Ряди Фур’є.

Практичне заняття 19

Теорема про розвинення. Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна і має кусково-неперервну похідну $f'(x)$ на інтервалі $(-l, l)$, причому її точки розриву ξ регулярні, тобто $f(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi - 0) + f(\xi + 0))$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі може бути розвинена в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Розвинути в ряд Фур'є: а) $f(x) = x^2$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;
б) $f(x) = \sin^3 x$ на $\mathbb{R}$.

Розв'язування. а) Оскільки функція $f(x) = x^2$ на $(-\pi; \pi)$ є парною, то $b_n = 0$.

Далі $a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left(x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int\limits_0^{\pi} x \sin nx\, dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left(-x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int\limits_0^{\pi} \cos nx\, dx \right) = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2}.$$

Отже, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, $x \in (-\pi, \pi)$. При $x = 0$ отримуємо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

б) $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

3.204 Розвинути в ряд Фур'є у вказаних інтервалах такі функції $f(x)=|x|$ в $(-\pi;\pi)$.

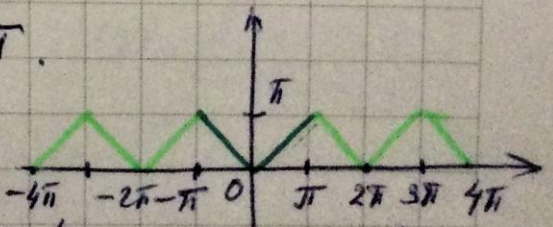
<u>Розв.</u> $f(x)$ – парна $\Rightarrow$ $b_n=0$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x\,d(\sin nx)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(x\cdot\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi n}\left(+\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

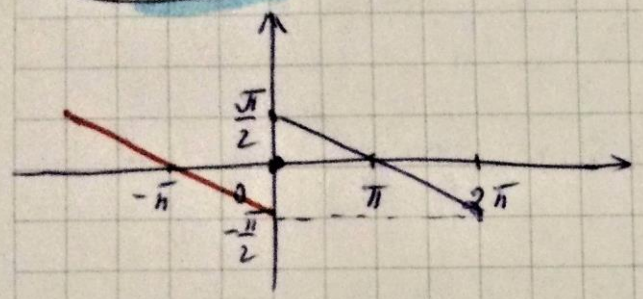
$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\pi n-1\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi.$$



$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{\pi}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

3.203 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ в інтервалі $(0;2\pi)$



Продовжимо $f(x)$ 2π-періодично і на від'ємні значення

Отримаємо непарну на $(-\pi;\pi)$ ф-цію.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{\pi}=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin nx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)=-\frac{(-1)^n-1}{n}-\frac{1}{\pi}\left(-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=\frac{1-(-1)^n}{n}-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n+0\right)=\frac{1-(-1)^n+(-1)^n}{n}=\frac{1}{n}.$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

3.213 $f(x) = x\cos x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв. $f(x)$ — непарна ф-ція, тому $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x \sin\frac{n\pi x}{\pi/2}\, dx \quad \text{і} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2nx).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x \sin(2nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cdot \frac{1}{2}\left(\sin(2nx - x) + \sin(2nx + x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\left(\sin(2n-1)x + \sin(2n+1)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \, d\left(-\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \, d\left(-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2n-1}\left(x\cos(2n-1)x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n+1}\left(x\cos(2n+1)x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2n+1)x\,dx\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n\right) + \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right) =$$

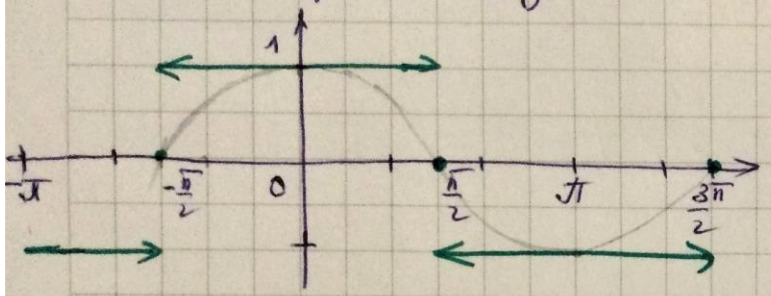
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right) = \frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{\pi}\cdot\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$= \frac{2(-1)^{n-1}\cdot 8n}{\pi(4n^2-1)^2} = \frac{16n\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)^2}.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16n\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)^2}\sin(2nx).$$

3.214 Розкинути в ряди Фур'є такі період. ф-ції:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$$



$f(x)$ – 2π-періодична ф-ція.
парна,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1\cdot dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/2} - x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx -\right.$$

$$\left. - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ \dfrac{4\cdot(-1)^k}{\pi(2k+1)}, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cdot(-1)^k}{\pi(2k+1)}\cos(2k+1)x$$

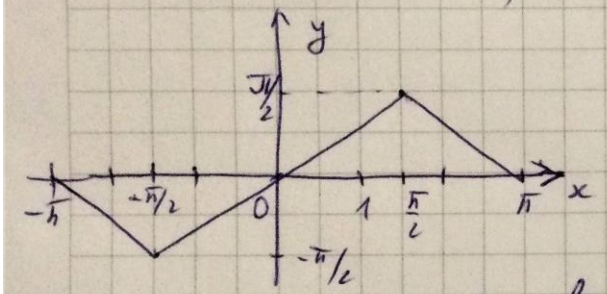
3.215

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x, & \text{якщо } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases},$$

якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$f(x)$ — 2π-періодична ф-ція.

непарна ф-ція.



Тому $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi/2}\right.$$

$$+ \pi\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \left(\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\cos\pi n + \frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\cos\pi n -\right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\pi n + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4\cdot(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}\sin(2k+1)x.$$

Домашнє завдання:

із задач 3.201 - 3.219 зробити 5 прикладів з тих, що ми не робили.