Верхня і нижня межа множини

Практичне заняття 4

1.102 Довести, що множина $\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ обмежена і не має ні найменшого, ні найбільшого елементу.

Розв. Нехай $a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Якщо n – парне, тобто $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$a_{2k} = 1-\frac{1}{2k}: \quad 1-\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{4};\ 1-\frac{1}{6};\ \dots$$

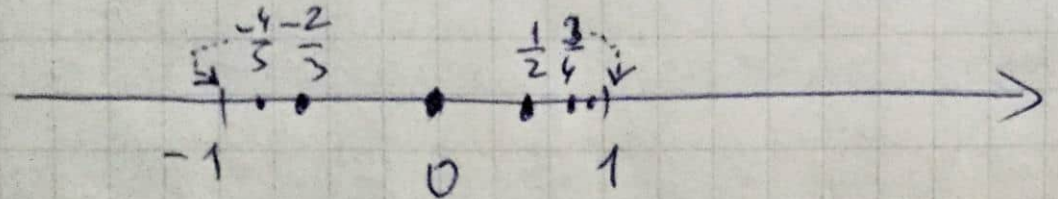
Якщо n – непарне, тобто $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$a_{2k-1} = -\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = -1+\frac{1}{2k-1}:$$

$$-1+1;\ -1+\frac{1}{3};\ -1+\frac{1}{5};\ \dots$$

Отже, $\forall n \in \mathbb{N}$

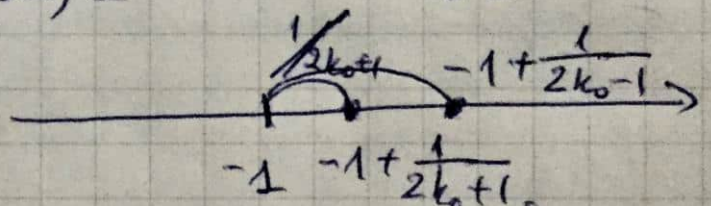
$$-1 \le a_n \le 1 \Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ – обмежена.}$$



Єдиним мінімальним елементом може бути

якийсь елемент a_{2k_0-1}, але

$$-1+\frac{1}{2k_0+1} = a_{2(k_0+1)-1} < a_{2k_0-1} = -1+\frac{1}{2k_0-1}$$

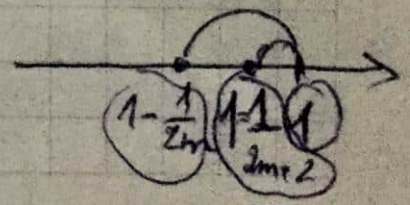


Тобто мінім. елемент не існує.

Аналогічно, максимальним може бути

якийсь елемент a_{2m}, але

$$1-\frac{1}{2m+2} = a_{2(m+1)} > a_{2m} = 1-\frac{1}{2m}$$



Тобто макс. елемент не існує

1.104 Знайти найбільший і найменший елемент множини $\left\{a_n = \frac{3^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Розв. Подивимося, як себе "веде" послідовність (a_n). Для того порівняємо два сусідні елементи:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} < 1 \; ?$$

$$3 < n+1 \Leftrightarrow n > 2$$

Оскільки, $n \in \mathbb{N}$, то при $n \neq 3$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, тобто (a_n) – спадна,

а при $n \leq 2$ (a_n) – зростаюча:

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \ldots$

Отже, найбільший елемент множини — це $a_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9}{2} = 4,5$.

Найменшим елементом може бути або $a_1 = \frac{3}{1} = 3$, або якесь значення "хвоста" при $n \geq 4$.

Ми бачимо, що $a_5 = \frac{3^5}{5!} = \frac{81}{40} = 2\frac{1}{40} < 3$,

тобто "хвіст" дає менший значення за a_1.

А "хвіст" мінім. елемента не має.

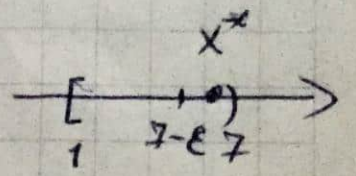
Отже, мін. елемента не існує.

1.124 Записати за допомогою кванторів:

$\sup [1, 7) = 7$

1) $\forall x \in [1, 7) \quad x \leq 7$

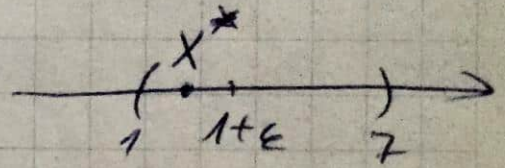
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^* \in [1; 7) : \quad x^* > 7 - \varepsilon$



$\inf (1, 7) = 1$

1) $\forall x \in (1, 7) \quad x \geq 1$

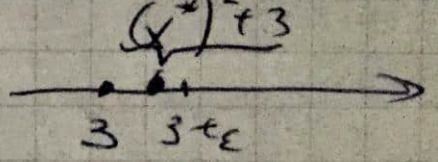
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^* \in (1; 7) : \quad x^* < 1 + \varepsilon$



1.126 $\inf \{x^2 + 3 : x \in \mathbb{R}\} = 3$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 3 \geq 3$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^* \in \mathbb{R} : \quad (x^*)^2 + 3 < 3 + \varepsilon$



Знайти sup, inf, max, min множин:

1. 131

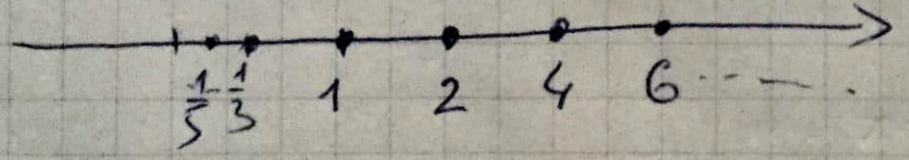
$x_n = n^{(-1)^n}$

n – парне, тобто $n = 2k$ $\quad x_{2k} = 2k$:

$2, 4, 6, \ldots$

n – непарне, тобто $n = 2k-1$ $\quad x_{2k-1} = (2k-1)^{-1} = \frac{1}{2k-1}$:

$1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \ldots \to 0, k \to +\infty$.

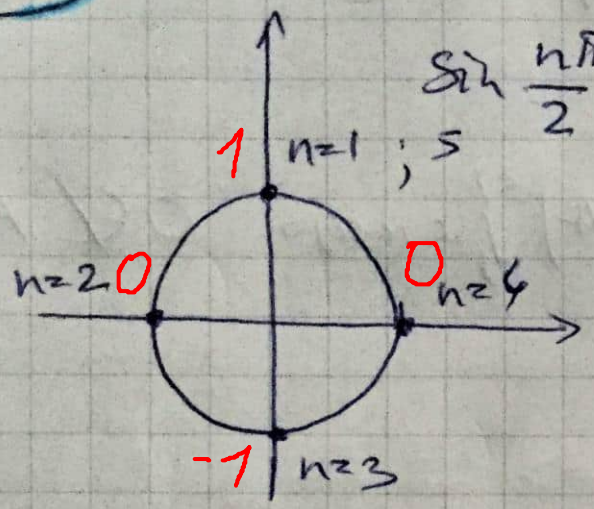


$\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$.

$\nexists \max\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\nexists \min\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\nexists \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$, бо (x_n) – необмежена зверху.

1. 132

$x_n = 1 + \sin\frac{n\pi}{2}$



(x_n) принимает лишь значения:

$1+1=2$

$1+0=1$

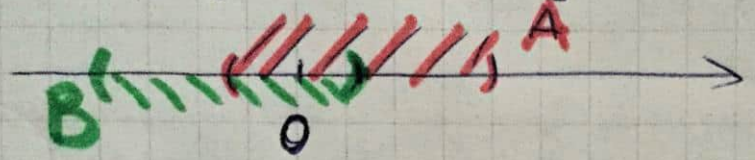
$1-1=0$.

Отже, $\min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$.

$\max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 2$.

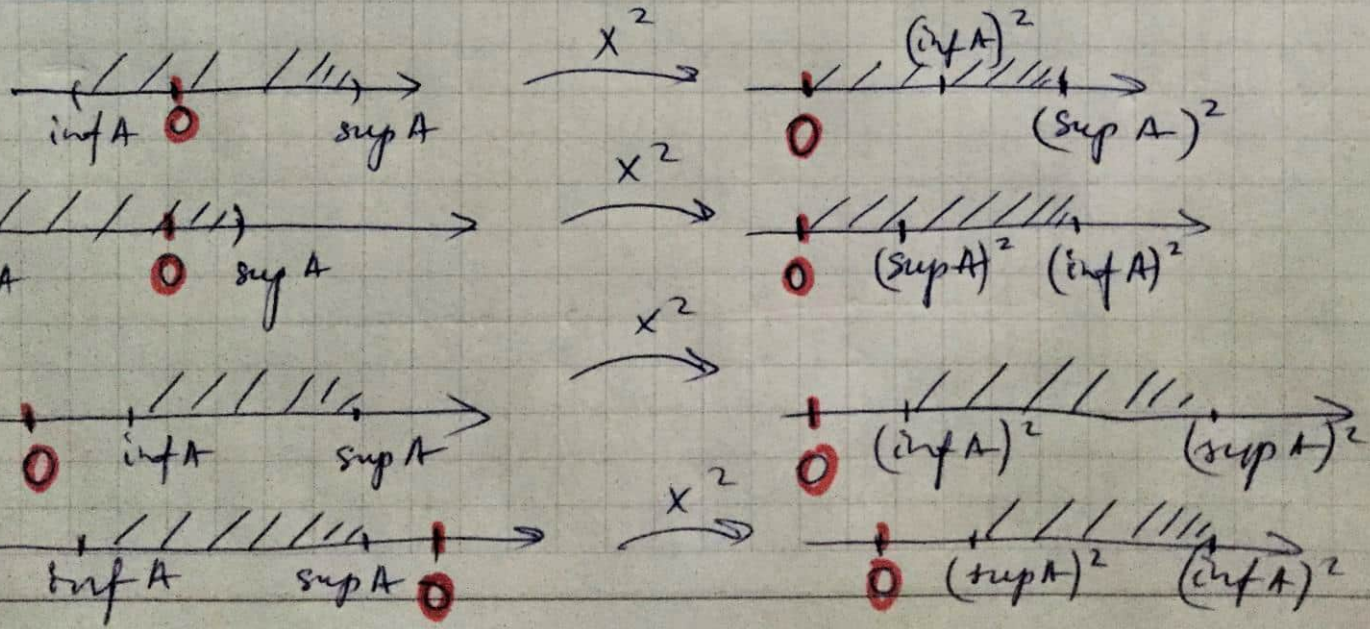
Як пов'язані точні грані обмежених множин $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$, якщо $A \neq \emptyset$.

1.118 $B = \{-x : x \in A\}$



$\sup B = -\inf A$; $\inf B = -\sup A$.

1.120 $B = \{x^2 : x \in A\}$



$$\sup B = \max\left\{(\inf A)^2;\ (\sup A)^2\right\}$$

$$\inf B = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \in A \\ \min\left\{(\inf A)^2, (\sup A)^2\right\}, & \text{если } 0 \notin A \end{cases}$$

1. 107 Знайти точні грані множини:

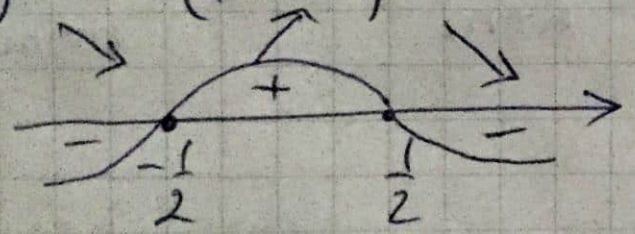
$$A = \left\{ \frac{mn}{4m^2+n^2} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\frac{mn}{4m^2+n^2} = \frac{\frac{mn}{n^2}}{\frac{4m^2+n^2}{n^2}} = \frac{m/n}{4\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}$$

Заміна $\frac{m}{n} = x$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

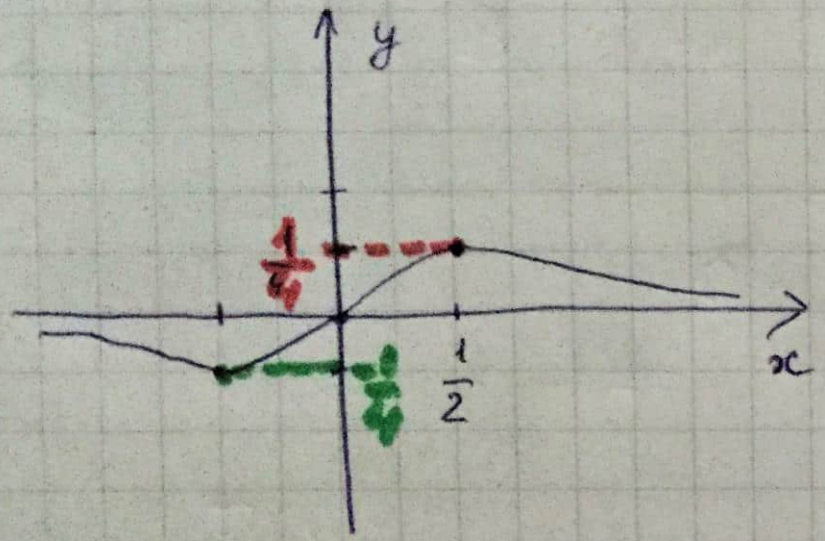
$y = \frac{x}{4x^2+1}$. Дослідимо і побудуємо графік.

$$y' = \frac{4x^2+1-x\cdot 4\cdot 2x}{(4x^2+1)^2} = \frac{1-4x^2}{(4x^2+1)^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{2}$$



• функція непарна

• $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{1+1} = \frac{1}{4}$



$\sup A = \max A = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$\inf A = \min A = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$$y = \frac{x}{4x^2 + 1}$$

Знайти

1. 114 $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n} - ? = 1$

1. $\sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad m-n \leq m+n \Rightarrow \frac{m-n}{m+n} \leq 1.$

2. $\inf_{n\in\mathbb{N}} 1 = 1.$

1. 115 $\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n} = -1.$

1. $\forall m \in \mathbb{N} \quad n-m \leq n+m \Rightarrow \frac{n-m}{n+m} \leq 1 \Rightarrow -\frac{n-m}{n+m} \geq -1.$

$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n} = -1$

2. $\sup_{m\in\mathbb{N}} (-1) = -1.$

Домашнє завдання: 1.103, 1.106, 1.108, 1.116-1.122 (решта), 1.125-1.133 (решта)