Інтегрування раціональних функцій

Практичне заняття 4

Інтегрування раціональних функцій

Практичне заняття 4

Інтегрування раціональних функцій.

Відкрийте свій конспект лекцій або підручник і прочитайте цю тему.

Інтегрування раціональних функцій — це інтегрування функцій виглядy $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени.

1°. Ми перевіряємо чи дріб $P(x)/Q(x)$ є правильним, тобто чи степінь чисельника є меншим за степінь знаменника.

Якщо так не є, то ми ділимо чисельник на знаменник і отримаємо.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

2°. Якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильний, то розкладаємо знаменник на множники. Обов'язково $Q(x)$ розкладеться на лінійні або квадратичні вирази з дійсними коефіцієнтами.

3°. Якщо, наприклад, $Q(x)$ розкладається на множники вигляду $(x-a)^n$ і $(x^2+px+q)^k$, де $D=p^2-4q<0$, то $\frac{P(x)}{Q(x)}$ так розкладається на прості дроби:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+px+q)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Всі коефіцієнти $A_1, A_2, \dots, A_n, M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ шукаємо методом невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо приклади. Збірник, ~~стор~~ зад. 6.2.

(6.2) 1) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$.

Дріб $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ правильний, бо степінь чисельника $P(x)=x$ дорівнює 1. А степінь знаменника $Q(x)=(x+1)(2x+1)$ дорівнює 2 і $1<2$.

Отже, пункт 1° виконано.

Знаменник $Q(x)$ вже розкладено на множники.

Тобто пункт 2° теж виконано.

3° Розкладаємо дріб $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ на прості дроби:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}. \qquad (1)$$

A і B шукаємо, зводячи прості дроби до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники рівняння (1).

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1}^{(2x+1)} + \frac{B}{2x+1}^{(x+1)} = \frac{A\cdot(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)}.$$

Знаменники рівні, тому чисельники мають бути рівні:

$$x = A\cdot(2x+1) + B(x+1).$$

Звідси $x = (2A+B)x + (A+B)$

Два многочлени рівні, якщо коефіцієнти при відповідних степенях змінної рівні, тому

Коефіцієнт при x: $1 = 2A + B$

коефіцієнт при x^0 (вільний член): $0 = A + B$

Розв'язуємо цю систему:

$$\begin{cases} 2A + B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Відніємо рівняння, одержимо $A = 1$.

Підставимо в II-е рівняння, одержимо $B = -1$.

Отримані значення коефіцієнтів A і B підставляємо в (1) і одержимо інтеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$$

(6.2) 2) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

Прошу розв'язати самостійно.

Коли розв'яжете, переходите до наступної сторінки.

2) Розв'язок. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx.$

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x^2-x-12) + B(x^2-5x+4) + C(x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)(x-4)}$$

x^2: $2 = A + B + C$

x: $41 = -A - 5B + 2C$

$-91 = -12A + 4B - 3C$

$$\begin{cases} 43 = -4B + 3C \\ A = 2 - B - C \\ -12(2-B-C) + 4B - 3C = -91, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{3C-43}{4} \\ A = 2 - \frac{3}{4}C + \frac{43}{4} - C \\ 16B + 9C + 67 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{3C-43}{4} \\ A = \frac{51}{4} - \frac{7}{4}C \\ 16\left(\frac{3C}{4} - \frac{43}{4}\right) + 9C + 67 = 0 \end{cases}$$

$21C = 105 \Rightarrow C = 5,\ A = 4,\ B = -7$

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3} \right) dx =$$

$$= 4\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C.$$

6.2 3) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx.$

Розкладаємо знаменник на множники. Знайдемо корені р-ня за теоремою Вієта:

$$x^2+x-2=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1$$

Тоді $\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{2x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} =$

$$= \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$x: \quad 2=A+B$$
$$x^0: \quad 7=-A+2B \quad)^+ \Rightarrow 9=3B \Rightarrow B=3 \qquad A=2-B=-1$$

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{3}{x-1}\right)dx = -\ln|x+2|+3\ln|x-1|+C.$$

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$2x+7 = A(x-1) + B(x+2)$$

при $x=1$: $\quad 9 = 3B \Rightarrow B = 3$

при $x=-2$ $\quad 3 = -3A \Rightarrow A = -1$

6.2 4) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}.$$

x^2: $0 = A+B$

x: $0 = C$ $\Rightarrow$ $A=1$, $B=-A=-1$, $C=0$.

x^0: $1 = A$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$$

6.2 б) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^3-x^2 \\ \underline{-\,x^3-x^2} & 1 \\ x^2+1 & \end{array}$

Степінь чисельника дорівнює степеню знаменника. Отже, дріб неправильний, тому ми спочатку виділимо цілу частину.

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx = \int dx + I_1 = x + I_1,$$

де $I_1 = \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx.$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} \overset{(x(x-1)}{+} \frac{B}{x^2} \overset{(x-1}{+} \frac{C}{x-1} \overset{x^2}{=}$$

$$= \frac{A(x^2-x)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} x^2: & 1 = A + C \\ x: & 0 = -A + B \\ x^0: & 1 = -B \end{cases} \Rightarrow \quad B = -1, \quad A = B = -1, \quad C = 1 - A = 2$$

$$I_1 = \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C.$$

(6.5) 4) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$

x^2+x+1 має $D = 1-4 = -3 < 0$, тому він не розкладається на лінійні множники

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (A+C-B)x + A - C}{x^3-1}$$

$$\begin{cases} x^2: & 0 = A+B \\ x: & 1 = A+C-B \\ x^0: & 0 = A-C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ C = A \\ A+A+A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3} I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x-1}{\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

B: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1.165 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4+5x^2+4-(5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}\,dx =$

$= \int \left(1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right) dx$

$x^4+5x^2+4=0$

замена $x^2=t$

$t^2+5t+4=0$

имеет корни $t_1=-1,\ t_2=-4$

Отсюда, $x^4+5x^2+4=(x^2-(-1))(x^2-(-4))=(x^2+1)(x^2+4)$.

Итому, $\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

$5x^2+4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$

$$\begin{cases} x^3: & A+C=0 \\ x^2: & B+D=5 \\ x: & 4A+C=0 \\ x^0: & 4B+D=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=C=0 \\ B=-\frac{1}{3},\ D=\frac{16}{3} \end{array}$$

Ответ,

$$I = \int \left(1 + \frac{1/3}{x^2+1} - \frac{16/3}{x^2+4}\right) dx =$$

$$= x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$$

$$= \boxed{x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C}$$

Домашнє завдання:

із задач 1.157- 1.184 – зробити 5 прикладів з тих, що ми не робили