Функціональні послідовності.

Практичне заняття 16

Озн. 1. Послідовність функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ збігається (поточково збігається) до ф-ції $f(x)$ на множині E, якщо

$\forall x \in E \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. $\quad f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Озн. 2. Послідовність функцій $(f_n(x))$ рівномірно збігається до $f(x)$ на множині E, якщо:

1) $f_n(x)$ поточково збігається до $f(x)$ на E і
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

або еквівалентно

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \; n \to +\infty.$$

Дослідити послідовності на рівномірну збіжність у вказаних проміжках:

3.99 $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \le x \le 1$.

▶ 1) Встановимо, до якої ф-ції збігається $f_n(x)$ поточково на множині $E = [0, 1]$.

$$x^n - x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0-0=0, & \text{якщо } 0 \le x < 1, \\ 1-1=0, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

Отже, $f_n(x) \to 0$, $n \to +\infty$, $\forall x \in [0, 1]$.

2) Розгл. $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in E} |x^n - x^{n+1}|$

$(x^n - x^{n+1})' = n x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$, якщо

$x_1 = 0$ або $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0; 1]$

$|f_n(x_1)| = |f_n(0)| = 0$, $|f_n(x_n)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} =$

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$, $n \to +\infty$

$|f_n(1)| = 0$. Отже, $\sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

тобто $f_n(x) \overset{[0;1]}{\rightrightarrows} 0$, $n \to +\infty$.

3.103 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $-\infty < x < +\infty$

▶ 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

2) Чи $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ збігається до $f(x) = |x|$ рівномірно на $\mathbb{R}$?

Розв. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| =$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1/n^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{1/n^2}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0} = \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Отже, $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} |x|$. ◀

3.105 $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $1 < x < +\infty$.

▶ 1) $\forall\, x > 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = \dfrac{0}{x^2} = 0.$

2) Чи $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ збігається до $f(x) = 0$ рівномірно на $(1;+\infty)$? .

Знайдемо $\sup\limits_{x>1} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x>1} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$

$$f_n'(x) = \frac{2n(1+n^2x^2) - 2n^2x \cdot 2nx}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0,$$

якщо $1 - n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{n} \notin (1;+\infty)$ де $n \in \mathbb{N}$.

Подивимось на значення $f_n(x)$ на межі обл. $(1;+\infty)$:

$f_n(1) = \dfrac{2n}{1+n^2}$; $f_n(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0.$

Отже, $\sup\limits_{x>1} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = f_n(1) = \dfrac{2n}{1+n^2} \to 0,\ n\to+\infty.$ ◀

Тому $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{(1;+\infty)}{\rightrightarrows}} 0.$

3.108 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$, де $\varepsilon>0$.

▶ 1) $\forall x\in[1-\varepsilon;\ 1+\varepsilon]$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+1}, & \text{якщо } x>1,\\ \dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}, & \text{якщо } x=1,\\ \dfrac{0}{1+0}=0, & \text{якщо } x<1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & \text{якщо } 1<x\le 1+\varepsilon,\\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x=1,\\ 0, & \text{якщо } 1-\varepsilon\le x<1.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in(1;\ 1+\varepsilon]\\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x=1\\ 0, & \text{якщо } x\in[1-\varepsilon;\ 1)\end{cases}$$

2) Чи $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\overset{[1-\varepsilon;\,1+\varepsilon]}{\rightrightarrows}} f(x)$?

$f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ – неперервні функції $\forall n\in\mathbb{N}$ на $E=[1-\varepsilon;\ 1+\varepsilon]$.

Якщо б $f_n(x)$ збіг. до $f(x)$ на E рівномірно, то за вл-стями рівном. зб-сті $f(x)$ мала б бути неперервна. Оскільки $f(x)$ не є непер. функц. на E, то $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\overset{[1-\varepsilon;\,1+\varepsilon]}{\not\rightrightarrows}} f(x)$. ◀

3.111 $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$, $-\infty < x < +\infty$.

▶ 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$

2) Чи $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ збіг. рівномірно до $f(x)=0$ на $\mathbb{R}$?

Розв. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\sin\frac{x}{n}| = 1 \not\to 0, n\to+\infty$. ◀

Отже, $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows}} 0$.

3.115 $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0 < x < 1$.

▶ 1) $\forall x \in (0;1)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n}\cdot\ln\frac{x}{n} = \left\{\begin{matrix}\text{заміна}\\ t=\frac{x}{n}\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{t\to 0} t\cdot\ln t =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to 0}(-t) = 0.$

2) Чи $f_n(x) \overset{(0;1)}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$?

Знайдемо $\sup\limits_{x\in(0;1)} \left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|$.

$f_n'(x) = \frac{1}{n}\ln\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{x}{n} + 1\right) = 0$, якщо $\ln\frac{x}{n} = -1$

$x = \frac{n}{e}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x = \frac{n}{e} \notin (0;1)$

Отже, $\sup\limits_{x\in(0;1)} \left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|$ може досягатися лише в крайніх точках інтервалу.

$f_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n} = \lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$; $f_n(1) = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

$\sup\limits_{x\in(0;1)} \left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Тому $f_n(x) \overset{(0;1)}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$. ◀

Домашнє завдання:

із задач 3.97 - 3.117 зробити 7 прикладів з тих, що ми не робили.