Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Методичні рекомендації
до вивчення курсу

Теорія ймовірностей та математична статистика

Для студентів економічного факультету

Львів 2012

Рекомендовано до електронної публікації
Кафедрою теоретичної
та прикладної статистики
Протокол №9 від 18 квітня 2012

Уклали:
Кінаш О.М.
Базилевич І.Б.
Джуфер Г.Б.
Звізло М.Р.

Заняття 1.
Елементи комбінаторики.

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає розміщення об'єктів у відповідності з спеціальними правилами і методи підрахунку кількості все можливих способів, якими ці розміщення можуть бути зроблені.

Методи комбінаторики відіграють важливу роль при обчисленні ймовірностей різноманітних подій, зв'язаних з експериментами, що мають скінчену кількість результатів.

Розглянемо основні поняття комбінаторики.

Основний принцип комбінаторики (правило множення). Нехай потрібно виконати одну за одною κ дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і так далі, κ-ту дію – n_k способами, то κ дій разом можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило додавання. Якщо деякий об'єкт a можна вибрати n способами, а об'єкт b – k способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то об'єкт a або b можна вибрати $n+k$ способами.

Перестановкою з n різних елементів називається об'єкт, який складається з n цих елементів, і відрізняється від інших місцем розташування. Кількість перестановок позначають символом P_n і розраховують за формулою:

$$\mathrm{P}_n = n!$$

Розміщенням з n елементів по k називають об'єкт, що складається з k елементів, вибраних з n і розташованих у певному порядку. Два розміщення, що складаються з однакових елементів, але відрізняються місцем їх розташування, вважаються різними. Число розміщень з n елементів по k будемо позначати символом A_n^k. Має місце формула для підрахунку числа розміщень:

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

яку легко довести методом математичної індукції. Зазначимо, що $\mathrm{A}_n^n = n!$.

Комбінацією з n елементів по k будемо називати такі розміщення з n елементів по k, які відрізняються хоча б одним елементом. Зауважимо, що комбінації, які відрізняються лише місцем розташування елементів, вважаються однаковими. Позначимо число комбінацій з n елементів по k символом C_n^k. Для обчислення числа комбінацій використовується формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Аудиторна робота.

1. У розіграші чемпіонату з футболу бере участь 17 команд. Скількома способами можна розділити золоту, срібну і бронзову медалі?
2. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті. Скількома способами можна скласти обід, який складається з трьох страв?
3. У маршрутному таксі є 12 пасажирів. Таксі робить 15 зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири, якщо: а) всі вони виходять на різних зупинках; б) пасажири виходять як завгодно?
4. Навчальна частина складає розклад на семестр. Для п'яти предметів вона розглядає чотири кандидатури можливих викладачів англійської мови; п'ять викладачів економічної теорії; три викладачі математики, сім – історії, чотири – політології. Визначте кількість можливих груп викладачів на один день тижня, в якому є три пари.
5. Скільки трицифрових чисел можна записати цифрами 0,1,2,3,4?
6. Скільки є чотирицифрових чисел, кратних 5?
7. Скількома способами п'ять осіб можуть стати в чергу?
8. У шаховому турнірі беруть участь n учасників. Скільки партій буде зіграно, якщо кожні два учасники можуть зустрітися лише один раз?
9. Скількома способами можна розділити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала п'ять предметів?
10. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири різні книги?
11. Скількома способами можна впорядкувати множину {1,2,…2n} так, щоб кожне парне число мало парний номер?
12. Скількома способами можна розмістити n осіб на одній лавці?
13. Скількома способами можна розмістити n осіб за круглим столом?
14. З 12 осіб кожного дня протягом шести днів вибирають двоє чергових. Визначте кількість різних списків чергових, якщо кожна особа чергує лише один раз?
15. Скількома способами можна розділити групу з 20 студентів на три бригади так, щоб у першій було три студенти, у другій – 5, а в третій – 12 студентів?
16. З колоди 52 карт витягують 6 карт. Скільки є вибірок, у яких: а) є хоча б один туз; б) є 3 чорних і 3 червоних карти; в) немає жодного туза; г) є точно один туз?
17. Скільки підмножин має множина, яка складається з n елементів?
18. Кубик кидають 5 разів. Скількома способами він може випасти? Скільки таких способів, коли з'являється точно одна одиниця?

Домашня робота.

1. У хокейному клубі є 10 форвардів, 8 захисників і 3 воротарі. Скільки різних варіантів команди може скласти тренер, якщо на майданчик виходить один воротар, два захисники, три форварди?
2. Правління акціонерного товариства складається з голови правління, бухгалтера та юриста. Скількома способами можна скласти правління, якщо на місце голови є п'ять претендентів, бухгалтера – шість, а юриста – чотири претенденти?
3. Є 4 чоловіки і 6 жінок. Кожен чоловік одружується з однією з жінок. Скількома способами можна це зробити?
4. Скількома способами можна обрати президента, віце-президента, скарбника та секретаря наукового товариства з 25 чоловік?
5. Скількома способами можуть випасти 3 гральні кубики? У скількох випадках хоча б на одному кубику випадає 6? У скількох випадках на одному кубику випадає 6, а на іншому – 3?
6. Скількома способами можна розділити 20 найменувань товару між трьома магазинами, якщо в перший потрібно доставити 8 найменувань, у другий – 7, у третій – 5 найменувань?
7. Банк випускає кредитні картки, які мають три букви англійського алфавіту і чотири цифри. Скільки можна випустити кредитних карток?
8. Мале підприємство має ліцензію на проведення 10 видів комерційної діяльності. На початку роботи воно планує займатися 4 видами. Скількома способами можна вибрати ці 4види комерційної діяльності?
9. Визначте кількість можливих семицифрових телефонних номерів, якщо перші три цифри не дорівнюють нулю і: а) будь-які інші цифри беруться з тих, що залишились; б) перша цифра є непарна, друга – парна, а інші – непарними; в) всі цифри є парними; г) жодна цифра не повторюється.
10. Кандидат у депутати відвідує 6 різних міст. Скільки існує різних маршрутів поїздок?
11. Чотири особи треба вибрати до ради директорів місцевого акціонерного товариства. Якщо вибиратимуть з 10 кандидатів, то скільки можливих груп буде розглядатися?
12. Велика науково-дослідницька фундація розглядає вкладення коштів у дослідницькі медичні проекти. Було розглянуто 20 проектів і 8 з них отримали кошти. Яка кількість різних наборів проектів може бути профінансована?
13. Волейбольний тренер вибирає 6 найкращих гравців до початку гри. У команді 12 гравців. Якщо ми припустимо, що будь-який з них може бути вибраний для будь-яких шести різних позицій, то скільки різноманітних комбінацій гравців є можливими?

Задачі, що виносяться на контрольну роботу

1. Президент компанії планує відвідати 5 філій, які є в різних містах. Скільки є різних маршрутів поїздок?
2. Президент акціонерного товариства планує відвідати 5 філій із 7, які є в різних містах. Скількома способами це можна зробити?
3. На зборах повинно виступити чотири особи: A, B, C, D. Скількома способами можна скласти список ораторів, якщо D не може виступити раніше, ніж B?
4. У розіграші першості країни з футболу у вищій лізі бере участь 16 команд. Команди які посідають перше, друге та третє місця, нагороджуються, відповідно, золотою, срібною та бронзовою медалями, а команди, які опиняються на двох останніх місцях, залишають вищу лігу. Скільки може бути різних результатів першості?
5. Є 5 видів конвертів і 4 види марок. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для відсилки листа?
6. Скількома способами 5 людей можуть стати в ряд? А скількома способами – по колу?
7. Скількома способами можна за 7 днів скласти 5 іспитів?
8. Шифр складається з 5 елементів, де перші три – цифри, а дві останні – букви латинського алфавіту. Визначте кількість можливих варіантів кодів.
9. Приймальна комісія місцевого університету класифікує абітурієнтів за такими ознаками: чоловік чи жінка; зі своєї чи іншої області; якому факультету надає перевагу(технічному, економічному, гуманітарному чи медичному); середній бал атестату: 3, 4 чи 5. Визначте кількість можливих класифікацій абітурієнтів.
10. На перегонах роблять ставки на тоталізаторі на 20 коней. Скільки різних пар коней, що займуть перші два місця можливі на цих скачках?
11. 10 астронавтів розглядаються, як претенденти до наступного польоту. Якщо команда для польоту складається з 3 чоловік, то скільки можливих комбінацій астронавтів буде розглядатися?
12. Експерт з управління цінними паперами розглядає 20 об’єктів для інвестування. Лише 10 з них будуть вибрані. Скільки різних комбінацій об’єктів може бути вибрано?
13. 5 авіакомпаній подали заявку на експлуатацію нового міжнародного маршруту. Лише 3 буде надано дозвіл на його експлуатацію. Скільки різних груп авіакомпаній можна вибрати?
14. У партії в бридж роздається по 13 карт чотирьом гравцям. Скільки варіантів здачі карт може бути з колоди 52 карт?
15. Президент корпорації вирішив розпочати розробку нового товару, який би дав йому значну конкурентну перевагу. Президент хоче призначити спеціальну команду по дизайну товару, яка складається з трьох інженерів, одного фахівця по дослідженню ринку, одного фахівця з фінансових питань і двох наглядачів за виробництвом. Існує 6

інженерів, 3 фахівці з ринкових досліджень, 4 фахівці з фінансових питань і 5 технологів, які розглядаються як претенденти до цієї команди. Скільки різних дизайнерських команд можна створити?

16. Декан математичного факультету хоче відібрати 4 четвертокурсники, 3 третьокурсники, 2 другокурсники і 2 першокурсники до математичної команди на олімпіаду. 10четвертокурсників, 8 третьокурсників, 8 другокурсників, 6 першокурсників подали заявки і були вибрані для конкурсу. Скільки різних команд можна скласти?
17. Офіціант ресторану збирається підібрати сортові вина для урочистого обіду, під час якого їх буде подаватися чотири види. Перше вино подаватимуть із закусками, яких є 5 варіантів. Другий сорт вина буде подаватися із шістьма видами салатів, третій – із вісьмома стравами з риби й м'яса, четвертий – із шістьма видами торту. Скільки можливих комбінацій подачі вин і страв можуть розглядатися для цього обіду?
18. Скільки різних телефонних номерів можна набрати при трицифровому коді і семицифровому місцевому номері?
19. Торговець автомобілями має 10 різних моделей машин. На виставці він зможе показати лише 5 з них. Яку кількість різних комбінацій машин може вибрати торговець для виставки?
20. Олімпійський баскетбольний комітет визначив спортивну команду з 30 гравців. Головний тренер вирішив, що його команда з 12 гравців, складатиметься з 3 центрових, 5 форвардів і 4 захисників. З 30 гравців, що відібрав комітет, 8 – центрових, 13 форвардів і 9 захисників. Скільки різних команд з 12 гравців може розглядатися?
21. У роздягальні кожен з 15 студентів залишив своє пальто. Повертаючись додому, кожен з них бере пальто (своє чи чуже) . скількома способами студенти можуть взяти пальта?
22. У тесті є 10 питань, причому три з них – з математики. Скількома способами можна задати 10 запитань, так щоб не було задано підряд два питання з математики?
23. Скількома способами групу з 20 студентів можна розділити на одну підгрупу яка складається з 10 студентів, і дві підгрупи по 5 студентів?

Заняття 2.
Сполуки з повторенням.
Формула включень – виключень.

Перестановкою з повтореннями з n елементів по $n_1, n_2, \dots, n_k$ називається впорядкована множина, яка складається з n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ... , n_k елементів k-го типу $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$. Кількість все можливих перестановок з повтореннями шукаємо за формулою $P_n(n_1, \dots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Розміщенням з повтореннями з n по k називається довільна впорядкована k-елементна множина, елементи якої відносяться до одного з n типів (тобто елементи можуть повторюватись, але максимальна кількість різних елементів дорівнює n). Кількість всеможливих розміщень з повтореннями з n по k позначається $\overline{A_n^k} = n^k$.

Комбінацією з повторенням з n по k називається довільна k-елементна множина, елементи якої відносяться до одного з n типів (тобто елементи можуть повторюватись, але максимальна кількість різних елементів дорівнює n). Кількість комбінацій з повтореннями з n по k позначається $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Формула включень і виключень. Якщо множини $A_i,\ i = 1,2,\dots,k$ можуть мати спільні елементи, то кількість елементів у їхньому об'єднанні можна обчислити за формулою

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \dots - n(A_1 \cap A_k) - \dots -$$
$$- n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) - \dots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).$$

У випадку трьох множин A,B,C ця формула має вигляд

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Аудиторна робота.

1. У групі, яка складається з 30 студентів, 18 знають англійську, 16 – німецьку, а 12 – французьку мови. У цьому випадку шість студентів знають англійську і французьку, дев’ять – німецьку й англійську і два – всі три мови. Скільки студентів не знає жодної мови?
2. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви у слові *математика*?
3. Скільки різних 13-цифрових чисел можна утворити використовуючи цифри : 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 8, 4.
4. У ліфт 12 поверхового будинку на першому поверсі зайшло 7 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту ?
5. На залізничній станції є m світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їх допомогою, якщо кожен світлофор має три сигнали – червоний, жовтий, зелений?
6. Поїзд, в якому їде n пасажирів, робить k зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?
7. Два листоноші повинні віднести 10 листів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?
8. У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити 5 листівок ?
9. Скількома способами n різних куль можна розмістити у k ящиках?
10. Записати усі комбінації з повтореннями з трьох елементів a, b, c по 3.

Домашня робота.

1. Скільки слів можна утворити, переставляючи букви у слові АНТАРКТИДА?
2. Скількома способами 20 різних куль можна розмістити у 4 ящиках ?
3. Скільки чисел можна утворити, використовуючи цифри 1,1,1,1,4,4,3,3,3,3,3 ?
4. Скількома способами можна купити 25 тістечок, якщо в кондитерській є 10 видів тістечок ?
5. Є 10 дітей і 20 однакових подарунків. Скількома способами можна розподілити подарунки між дітьми? А якщо кожна дитина отримує хоча б один подарунок?

6. У конкурсі на найліпшу фірму, який має чотири номінації, беруть участь 12 фірм. Скільки є варіантів розподілу призів, якщо в кожній номінації: а) різні призи; б) однакові призи?
7. Скількома способами можна утворити колону з 10 автобусів і трьох легкових автомобілів, якщо всі автобуси і автомобілі однакових марок?

Контрольна робота.

1. Скількома способами можна розмістити дев'ять осіб в готелі, у якому є чотиримісні, тримісні та двомісні номери?
2. Скількома способами можна утворити шестицифрове число, яке складається з чотирьох двійок та двох п'ятірок?
3. Є 3 вагони і 10 людей. Скількома способами можна їх розсадити по вагонах?
4. В класі 35 учнів, з них: 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 – жодного не відвідують. Скільки учнів відвідують математичний і фізичний гурток? Скільки лише математичний?
5. Скількома способами можна розкласти 10 білих, 12 чорних і 5 синіх куль у 4 коробки?
6. Скількома способами можна роздати 52 карти чотирьом гравцям так, щоб кожен з них отримав по 3 карти трьох мастей і по 4 карти – четвертої?
7. Скількома способами можна послати 16 різних фотокарток в 11 різних конвертах, якщо жоден конверт не повинен бути порожній?

Заняття 3.
Класичне, геометричне та статистичне означення ймовірності.

Розглядаємо випадкове явище із скінченною кількістю елементарних подій, які є рівноможливими. Відомо, що подія A спостерігається у ньому. Кількість усіх елементарних подій будемо позначати через $|\Omega|$, а кількість елементарних подій, що сприяють події A – через $|A|$.

Ймовірністю події A називають невід'ємне число $P(A)$, яке дорівнює відношенню кількості елементарних подій, що сприяють події A, до кількості усіх елементарних подій, тобто

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Властивості ймовірностей.

1. $P(\Omega)=1$.

2. $0\le P(A)\le 1$.

3. $P(\varnothing)=0$.

4. **.** Якщо події A та B несумісні, то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

5. Якщо $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$.

6. Якщо $A\subset B$, то $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.

7. Якщо події A та B довільні, то

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

8. $P(\overline{A})=1-P(A)$**.**

Не завжди можна врахувати всі сторони у спостереженні випадкового явища для визначення ймовірності даної події A.

Враховуючи те, що випадкове явище характеризується масовістю, до проблеми визначення ймовірності події A можна підійти з іншої сторони. Нехай випадкове явище спостерігається n разів. При цьому подія A відбулась рівно m разів. Число m називатимемо частотою появи події A, а відношення $\frac{m}{n}=\mu\ (n)$ – відносною частотою появи події A.

Тоді ймовірністю події A будемо називати число

$$P\left(A\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(n).$$

Розглядаємо деяку скінченну область G у n-вимірному просторі ($n=1,2,3$) і деяку її підмножину D. Стохастичний експеримент полягає в тому, що вибираємо навмання довільну точку області G, випадкова подія A – точка виявиться у підмножині D. Вважаємо, що області G і D є вимірними. Мірою тут є довжина у одновимірному випадку, площа у двовимірному випадку і об'єм у тривимірному випадку. Істотними є припущення, що всі точки області G є рівноможливими, тобто шанси вибрати підмножини однакової міри є однаковими.

Тоді ймовірністю події А буде відношення міри області D до міри області G. Міру області D будемо позначати $|A|$, міру області G – $|\Omega|$, а $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

Аудиторна робота

1. Гральний кубик підкидають двічі. Опишіть простір елементарних подій. Опишіть події A={обидва рази випала кількість очок, кратна трьом}, B={жодного разу не випало число шість}, C={обидва рази випала кількість очок, більша за три}, D={обидва рази випала однакова кількість очок}.
2. Досліджують сім'ї, які мають двох дітей. Навмання вибирають сім'ю і фіксують стать дитини. Результат ДХ означає, що старша дитина дівчинка, молодша – хлопчик. Опишіть простір елементарних подій. Опишіть події A= {серед двох дітей є хоча б один хлопчик }, B={серед двох дітей є одна дівчинка}, $\overline{A}$, $\overline{A}\cup B$, $A\cap B$.
3. У ящику є 7 білих і 10 червоних куль. Навмання виймають 5 куль. Знайти ймовірність того, що серед них:
   а) 2 білі;
   б) не більше двох білих куль.
4. У ліфт 12 поверхового будинку на першому поверсі зайшло 7 осіб. Знайти ймовірність, що всі вони:
   а) вийдуть на різних поверхах;
   б) вийдуть на одному поверсі;
   в) принаймні двоє з них вийдуть на одному і тому ж поверсі;
   г) двоє на четвертому поверсі, троє – на восьмому, двоє – на дванадцятому.
5. У групі навчається 25 студентів. Знайти ймовірність того, що принаймні двоє з них народились в один день. (Вважаємо, що рік має 365 днів).
6. У коробці знаходиться 10 білих кульок, 15 червоних, 18 рожевих, 22 зелених, 15 голубих, 25 синіх, 10 коричневих, 20 жовтих, 25 оранжевих, 15 салатових, 10 фіолетових. Навмання витягнули 33 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є по 3 кожного кольору.
7. З колоди в 52 карти навмання виймають 7 карт. Знайти ймовірність таких подій:
   А – серед витягнутих карт є 2 тузи;

B – серед витягнутих карт немає тузів;
C – серед витягнутих карт є принаймні один туз;
D – всі карт одного кольору;
E – всі карти однієї масті;
F – всі карти не мають цифр (мальовані);
K – є хоча б одна козирна.

8. Двічі підкидають гральний кубик. Знайти ймовірність таких подій:
A – обидва рази випаде однакова кількість очок;
B – випаде різна кількість очок;
C – перший раз випаде більше очок ніж другий раз;
D – сума очок, яка випаде перевищує 5;
E – двійка випаде рівно один раз
F – двійка випаде рівно два рази;
K – двійка не випаде жодного разу;
L – двійка випаде принаймні один раз.

9. Відділ кредитів банку протягом п'яти років досліджував ризик повернення кредитів фізичними та юридичними особами. Результати спостережень такі:

Тип кредиту	Ризик			Разом
	Низький	Середній	Високий	
Фізичні особи	1120	4350	730	6200
Юридичні особи	820	1430	1550	3800
Разом	1940	5780	2280	10000

Визначити ймовірність того, що навмання вибраний кредит має низький, середній та високий ризик повернення.

10. У декартовій системі координат розглядають квадрат $ABCD$ із вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$, $D(0;2)$. Знайти ймовірність того, що координати довільної точки $M(x,y)$ всередині квадрата задовольняють умову $x^2 + y^2 < 4$.

11. Визначити ймовірність того, що сума двох навмання взятих чисел $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, буде не більшою від одиниці, а їхній добуток не більшим ніж $\frac{2}{9}$.

Домашня робота

1. Монету підкидають тричі. Опишіть простір елементарних подій. Опишіть події A={герб випав тільки один раз}, B={жодного разу не випала цифра}, C={випало більше гербів, ніж цифр}, D={герб випав не менше, ніж два рази підряд}.

2. Навмання вибирають два підприємства, кожне з яких може бути або рентабельним (Р), або банкрутом (Б). Побудуйте простір елементарних подій. Опишіть події А= {хоча б одне підприємство є рентабельним}, В={перше підприємство є банкрутом}, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $\overline{A}\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $A\cap B$, $A\setminus B$.
3. У коробці є 15 білих, 20 зелених, 30 червоних, 40 синіх, 55 простих олівців. Навмання витягнуто 10. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих олівців є по 2 кожного кольору.
4. n різних предметів довільним чином розміщають k ящиках. Знайти ймовірність таких подій:

   А – у 1 ящику виявиться n_1 предмет, у 2 ящику – n_2, ….., у k ящику – n_k предметів $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$.

   В – всі предмети попали у різні ящики $(n<k)$;

   С – принаймні два предмети потрапили в один ящик $(n<k)$.
5. На складі 100 телевізорів серед них 10 PANASONIK. Навмання витягнули 3 телевізори. Ймовірність, що серед них є хоча б один PANASONIK.
6. 9 пасажирів сідають у вагони. Знайти ймовірність того, що у першому вагоні – 2 пасажира, у другому – 3, а у третьому –4.
7. Дитина грається буквами розрізної абетки С, Л, О, Н. Знайти ймовірність того, що вона випадково складе слово СЛОН.
8. 10 книг довільним чином поклали на полицю. Знайти ймовірність того, що дві вибрані книги виявляться поруч: а) у довільному порядку; б) у заданому порядку.
9. 5 хлопців і 5 дівчат навмання розмістились за круглим столом. Знайти ймовірність того, що двоє осіб однієї статі не сидять поруч.
10. У квадрат із стороною l вписано круг. Знайти ймовірність того, що довільна точка всередині квадрата виявиться всередині круга.
11. У фірмі працює 200 працівників. Розподіл за віком, освітою та терміном праці у фірмі наведено в таблиці:

Вік працівника	Менше п’яти років у фірмі		Понад п’ять років у фірмі	
	Вища освіта	Середня освіта	Вища освіта	Середня освіта
До 35	40	5	50	5
Понад 35	50	25	15	10

   Навмання вибирають одного працівника. Знайдіть ймовірності таких подій: а) вибраний працівник має вищу освіту; б) вибрана особа має більше ніж 35 років, якщо відомо, що вона працює на фірмі понад п’ять років.
12. На відрізку довжиною 20 см є відрізок довжиною 10 см. Знайдіть ймовірність того, що крапка навмання поставлена на більший відрізок, потрапить на менший, якщо ймовірність потрапляння точки

на відрізок пропорційна до довжини відрізка і не залежить від його розташування.

13. Стержень довжиною l, розламали в двох точках. Яка ймовірність того, що з утворених відрізків можна скласти трикутник?

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Підкидають монету і гральний кубик. Описати простір елементарних подій та випадкові події: А – випаде герб і цифра 5, В – випаде число очок, що ділиться на 2. Знайти ймовірності описаних подій.
2. Побудувати простір елементарних подій у такому експерименті: кидають монету і фіксують, чи випав герб; кидання триває доти, доки герб не випаде двічі.
3. У лотереї розігрується 1000 виграшів. Серед них один виграш – 50 грн, п’ять виграшів по 20 грн, двадцять виграшів – по 10 грн і п’ятдесят – по 5 грн. Знайти ймовірність того, що: а) на один куплений квиток припаде виграш не менший ніж 10 грн; б) куплений один квиток виграшний.
4. Гральний кубик кидають двічі. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть, ділиться на 3?
5. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. З урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вийнята куля: а) біла; б) чорна?
6. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	менше ніж 1000$	від 1000$ до 5000$	більше ніж 5000$
менше ніж 30 років	5%	15%	8%
від 30 до 50 років	8%	25%	20%
більше ніж 50 років	7%	10%	2%

Нехай подія А – у навмання вибраного клієнта вклад більший від 5000$, подія В – вік навмання вибраного клієнта не менший ніж 30 років. Визначити: Р(А), Р(В), $P(A \bigcup B)$, $P(A \bigcap B)$.

7. Маємо дев’ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому одержимо цифру 1973?
8. Знайти ймовірність того, що серед десяти цифр номера банкноти: а) немає цифри 6 (число сприятливих наслідків – розміщення з повтореннями); б) немає цифр 0 і 8; в) знайдуться всі цифри (число сприятливих наслідків – перестановки).
9. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року (число сприятливих наслідків – перестановки, а число всіх наслідків – розміщення з повтореннями).

10. У лабораторії працюють 12 жінок і 8 чоловіків. П’ятеро осіб повинні виїхати у відрядження. Яка ймовірність того, що у відрядження поїдуть 3 жінки?
11. На семи картках написано 7 літер: А, В, И, К, Л, Н, Я. Послідовно виймають п’ять карток і розкладають у порядку виймання. Яка ймовірність того, що ці п’ять карток утворять слово ЯЛИНА.
12. На приватній фірмі працює 15 людей, причому п’ятеро з них – жінки. Керівник навмання вибирає трьох працівників для відрядження. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з вибраних осіб виявиться жінкою (подія А).
13. У рівносторонній трикутник вписано круг. У цей трикутник кидають навмання точку. Яка ймовірність того, що вона не попаде в круг?
14. Під час бурі на ділянці між 40 і 70 кілометрами телефонної мережі розірвався провід. Яка ймовірність того, що він розірвався між 45 і 50 кілометром мережі?
15. Задано множину $\Omega = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання вибрані два числа x,y $(0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1)$ утворять координати точки, яка належить області А=$\left\{(x, y): \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le x\right\}$.
16. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному зі суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві.
17. Дуелі в місті Обережності рідко закінчуються сумним кінцем. Річ у тому, що кожний дуелянт прибуває на місце зустрічі у випадковий момент часу між 5-ю і 6-ю годинами і, прочекавши суперника 5 хвилин, залишає місце дуелі. У разі, коли суперник прибуде протягом цих п'яти хвилин, дуель відбудеться. Знайти ймовірність того, що дуель закінчиться поєдинком?
18. У партії однотипних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?
19. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайти число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

Заняття 4.
Властивості ймовірностей. Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Означення ***Дві події A і B називаються*** *несумісними****, коли їх добуток є неможлива подія, тобто коли*** $A \bigcap B = \varnothing$.

Означення. Події A і B називаються незалежними, якщо

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Означення. ***Умовною ймовірністю*** *події* A *за умови, що подія* B *відбулась, називають*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Властивості:

1. $0 \le P(A \mid B) \le 1$.

2. $P(\Omega \mid B) = 1$.

3. $P(B \mid B) = 1$.

4. Якщо $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *– послідовність попарно несумісних випадкових подій, то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B).$$

Формула множення ймовірностей. *Якщо* $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, *то виконується рівність*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Означення. *Події* H_1, $H_2, \ldots, H_n$ *утворюють* ***повну групу подій****, якщо виконуються такі умови:*

1. $\forall i, j : 1 \le i < j \le n \quad H_i \cap H_j = \varnothing$.

2. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Теорема (формула повної ймовірності).

Якщо події H_1, $H_2, \ldots, H_n$ *утворюють повну групу подій,* A *– довільна подія, тоді:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) P(H_i)$$

Формула Байєса. *За умов попередньої теореми*

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k) P(H_k)}{P(A)}.$$

Аудиторна робота

1. Дано: $P(A \bigcap B) = 0.4,\ P(A \mid B) = 0.3$. Знайти $P\left(\overline{A}|B\right)$.
2. Тричі підкидають симетричну монету. Знайти ймовірність того, що випаде рівно два герби, якщо відомо, що першим випав герб.
3. Ймовірність того, що прилад працюватиме справно 150 год, дорівнює $\frac{3}{4}$, а 400 год. – $\frac{1}{2}$. Прилад працював справно 150 год. Яка ймовірність того, що він працюватиме ще 250 год ?
4. Два сигналізатори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що під час аварії спрацює перший, дорівнює 0,95, для другого - 0,9. Знайдіть ймовірність того, що під час аварії спрацює лише один.
5. Ймовірність потрапляння в ціль під час залпу двох спортсменів дорівнює 0,38. Знайдіть ймовірність влучання в ціль для першого спортсмена, якщо для другого така ймовірність дорівнює 0,8.
6. З колоди 52 карт витягнули одну. Подія A – витягнута карта червоної масті, подія B – витягнута карта туз. Перевірити чи події A і B незалежні.
7. Два спортсмени незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення для першого дорівнює 0,7, а другого – 0,8. Знайти ймовірність таких подій:
   A – обидва влучили в мішень;
   B – рівно один спортсмен влучив у мішень;
   C – жоден із спортсменів не влучив у мішень;
   D – принаймні один спортсмен влучив у мішень.
8. У мішені виявилась одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що у мішень влучив перший спортсмен.
9. У колі три елементи з'єднані:
   а) паралельно;
   б) послідовно;
   в) перший і другий елемент з'єднані між собою паралельно, а третій елемент приєднаний до них послідовно.
10. Ймовірність виходу з ладу i – го елемента на протязі часу T дорівнює p_i $\left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$. Знайти ймовірність того, що на протязі часу T струм в колі буде проходити у кожному з трьох випадків.
11. У ящику знаходиться 20 куль, серед яких 10 білих і 10 червоних. Загублено одну кулю невідомого кольору, а потім навмання витягнуто одну. Знайти ймовірність того, що витягнута куля є білого кольору.
12. В трьох коробках лежать чорні та білі кулі. У першій коробці три білі і одна чорна; у другій – 6 білих і 4 чорних, а у третій коробці – 4 білих та 1 чорна. Навмання вибирають коробку, а з неї виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що витягнута куля є білою.

13. У двох урнах міститься відповідно n_1 і n_2 куль, з них білих куль m_1 і m_2. З першої урни переклали у другу одну кулю, а потім з другої навмання вибрали одну. Знайти ймовірність того, що куля витягнута з другого ящика буде білою.
14. Готуючись до екзамену з теорії ймовірностей, студент з n екзаменаційних білетів вивчив лише $k.$ В якому випадку ймовірність витягнути вивчений білет буде більшою:
    а) коли він тягне білет першим;
    б) коли він тягне білет другим ?
15. Для певних виробів ймовірність їх відповідності стандарту дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система контролю, яка дає позитивний результат (тобто визнає виріб стандартним) з ймовірністю 0,98 для стандартних виробів і з ймовірністю 0.03 визнає бракований виріб стандартним. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов контроль, буде визнаний стандартним. Виріб був визнаний стандартним. Знайти ймовірність того, що він справді відповідає стандарту.
16. Знайти ймовірність того, що серед 1000 електричних ламп немає зіпсованих, якщо зі 100 навмання взятих ламп усі виявились стандартними. При розв'язуванні задачі вважати , що кількість бракованих ламп не перевищує 5 на 1000 і всі значення 0,1,…,5 кількості бракованих ламп рівноможливі.

Домашня робота

1. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу i-го елемента на протязі часу T дорівнює p_i $(i = 1,2,3)$. Прилад виходить з ладу, якщо вийде з ладу не менше двох елементів. Знайти ймовірність того, що протягом часу T прилад буде працювати.
2. Із усіх сімей, в яких двоє дітей, навмання вибрано одну. Подія A – в сім'ї є хлопчик і дівчинка, подія B – в сім'ї не більше ніж одна дівчинка Перевірити чи події A і B незалежні.
3. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години вимагатиме увагу перший верстат дорівнює 0.7, другий – 0.5, третій – 0.8. Знайти ймовірності таких подій:
   А) протягом години вимагати увагу рівно три верстати;
   Б) протягом години вимагатиме увагу рівно два верстати;
   В) протягом години вимагатиме увагу рівно один верстат;
   Г) протягом години не вимагатиме уваги жоден із верстатів;
   Д) протягом години вимагатиме уваги хоча б один верстат;
   Відомо, що протягом години вимагав увагу рівно один верстат. Знайти ймовірність того, що це був перший верстат.
4. Відомо, що $P(A|B) = 0.8,$ $P\left(A|\overline{B}\right) = 0.2,$ $P(B|A) = 0.5.$ Обчислити $P(A).$
5. Довести, що коли $P(A) > 0$ і $P\left(B|\overline{A}\right) = P(B|A)$, то $P\left(A\bigcap B\right) = P(A)P(B).$
6. У ящику є 15 білих і 10 чорних куль. Навмання витягають 5 куль. Знайти ймовірність того, що витягнуто більше ніж 2 білі кулі, якщо відомо, що принаймні одну білу кулю витягнуто.

7. Статистика свідчить про те, що у весняному кросі з кожних 100 учасників половину дистанції проходить в середньому 90, а всю дистанцію – 60 учасників. Знайти ймовірність того, що учасник подолає всю дистанцію, якщо він пройшов її половину.
8. У коробці лежить три кулі, кожна з яких може бути білою або зеленою. Гіпотези про кількісний склад білих куль у коробці є рівноймовірними. У коробку кладуть білу кулю, а потім з неї навмання витягають одну. Знайти ймовірність того, що куля витягнута з коробки буде білою.
9. До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого заводу надходить у 3 рази більше виробів ніж з другого заводу. Перший завод випускає в середньому 0,5% бракованої продукції, другий завод – 0,2%. Знайти ймовірність того, що куплений в магазині товар буде бракований. Куплений в магазині виріб виявився бракованим. Знайти , що він випущений першим заводом.
10. Спеціалізована лікарня приймає в середньому 50% хворих із захворюванням A, 30% із захворюванням B і 20% із захворюванням C. Статистика свідчить, що ймовірність повністю вилікуватися із захворюванням A – 0,8, B – 0,9, C – 0,7. Знайти ймовірність того, що навмання взятий хворий повністю вилікувався.
11. В урні лежать 3 кулі, вони можуть бути білими або чорними. Всі 4 припущення про кольоровий склад рівно можливо з урни витягнули кулю, яка виявилася білою. Знайти ймовірність того, що в урні були 2 білі і 1 чорна кулі.
12. Відомо, що 5% жінок і 0,25% чоловіків – дальтоніки. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважаємо, що кількість чоловіків і жінок є однакова).

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Серед 10-ти пар взуття, які розміщені на полиці магазину, – шість пар 41-го розміру. З полиці беруть двічі навмання по одній парі взуття, не повертаючи їх назад. Подія A – перша пара взуття 41-го розміру, подія B – друга пара взуття 41-го розміру. Виконати такі дії:

а) з’ясувати сумісність і залежність подій A і B.

б) обчислити ймовірність події B.

2. Теоретична частина предмета складається з трьох розділів, у кожному з яких по 10 питань. Студент знає 5 питань з першого розділу, 6 питань – із другого і 8 питань – із третього. Викладач дає студентові навмання по одному питанню з кожного розділу. Знайти ймовірність того, що:

а) студент знає відповіді на всі три питання;

б) студент знає відповіді на питання другого і третього розділів і не знає відповіді на питання першого розділу;

в) студент не знає відповіді на жодне з трьох питань.

3. Імовірність того, що ціна акції зростатиме протягом ділового дня, становить 0,4. Якщо тенденція зміни ціни акції будь-якого дня є незалежною від того, що сталося напередодні, то яка ймовірність, що ціна акції: а) буде зростати чотири дні поспіль; б) залишиться такою ж чи спадатиме три дні поспіль?

4. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Імовірність того, що перший банк не відмовить йому в наданні кредиту, становить 0,7, другий – 0,85. Знайти ймовірність того, що: а) перший або другий банк дасть згоду на кредитування; б) обидва банки відмовляться надати кредит.

5. Карти вибирають навмання з колоди з 52-х карт без повернення їх назад. Визначити ймовірність того, що: а) перші дві карти – піки; б) один за одним виберуть чотири тузи.

6. Імовірність того, що в річній декларації про сукупний оподатковуваний дохід подано не всі джерела доходів, становить 0,2. Яка ймовірність того, що серед вибраних навмання п'яти декларацій хоча б в одній подано не всі джерела доходів?

7. Подія *A* може відбутися за умови появи однієї, і тільки однієї з трьох подій-гіпотез H_1, H_2, H_3, при цьому $P(H_1) = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}25$, $P(H_3) = 0{,}45$. Умовні ймовірності події *A:* $P_{H_1}(A) = 0{,}2$, $P_{H_2}(A) = 0{,}4$, $P_{H_3}(A) = 0{,}5$. Обчислити: а) $P(A)$; б) $P_A(H_2)$.

8. Потрібний товар можна придбати на ринку у двох фірмових кіосках. Імовірність того, що в першому кіоску товар якісний, становить 0,9, у другому кіоску – 0,8. Знайти ймовірність того, що товар, придбаний навмання в будь-якому з двох кіосків, якісний.

9. Фінансовий звіт фірми складається з 20-ти таблиць, які готували два економісти. Перший економіст підготував 12 таблиць, другий – 8 таблиць. Імовірність помилки при складанні таблиць із боку першого економіста 0,1, із боку другого економіста – 0,2. У вибраній навмання таблиці допущено помилку. Яка ймовірність, що цю таблицю готував другий економіст?

10. Із двох близнюків перший є хлопчик. Яка ймовірність, що другий – також хлопчик, якщо ймовірність народження двох хлопчиків становить 0,27, двох дівчаток – 0,23, а для різностатевих близнюків імовірність народження першим для обох статей однакова?

11. Імовірність своєчасного складання звіту для першого економіста становить 0,9, для другого ця ймовірність є додатним розв'язком рівняння $8p^2 = 7p$. Визначити ймовірність несвоєчасного складання звіту двома економістами.

12. Радіолокаційна станція веде спостереження за двома об'єктами. За час спостереження перший об'єкт може бути загублений з ймовірністю $p_1 = 0{,}12$, другий – з імовірністю

$p_2 = 0,14$. Знайти ймовірність того, що за час спостереження станція не виявить об'єктів.

13. По цілі стріляють трьома ракетами. Імовірність влучення кожною ракетою в ціль дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що після обстрілу:
а) ціль не буде поражена; б) ціль буде знищена.

14. Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірності того, що студент зможе відповісти на перші два питання білета, дорівнюють по 0,9, а на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на 2 питання.

15. У бібліотеці 10 книжок з історії, 40 з математики і 30 з економіки. Читач, що зайшов у бібліотеку, замовив навмання 5 книжок. Яка ймовірність, що всі вони з одного розділу науки?

16. У групі 30 студентів і серед них 13 хлопців. За списком навмання вибирають 4 студенти. Яка ймовірність, що серед них виявиться більше ніж 2 хлопці?

17. В ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято 3 деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: А – три деталі виявляться стандартними; В – три деталі виявляться бракованими.

18. В офісі працюють сім чоловіків і три жінки. За табельними номерами навмання відібрано три особи. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи є чоловіками.

19. Імовірність переходу студента першого курсу на другий дорівнює 0,9, а ймовірність закінчити інститут – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент другого курсу закінчить інститут?

20. Імовірність безвідмовної роботи блоку, що входить у систему, протягом заданого часу дорівнює 0,85. Для підвищення надійності встановлюють такий самий резервний блок. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи з урахуванням резервного блоку.

21. Перша фірма може може одержати заданий прибуток з ймовірністю 0,7, для другої ця ймовірність є розв'язком рівняння $5p^2 - 13p + 6 = 0$. Визначити ймовірність одержання заданого прибутку принаймні однією фірмою.

22. Оператор обслуговує три верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом однієї години не потребуватиме уваги оператора перший верстат, дорівнює – 0,9, другий – 0,8, третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години:

а) рівно один верстат вимагатиме уваги оператора (сума всеможливих добутків подій, дві з яких беруться із запереченням);

б) рівно два верстати вимагатимуть уваги оператора;

в) хоча б один верстат вимагатиме уваги оператора (імовірність протилежної події);

г) усі верстати вимагатимуть уваги оператора.

23. Імовірність не допустити хоча б однієї помилки під час заповнення 4-х податкових декларацій становить 0,9984. Обчислити ймовірність того, що при заповненні декларації буде допущено помилку.

24. Імовірність того, що подія А з'явиться хоча б один раз при 4 незалежних випробуваннях, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні (припускається, що ймовірність появи події в усіх випробуваннях одна й та ж).

25. Два пункти сполучаються кількома лініями зв'язку і ймовірність пошкодження кожної з них протягом часу Т дорівнює 0,8. Заміна будь-якої пошкодженої лінії може бути проведена лише після пошкодження всіх ліній. Скільки потрібно провести ліній, щоб імовірність функціонування зв'язку між пунктами протягом часу Т була більша ніж 0,99?

26. Імовірність того, що за одного пострілу стрілець попаде в мішень, дорівнює 0,6. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,8 він попав у десятку хоча б один раз?

27. Відносні частоти неполадок у роботі мікропроцесора, оперативної пам'яті і решти пристроїв комп'ютера відносяться як 3 : 2 : 5. Імовірності виявлення неполадок у роботі мікропроцесора, оперативної пам'яті і решти пристроїв комп'ютера відповідно дорівнюють 0,8; 0,9 і 0,9. Знайти ймовірність виявлення неполадок у роботі комп'ютера.

28. У спеціалізованій лікарні є в середньому 50% пацієнтів із хворобою К, 30% – із хворобою L і 20% – із хворобою М. Імовірності повного вилікування кожної хвороби відповідно дорівнюють 0,7; 0,8 і 0,9. Пацієнт, що лікувався в лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що він лікувався від хвороби К.

29. 70% всіх електроламп, що є магазині, виготовлені на одному заводі, і 30% - на іншому. Продукція першого заводу містить 90%, а другого – 96% стандартних електроламп. Знайти ймовірність того, що навмання куплена в магазині електролампа виявиться стандартною.

30. Відомо, що 6% всіх чоловіків і 0,5% всіх жінок – дальтоніки. Навмання вибрана людина виявилася дальтоніком. Яка ймовірність того, що це жінка, якщо вважати, що кількість жінок і чоловіків однакова?

31. Ймовірність того, що кольоровий телевізор не зламається протягом гарантійного терміну дорівнює 0,75, для телевізора з чорно-білим зображенням ця ймовірність на 0,1 більша.

Знайти ймовірність того, що навмання вибраний телевізор із п'яти кольорових і 10 чорно-білих не зіпсується протягом гарантійного терміну.

32. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з 4 кас. Відповідні ймовірності дорівнюють $p_1 = 0,3,\ p_2 = 0,1,\ p_1 = 0,2,\ p_1 = 0,4$. Ймовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно 0,7; 0,4; 0,6; 0,2. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у другій касі?

33. Для участі в студентських спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу 4, з другої – 6, з третьої групи – 5 студентів. Ймовірності того, що студент першої, другої і третьої груп попадає в збірну інституту, відповідно рівні 0,9, 0,7, 0,8. Навмання вибраний студент у результаті змагань попав у збірну. До якої з груп ймовірніше всього належав цей студент?

Заняття 5.
Схема Бернуллі.
Асимптотичні формули в схемі Бернуллі.

Постановка задачі. Проводиться серія з n незалежних випробувань. Ймовірність появи події A у кожному випробуванні є однакова і дорівнює p. Необхідно знайти ймовірність події B, яка полягає в тому, що при n випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів.

Ймовірність того, що у певній послідовності подія A відбудеться k разів і відповідно $n-k$ разів не відбудеться, дорівнює $p^k(1-p)^{n-k}$. Але кількість послідовностей, у яких подія A відбудеться k разів і відповідно $n-k$ разів не відбудеться, дорівнює $\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$. Тому $P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Шукану ймовірність позначимо $P_n(k)$, а $1-p=q$. Остаточно формула має вигляд

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Якщо подія C полягає в тому, що подія A відбудеться:

не менше k разів, то її ймовірність $P(C) = \sum_{j=1}^{k} P_n(j)$,

менше k разів, то її ймовірність $P(C) = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$,

більше k разів, то її ймовірність $P(C) = \sum_{j=k+1}^{n} P_n(j)$,

не більше k разів, то її ймовірність $P(C) = \sum_{j=1}^{k} P_n(j)$.

Теорема. У схемі незалежних випробувань найімовірніше число k_0 появ події знаходиться із співвідношення

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Для достатньо великих n обчислення значень $P_n(k)$ є громіздким процесом. Тому для великих n застосовують асимптотичні формули:

1. Закон Пуассона. Якщо p достатньо мале (на практиці $p \le 0,1$) і n достатньо велике (на практиці $0,1 \le np \le 10$), то виконується наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

де $\lambda = np$. Цю ймовірність будемо позначати $P(\lambda;k)$. Значення функції $P(\lambda;k)$ подаються у задачниках з теорії ймовірностей.

2. Локальна теорема Муавра-Лапласа. Для p близьких до 1 і $npq > 8$ виконується наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

а

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\varphi(x)$ знаходять з таблиць, які подаються в задачниках з теорії ймовірностей.

Зауважимо, що $e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}}$, тобто функція $\varphi(x)$ є парною.

3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. В умовах локальної теореми Муавра-Лапласа справедлива наближена рівність

$$P_n(k \in [k_1, k_2]) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

де

$$x_j = \frac{k_j - np}{\sqrt{npq}}, \quad j = 1, 2;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значення функцій $\Phi(x)$, $\Phi_0(x)$ знаходяться з таблиць. Легко зауважити, що

1. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
2. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
3. $\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x)$.

Якщо $x > 5$, то $\Phi_0(x) \approx 0.5$.

Нехай у n випробуваннях подія A відбулась рівно $m(n)$ разів. Відношення $\frac{m(n)}{n}$ називається відносною частотою. Знайдемо $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$. Тут ε – задане як завгодно мале число. Цю ймовірність будемо називати надійністю або довірчою ймовірністю і позначатимемо її β. Покажемо, що ця ймовірність дорівнює

$$\beta = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Аудиторна робота

1. Ймовірність влучення у ворота нападаючим дорівнює 0.4. Знайти ймовірність того, що при трьох ударах він влучить у ворота:
   A – рівно два рази;
   B – не менше двох раз;
   C – не більше двох раз;
   D – жодного разу;
   E – принаймні один раз.
2. Знайти найімовірніше число в схемі Бернуллі, якщо кількість незалежних випробувань дорівнює 78, а ймовірність настання події при одному випробуванні дорівнює 0.7.
3. Знайти кількість незалежних випробувань в схемі Бернуллі, якщо найімовірніше число появи події A дорівнює 47 при умові, що ймовірність появи події в одному випробуванні дорівнює 0.23.
4. Оцінити ймовірність появи події у кожному зі 147 незалежних випробувань, якщо найімовірніше число дорівнює 38.
5. Ймовірність того, що в коробці буде бракована деталь 0,01. Знайти ймовірність того що серед 200 деталей буде дві браковані, рівно 3 бракованих, не менше двох бракованих.
6. Апаратура містить 2000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного з них дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність відмови апаратури , якщо вона настає при відмові хоча б одного елемента.
7. В аеропорту в середньому протягом години приземляються 2 літаки. Знайти ймовірність того, що протягом години приземляться:
   A – рівно 5 літаків;
   B – принаймні один літак;
   C – не менше 4 літаків.
8. Ймовірність того, що навмання вибраний студент отримає більше 50 балів ймовірність дорівнює 0,4. Знайти ймовірність що зі 150 студентів більше, ніж половину балів отримають рівно 58 студентів.
9. Ймовірність того що подія A відбудеться в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того що подія A відбудеться від 1460 до 1485 разів.
10. Ймовірність того що студент здасть залік з першого разу дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що серед 150 студентів від 40 до 70 здадуть залік з першого разу.
11. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0.8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю не меншою ніж 0.9 можна було очікувати, що подія відбудеться не менше ніж 75 разів.

Домашня робота

1. Ймовірність того, що студент здасть іспит на “4” або “5” дорівнює 0.8. Під час сесії він здає чотири іспити. Знайти ймовірності таких подій:
   A – рівно три іспити він здасть на “4” або “5”;
   B – не менше трьох іспитів він здасть на “4” або “5”;
   C – не більше двох іспитів він здасть на “4 або “5”;
   D – жодного іспиту він не складе на “4” або “5”
   E – принаймні один іспит він складе на “4” або “5”.
2. Знайти найімовірніше число в схемі Бернуллі, якщо кількість незалежних випробувань дорівнює 123, а ймовірність настання події при одному випробуванні дорівнює 0.6.
3. Знайти кількість незалежних випробувань в схемі Бернуллі, якщо найімовірніше число появи події A дорівнює 135 за умови, що ймовірність появи події в одному випробуванні дорівнює 0.18.
4. Оцінити ймовірність появи події у кожному зі 254 незалежних випробувань, якщо найімовірніше число дорівнює 156.
5. У друкованому рукописі в середньому дві описки на одну сторінку. Знайти ймовірність таких подій :
   A – на даній сторінці немає описок;
   B – на даній сторінці є більше ніж 3 описки;
   C – на двох сторінках не менше 3 описок;
   D – на двох сторінках 4 описки;
   E – на даній сторінці є принаймні одна описка.
6. Ймовірність того що подія B відбудеться в одному із 300 незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що подія B відбудеться:
   A – рівно 73 рази;
   C – не менше 70 разів;
   D – не більше 73 рази;
   E – від 69 до 78 разів.
7. Ймовірність появи події в кожному з 10000 незалежних випробувань дорівнює 0.75. Знайти таке додатне ε, щоб з ймовірністю не меншою 0.98 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності 0.75 не перевищила ε.

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Стрілець виконує 100 пострілів по мішені. Імовірність попадання ним у мішень становить *p*. Чи правильні твердження: а) описані випробування є незалежні стосовно події A – стрілець попадає в ціль; б) серія описаних випробувань проводиться за схемою Бернуллі?

2. У коробці є 100 деталей, серед яких 80 стандартних. Із коробки послідовно виймають по одній деталі. Чи правильні твердження: а) описані випробування незалежні стосовно події A – вийнята деталь стандартна; б) послідовність описаних випробувань проводиться за схемою Бернуллі?

3. Імовірність народження хлопчика (подія A) дорівнює $p = P(A) = 0{,}51$. У сім'ї п'ятеро дітей. Яка ймовірність того, що серед них – два хлопчики?

4. Імовірність того, що власник квартири не має заборгованості в оплаті за використання електроенергії (подія A), дорівнює $p = P(A) = 0{,}6$. Яка ймовірність, що з 2 400 власників квартир 1 400 не мають названої заборгованості?

5. Імовірність хибного виклику пожежної команди (подія A) $p = P(A) = 0{,}2$. Яка ймовірність, що серед 100 викликів число хибних викликів виявиться від 20 до 40?

6. Імовірність появи події A в кожному з 900 незалежних експериментів $p = P(A) = 0{,}5$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події A відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

7. Прядильниця обслуговує 1 000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини становить 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обірвуться 5 ниток.

8. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10-ти деталей. Імовірність того, що деталь стандартна, – 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

9. Унаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції – 0,8. Знайти ймовірність реалізації не менше ніж 75% із чотирьох навмання вибраних одиниць продукції.

10. У місцевій лікарні 55% усіх новонароджених – хлопчики. Одного дня народилося п'ять малюків. Яка найімовірніша серед них кількість хлопчиків?

11. Два рівносильних гравці грають у шахи (нічиї до уваги не беруться). Що ймовірніше: а) виграти дві партії з чотирьох чи три партії зі шести; б) виграти одну партію з двох чи дві партії з чотирьох; в) виграти не менше ніж дві партії з чотирьох чи не менше ніж три партії з п'яти?

12. Ймовірність того, що студент складе іспит з вищої математики дорівнює 0,85. Нехай є підгрупа з 10 студентів. Знайти: а) найімовірніше число студентів цієї підгрупи, які складуть іспит з вищої математики і обчислити відповідну ймовірність; б) ймовірність того, що в цій підгрупі не здадуть іспит з даного предмету хоча б два студенти.

13. Виробник детекторів брехні вимагає, щоб детектори могли чітко розрізняти правильні відповіді від неправильних на 85%. Детектор тестують використовуючи 50 запитань. Визначте:

а) найбільш ймовірне число правильних відповідей;

б) ймовірність того, що їх буде не більше, ніж 40;

в) ймовірність того, що їх буде від 35-ти до 43-ох?

14. Імовірність появи події в кожному зі 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютним значенням не більше ніж на 0,04.

15. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти найменшу кількість випробувань n, за якої з імовірністю 0,99 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютним значенням не більше ніж на 0,04.

16. При виготовленні деталей у цеху брак становить у середньому 8%. Скільки деталей має перевірити контролер, щоб ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від ймовірності p виготовлення такої деталі не перевищувала $\varepsilon = 0,002$, дорівнювала 0,988.

17. Для кожного з 900 першокурсників імовірність закінчити інститут дорівнює 0,9. Знайти межі, в яких перебуватиме відносна частота кількості першокурсників, які закінчать інститут з імовірністю 0,88.

18. Пристрій складається з 800 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови функціонування кожного з елементів дорівнює 0,0015. Знайти ймовірність того, що за час роботи відмовлять не більше двох елементів.

19. Знайти середню кількість помилок на сторінці рукопису, якщо ймовірність того, що сторінка рукопису містить хоча б одну помилку, дорівнює 0,98.

20. Середня кількість викликів таксі, які надходять в диспечерський пункт протягом хвилини, дорівнює три. Знайти ймовірність, що за дві хвилини надійде: а) чотири виклики; б) менше чотирьох викликів; в) не менше чотирьох викликів.

21. Ймовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

Заняття 6.
Дискретні випадкові величини.

Нехай Ω - простір елементарних подій. Випадковою величиною ξ називають числову функцію, яка визначена на Ω. Функцією розподілу випадкової величини ξ називають функцію $F_\xi(x), x \in R$, яку визначає формула

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}.$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1.$
2. *Функція розподілу неперервна зліва.*
3. *Функція розподілу монотонно неспадна.*
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$
5. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Означення. *Випадкова величина ξ називається **дискретною**, якщо вона набуває скінченну або зліченну кількість значень.*

Дискретна випадкова величина характеризується значеннями, які вона набуває $x_1,\dots,x_n,$ і ймовірностями $p_j = P\{\xi = x_j\},\ j = 1,2,\dots$ з якими набуваються ці значення.

Означення. *Значення дискретної випадкової величини і відповідні ймовірності називаються розподілом дискретної випадкової величини або **законом розподілу** дискретної випадкової величини.*

Розподіл дискретної випадкової величини зручно подавати у вигляді таблиці

x_i	x_1	$\dots$	x_n	$\dots$
p_i	p_1	$\dots$	p_n	$\dots$

Якщо значення випадкової величини можна впорядкувати, то значення x_j записують у порядку зростання.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини можна записати наступним чином $F_\xi(x) = \sum\limits_{k, x_k < x} p_k$.

Означення. ***Математичним сподіванням*** *дискретної випадкової величини ξ називають число $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ за умови, що цей ряд збігається абсолютно.*

Властивості математичного сподівання:

1. *Якщо $\xi \ge 0,$ то $M\xi \ge 0.$*
2. *Якщо $P\{\xi = c\} = 1,$ то $M\xi = c.$*
3. *Якщо для випадкової величини ξ_1 існує математичне сподівання $M\xi_1,$ а $c \in \mathbb{R}$, то для випадкової величини $c\xi_1$ існує математичне сподівання і $M(c\xi) = cM\xi.$*

4. *Якщо для випадкових величин* ξ, η *існують математичні сподівання* $M\xi$, $M\eta$, *то для випадкової величини* $\xi+\eta$ *існує математичне сподівання і* $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$.
5. *Якщо* $\xi>\eta$, *існують* $M\xi$, $M\eta$, *то* $M\xi>M\eta$.
6. *Якщо для випадкової величини* ξ *існує математичне сподівання, то існує* $M|\xi|$ *і* $|M\xi|\le M|\xi|$.
7. *Якщо для випадкових величин* ξ, η *існують* $M\xi$, $M\eta$, $M\xi^2$, $M\eta^2$, $M(\xi\cdot\eta)$, *то* $|M(\xi\eta)|^2\le M\xi^2 M\eta^2$.
8. *Якщо випадкові величини* ξ_1 *і* ξ_2 *незалежні, то* $M(\xi_1\cdot\xi_2)=M\xi_1\cdot M\xi_2$.

Означення. ***Дисперсією*** *випадкової величини* ξ *називають* $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$.

Властивості дисперсії:

1 $\forall\xi \quad D\xi\ge 0$.

2 *Якщо* $P\{\xi=c\}=1$, *то* $D\xi=0$.

3 $\forall a,b\in\mathbb{R}\ \ \forall\xi\ \ D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

4 $D\xi=M(\xi^2)-(M\xi)^2$.

5. *Друга форма нерівності Чебишова*

$$\forall c>0\ \ \forall\xi\ \ P\{|\xi-M\xi|\ge c\}\le\frac{D\xi}{c^2},$$

що еквівалентно

$$P\{|\xi-M\xi|<c\}\ge 1-\frac{D\xi}{c^2}.$$

6. *Якщо випадкові величини* ξ_1 *і* ξ_2 *незалежні, то* $D(\xi_1+\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

Аудиторна робота

1. У ящику знаходиться 3 білих і 2 червоні кулі. Навмання вибирають три кулі. Випадкова величина ξ – кількість білих куль. Знайти розподіл випадкової величини ξ, її функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію.
2. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу кожного елемента на протязі деякого часу T є однакова і дорівнює 0.1. Випадкова величина ξ – кількість елементів, які вийдуть з ладу на протязі часу T. Знайти розподіл випадкової величини ξ, її функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію.
3. Обчисліть математичне сподівання випадкової величини ζ, якщо відомі математичні сподівання ξ та η:

   А) $\zeta = \xi - 2\eta, M\xi = 2, M\eta = 3;$

   Б) $\zeta = 2\xi - 5\eta, M\xi = 2, M\eta = -3;$
4. Дано функцію розподілу дискретної випадкової величини ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0.25, & 1 < x \le 3; \\ 0.4, & 3 < x \le 4; \\ 0.8, & 4 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

   Знайти розподіл випадкової величини ξ, $P\{\xi = 2\}$, $P\{2 < \xi \le 4\}$.
5. Дискретна випадкова величина ξ набуває три можливі значення $x_1 = 4, x_2 = 6$ з ймовірностями $p_1 = 0{,}5, p_2 = 0{,}3.$ Визначте x_3 та p_3, якщо $M\xi = 8.$
6. Дискретна випадкова величина ξ набуває три можливі значення $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$. Відомо, що $M\xi = 0{,}9, M\xi^2 = 1{,}9$. Побудуйте закон розподілу цієї випадкової величини.
7. Дискретна випадкова величина ξ набуває два можливі значення x_1 та $x_2, x_1 < x_2$. Ймовірність того, що ξ набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Виведіть закон розподілу випадкової величини ξ, якщо $M\xi = 2{,}6, \sigma = 0{,}8.$
8. Випадкові величини ξ та η є незалежними. Визначте дисперсію випадкової величини ζ : $\zeta = 2\xi + 3\eta$, якщо $D\xi = 2, D\eta = 1$.

Домашня робота

1. У коробці лежить 2 червоні ручки і дві зелених. Навмання вибирають дві ручки. Випадкова величина ξ – кількість зелених ручок. Знайти розподіл випадкової величини ξ, її функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію.

2. Ймовірність перемогти у шахах для студента Іванченка від студента Тимощука дорівнює 0.7. Студенти між собою зіграли три партії. Випадкова величина ξ – кількість перемог Іванченка. Знайти розподіл випадкової величини ξ, її функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію.
3. Обчисліть математичне сподівання випадкової величини ζ, якщо відомі математичні сподівання ξ та η:

   А) $\zeta = 2\xi + 5\eta, M\xi = 3, M\eta = 2;$

   Б) $\zeta = 2\xi - 3\eta, M\xi = -2, M\eta = 4;$
4. Дано розподіл дискретної випадкової величини ξ

x_i	–4	–2	2	5
p_i	0.1	a	a	a

   Знайти невідому сталу a.
5. Дано функцію розподілу дискретної випадкової величини ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0.3, & 2 < x \le 3; \\ 0.5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

   Знайти розподіл випадкової величини ξ, $P\{\xi \ge 3.5\}$, $P\{|\xi| < 2.5\}$, $P\{1 \le \xi \le 3\}$,
6. Дискретна випадкова величина ξ набуває три можливі значення $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Відомо, що $M\xi = 1{,}4, D\xi = 2{,}64$. Побудуйте закон розподілу цієї випадкової величини.
7. Випадкові величини ξ та η є незалежними. Визначте дисперсію випадкової величини ζ: а) $\zeta = 3\xi - 4\eta$, якщо $D\xi = 3, D\eta = 2$; б) $\zeta = 2\xi - 3\eta$, якщо $D\xi = 1, D\eta = 4$.

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Якими повинні бути числа p_1 і p_5, щоб таблиця:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$p = p_i$	p_1	0,1	0,3	0,2	p_5

   відображала закон розподілу випадкової величини *X,* якщо $p_1 - p_5 = 0{,}2$?

2. У сейфі лежать 100 банкнот, з яких 20 – по 100 грн, 30 – по 50 грн і 50 – по 20 грн. Зі сейфа навмання виймають одну банкноту. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини *X* – вартості вийнятої банкноти у формі таблиці:

$X = x_i$	100	50	20
$p = p_i$	p_1	p_2	p_3

3. Метеослужба міста, для прогнозування кількості снігових буранів протягом поточного року, переглянула статистичні відомості за останні 50 років і результати розподілу цих буранів подала у такій таблиці:

Кількість буранів	0	1	2	3	4	5
Частота (к-сть років)	2	4	8	12	14	10

Написати закон розподілу статистичних імовірностей випадкової величини X – кількості можливих снігових буранів у поточному році і знайти ймовірність того, що поточного року їх буде не менше ніж три (подія A).

4. Незалежні випадкові величини X і Y задані такими законами розподілу:

$X = x_i$	–2	2
$p = p_i$	…	0,7

$Y = y_j$	1	2	3
$q = q_j$	0,4	…	0,5

Заповніть порожні клітинки й обчисліть $M(X \cdot Y)$.

5.Незалежні випадкові величини X і Y задані такими законами розподілу:

$X = x_i$	–3	5	6
$p = p_i$	0,6	…	0,2

$Y = y_j$	1	2
$q = q_j$	0,7	…

Заповніть порожні клітинки й обчисліть $D = D(0{,}2X - Y)$.

6.У пологовій лікарні протягом одного дня народилося п’ятеро дітей. Яке середнє число серед них хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика (подія A) дорівнює 0,52?

7.Випадкова величина X може набувати двох можливих значень x_1, x_2 з імовірностями p_1, p_2, відповідно. Знайти x_1 і x_2, якщо $p_1 = 0{,}7$, $M(X) = 2{,}4$, $\sigma(X) = \sqrt{0{,}21}$ і $x_1 < x_2$.

8. Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Ймовірність того, що при виконанні першої операції робітник не допустить дефекту, рівна 0,9; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,95; 0,75; 0,85. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа операції, під час виконання яких робітник не припуститься браку. Знайти функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

9. У скриньці 6 однакових виробів, причому 4 з них пофарбовані. Зі скриньки навмання виймають 3 вироби. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості пофарбованих виробів серед відібраних. Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

10.В ящику є 6 конусних і 15 циліндричних деталей. Навмання виймають 3 деталі. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості циліндричних деталей серед вийнятих. Знайти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

11. У лікарню за медичною допомогою звернулося 5 пацієнтів. Повне видужання від їхньої хвороби спостерігається у 60% усіх хворих. Знайти: а) закон розподілу випадкової величини X – кількості пацієнтів, що повністю одужали; б) ймовірність того, що повністю одужає не менше трьох пацієнтів; в) знайти $M(X)$ і $D(X)$.

12. Партія, що нараховує 100 виробів, містить 10 бракованих. Зі всієї партії довільно вибирають 5 виробів з метою перевірки їх якості. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості бракованих виробів, що містяться в довільній такій вибірці.

13. Екзаменатор задає студенту додаткові питання доти, доки студент не зможе дати правильної відповіді. Ймовірність того, що студент знає відповідь на будь-яке додаткове питання, дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості додаткових питань, які задасть екзаменатор студенту. Знайти ймовірність того, що екзаменатор дасть 3 питання.

14. Визначити математичне сподівання (середнє число), дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіл імовірностей якої задано таблицею:

а)

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,18	0,26	0,32	0,20	0,04

б)

x_i	9	10	20	40	50
p_i	0,1	0,15	0,15	0,4	0,2

в)

x_i	–1	0	2	3	5
p_i	0,15	0,3	0,15	0,2	0,2

15. Випадкова величина X набуває двох можливих значень x_1 та x_2 з ймовірностями відповідно p_1 та p_2. Знайти x_1 та x_2 і записати її закон розподілу, якщо:

а) $x_1 > x_2$, $p_1 = 2/3$, $M(X) = -1/3$, $D(X) = 8/9$;

б) $x_1 < x_2$, $p_2 = 0{,}9$, $M(X) = 1{,}7$, $\sigma(X) = 0{,}9$;

в) $x_1 < x_2$, $p_2 = 3/4$, $M(X) = 1/4$, $M(X^2) = 7/4$;

г) $x_1 > x_2$, $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}6$, $M(X) = -1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$.

16. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	−3	−2	1	3	5	7
$P(X = x_i) = p_i$	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти: а) параметр a; б) $P(X < 2)$, $P(-4 < X \le 6)$; в) функцію розподілу ймовірностей; г) $M(X),\ D(X)$.

17. Обчислити $D(X), \sigma(X)$, якщо закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5; \\ 0{,}1, & -5 < x \le -4; \\ 0{,}3, & -4 < x \le 1; \\ 0{,}4, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}65, & 2 < x \le 4; \\ 0{,}9, & 4 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Заняття 7.
Абсолютно неперервні випадкові величини.

Нехай Ω - простір елементарних подій. Випадковою величиною ξ називають числову функцію, яка визначена на Ω. Функцією розподілу випадкової величини ξ називають функцію $F_\xi(x), x \in R$, яку визначає формула

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}.$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1.$

2. Функція розподілу неперервна зліва.

3. Функція розподілу монотонно неспадна.

4. $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$

5. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Означення. *Випадкова величина ξ називається **абсолютно неперервною**, якщо існує функція $f_\xi(x)$ така, що*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\,dy.$$

Функція $f_\xi(x)$ називається щільністю розподілу випадкової величини ξ.

Властивості щільності:

1. $f_\xi(x) \ge 0$.

2. $f_\xi(x) = \left(F_\xi(x)\right)'$ *у всіх точках, де ця похідна існує.*

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1.$

4. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx.$

Означення. ***Математичним сподіванням** абсолютно неперервної випадкової величини ξ називають число*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx$$

за умови, що цей інтеграл збігається абсолютно.

Властивості математичного сподівання:

1. Якщо $\xi \ge 0$, *то* $M\xi \ge 0.$

2. Якщо $P\{\xi = c\} = 1$, *то* $M\xi = c.$

3. Якщо для випадкової величини ξ_1 існує математичне сподівання $M\xi_1$, а $c \in \mathbb{R}$, то для випадкової величини $c\xi_1$ існує математичне сподівання і $M(c\xi) = cM\xi.$

4. *Якщо для випадкових величин* $\xi,\ \eta$ *існують математичні сподівання* $M\xi,\ M\eta$, *то для випадкової величини* $\xi+\eta$ *існує математичне сподівання і* $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$.
5. *Якщо* $\xi>\eta$, *існують* $M\xi,\ M\eta$, *то* $M\xi>M\eta$.
6. *Якщо для випадкової величини* ξ *існує математичне сподівання, то існує* $M|\xi|$ *і* $|M\xi|\le M|\xi|$.
7. *Якщо для випадкових величин* $\xi,\ \eta$ *існують* $M\xi,\ M\eta,\ M\xi^2,\ M\eta^2,\ M(\xi\cdot\eta)$, *то* $|M(\xi\eta)|^2\le M\xi^2 M\eta^2$.
8. *Якщо випадкові величини* ξ_1 *і* ξ_2 *незалежні, то* $M(\xi_1\cdot\xi_2)=M\xi_1\cdot M\xi_2$.

Означення. ***Дисперсією*** *випадкової величини* ξ *називають* $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$.

Властивості дисперсії:

1 $\forall\xi\quad D\xi\ge 0$.

2 *Якщо* $P\{\xi=c\}=1$, *то* $D\xi=0$.

3 $\forall a,b\in\mathbb{R}\ \ \forall\xi\ \ D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

4 $D\xi=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2$.

5. *Друга форма нерівності Чебишова*

$$\forall c>0\ \ \forall\xi\ \ P\{|\xi-M\xi|\ge c\}\le\frac{D\xi}{c^2},$$

що еквівалентно

$$P\{|\xi-M\xi|<c\}\ge 1-\frac{D\xi}{c^2}.$$

6. *Якщо випадкові величини* ξ_1 *і* ξ_2 *незалежні, то* $D(\xi_1+\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

Аудиторна робота

1. Для якого значення параметра a функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ae^{-\alpha x}, & x>0\,(\alpha>0)\end{cases}$$

   буде густиною розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X? Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ та $P(0\le x\le 1)$.

2. Для якого значення параметра a функція

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

буде густиною розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X? Обчислити $P\left(|x|<\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M(X)$, $D(X)$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

   Обчисліть $P(x\ge 1)$, $M(X)$, $D(X)$.

4. Задано густину розподілу абсолютно неперервної випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

   Знайдіть функцію розподілу $F(x)$.

5. Задано густину розподілу абсолютно неперервної випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;1)\\ 2x, & x\in(0;1).\end{cases}$$

   Знайдіть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=X^2$.

Домашня робота

1. Для якого значення параметра a функція

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},\quad x\in R$$

   буде густиною розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X? Визначте
   а) функцію розподілу $F(x)$;
   б) ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (-1;1)

2. Для якого значення параметра a функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ axe^{-x^2}, & x>0\end{cases}$$

буде густиною розподілу ймовірностей деякої випадкової величини X? Обчислити $M(X),\quad \sigma(X).$

3. Випадкова величина X задана густиною розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{4}(x+1)^2, & -1<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Обчисліть $M(X),\quad D(X),\quad \sigma(X).$

4. Задано густину розподілу абсолютно неперервної випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-0{,}5, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайдіть функцію розподілу $F(x)$.

5. Задано густину розподілу абсолютно неперервної випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\,(\lambda>0).\end{cases}$$

Знайдіть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=e^{-X}$

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Для яких чисел A і B

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ Ax+B, & -1<x\le 4;\\ 1, & x>4\end{cases}$$

є функцією розподілу ймовірностей деякої неперервної випадкової величини?

2. Для якого a функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{a}{x^2}, & 2<x\le 5;\\ 0, & x>5\end{cases}$$

є густиною розподілу ймовірностей даної неперервної випадкової величини?

3. Чи може функція розподілу випадкової величини мати значення з проміжку $\left[\frac{3}{2},\ 2\right]$?

4. Функція розподілу неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \ln x, & 1<x\le e;\\ 1, & x>e.\end{cases}$$

Для якого значення $b\in(1,\ e)$ імовірність $P(1<X\le b)=\dfrac{1}{2}$?

5. Густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 2;\\ \dfrac{2}{9}(x-2), & 2<x\le 5;\\ 0 & x>5.\end{cases}$$

Для якого числа $m\in(2,\ 5]$ імовірність $P(m<X\le 5)\ =\ 8/9$?

6. Можливі значення неперервної випадкової величини X містяться на проміжку $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ і на цьому проміжку її функція розподілу $F(x)=\sin x$. Яка на цьому проміжку густина розподілу $f(x)$ цієї випадкової величини?

7. Розподіл імовірностей неперервної випадкової величини X, можливі значення якої зосереджені на проміжку (0, 1], заданий на цьому проміжку густиною розподілу $f(x)=3x^2$. Який вираз має функція розподілу заданої випадкової величини на цьому проміжку?

8. Розподіл імовірностей неперервної випадкової величини X заданий густиною:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}5, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Чому дорівнює математичне сподівання $M(X)$?

9. Густину розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини задано формулами:

а) $$f(x)=\begin{cases}ax^2, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{якщо } x<0 \text{ або } x>1;\end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases}a(x-3)^2, & \text{якщо } 3\le x\le 5,\\ 0, & \text{якщо } x<3 \text{ або } x>5;\end{cases}$$

в) $$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x}, & \text{якщо } 0\le x\le 9,\\ 0, & \text{якщо } x<0 \text{ або } x>9;\end{cases}$$

г) $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0,\pi/2\right),\\ a\sin x, & x\in\left(0,\pi/2\right);\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0,\ln 2\right),\\ ae^{x}, & x\in\left(0,\ln 2\right).\end{cases}$

Для кожного випадку виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт *a*;

2) знайти функцію розподілу випадкової величини X;

3) знайти ймовірність попадання випадкової величини *X* у проміжок I, якщо:

а) $I=\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$; б) $I=\left(3;4\right)$; в) $I=\left[0;\ 5\right]$; г) $I=\left[\pi/4,\pi/3\right]$; д) $I=\left[0;0,5\right]$;

4) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*;

10. Дано функції:

а) $f_1(x)=-x^2$;

б) $f_2(x)=0,5\sin x+0,5$;

в) $f_3(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$.

Чи є вони функціями густини розподілу ймовірності?

11. Функцію розподілу ймовірностей *F*(*x*) неперервної випадкової величини *X* задано формулою:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 2,\\ a(x-2)^2, & \text{якщо } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4;\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \frac{1}{6}x^2, & \text{якщо } 0<x\le 2,\\ ax^2+2x-2, & \text{якщо } 2<x\le 3,\\ 1, & \text{якщо } x>3;\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le -2\pi, \\ a + a\cos\frac{x}{2}, & \text{якщо} \quad -2\pi < x \le 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт a;

2) знайти густину розподілу $f(x)$.

3) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

4) знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал:

а) $I=(3;\ 10)$; б) $I=[1;\ 3]$; в) $I=\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

12. Випадкова величина X має функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x}, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Знайти a, для якого $P(X > a) = \dfrac{1}{3}$.

Заняття 8.
Основні Розподіли

І. Дискретні розподіли

1. Біноміальний розподіл $Bi(n,p)$.

Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами n,p $\left(n \in \mathbb{N},\ \ p \in (0;1)\right)$, якщо вона набуває значення $0,1,\ldots,n$ відповідно з ймовірностями

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ q = 1-p,\ \ k = \overline{0,n}.$$

Легко показати, що $M\xi = np,\ \ D\xi = npq.$

2. Геометричний розподіл $G(p)$ з параметром p.

Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p $p \in (0;1)$, якщо вона набуває значення $0,1,2,\ldots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = pq^k,$ або набуває значення $1,2,3,\ldots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = pq^{k-1}.$

При цьому в першому випадку $M\xi = \dfrac{q}{p},$ у другому – $M\xi = \dfrac{1}{p}$, дисперсія – $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$ – в обох випадках.

3. Гіпергеометричний розподіл

Випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл з параметром, якщо вона набуває значення $0,1,2,\ldots$ min(n,M) з ймовірностями $P\{\xi = k\} = -pq^k,$ або набуває значення $1,2,3,\ldots$ з ймовірностями $P\{\xi = m\} = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$ де

$m = 0,1,2,\ldots$ min(n,M), $m \le M$, $n \le N$, n, M, N – натуральні числаю

При цьому $M\xi = \dfrac{n \cdot M}{N},$ дисперсія – $D\xi = \dfrac{n \cdot M}{N-1}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right)\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)$

4. Розподіл Пуассона $Pu(\lambda)$ з параметром λ.

Якщо випадкова величина ξ набуває значення $0,1,2,\ldots$ з ймовірностями

$p_k = P\{\xi = k\} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, то вона має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Тут $M\xi = \lambda,\ \ D\xi = \lambda$.

ІІ. Абсолютно неперервні розподіли.

1. Рівномірний розподіл на $[a;b]$ $R([a;b])$.

Абсолютно неперервна випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $[a;b]$ $a,b \in \mathbb{R}$, якщо її щільність дорівнює

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b]; \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12},$$

2. Показниковий розподіл з параметром λ $\exp(\lambda)$.

Абсолютно неперервна випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda\ (\lambda > 0)$, якщо її щільність дорівнює

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Функція розподілу, математичне сподівання і дисперсія цього розподілу є такими

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \end{cases} \qquad M\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Нормальний розподіл з параметрами a і σ $N\left(a, \sigma^2\right)$.

Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a і σ, якщо її щільність дорівнює

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),\ a \in \left(-\infty; \infty\right);\ \sigma > 0.$$

Для цього розподілу $M\xi = a,\ D\xi = \sigma^2.$ Справді

Функція розподілу для нормального розподілу через елементарні функції не виражається, але її чисельне значення можна знайти, використовуючи функцію $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$, яка є протабульована в підручниках і є функцією розподілу нормального розподілу $N(0;1)$

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Аудиторна робота

1. Проводиться 3 незалежні постріли в мішень. Ймовірність попадання при різних вистрілах однакові і рівні 0,9. Вип. вел ξ-кількість попадань в мішень. Знайти $M(\xi), D(\xi)$.
2. Ймовірність попасти в мішень при одному пострілі дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що кількість попадань при 200 пострілах буде не менше 5 і не більше 10.
3. Ймовірність попадання в ціль при окремому пострілі для даного стрілка дорівнює 0,1. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ─ кількості вистрілів по мішені до першого попадання.
4. В групі з 21 студента 5 дівчат. З цієї групи навгад вибирають 3 студенти. Скласти закон розподілу в.в. ─ кількість дівчат серед вибраних студентів. Знайти математичне сподівання.
5. Нехай $X \sim R(a,b)$. Знайти ймовірність потрапляння в інтервал (α,β), що повністю належить відрізку (a,b).
6. Випадкова величина T – час роботи електролампи має показників розподіл. Знайти ймовірність того, що лампочка пропрацює не менше ніж 800год., якщо середній час роботи 400 год.
7. Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини ─ кількості відмов деякого пристрою, якщо проведено 10 випробувань, а ймовірність відмови при одному випробуванні рівна 0,9.
8. Проводять незалежні досліди, ймовірність появи події А стала. Обчислити цю ймовірність якщо дисперсія кількості появ в трьох випробуваннях рівна 0,63.
9. Верстат автомат виготовляє сталеві кульки ймовірність того що діаметр кульки відхилиться від стандарту рівна 0,15. протягом зміни виготовлено 800 кульок. Обчислити математичне сподівання та дисперсію кількості кульок які не відповідщають стандарту.
10. На рекламування товару фірма вкладає в кожну десяту упаковку прих 1грн. Покупець придбав 5 упаковок. Побудувати закон розподілу Х-розміру виграшу.
11. В.в. має показниковий закон розподілу з параметром 8.Обчислити математичне сподівання дисперсію та середнє квадратичне відхилення

Домашня робота

1. Обчисліть дисперсію вип.вел. Х-кількості появ події А в двлх незалежних випробуваннях, якщо $M(X = 0{,}9)$.
2. Два контролери , продуктивність яких задається співвідношенням 5:4, перевіряють партію виробів. Ймовірність виявлення бракованого товару першим 0,85 другим – 0,9. З перевірених виробів навмвння вибирають чотири обчислити математичне сподівання да дисперсію кількості якісних виробів.
3. Імовірність спотворення деякого символу підчас передавання деякого тексту рівна 0,001. Обчислити математичне сподівання , дисперсію та

середнє квадратичне відхилення кількості спотворених символів якщо передали 2000 символів.

4. Клієнти банку з ймовірністю 0,1 вчасно не повертають кредит. Сладіть закон розподілу в.в. кількості вчасно повернених кредитів серед 5 виданих. Обчислити математичне сподівання , дисперсію та середнє квадратичне відхилення.
5. В.в. має показниковий закон розподілу з параметром 0,4. Обчислити математичне сподівання дисперсію та середнє квадратичне відхилення.
6. В.в маєнормальний закон розподілу $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{72}}$. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.
7. Деяку речовину зважують без систематичних помилок. Випадкові помилки мають нормальний розподіл з середнім квадратичним відхиленням 20г. Обчислити ймовірність того що під час зважування абсоглютна помилка не перевищить 10г.
8. Випадкова величина T – час роботи електролампи має показників розподіл. Знайти ймовірність того, що лампочка пропрацює небільше ніж 800год., якщо середній час роботи 500 год.
9. Обчислити математичне сподівання, дисперсію дискретної випадкової величини та середнє квадратичне відхилення ─ кількості відмов деякого пристрою, якщо проведено 12 випробувань, а ймовірність відмови при одному випробуванні рівна 0,92.
10. Автобуси деякого маршруту дотримуються графіка з інтервалом 5 хв. Обчислити середній час та дисперсію очікування автобуса. Знайти ймовірність того, що очікування автобуса триватиме понад 3 хв.

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Якщо виконується графік руху на маршруті, то середній час очікування пасажиром автобуса дорівнює 4 хвилини. Відомо, що час очікування має рівномірний закон розподілу. Мінімальний час очікування дорівнює 0. Знайти ймовірність того, що пасажир буде очікувати автобус від 3 до 6 хвилин.
2. Випадкова величина *X* має рівномірний розподіл із математичним сподіванням $M(X)=3$ і дисперсією $D(X)=4/3$. Знайти функцію розподілу випадкової величини *X*.
3. Математичне сподівання і дисперсія рівномірно розподіленої на деякому відрізку випадкової величини *X* відповідно дорівнюють 0,5 і $\frac{1}{12}$. Знайти: а) густину розподілу величини *X*; б) функцію розподілу $F(x)$; в) імовірність попадання значень випадкової величини *X* в інтервал $(0;3)$.

4. Протягом години $0 \le t \le 1$ (t – час у годинах) на станцію прибуває одна і лише одна електричка в заданому напрямку. Яка ймовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку в момент часу $t = 0$, буде чекати електричку не більше ніж 10 хвилин? Визначити, скільки в середньому часу пасажир чекатиме електричку.

5. Перехрестя доріг оснащене світлофором, який дозволяє проїзджати його (зелене) протягом 1 хв. і забороняє (жовте світло, червоне світло) протягом 0,5 хв. Автолюбитель під'їзджає до перехрестя у випадковий момент часу. Знайти ймовірність того, що він проїде перехрестя не зупиняючись. Знайти середній час зупинки автомобіля перед світлофором.

6. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на проміжку $(0, a)$.

   Відомо також, що $P\left(X > \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Знайти a, $M\left(X^2\right)$.

7. Банк провів дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не менший ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються зі середнім числом 1 850 грн і середнім квадратичним відхиленням − 350 грн. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана особа має заощадження:

   а) більше ніж 2 200 грн;

   б) менше ніж 1 500 грн;

   в) у межах від 1 080 грн до 2 375 грн;

   г) менше ніж 800 грн.

8. Результати тестування абітурієнтів вищих закладів освіти деякого міста наближено можна вважати розподіленими за нормальним законом з середнім значенням 500 балів і середнім квадратичним відхиленням 100 балів. Знайти: а) який відсоток усіх результатів охоплюють оцінки від 300 до 700 балів? б) яка найнижча оцінка серед 10% найвищих оцінок? в) яка кількість абітурієнтів з 10000, можна сподіватися, матимуть оцінки, не нижчі від 675 балів?

9. Середня ціна деякої великої кількості акцій становить 12 грн 80 коп, а середнє квадратичне відхилення 3 грн. Припускаємо, що ціни розподілені за нормальним законом. Знайти: а) яку частку акцій продають за ціною, не вищою від 10 грн? б) яка ймовірність того, що навмання взята акція матиме ціну від 11 до 14 грн? в) нижче від якої ціни продаються 20% найдешевших акцій?

10. Деталі, які виготовляє цех, вважаються деталями вищого гатунку, якщо відхилення їх розмірів від номіналу не перевищує за абсолютною величиною 2,6 мм. Випадкові відхилення розміру деталі розподіляються за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням 2 мм, а систематичне відхилення відсутнє. Визначити середню кількість деталей вищого гатунку серед навмання вибраних 5 деталей.

11. Зріст дорослого чоловіка описується нормальним законом розподілу. За статистикою середній зріст становить 175 см, а середньоквадратичне відхилення дорівнює 7 см. Знайти ймовірність того, що зріст навмання взятого чоловіка буде відрізнятися від середнього зросту не більше ніж на 7 см.

12. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером при складанні балансу, розподіляються у відсотках за нормальним законом з параметрами a = 1,5 і σ = 0,01. Написати функцію і густину розподілу цих помилок та нарисувати їх графіки. В яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973?

13. Середній дохід на душу населення в розмірі 8 000 грн вважається випадковою величиною, яка розподілена нормально зі середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 200$ грн. В яких межах практично можна гарантувати дохід на душу населення з імовірністю 0,9973?

14. Час безвідмовної роботи верстата має показниковий закон розподілу. Імовірність того, що верстат не відмовить за 5 годин роботи, дорівнює 0,60653. Знайти $M(X),\ D(X)$.

15. Відомо, що середній час очікування чергового покупця, який підійде до каси, дорівнює 0,2 хвилини. Час очікування касиром чергового покупця можна вважати випадковою величиною X із показниковим законом розподілу. Касирові потрібно поміняти стрічку касового апарата. На це йому потрібно 2 хвилини. Яка ймовірність того, що за цей час не утвориться черга?

Заняття 9
Випадкові вектори

Розглядаємо випадкове явище і ймовірнісний простір, що відповідає цьому випадковому явищу. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – випадкові величини, пов'язані з цим випадковим явищем. Сумісний розподіл цих випадкових величин будемо називати **випадковим вектором** і позначатимемо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

<u>Означення</u>. ***Функцією розподілу*** *випадкового вектора* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *називається функція* n *змінних* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

<u>Властивості функції розподілу випадкового вектора</u>:

1. Функція розподілу неперервна зліва і монотонно неспадна за всіма аргументами.

2. $F_\xi(x_1, \ldots, x_n) \in [0;1]$.

3. $\forall i = \overline{1;n} \quad \lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$

4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ \ldots\ldots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, \ldots x_n) = 1.$

5. Функція розподілу компоненти ξ_i $i = \{1; \ldots, n\}$ *є границею функції розподілу випадкового вектора для всіх* $x_j \to \infty$ $(j \neq i)$.

<u>Означення</u>. *Випадковий вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ *називається* ***дискретним****, якщо він набуває скінченну або зліченну кількість значень.*

Очевидно, що кожна компонента цього випадкового вектора є дискретною випадковою величиною.

Дискретний випадковий вектор визначається значеннями, які він набуває і ймовірностями, з якими набуваються ці значення.

Надалі будемо вважати, що компонента ξ_1 набуває значення $x_{11}, x_{12}, \ldots$, компонента ξ_2 – $x_{21}, x_{22}, \ldots$, компонента ξ_n – $x_{n1}, x_{n2}, \ldots$, а

$$P\left\{\xi_1 = x_{1i_1}, \xi_2 = x_{2i_2}, \ldots, \xi_n = x_{ni_n}\right\} = p_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

<u>Означення</u>. *Компоненти випадкового вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *називаються* ***незалежними****, якщо* $\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$P\left\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\right\} =$$
$$= P\{\xi_1 < x_1\} P\{\xi_2 < x_2\} \ldots P\{\xi_n < x_n\}.$$

Якщо випадковий вектор є дискретним, то умова незалежності конкретизується так

$$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n\} =$$
$$= P\{\xi_1 = x_1\} P\{\xi_2 = x_2\} \ldots P\{\xi_n = x_n\}.$$

<u>Означення</u>. ***Коваріаційною матрицею*** *випадкового вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ *називають числову матрицю* K *розміру* $n \times n$ *вигляду*

$$K = \left\{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\},$$

де

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = M\big((\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)\big),$$

і якщо $i \neq j$ *, то величина* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ *називається коваріацією.*

Зрозуміло, що на діагоналях стоять дисперсії відповідних компонент.
Легко бачити, що

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i \xi_j) - M(\xi_i) M(\xi_j).$$

Коефіцієнтом кореляції компонент ξ_i, ξ_j є число

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{D\xi_i D\xi_j}},$$

кореляційною матрицею є матриця

$$\rho(\xi) = (\rho(\xi_i, \xi_j)).$$

ДВОВИМІРНІ ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

Розглядаємо двовимірний випадковий вектор (ξ, η). Припускаємо, що компонента ξ набуває значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, компонента η набуває значення $y_1, y_2, \ldots y_k$ і $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}$. Розподіл двовимірного дискретного вектора зручно подавати у вигляді таблиці

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	$\ldots$	y_k
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1k}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2k}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nk}

Очевидно, що $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$, $P\{(\xi,\eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j) \in B} p_{ij}$, де $B \subset \mathbb{R}^2$. $p(x_i \mid y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$

Аудиторна робота

1. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	1
–1	0.15	a	0.2
0	0.1	0.1	0
3	0	0	0.15

- Знайти розподіли компонент та їх математичні сподівання, дисперсії та коваріацію.
- Знайти розподіл в.в. $z = \xi \cdot \eta$

2. Задано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	3	4
–1	0.05	a	a	0.1
0	0.1	0.1	0	0.05
3	0	0	0.05	0.05
5	0.15	0.05	0	0.1

- Знайти розподіли компонент
- Умовні розподіл $P\{\xi|\eta=0\}$ та $M(\xi|\eta=0)$.

3. Задано щільність випадкового вектора (X,Y)

$Y \backslash X$	10	20	30	40
–8 –4 –2	0,01 0,07 0,1	0,03 0,1 0,2	0,02 0,07 0,1	0,04 0,06 0,2

- Знайти Розподіл випадкової величини $\tau=\xi-\eta$
- Знайти розподіл $P\{X|Y=-2\}$ та його математичне сподівання

4. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	3	4
–1	0.05	a	a	0.1
0	0.1	0.1	0	0.05
3	0	0	0.05	0.05
5	0.15	0.05	0	0.1

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію, коефіцієнт кореляції, перевірити чи компоненти є незалежними, умовний розподіл $P\{\xi|\eta=0\}$ і умовне математичне сподівання $M(\xi|\eta=0)$.

5. Дано щільність двовимірного абсолютного неперервного випадкового вектора (ξ,η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

де область D обмежена лініями $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$. Знайти невідому сталу $a,$ розподіл компонент, функцію розподілу, умовні щільності $f_{(\xi|\eta=y)}(x,y)$, $f_{(\eta|\xi=x)}(x,y)$, коваріацію і коефіцієнт кореляції, перевірити чи компоненти є незалежними.

Домашня робота

1. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	1
–1	0.15	a	0.2
1	0.1	0.1	0

- Знайти розподіли компонент та їх математичні сподівання, дисперсії та коваріацію.
- Знайти розподіл в.в. $z=\xi-\eta$.

2. Задано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	3
–1	0.15	a	a
0	0	0.1	0
3	0.1	0	0.25

- Знайти невідомий параметр a
- Знайти розподіли компонент
- Умовні розподіл $P\{\xi|\eta=0\}$ та $M(\xi|\eta=0)$.

3. Задано щільність випадкового вектора (X,Y)

$Y \setminus X$	1	10	20	30
-1	0,01	0,02	0,1	0,04
2	0,1	0,1	0,07	0,06
3	0,07	0,2	0,03	0,2

- Знайти Розподіл компонент
- Знайти розподіл $P\{Y|X=10\}$ та його математичне сподівання

4. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	4
–1	0.05	a	0.1
0	0.1	0.1	0.05
1	0	0	0.05

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію, коефіцієнт кореляції, перевірити чи компоненти є незалежними, умовний розподіл $P\{\xi|\eta=0\}$ і умовне математичне сподівання $M(\xi|\eta=0)$.

5. Дано щільність двовимірного абсолютного неперервного випадкового вектора (ξ,η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

де область D обмежена лініями $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$. Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, функцію розподілу, умовні щільності $f_{(\xi|\eta=y)}(x,y)$, $f_{(\eta|\xi=x)}(x,y)$, коваріацію і коефіцієнт кореляції, перевірити чи компоненти є незалежними.

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Дано розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η)

$\xi \setminus \eta$	–1	0	1	2
–2	0.05	0.15	0	0.1
0	0.15	0.05	0.1	0
2	0	0.1	a	0.05

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, функцію розподілу, коваріацію, коефіцієнт кореляції, перевірити чи компоненти є незалежними, умовний розподіл $P\{\xi|\eta = 0\}$ і умовне математичне сподівання $M(\xi|\eta = 0)$.

2. Одночасно кидають дві монети. Написати закон розподілу двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*), де *X* – число випадань герба на першій монеті, *Y* – число випадань герба на другій монеті.
3. Для якого значення *a* наведена таблиця виражає закон розподілу деякої двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*)? Знайти Розподіл $\tau = X \cdot Y$

$Y = y_j \setminus X = x_i$	–2	0	1	4	6
2	0,7a	a	1,3a	0,5a	2a
5	0,9a	0,4a	1,4a	1,6a	0,2a

4. Закон розподілу двовимірної випадкової величини (*X*, *Y*) задано таблицею:

$Y = y_j \setminus X = x_i$	–1	2	4
3	0,1	0,2	0,1
5	0,2	0,1	0,3

Обчислити:

а) $P(-1 < X \le 4 \bigcap Y = 5)$; б) $M(X), M(Y)$; в) $D(X), D(Y)$; г) $\sigma(X), \sigma(Y)$; д) r_{xy}.

5. Двовимірна випадкова величина (*X*, *Y*) задана таблицею:

$Y = y_j \setminus X = x_i$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Обчислити: а) $M(X \mid Y = 0,4)$; б) $M(Y \mid X = 5)$; в) $D(X \mid Y = 0,4)$; г) $D(Y \mid X = 5)$.

6. Дано дві дискретні випадкові величини X та Y

$X = x_i$	−1	0
$p(x_i)$	0,1	0,9

$Y = y_j$	0	2	4
$p(y_j)$	0,2	0,4	0,4

Побудувати закон розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y), якщо випадкові величини X та Y є незалежні.

7. Імовірність появи випадкової події в кожному з чотирьох незалежних екпериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Розглядаються дві випадкові величини: X – число появи випадкової події в результаті цих експериментів; Y – число експериментів, при яких подія не наставала. Обчислити K_{xy}, r_{xy}.

8. Задано дискретну двовимірну випадкову величину (X; Y):

$Y=y_j$ \ $X=x_i$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Знайти:

а) безумовні закони розподілу випадкових величин X і Y;

б) умовний закон розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набула значення y_1=0,4;

в) умовний закон розподілу випадкової величини Y за умови, що випадкова величина X набула значення $x_2 = 5$.

9. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин ($X;Y$) задано таблицею:

$Y = y_j$ \ $X = x_i$	5,2	10,2	15,2
2,4	0,1a	2a	0,9a
4,4	2a	0,2a	1,8a
6,4	1,9a	0,8a	0,3a

Знайти a. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$; K_{xy}, r_{xy},

$P(5{,}2 \le X < 15{,}2;\ 2{,}4 < Y \le 6{,}4)$.

Заняття 10.
Закон великих чисел. Граничні теореми.

Теорема (нерівність Маркова**).** Якщо випадкова величина X може набувати лише невід'ємних значень і має скінчене математичне сподівання, то для $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}.$$

З цієї нерівності отримаємо, що

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}.$$

Теорема (нерівність Чебишова**).** Якщо випадкова величина X має скінчену дисперсію, то для $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

З цієї нерівності отримаємо, що

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Наслідок з нерівності Чебишева. Нехай $\frac{m}{n}$ - відносна частота появи події A в n незалежних випробуваннях, p - ймовірність появи події A в кожному з цих випробувань. Тоді $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова.(закон великих чисел). Якщо випадкові величини в послідовності $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно незалежні, а їхні дисперсії обмежені згори одним і тим же числом C,

$$DX_i \leq C$$

то $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Іншими словами, якщо виконуються умови теореми, то послідовність середніх арифметичних n випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їхніх математичних сподівань.

Теорема Бернуллі. Відносна частота успіхів у n незалежних випробуваннях Бернуллі збігається за ймовірністю при $n \to \infty$ до ймовірності успіху в одному випробуванні, тобто для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Центральна гранична теорема. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ - незалежні випадкові величини зі скінченними математичними сподіваннями $M(X_i) = a_i$ та дисперсіями $D(X_i) = \sigma_i^2, i = 1,2,...$ Введемо нові випадкові величини $Y_n \sum_{i=1}^{n} X_i$, для яких $M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$,

$D(Y_n) = \sigma^2(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Тоді якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$, де $b_i = M|X_i - a_i|^3$, то для будь-якого дійсного числа x виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Теорема Ляпунова стверджує, що для досить великих n розподіл випадкової величини $\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}$ прямує до нормального нормованого розподілу.

Аудиторна робота

1. Середня зміна курсу акції компанії протягом одного дня біржових торгів становить 0,3%. Оцініть ймовірність того, що на найближчих торгах курс зміниться більше ніж на 3%.
2. З використанням нерівності Чебишова оцініть ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від математичного сподівання менше ніж на три середні квадратичні відхилення.
3. В освітлювальну мережу ввімкнуто паралельно 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде ввімкнута, дорівнює 0,8. за допомогою нерівності Чебишова оцініть ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнутих ламп і середньою кількістю ввімкнутих ламп за час T виявиться : а) менше 3; б) не менше 3.
4. Ймовірність появи події в кожному досліді дорівнює 0,5. за допомогою нерівності Чебишова оцініть ймовірність того, що кількість X появ події є в межах від 40 до 60, якщо зроблено 100 дослідів.
5. Середня кількість споживання води в населеному пункті дорівнює 50000 л у день. Оцініть ймовірність того, що в цьому населеному пункті споживання води у вівторок не перевищить 150000л.
6. Ймовірність деякої події А у кожному випробуванні з серії n незалежних дослідів $p = \frac{1}{3}$. За допомогою нерівності Чебишова оцініть ймовірність того, що відносна частота цієї події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01, якщо буде проведено а) $n = 9000$ дослідів; б) $n = 75000$ дослідів.
7. Кількість сонячних днів у році в деякій місцевості є випадковою величиною з середнім значенням 100 днів і середнім квадратичним відхиленням 20 днів. Оцініть згори ймовірності подій $A = \{X \geq 150\}$; $B = \{X \geq 200\}$.
8. Задано закони розподілу попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Чи можна застосувати до цих випадкових величин теорема Чебишова?

x_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$P(X_n = x_n)$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

9. У деякому автопарку середня кількість автобусів, які відправляють у ремонт після місяця експлуатації на міських маршрутах дорівнює 5. Оцініть ймовірність події А={після місяця експлуатації в ремонт відправлять менше 15 автобусів}, якщо немає інформації про дисперсію, та якщо дисперсія дорівнює 4.

Домашня робота

1. Відділення банку щодня обслуговує в середньому 100 клієнтів. Оцініть ймовірність того, що в понеділок у відділені обслужать: а) не більше 200 клієнтів; б) більше 150 клієнтів.
2. Нехай $P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 0{,}9$, $DX = 0{,}009$. За допомогою нерівності Чебишова оцініть знизу значення ε .
3. Ймовірність появи події в кожному досліді дорівнює 0,25. за допомогою нерівності Чебишова оцініть ймовірність того, що кількість X появ події є в межах від 152 до 250, якщо зроблено 800 дослідів.

4. Середня кількість споживання електроенергії за липень в деякому місті дорівнює 360000 кВт год. А)оцініть ймовірність того, що споживання електроенергії у липні наступного року перевищить 1000000кВт год.Б) оцініть ту ж ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії в цьому місті за липень рівне 40000кВт.
5. Для визначення середнього часу горіння електролампочок у партії зі 100 однакових ящиків узяли по одній лампочці з кожного ящика. Оцініть ймовірність того, що відхилення середнього часу горіння лампочки в вибраній сукупності від середнього часу горіння лампочки в усій партії не перевищить 8 год, якщо середнє квадратичне відхилення часу горіння електролампочки в партії не перевищу 10 год.
6. Задано закони розподілу попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Чи можна застосувати до цих випадкових величин теорема Чебишова?

x_n	$-na$	0	na
$P(X_n = x_n)$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

7.

Завдання, що виносяться на контрольну роботу.

1. Випадкова величина X розподілена рівномірно на проміжку [2, 6]. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < 2$.

2. Середня місячна зарплата X працівників підприємства підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами a = 500 грн і σ = 100 грн. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність події $|X - a| < 3\sigma$.

3. Імовірність вибрати правильну відповідь під час заповнення талона відповідей на одне тестове завдання (подія A) p = 0,9. Студент дає відповіді на 30 тестових завдань однакової важкості. За допомогою нерівності Чебишова в умовах теореми Бернуллі оцінити ймовірність відхилення не більше ніж на 0,2 частоти $W_n(A)$ правильної відповіді від її ймовірності.

4. Імовірність банкрутства фірми (подія A) p = 0,2. Яке число n фірм потрібно відібрати, щоб імовірність відхилення не більше ніж на 0,1 відносної частоти $W_n(A)$ від імовірності події A була не меншою за 0,95?

5. Кожна з 500 випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу ймовірностей на проміжку [0; 0,1]. Написати закон розподілу для випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{500} X_i$.

6. У регіоні 60% фірм займаються виробництвом харчової продукції. Яка ймовірність того, що серед вибраних 100 фірм займаються виробництвом харчової продукції від 50 до 70 фірм?

7. Деякий проміжок часу на біржі зберігався відносно стабільний курс валюти. На основі даних біржової статистики на цей період було складено таку таблицю можливих змін курсу валют:

Можлива зміна курсу, %	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1
Імовірність зміни	0,1	0,3	0,5	0,05	0,05

За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0{,}54$.

8. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$; $D(X) = 0{,}004$. Використовуючи нерівність Чебишева, знайти ε.

9. Імовірність вчасної реалізації продукції дорівнює 0,4. Оцінити ймовірність того, що в 100 незалежно реалізованих одиниць продукції відхилення відносної частоти реалізації від імовірності 2/5 за абсолютним значенням буде не меншим від 0,1 та порівняти з точним значенням.

10. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,95, можна було б стверджувати, що абсолютна величина відхилення частоти якісних деталей від імовірності деталі бути якісною, що дорівнює 0,9, не перевищує 0,01?

11. Математичне сподівання кількості опадів протягом року в даній місцевості становить 60 см. Оцінити ймовірність того, що в даній місцевості опадів буде не менше ніж 180 см.

12. Середнє добове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 12000 кВт·год. Оцінити ймовірність того, що протягом даної доби споживання електроенергії буде більше ніж 50000 кВт·год.

13. У касі певного закладу в наявності є 4500 гривень. У черзі знаходиться 20 працівників. Сума *X*, яку потрібно виплатити кожному є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 55$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

14. Маємо 100 однакових елементів, що складають певний технічний комплекс. Час безвідмовної роботи кожного *i*-го елементу є випадковою величиною T_i, що має показниковий закон розподілу із параметром $\lambda = 40$ і однаковим для всіх елементів. Випадкові величини $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$ є незалежними між собою. У разі відмови в роботі *i*-

го елемента миттєво здійснюється переміщення на i+1-й справний елемент. Загальний час безвідмовної роботи комплексу дорівнює сумі T_i, а саме $T = \sum_{i=1}^{100} T_i$. Знайти наближено ймовірність того, що комплекс безвідмовно працює не менш як 20 год.

15. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед 500 випадково відібраних деталей виявиться відбракованих від 60 до 100 деталей.