Похідна оберненої функції, функцій заданих параметрично або неявно. Геометричний зміст похідної. Диференціал.

Практичне заняття 15

Похідна оберненої функції.

Похідна оберненої функції. Якщо диференційована функція $y = f(x)$, $a < x < b$ має неперервну обернену функцію $x = g(y)$ і $f'(x) \neq 0$, то $g'(y)$ існує і

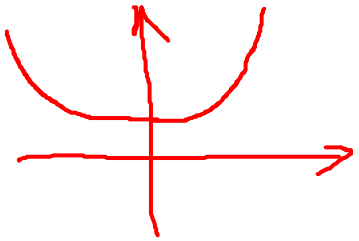
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

1. Знайти області визначення обернених функцій $x = x(y)$ і знайти їх похідні, якщо

а) $y = 2x^3 + x^5 + 3x$; б) $y = e^x - x$.

Розв'язування. Оскільки $y' = 6x^2 + 5x^4 + 3 > 0$ для $x \in \mathbb{R}$, то функція $y(x)$ зростає на всій числовій осі від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, обернена функція $x = x(y)$ визначена на $(-\infty; +\infty)$ і

$$x'(y) = \frac{1}{6x^2 + 5x^4 + 3}.$$



б) Функція $y = e^x - x$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ від $+\infty$ до 1 і зростає на проміжку $[0; +\infty)$ від 1 до $+\infty$. Справді, $y' = e^x - 1$ і $y' > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$. Отже, на проміжку $[1; +\infty)$ визначено відповідно дві обернені функції $x_1(y)$, яка спадає від 0 до $-\infty$, та $x_2(y)$, яка зростає від 0 до $+\infty$. Похідні цих функцій $x_1'(y) = x_2'(y) = \frac{1}{e^x - 1}$.

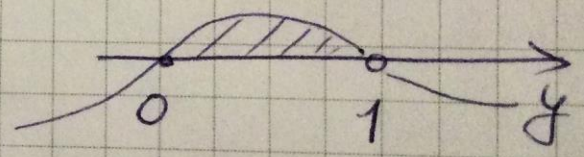
3.87 Знайти однозначні неперервні вітки обернених функцій $x = x(y)$, знайти їх похідні і побудувати графіки, якщо $y = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Розв.

$y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Виразимо x:

$$y = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = \frac{1}{1-y}.$$

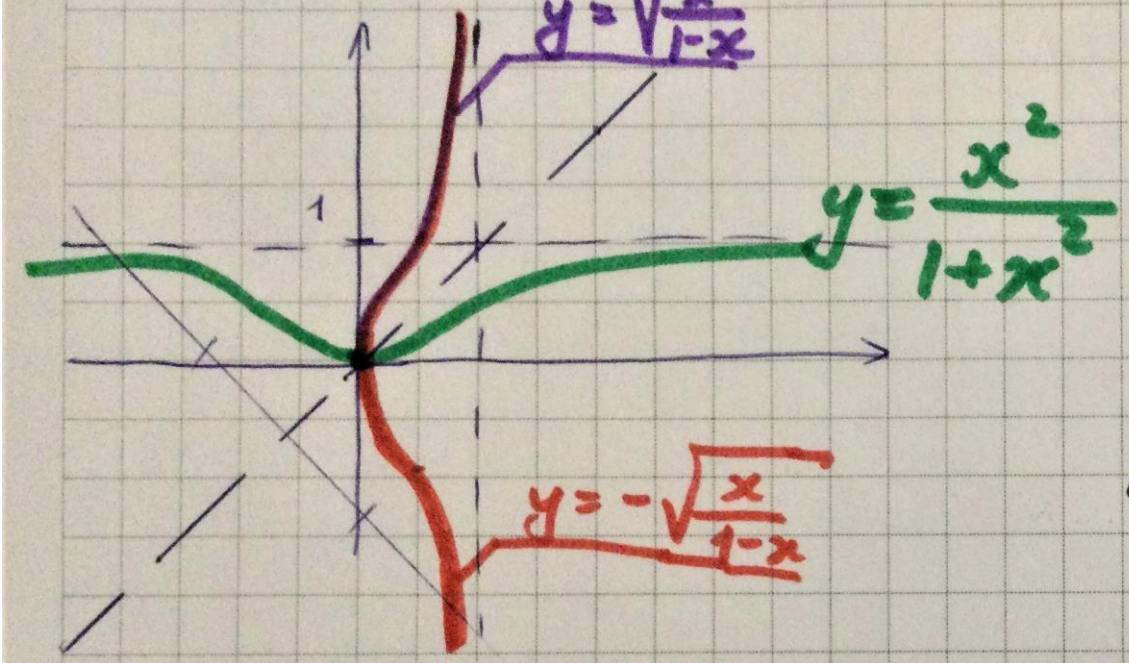
$$x^2 = \frac{1}{1-y} - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{1-y}$$



$x = \pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}$, якщо $y \in [0; 1)$.

$x = x_1(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ і $x = x_2(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ – однозначні неп. вітки.

$$y = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{або} \quad y = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$



Однозначні нен. вітки:

$$x = x_1(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \quad \text{і}$$

$$x = x_2(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

або

$$y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{і} \quad y = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Похідна оберненої ф-ції.

I спосіб.

$$y = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad y' = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Похідна оберн. ф-ції: $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)} = \dfrac{1}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}} = \dfrac{(1+x^2)^2}{2x}$

і підставивши оберн. нер. вітку отримаємо:

$$x_1'(y) = \frac{(1+x_1^2)^2}{2x_1} = \frac{\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^2}{2\sqrt{\frac{y}{1-y}}} = \frac{1}{(1-y)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-y}}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y(1-y)^3}},$$

а $x_2'(y) = -\dfrac{1}{2\sqrt{y(1-y)^3}}$.

II спосіб.

$$x_1(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}; \qquad x_2(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$x_1'(y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \sqrt{1-y} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-y}}}{(1-y)} = \frac{1-y+y}{2\sqrt{y}\,(1-y)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{y(1-y)^3}},$$

а $x_2'(y) = -\dfrac{1}{2\sqrt{y(1-y)^3}}$.

Похідна функції, заданої параметрично.

Похідна функції, заданої параметрично. Якщо система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta), \text{ де } \varphi(t), \psi(t) \text{ — диференційовані функції і } \varphi'(t) \neq 0$$

визначає y як функцію від x, то похідна y'_x існує і

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

1. Для наступних функцій, заданих параметрично, знайти y'_x:

а) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{ct}, \\ y = e^{-ct}, \end{cases}$ $c = \text{const}.$

Розв'язування. а) Знаходимо похідні x'_t, y'_t.

$$x'_t = \frac{1}{2\operatorname{ctg} t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -\frac{1}{\sin 2t},$$

$$y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = -\frac{\cos 2t}{\frac{1}{4}\sin^2 2t} = -\frac{4\operatorname{ctg} 2t}{\sin 2t}.$$

Звідси $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-4\operatorname{ctg} 2t}{\sin 2t} : \frac{-1}{\sin 2t} = 4\operatorname{ctg} 2t.$

$\begin{cases} y'_x = 4\operatorname{ctg} 2t, \\ x = \frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

б) Аналогічно

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-ct}\cdot(-c)}{e^{ct}\cdot c} = -e^{-2ct} = -\frac{1}{x^2}.$$

3.91 (Демид. 1041) Знайти похідні y'_x та y''_{xx}, якщо

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Розв. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$

Отже, похідна y'_x задається параметрично: $\begin{cases} y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t, \\ x = a\cos t. \end{cases}$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Отже, y''_{xx} задається параметрично: $\begin{cases} y''_{xx} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t} \\ x = a\cos t. \end{cases}$

Похідна функції, заданої неявно.

Похідна неявної функції. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то потрібно продиференціювати рівняння відносно x, вважаючи y функцією, залежною від x, і розв'язати отримане рівняння $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$ відносно y'.

2. Знайти похідну y'_x від наступних функцій $y(x)$, заданих неявно:

а) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$; б) $\ln x + e^{-y/x} = 0$.

Розв'язування. а) Диференціюючи відносно x, рахуючи y функцією від x, отримуємо $3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$.

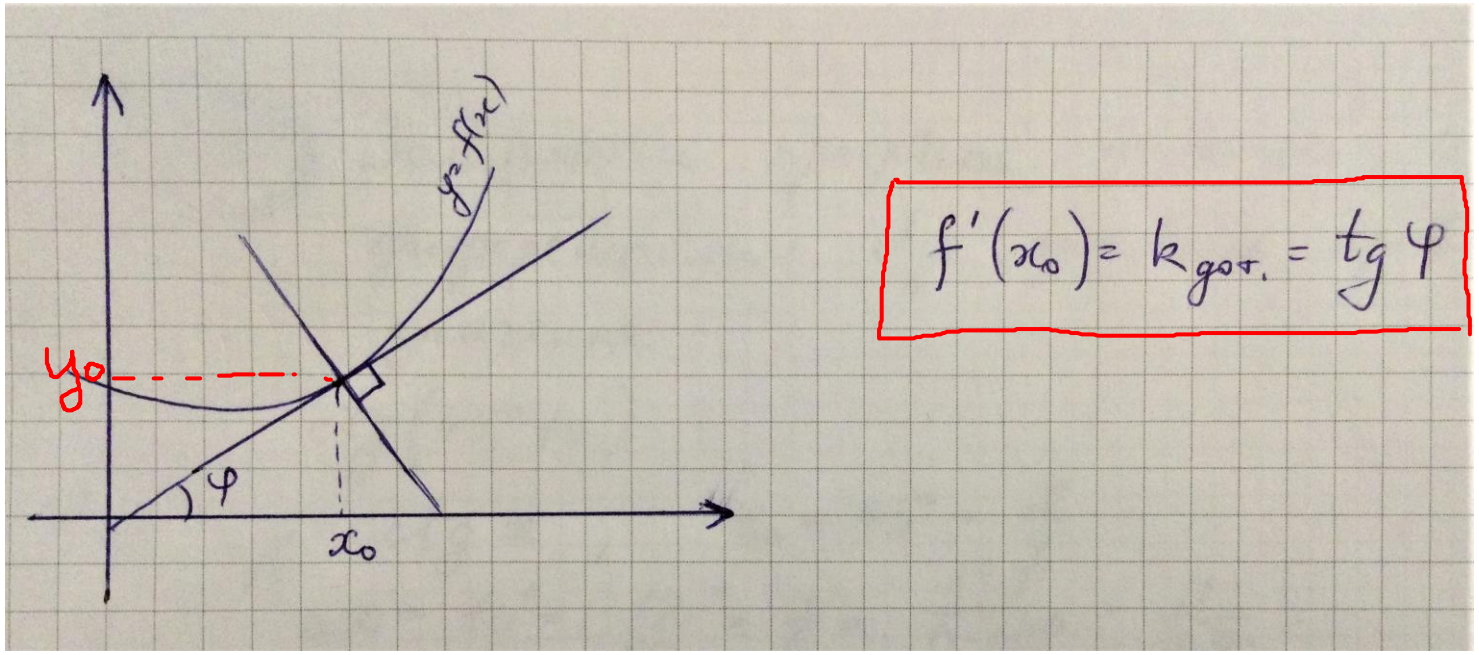
Розв'язуючи це рівняння відносно y, знаходимо $y' = -\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$.

б) Аналогічно маємо

$$\frac{1}{x} + e^{-y/x}\left(\frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x}\right) = 0.$$

Звідси, $x + ye^{-y/x} = y'xe^{-y/x}$. Отже, $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.

Геометричний зміст похідної



Рівняння дотичної та нормалі. *Рівняння дотичної* до графіку функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0; y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до графіку функції $y = f(x)$ у тій же точці має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \ f'(x_0) \neq 0.$$

3. Написати рівняння дотичної та нормалі:

а) до кривої $y = x^3 - 3x + 2$ в точці $A(2; 4)$;

б) до кривої $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ в точці $B(2; -1)$.

$\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 = 2 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 = -1 \end{cases}$

$t = 2$

Розв'язування. а) Знаходимо похідну в точці $x = 2$. Маємо $y'(2) = (3x^2 - 3)\Big|_{x=2} = 9$. Тому рівняння дотичної має вигляд $y - 4 = 9(x - 2)$ або $y = 9x - 14$.

Рівняння нормалі має вигляд $y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2)$ або $y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

б) Легко бачити, що значення t, яке відповідає заданим значенням $x = 2$, $y = -1$ дорівнює 2. Справді, $x(2) = 4 + 6 - 8 = 2$, $y(2) = 8 - 4 - 5 = -1$. Далі знаходимо $y'_x\Big|_{x=2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\Big|_{t=2} = \left(\frac{4t-2}{2t+3}\right)\Big|_{t=2} = \frac{6}{7}$.

Отже, рівняння дотичної $y + 1 = \frac{6}{7}(x - 2)$ або $6x - 7y - 19 = 0$, а рівняння нормалі — $y + 1 = -\frac{7}{6}(x - 2)$ або $7x + 6y - 8 = 0$.

3.112 (Демид. 1082)

б) Написати рівняння дотичної і нормалі в заданих точках до кривих:

$xy + \ln y = 1$, $M(1;1)$

Розв.

$1 \cdot y + xy' + \frac{1}{y} \cdot y' = 0$

$y'\left(x + \frac{1}{y}\right) = -y$

$y' = -\frac{y \cdot y}{xy+1}$

$y' = -\frac{y^2}{xy+1}$

$y'(1) = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

Дотична:

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}}$

Нормаль:

$y - 1 = -\frac{1}{-1/2}(x-1)$

$y - 1 = 2(x-1)$

$\boxed{y = 2x - 1}$.

4. Знайти кути, під якими перетинаються пряма $y = 4 - x$ та парабола $y = 4 - \frac{x^2}{2}$.

Розв'язування. Нагадаємо, що кутом між двома кривими у точці їх перетину називається кут між дотичними до цих кривих, проведеними у цій точці. Знайдемо точки перетину кривих, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ y = 4 - \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$ Звідси $M_1(0;4)$ і $M_2(2;2)$.

Визначимо кутові коефіцієнти дотичних до параболи в точках M_1 та M_2.

$$y'(0) = \left(4 - \frac{x^2}{2}\right)'\Big|_{x=0} = 0, \qquad y'(2) = (-x)\Big|_{x=2} = -2.$$

Кутовий коефіцієнт прямої у всіх точках один і той самий і дорівнює у нашому випадку (-1). Тепер визначаємо кут φ між прямими за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|,$$

де k_1, k_2 — кутові коефіцієнти кривих. Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{-1 - 0}{1 + 0}\right| = 1, \qquad \varphi_1 = 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{-1 + 2}{1 + 2}\right| = \frac{1}{3}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 18,5^\circ.$$

Диференціал та його застосування

Диференціал функції. Інваріантність форми першого диференціалу. Якщо приріст Δy функції $y = f(x)$ може бути зображений у вигляді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$, то така функція називається *диференційованою* в точці x. Головна лінійна частина цього приросту $A(x) \cdot \Delta x$ називається *диференціалом* функції і позначається $df(x)$ або dy. За означенням $dx = \Delta x$.

Для існування диференціалу функції $y = f(x)$ необхідно і досить, щоб існувала скінченна похідна $y' = A(x)$. Диференціал функції можна записати наступним чином

$$\boxed{dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx.}$$

Для складної функції $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ форма диференціалу зберігається у вигляді

$$dy = f'(u) \cdot du.$$

5. Знайти диференціал функції y, якщо:

а) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; б) $y = x^2 \ln x$; в) $y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язування. а) Маємо $dy = y' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cancel{dx}$ dx

б) Використовуючи формулу $d(uv) = vdu + udv$, отримуємо

$$dy = \ln x \cdot d(x^2) + x^2 d(\ln x) = \ln x \cdot 2x \cdot dx + x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x(2\ln x + 1)dx.$$

в) Аналогічно за формулою $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, маємо

$$dy = d\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x \cdot e^x dx - e^x \cdot dx}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} dx.$$

6. Користуючись поняттям диференціалу, знайти приблизне значення функції $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0,15$.

Розв'язування. Зауважимо, що з $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ отримуємо $y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta y$. Покладаючи $\Delta y \approx dy$, маємо

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy = y(x) + y'(x) \cdot \Delta x.$$

У нашій задачі візьмемо $x = 0$ і $\Delta x = 0,15$. Тоді $y' = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-4/5} \cdot \frac{-4}{(2+x)^2}$; $y'(0) = -\frac{1}{5}$; $dy = -\frac{1}{5} \cdot 0,15 = -0,03$.

Отже, $y(0,15) \approx y(0) + dy = 1 - 0,03 = 0,97$.

$$\frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}$$

3.136 Замінюючи приріст функції Δy диференціалом dy, знайти приблизне значення

$$ctg(45^\circ 10')$$

Розв. $y = ctg\, x$; $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$$\Delta x = 10' = \frac{10}{60}^\circ = \frac{1}{6}^\circ = \frac{1^\circ \cdot \pi}{6 \cdot 180^\circ} = \frac{\pi}{1080}.$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx dy = y'(x_0) \cdot \Delta x = -\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{1080} =$$

$$= -\frac{1}{1/2} \cdot \frac{\pi}{1080} = -\frac{\pi}{540}.$$

$$y(x_0 + \Delta x) = ctg(45^\circ 10') \approx y(x_0) + dy = ctg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{540} =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{540} \approx 1 - 0{,}006 =$$

$$= 0{,}994.$$

Домашнє завдання :

із задач 3.82-3.88 – зробити 1 приклад з тих, що ми не робили
із задач 3.89-3.96 – зробити 1 приклад
із задач 3.97-3.102 – зробити 1 приклад
із задач 3.103-3.108 – зробити 1 приклад
із задач 3.109-3.111 – зробити 1 приклад
3.112
із задач 3.113-3.132 – зробити 1 приклад
із задач 3.133-3.136– зробити 1 приклад. Всього – 8 задач.