Порівняння функцій. О-символіка.

Практичне заняття 12

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ визначені в $\mathring{U}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta(x) \neq 0$.

Озн. 1. $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to a \ \Big\{ \overset{def}{=} \Big\} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$

Озн. 2. $\alpha(x) = o(\beta(x)),\ x \to a \ \Big\{ \overset{def}{=} \Big\} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Озн. 3. $\alpha(x) = O(\beta(x)),\ x \to a \ \Big\{ \overset{def}{=} \Big\}$

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}(a) \quad |\alpha(x)| \leq M \cdot |\beta(x)|.$$

Нехай $x \to 0$. Довести, що:

2.226 (Демид. 650 б) $x \cdot \sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$, $x \to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$, тому

$\exists M = 2 \quad \forall x \in \mathring{U}(0) \quad \left|\dfrac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}\right| = \left|\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| \le 2$, тобто

$$\boxed{x\cdot\sin\sqrt{x} = O(x^{3/2}),\ x\to 0.}$$

2.230 (Демид. 650 е) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = O(1)$, $x \to 0$.

$\forall x \in \mathring{U}(0) \quad \left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{\pi}{2}$. Отже, $\exists M = \dfrac{\pi}{2}$:

$\forall x \in \mathring{U}(0) \quad \left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{\pi}{2}\cdot 1$.

Тобто, $\boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = O(1),\ x\to 0.}$

2.231 (Демид. 650 м) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$, $x \to 0$.

▶ $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i \cdot 1 = 1 + nx + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + x^n =$

$= 1 + nx + x\left(C_n^2 \cdot x + C_n^3 x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) =$

$= 1 + nx + o(x), \quad x \to 0.$ ◀

Отже, $\boxed{(1+x)^n = 1 + nx + o(x), \quad x \to 0}$.

Довести, що:

2.234 (Демид. 651 в) $x + x^2 \sin x = O(x^2), \quad x \to +\infty$.

▶ $|x + x^2 \sin x| = |x^2 \cdot (\frac{1}{x} + \sin x)| \leq (|\sin x| + |\frac{1}{x}|) \cdot |x|^2 \leq$

$\leq (1 + \varepsilon)\,|x|^2 < M\,|x|^2$ з $M = 2$. ◀

Отже, $\exists\, M = 2 \quad \forall x \in \mathring{U}(+\infty) \quad |x + x^2 \sin x| < M|x|^2$

тобто $x + x^2 \sin x = O(x^2), \quad x \to +\infty$.

2.236 (Демид. 651 g) $\ln x = o(x^\varepsilon)$, $x \to +\infty$, $\varepsilon > 0$.

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \ln x = y \\ x = e^y \end{matrix} \right\} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y}{e^{y\cdot\varepsilon}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y}{(e^\varepsilon)^y} = 0,$

т.к. $e^\varepsilon > 1$ при $\varepsilon > 0$. ◀

Отже, $\ln x = o(x^\varepsilon)$, $x \to +\infty$.

2.243 Довести: $2x + \ln x + \sin x = O(x)$, $x \to +\infty$.

▶ $|2x + \ln x + \sin x| = \left|x \cdot \left(2 + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\sin x}{x}\right)\right| \le$

$\le (2+\varepsilon) \cdot |x| < 3|x|$,

тому $\exists M = 3$ $\forall x \in \mathring{U}(+\infty)$ $|2x + \ln x + \sin x| \le M \cdot |x|$. ◀

Отже $2x + \ln x + \sin x = O(x)$, $x \to +\infty$.

Доведіть:

2.251 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}=O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to+\infty.$

▲ $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right|=\left|\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right|\le|1+\varepsilon|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|<$

$<2\cdot\left|\frac{1}{x}\right|,\ \forall x\in\dot{U}(+\infty)$ ▲

Отже, $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right|=O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to+\infty.$

2.254 Довести: $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}=O(x),\ x\to+\infty.$

▲ $\left|\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}\right|=\left|x\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{x^3}{x^4}+\frac{\sqrt{x^5}}{x^3}}}\right|=$

$=\left|x\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}}\right|<(1+\varepsilon)\cdot|x|<2|x|,\ \forall x\in\dot{U}(+\infty)$ ▲

Отже, $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}=O(x),\ x\to+\infty.$

2.255 Доказать: $\ln\ln x = o(\ln x)$, $x \to +\infty$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\ln x}{\ln x} = \left\{\ln x = y\right\} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} =$

$= \left\{\begin{matrix}\ln y = t \\ y = e^t\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0.$ ◀

Что и требовалось $\ln\ln x = o(\ln x)$, $x \to +\infty$.

2.259 Доказать: $\sqrt{x^2+x+1} - x \sim \frac{1}{2}$, $x \to +\infty$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - x}{1/2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{1}{2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \boxed{1}.$

2.262 (Демидович 653б)

Виділити головний член вигляду Cx^n для $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ при $x\to 0$.

▶ Якщо $f(x)=\underbrace{Cx^n}+o(x^n)$, $x\to 0$, то
гол. член ф-ції $f(x)$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{Cx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{Cx^n(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{Cx^n(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{Cx^n(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1, \blacktriangleleft$$

"1" і $n=1$; $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\to 2$

Отже, $\boxed{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=x+o(x),\ x\to 0}$

2.268 (Демид. 655 г)

Виділити головн. член вигляду $C(x-1)^n$ для

$$f(x) = e^x - e \quad \text{при } x \to 1.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{C(x-1)^n} = \lim_{x\to 1} \frac{e(e^{x-1}-1)}{C(x-1)^n} = \{x-1=y\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e(e^y-1)}{\underset{\overset{\shortparallel}{e}}{C}\, y^n} = 1, \text{ якщо } n=1$$

Отже, $\boxed{e^x - e = e\cdot(x-1) + o((x-1)),\ x\to 1.}$

2.271 (Демид. 656б)

Виділити головн. член вигляду Cx^n для

$$f(x) = \frac{2x^5}{x^3-3x+1} \text{ при } x \to +\infty.$$

$$\blacktriangleright \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{(x^3-3x+1)\,Cx^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{x^3-3x+1}{x^3}\cdot Cx^{n-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\cdot \underbrace{C}_{=2}x^{n-2}} = 1, \text{ якщо } n=2 \blacktriangleleft$$

Отже, $\boxed{\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1} = 2x^2 + o(x^2),\ x \to +\infty.}$

Домашнє завдання:

із задач 2.225- 2.260 – зробити будь-яких 5 прикладів з тих, що ми не робили

із задач 2.261-2.273 – зробити будь-яких 2 приклади з тих, що ми не робили