |a_i| x^{i-1} > x$ . (Наприклад, для  $P_c(z) = z^2 + c$  достатньо взяти  $B = \max\{2, |c|\}$ ). Якщо  $|z| > B$ , тоді

$|W(z)| \geq |a_m| |z|^m - \sum_{i=0}^{m-1} |a_i| |z|^{i-1} > |z|$ , і, отже, орбіта точки  $z$  прямує до  $\infty$ . Варто зауважити, що цей метод не дає добрих результатів у випадку, коли множина Жюлія цілком нез'явна.

Інший алгоритм вимагає ефективного визначення функції  $W^{-1}$ , оберненої до  $W$ . Проілюструємо його на прикладі многочлена другого порядку. Прообраз точки  $v$  для відображення  $L(z) = z^2 + c$  складається з двох точок

$$L^{-1}(v) = \{+\sqrt{v-c}, -\sqrt{v-c}\}.$$

Як випливає з п.3 твердження 3.2, для довільної точки  $z_0 \in J(L)$ , наприклад, для фіксованої нестабільної точки, множина Жюлія  $J(L)$  є замиканням повної від'ємної півтраєкторії  $T^{-1}(z_0)$ . Цей факт підкажує можливість використання ймовірносного алгоритму системи ітерованих відображень

$$\{\bar{C}, w_1(z) = \sqrt{z-c}; w_2(z) = -\sqrt{z-c}; p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}\}$$

для визначення від'ємної півтраєкторії  $\{z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots\}$  точки  $z_0$ , яка, із ймовірністю 1, є всюди щільна у множині Жюлія  $J(L)$ . Варто зауважити, що відображення  $w_1, w_2$  не є стискуючими, тому результати §3 [1] не можуть бути застосовані. Зокрема, густина розподілу таким чином побудованих точок  $\{z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots\}$  може бути дуже нерівномірною.

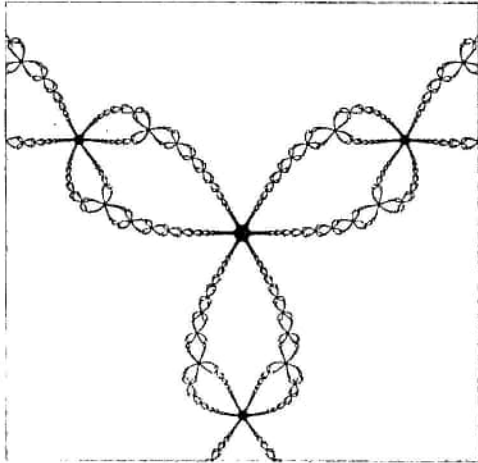
Непогані результати дає алгоритм, що базується безпосередньо на означенні множини Жюлія або п.5 твердження 3.2. Він розрізняє чутливість послідовності  $\{W^n(z_0)\}$  до зміни початкової точки  $z_0$ . Для значення  $z_0$ , що відповідає кожній (дискретній) точці екрану монітора, обчислимо дві послідовності:

$$\{z_0, z_1, z_2, \dots\}, \text{ де } z_{n+1} = W(z_n);$$

$$\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots\}, \text{ де } \delta_{n+1} = |W'(z_n)| \cdot \delta_n.$$

Значення  $\delta_n$  означає похибку, якої можна чекати при обчисленні  $z_n$  у випадку, коли початкове значення  $z_0$  дано з похибкою  $\delta_0$ . Виберемо  $\delta_0$  достатньо малим, наприклад,  $\delta_0 = 0,01 \cdot |z' - z''|$ , де  $|z' - z''|$  - відстань між точками, що відповідають сусіднім пікселям екрану. Зафіксуємо також два великих числа  $N$  і  $R$  (наприклад,  $N = 500, R = 10$ ). Якщо для деякого  $n < N$  одержимо  $\delta_n > R$ , то зафарбуємо точку  $z_0$  на екрані вибраним кольором, сподіваючись, що у її  $\delta_0$ -околі є точка множини Жюлія.

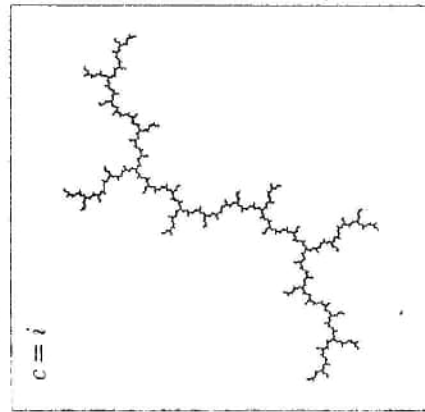




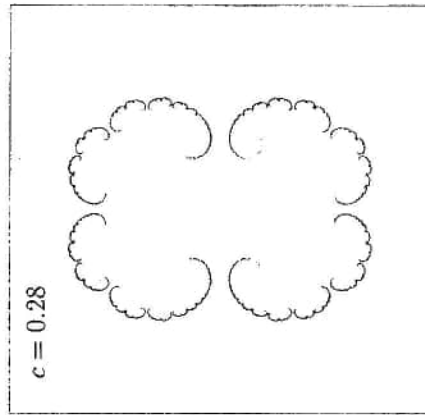
**3.5. Приклад.** На рисунку показано множину Жуліа  $J(W)$  функції  $W(z) = (2z + z^{-2})/3$ . Якщо  $z_0 \in F(W)$ , тоді траєкторія  $T^+(z_0)$  прямує до однієї з трьох суперстабільних фіксованих точок  $e^{2\pi ki/3}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

**3.6. Приклад.** Для функції  $W(z) = 2z - \frac{1}{z}$  множина Жуліа є множиною Кантора  $J(W)$  на відрізку  $\{z : \text{Im}(z) = 0, -1 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ . Якщо  $z_0 \in F(W)$ , тоді траєкторія  $T^+(z_0)$  прямує до нескінченності.

**3.7. Приклад.** На наступних двох малюнках зображено множину Жуліа  $J(P_c)$  полінома  $P_c(z) = z^2 + c$ . Для  $c = i$  множина  $J(P_c)$  є дендритом, в той час, як для  $c = 0.28$  - цілком незв'язною множиною, гомеоморфною Канторовому кубу. В обох випадках траєкторії точок  $z \in F(P_c)$  прямують до нескінченності.

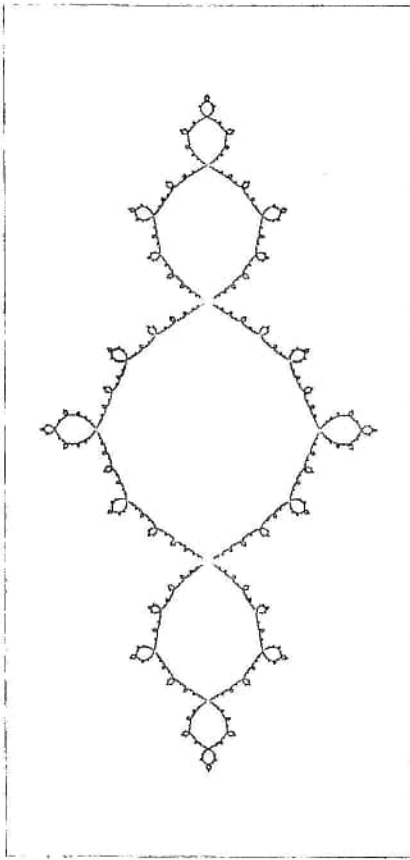


$c = i$



$c = 0.28$

**3.8. Приклад.** Для функції  $P_{-1}(z) = z^2 - 1$  множина Жуліа, показана на рисунку, розбиває комплексну площину на дві області - обмежену (вона є множиною притягання суперстабільної циклічної орбіти  $\{0, -1\}$ ) та необмежену (яка є множиною притягання нескінченно віддаленої точки).

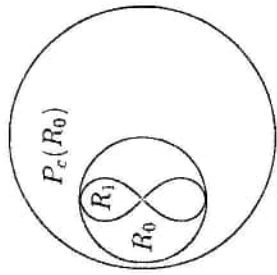


#### МНОЖИНА МАНДЕЛЬБРОТА

Розглянемо сім'ю поліномів другого степеня  $P_c(z) = z^2 + c$ , залежних від комплексного параметра  $c$ . Як видно з малюнків, вміщених у попередньому параграфі, властивості множини Жуліа  $J(P_c)$  суттєво залежать від параметра  $c$ . Наприклад, для  $c = 0$  або  $c = -2$  множина Жуліа  $J(P_c)$  зв'язна (див. приклади 3.3 та 3.4), в той час, як для деяких інших значень  $c$  це не так.

**4.1. Твердження.** Якщо  $|c| > 2$ , тоді множина Жуліа  $J(P_c)$  відображення  $P_c$  гомеоморфна Канторовій множині, і, як наслідок, є цілком незв'язною.

Дійсно, розглянемо круг  $R_0 = \{z : |z| \leq |c|\}$  і зауважимо, що образ  $P_c(0)$  нуля лежить на межі круга  $R_0$ , а сам круг  $R_0$  лежить в образі  $P_c(R_0)$ , який є кругом радіуса  $|c|^2$  навколо точки  $c$ . Неважко переконатись, що орбіта будь-якої точки за межами круга  $R_0$  прямує до  $\infty$ . Отже,  $K(P_c) \subset R_0$ . Покладемо  $R_1 = \{z : P_c(z) \in R_0\}$ . Зауважимо,



що, оскільки образ нуля лежить на межі круга  $R_0$ , то множина  $R_1$  має форму "вісімки", зображеної на малюнку для  $c = 2$ . 1. Кожна половинка цієї "вісімки" гомеоморфно відображається на круг  $R_0$ . Оскільки  $P_c(K(P_c)) = K(P_c) \subset R_0$ , то  $K(P_c) \subset R_1$ . Розглянемо тепер множину  $R_2 = \{z : P_c(z) \in R_1\}$  і, індуктивно,  $R_{n+1} = \{z : P_c(z) \in R_n\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Можна перевірити, що  $R_{n+1}$  лежить у внутрішності  $R_n$  і має  $2^n$  компонент, кожна з яких гомеоморфна "вісімці"  $R_1$ . Тоді множина  $K(P_c) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$  є цілком незв'язною, і, як наслідок, є топологічною копією Канторової множини.

Таким чином, якщо  $|c| > 2$ , тоді множина Жуліа  $J(P_c)$  цілком незв'язна, а орбіта точки  $z = 0$  необмежена. Виявляється, що два останні явища сквівалентні, точніше, має місце наступна взаємозамінна альтернатива:

**4.2. Теорема.** Якщо  $0 \notin K(P_c)$ , тоді множина  $K(P_c) = J(K_c)$  є цілком незв'язною; якщо  $0 \in K(P_c)$ , тоді множини  $K(P_c)$  та  $J(P_c)$  зв'язні.

Ця альтернатива дозволяє означити множину Мандельброта (зображену на обкладинці).

**4.3. Означення.** Множиною Мандельброта називається множина  $M$  тих значень параметра  $c$ , для яких  $0 \in K(P_c)$ , де  $P_c(z) = z^2 + c$ ; еквівалентно,  $M$  є множиною тих значень  $c$ , для яких множина Жуліа  $J(P_c)$  є зв'язною.

Зауважимо, що нуль відіграє тут особливу роль. Причина у тому, що нуль є критичною точкою відображення  $P_c$  (точка  $z$  називається критичною для відображення  $f$ , якщо  $f'(z) = 0$ ). Як ми бачили, характер орбіти нуля визначає властивості множини Жуліа. Ця ситуація є типовою: наприклад, якщо нуль є передциклічною, але не циклічною точкою відображення  $P_c$ , тоді множина  $K(P_c)$  має порожню внутрішність. Значення параметра  $c$ , для яких множина  $K(P_c)$  має порожню внутрішність, називаються точками Містуревича. Такою, наприклад, є точка  $c = i$ . Інший цікавий факт: кожна стабільна циклічна орбіта відображення  $P_c$  притягує орбіту нуля, звідки випливає, що відображення  $P_c$  не може мати більше однієї стабільної циклічної орбіти.

Повернемось врешті до множини Мандельброта  $M$ . Із прикладу 4.1 випливає, що ця множина міститься в крузі  $\{z : |z| \leq 2\}$ . Нескладно також перевірити, що перетин множини  $M$  з віссю  $\text{Im}(z) = 0$  є відрізком  $\{z : \text{Re}(z) \in [-2, \frac{1}{4}], \text{Im}(z) = 0\}$ . Якщо для деякого  $c$  відображення  $P_c$  має стабільну циклічну орбіту, тоді ця орбіта притягає орбіту нуля, і, як наслідок,  $0 \in K(P_c)$ , що еквівалентно тому, що  $c \in M$ . Позначимо через  $C_1 \subset M$  множину тих значень  $c$ , для яких відображення  $P_c$  має стабільну нерухому точку. Множину  $C_1$  можна визначити, розв'язуючи систему  $P_c(z) = z^2 + c = z$  і  $|P_c'(z)| = |2z| < 1$ , з якої випливає, що  $C_1$  – область, обмежена кардіоїдою  $c = \frac{1}{2}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi}$ , де  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Аналогічно можна показати, що множина  $C_2 \subset M$  тих  $c$ , для яких відображення  $P_c$  має стабільну циклічну орбіту порядку 2 є внутрішністю круга  $\{z : |z+1| < \frac{1}{4}\}$ . Зауважимо, що множини  $C_1$  та  $C_2$  дотикаються в точці  $c = -\frac{3}{4}$ . Ця ситуація є типовою: до області  $C_1$  дотикаються множини  $C_n$  тих значень параметра  $c$ , при яких відображення  $P_c$  має стабільну циклічну орбіту порядку  $n$ .

Означення множини Мандельброта без змін переноситься на випадок поліномів вищих порядків. Для полінома  $W(z) = z^k + c$  степеня  $k \geq 2$ , залежного від комплексного параметра  $c$ , означимо  $M(k)$  як множину тих значень  $c$ , при яких  $0 \in K(W)$ . Із означення випливає, що множина Мандельброта  $M(k)$  має кутову симетрію: вона є інваріантною при повороті на кут  $\frac{2\pi}{k-1}$ . Її характерна також симетрія відносно осі  $\text{Im}(c) = 0$ , та осі  $\text{Re}(z) = 0$  у випадку непарного  $k$ .

Множина  $M(k)$  міститься в крузі  $\{z : |z| \leq k\sqrt[2]{2}\}$ . Дійсно, припустимо, що  $|c| > k\sqrt[2]{2}$  для деякого  $c \in M(k)$ . Тоді  $|c|^{k-1} = 2 + \varepsilon$  для деякого  $\varepsilon > 0$ . Зауважимо, що для довільного  $z$ ,  $|z| \geq |c|$ , справедливо нерівність  $|W(z)| = |z^k + c| \geq |z|^k - |c| \geq |z|(|c|^{k-1} - 1) \geq |z|(1 + \varepsilon)$ . Оскільки  $W(0) = c$ , робимо висновок, що орбіта нуля прямує до  $\infty$ , тобто  $c \notin M(k)$ .

На цих зауваженнях ґрунтується простий алгоритм малювання множини Мандельброта. Фіксуємо достатньо велике  $N$  (наприклад,  $N = 50$ ) і для кожної точки  $c$  із круга  $\{c : |c| \leq k\sqrt[2]{2}\}$  обчислюємо значення  $W_c^n(0)$ , де  $W_c(z) = z^k + c$ . Якщо  $|W_c^n(0)| \leq k\sqrt[2]{2}$  при всіх  $n < N$ , то вважаємо, що орбіта нуля при відображенні  $W_c$  обмежена і зберігаємо точку  $c$  до множини Мандельброта  $M(k)$ , зафарбовавши її відповідним кольором.