Часткові границі послідовності.

Практичне заняття 8

Часткова границя.

Озн. 1. Значення $a \in \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ наз. частковою границею послідовності (x_n), якщо існує підпослідовність $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ така, що

$$x_{n_k} \to a, \quad k \to +\infty.$$

Озн. 2 Найбільша (найменша) часткова границя послідовності (x_n) наз. верхньою (нижньою) границею (x_n) і позначається як

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \quad \left(\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \right).$$

1.225 Визначити множину A всіх часткових границь послідовності

$$\{(-1)^n : n \geq 1\}.$$

Розв.

$$x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

$$x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$$

$$A = \{-1; 1\}.$$

1.230 $\left\{ \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n : n \geq 1 \right\}$

$$x_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e$$

$$x_{2k-1} = \left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} = \left(1+\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\right)^{-(2k-1)\cdot(-1)} =$$

$$= \left(\left(1+\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\right)^{-(2k-1)}\right)^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$A = \left\{ \frac{1}{e}; e \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

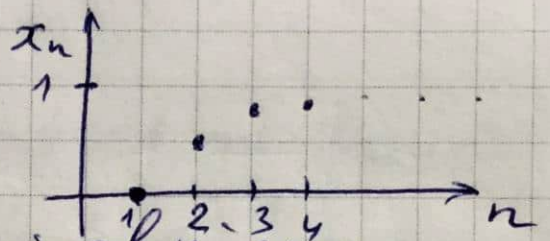
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1.237 (Демидович №101)

Для послідовності (x_n), $n \in \mathbb{N}$, знайти

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$, якщо

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$.



(x_n) – зростаюча послідовність.

Вона зростає від $x_1 = 1-1=0$, тобто $\exists \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_1 = 0$.

Тому $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$.

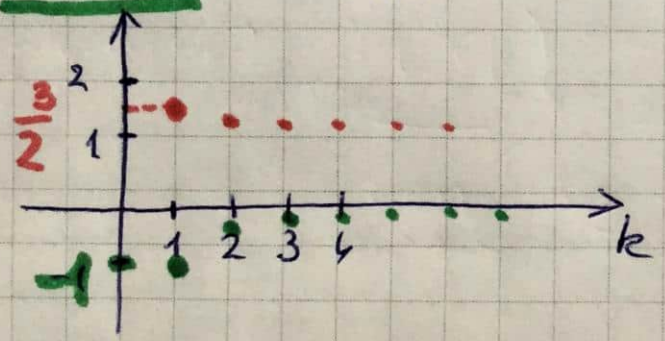
1.239 (Демидович N 102).

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Розв. Розгл. всі можливі підпослідовності, які дають різні границі:

$$x_{2k} = \frac{1}{2k} + \frac{1+1}{2} = \frac{1}{2k} + 1 \downarrow 1$$

$$x_{2k-1} = \frac{-1}{2k-1} + \frac{1-1}{2} = -\frac{1}{2k-1} \uparrow 0$$



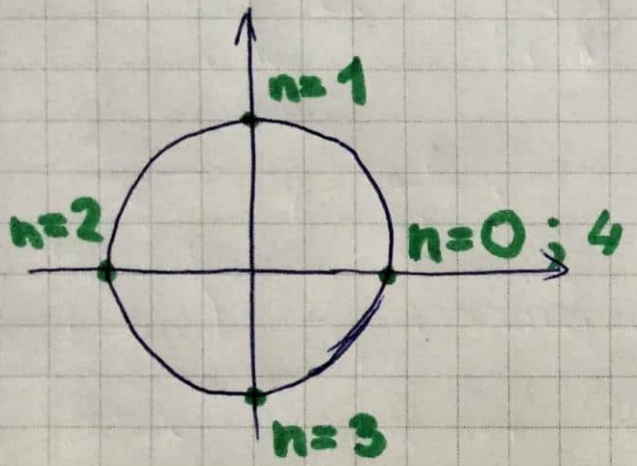
(x_{2k}) спадає від $\frac{3}{2}$ до ... 1

(x_{2k-1}) зростає від -1 до ... 0

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -1$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

1. 240 (Демидович N103)

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$$



если $n = 4k$, то $x_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1} \cdot 1 \to 2,\ k \to +\infty$

если $n = 4k+1$, то $x_{4k+1} = 1 + 0 = 1$

если $n = 4k+2$, то $x_{4k+2} = 1 - \frac{4k+2}{4k+3} \to 0,\ k \to +\infty$

если $n = 4k+3$, то $x_{4k+3} = 1 + 0 = 1$.

Тогда $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = 2$

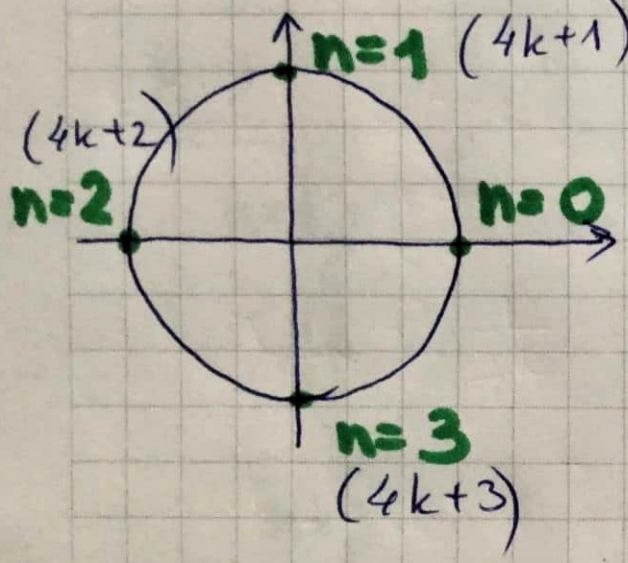
$x_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4k}}$ убывает $x_4 = 1 + \frac{4}{5}$ до 2.

$x_{4k+2} = 1 - \frac{4k+2}{4k+3} = \frac{1}{4k+3}$ убывает $x_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ до 0.

Тогда $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 2$.

1.246 (Демидович N 109)

$$x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}$$



$x_{4k} = 1 + 0 = 1$

$x_{4k+1} = 1 + (4k+1) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

$x_{4k+2} = 1 + 0 = 1$

$x_{4k+3} = 1 - (4k+3) \xrightarrow[k \to -\infty]{} -\infty$.

Поэтому $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = -\infty$, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$

$\underline{\lim}\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$, $\overline{\lim}\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

1.250 (Демидович №114)

Знайти $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, якщо

$$x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$$

Розв.

$$x_{2k} = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}} = \sqrt[2k]{2^{2k}\left(\frac{1}{2^{2k}} + 1\right)} = 2\sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}} + 1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2$$

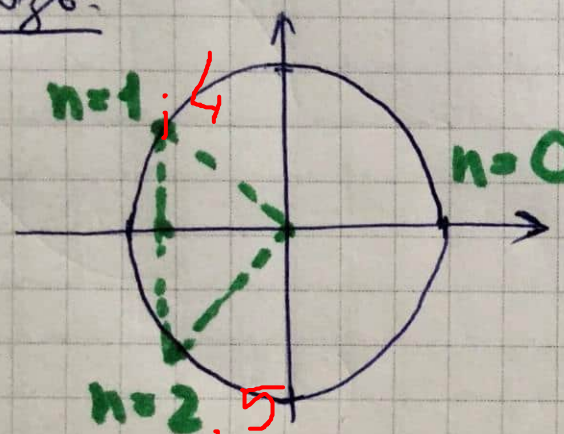
$$x_{2k-1} = \sqrt[2k-1]{1 + 2^{-(2k-1)}} \to 1, \quad k \to +\infty.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1 \quad ; \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = 2.$$

1.251 (Демидович №115)

$$x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

Розв.



якщо $n = 3k$, то $x_{3k} = 1^{3k} = 1$.

якщо $n = 3k+1$ та $n = 3k+2$, то

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$x_{3k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \to 0, \quad k \to +\infty$$

$$x_{3k+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+2} \to 0, \quad k \to +\infty.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0 \quad ; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

Домашнє завдання:

1.224, 1.226, 1.227, 1.228, 1.238, 1.241-1.245, 1.247-1.249

(для зарахування д/з треба виконати принаймні довільні 5 задач з цього переліку)