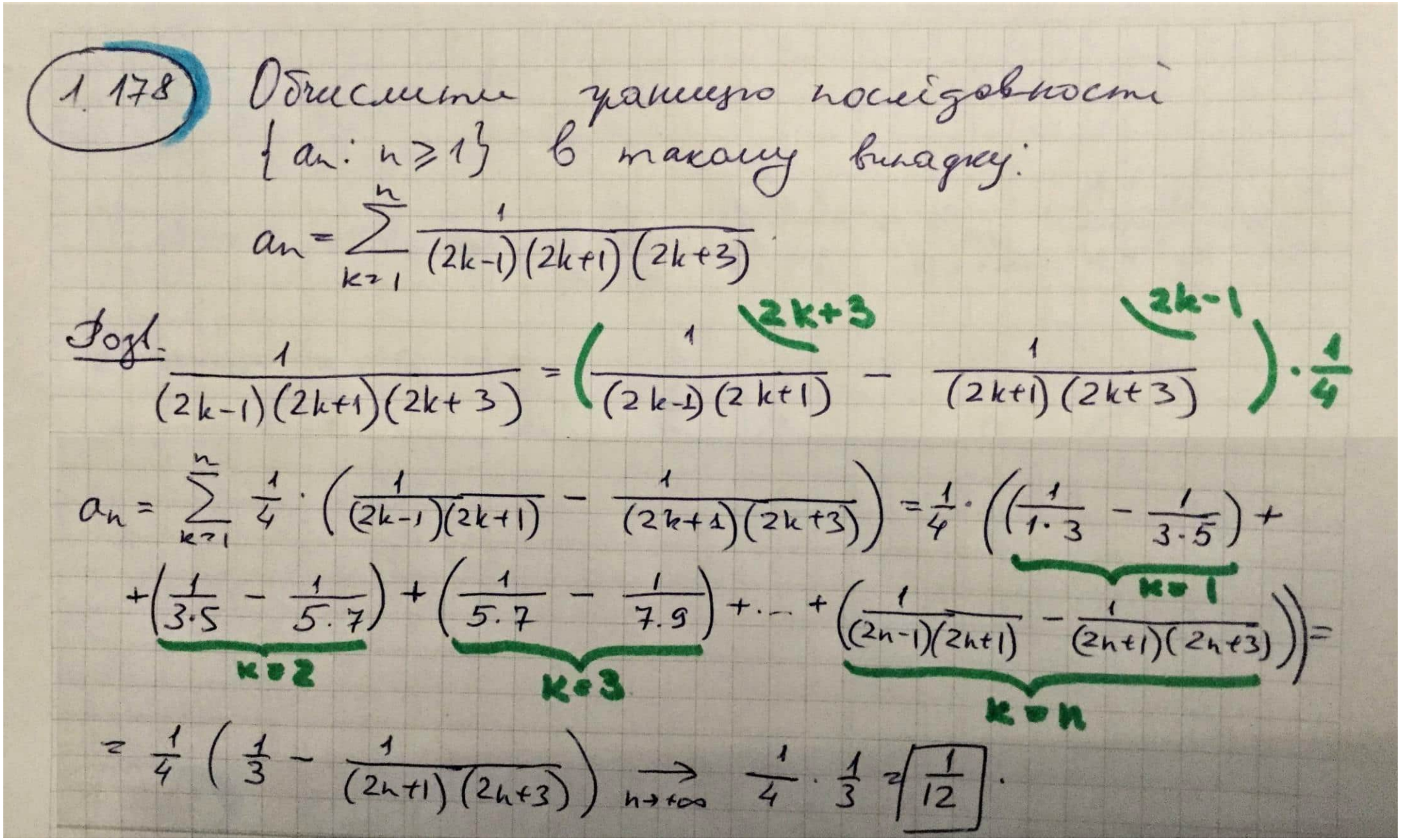
Границя послідовності (продовження)

Практичне заняття 6



1.178 Обчислити границю послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ в такому випадку:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}.$$

Розв.

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big\backslash 2k+3 - \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\Big\backslash 2k-1\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\underbrace{\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5}\right)}_{k=1} + \right.$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9}\right)}_{k=3} + \ldots + \left.\underbrace{\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)}_{k=n}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}.$$

π

1.179 Обч. границю послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}.$$

Розв.

$$\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \cdot \frac{1}{8}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{1}{8} \cdot \Big(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right)}_{k=2} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right)}_{k=3} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)}_{k=n} \Big) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$$a_n \to \boxed{\frac{1}{8}}, \quad n \to +\infty.$$

1.182 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{an+\sqrt{n}+2}$

1) Якщо $a=0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1$.

2) якщо $a\neq 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{an+\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{a+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}} = \frac{0}{a} = 0.$$

В: Границя дорівнює 1, якщо $a=0$ та 0, якщо $a\neq 0$.

1.187

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{(n+a)^2}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(|n+a|-n\right)=$$

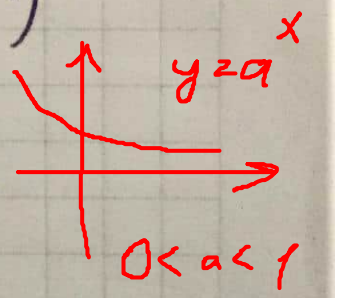
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(n+a-n\right)=a.$$

1.188

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=5\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=5\cdot(0+1)^0=5$$



Важливі границі.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, якщо $a>1$, $k \in \mathbb{R}_+$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{\overbrace{a\cdot a \dots a}^{n}}{1\cdot 2 \dots \cdot n} = \underbrace{\frac{\overbrace{a\cdot a \dots \cdot a}^{[a]}}{1\cdot 2 \dots \cdot [a]}}_{\text{const}} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdot \frac{a}{[a]+2} \cdots \frac{a}{n} \le$$

якщо $a>1$, то $\frac{a}{[a]+1} < q$, $\frac{a}{[a]+2} < q$, $\frac{a}{n} < q$

$$\le \text{const} \cdot q^{n-[a]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ бо } q<1$$

Тому за теоремою про три послідовності

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Теор. про 3 послідовності. Якщо $\forall n \ge n_0$ $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$.

  ▶ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^0 = 1.$ ◀

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

1.189 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = 1.$

1.186 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}} = 1.$ ∞^0

$$1 \le 1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10} \le \underbrace{n^{10}+n^{10}+\ldots+n^{10}}_{n} = n\cdot n^{10} = n^{11}$$

$$1 \le \sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}} \le \sqrt[n]{n^{11}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{11}$$

$1 \le \sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}}$: $\downarrow 1$; $\sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}}$: $n\to+\infty$, $\downarrow 1$; $\sqrt[n]{n^{11}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{11}$: $\sqrt[n]{n} \downarrow 1$ ($n\to+\infty$), $\left(\sqrt[n]{n}\right)^{11} \downarrow 1$

1.192 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n!} = 1.$

$$1 \le n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n \le \underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n} = n^n$$

$$1 \le \sqrt[n^2]{n!} \le \sqrt[n^2]{n^n} = \sqrt[n]{n}$$

$1 \le \sqrt[n^2]{n!}$: $\downarrow 1$ ($n\to+\infty$); $\sqrt[n^2]{n!}$: $n\to+\infty$, $\downarrow 1$; $\sqrt[n^2]{n^n} = \sqrt[n]{n}$: $\downarrow 1$ ($n\to+\infty$)

Домашнє завдання: 1.176, 1.177, 1.183-1.195 (решта)