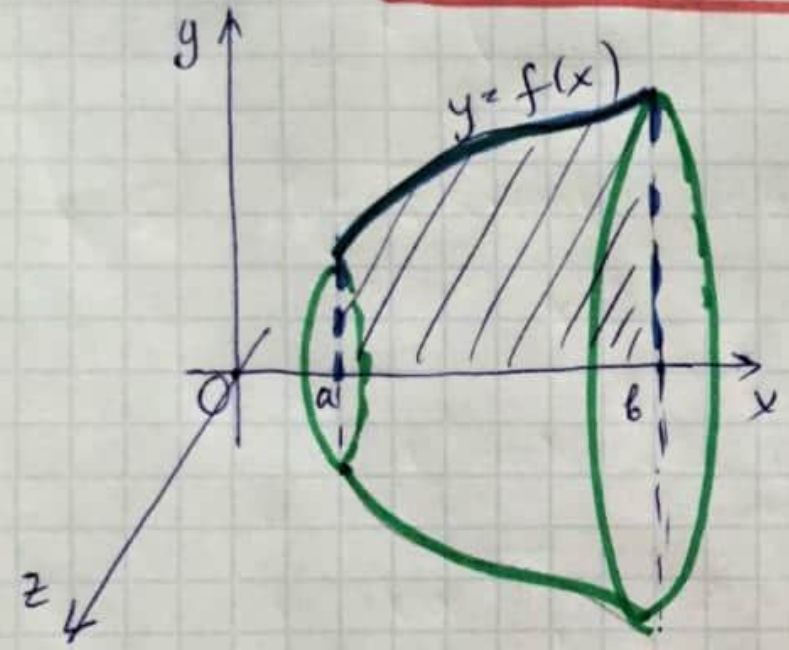
Застосування визначених інтегралів: об’єм тіла обертання.

Практичне заняття 11

Об'єм тіла обертання



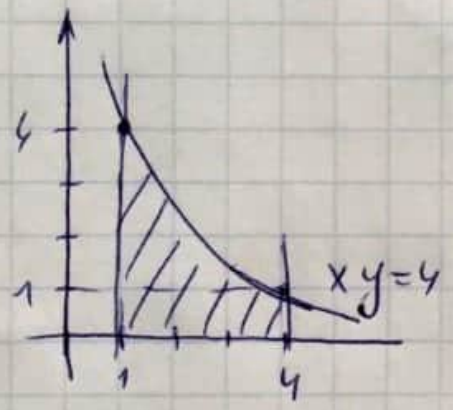
Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, де $f(x)$ – додатна непер. на $[a, b]$ ф. дор.

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

VIII. 51 (стор. 112)

Визначити об'єм тіла утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ навколо осі Ox.



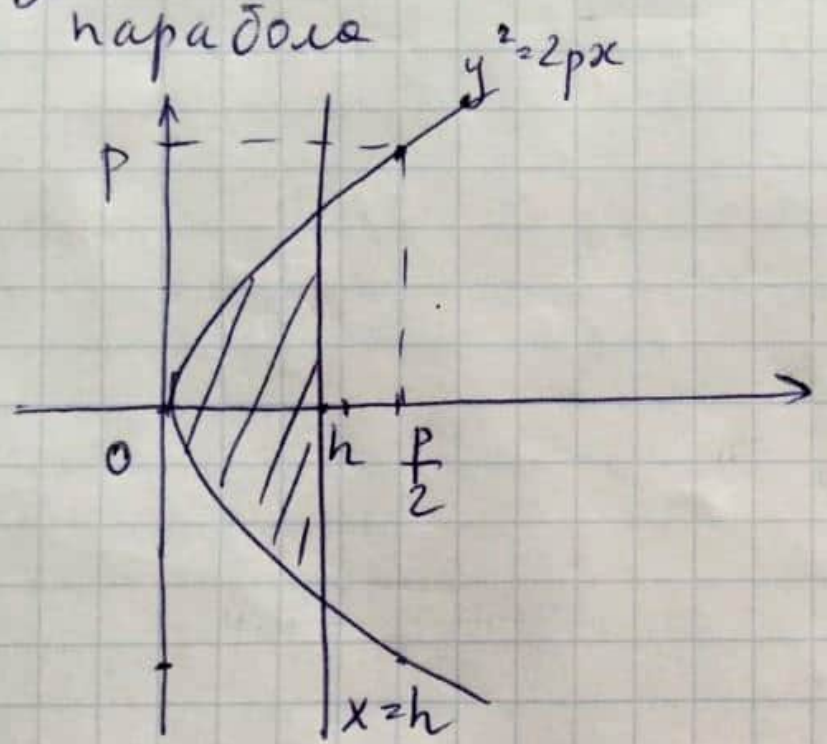
$y=\frac{4}{x}$ – гіпербола

$$V_{Ox}=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^4\frac{16}{x^2}dx=$$

$$=16\pi\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4=-16\pi\left(\frac{1}{4}-1\right)=$$

$$=-16\cdot\pi\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\boxed{12\pi}$$

3) $y^2 = 2px$, $x = h$ навколо осі Ox.



При обертанні отримаємо параболоїд з

$$V_{Ox} = \pi \int_0^h 2px\,dx =$$

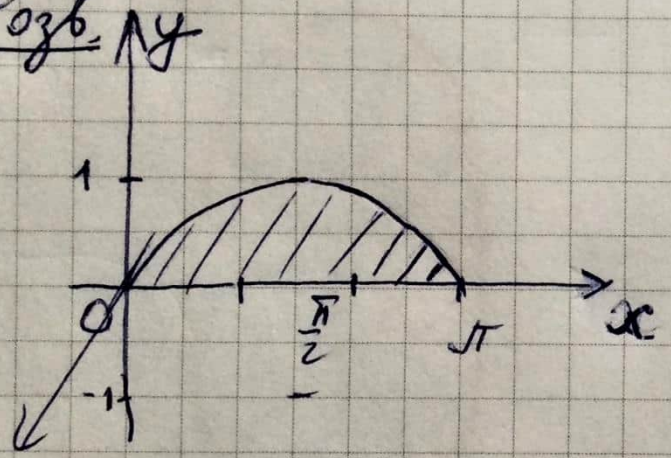
$$= 2\pi p \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \boxed{\pi p h^2}$$

2.141 $y = \sin x,\ y = 0 \quad (0 < x \le \pi)$

Зн. об'єми тіл, обмеженими поверхнями, отриманими при обертанні відрізків наст. ліній

а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

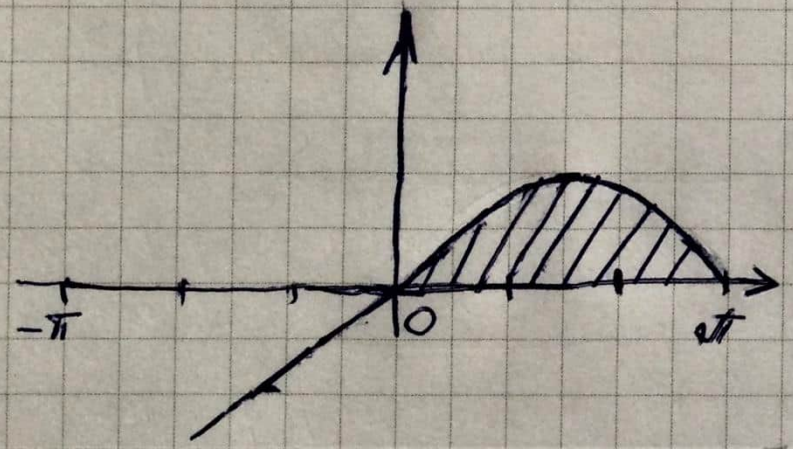
Розв.



$$V_{Ox} = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$$



$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^{\pi} x y(x)\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$$

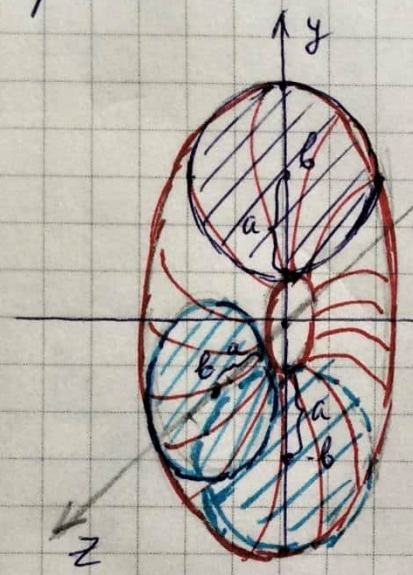
$$V_{oy} = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \left(-x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \right) = 2\pi \left(\pi + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \boxed{2\pi^2}$$

2.144 $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (0 < a \le b)$

Зн. об'єм тіла, обмеженого поверхнею, отриманою при обертанні кривої навколо осі Ox.



Розв. В рез-ті обертання круга навколо осі Ox отримаємо тор.

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (y_2^2(x) - y_1^2(x))\,dx, \text{ де}$$

$$(y-b)^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = b + \sqrt{a^2-x^2} \\ y_1 = b - \sqrt{a^2-x^2}. \end{cases}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(\left(b + \sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2-x^2}\right)^2 \right) dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 + 2b\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2 - \right.$$

$$\left. - b^2 + 2b\sqrt{a^2-x^2} - (a^2-x^2) \right) dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi b \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} \right) \Big|_{-a}^{a} = 4\pi b \left(0 + \frac{a^2}{2} \arcsin 1 - 0 + \right.$$

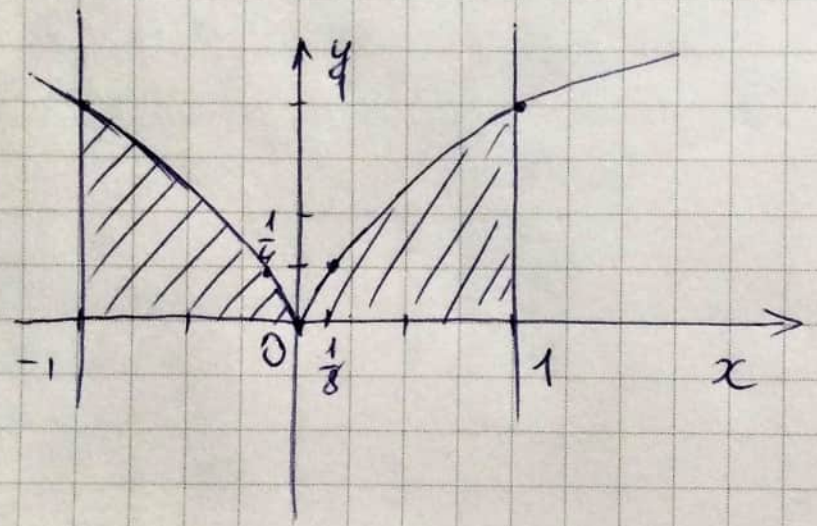
$$\left. + \frac{a^2}{2} \arcsin 1 \right) = 4\pi b \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{2\pi^2 a^2 b}$$

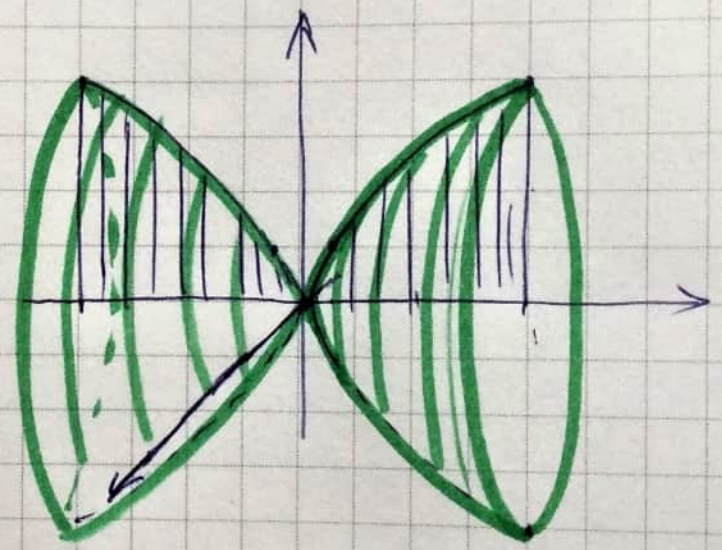
Задача 1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, заданими параметрично: $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $y = 0$, $|x| = 1$.

навколо осі Ox.

Розв.

t	x	y
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
-1	-1	1
0	0	0
$+1$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$





$$V_{ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t)\, dt$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y^2(t)\, x'(t)\, dt = 2\pi \int_0^1 (t^2)^2 \cdot (t^3)'\, dt = 2\pi \cdot 3 \int_0^1 t^6\, dt =$$

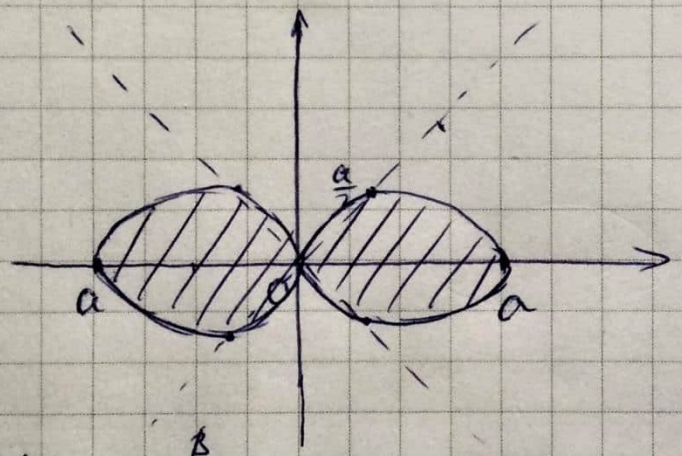
$$= 6\pi \cdot \frac{t^7}{7}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{6\pi}{7}}$$

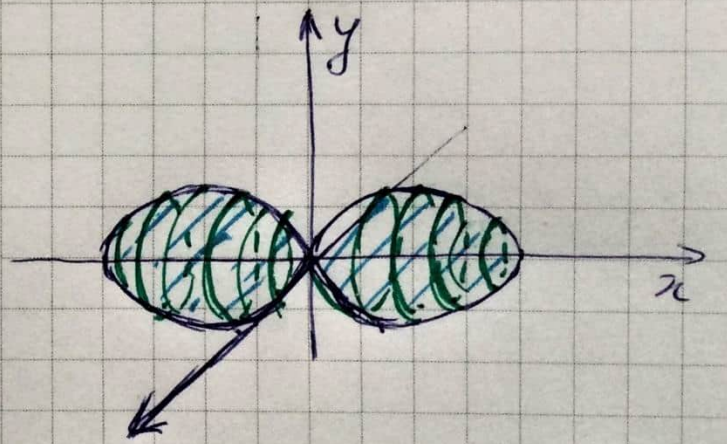
Задача 2. Зн. об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярного променя фігури, обмеженої кривими, заданими в полярних координатах нерівностями:

$$0 \le z \le a\cos^2\varphi$$

Розв.

φ	z
0	a
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{a}{2}$
π	a
...	





$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} z^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3\cos^6\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/2} a^3\cos^6\varphi\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d(\cos\varphi)$$

$$= -\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{\cos^7\varphi}{7}\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{4\pi a^3}{21}}.$$

Домашнє завдання:

із задач 2.139- 2.146 – зробити 5 прикладів з тих, що ми не робили