Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кінаш О.М., Сороківський В.М., Папка (Сороківська)М.В.

ОСНОВИ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Навчально-методичний посібник

ЛЬВІВ

2006 - 2012

УДК 519.86

Рецензенти: *С.К.Реверчук*, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри банківського та страхового бізнесу ЛНУ ім. Івана Франка;
Б.І.Каплан, кандидат фіз.-мат. наук, Радник Голови правління СК «ТАС», Голова Ради директорів компанії «АсісТАС».

Кінаш О.М., Сороківський В.М.,Папка (Сороківська) М.В.

Основи актуарних розрахунків.-Навчальнл-методичний посібник.- Львів, 2012

Рекомендовано до друку Вченою Радою механіко-математичного факультетуЛНУ ім..І.Франка 22.11.2006, протокол №4.
Рекомендовано до розміщення в Інтернеті кафедрою теоретичної та прикладної статистики 18.04.2012, протокол №9.

Зміст[1]

[1] Електронна версія подана у скороченому вигляді

1. ЦІЛІ ТА ІНСТРУМЕНТАРІЙ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

1.1. Становлення та розвиток страхового ринку в Україні

Сучасне ринкове суспільство неможливо собі уявити без страхування, яке є невід'ємною складовою цивілізованого життя в розвинутих країнах, сприяє розвитку економіки та розв'язанню соціальних проблем, забезпечує неперервність процесу суспільного виробництва та дієву систему захисту майнових прав та інтересів усіх громадян і підприємств різних форм власності.

Як економічна категорія страхування є системою економічних відносин, яка включає сукупність форм і методів формування цільових фондів коштів і їх використання для відшкодування збитку при різних ризиках. Страхування є, з одного боку, захистом підприємницької діяльності і добробуту людей, з іншого — приносить дохід. Джерелами прибутку страхових компаній виступають доходи від страхової діяльності, від інвестицій тимчасово вільних коштів у об'єкти виробничої та невиробничої сфер діяльності, цінні папери, банківські депозити тощо.

В країнах, що є світовими лідерами в сфері соціальних і ринкових відносин (США, Японія і європейські країни), страхування є однією з найбільш стабільно і динамічно розвинутих галузей народного господарства. Існує прямий зв'язок між рівнем матеріальних благ суспільства, ступенем розвитку ринкових відносин і рівнем розвитку страхування. Так в Швейцарії обсяг страхових внесків на одного жителя складає 2900 доларів, а частка страхування у ВВП дорівнює 8,6%. Аналогічний показник у США — 2100 доларів і 8,7%. В той же час, обсяг страхових премій із розрахунку на одного українця у 2005 році становив близько 50 євро.

Страхова діяльність належить до найприбутковіших видів світового бізнесу. Ресурси, акумульовані страховими компаніями, переважно використовуються для довготермінових виробничих капіталовкладень через ринок цінних паперів, тоді як більшість банків, які опираються, здебільшого, на порівняно короткотермінові залучені кошти, таких можливостей не мають.

Тому поступово страхові компанії починають домінувати на світових і національних ринках капіталів. Оскільки приплив грошових коштів у вигляді страхових премій і доходів від активних операцій, як правило, набагато перевищує суму щорічних виплат власникам страхових договорів, це дає змогу страховим компаніям із року в рік збільшувати інвестиції в довготермінові цінні папери з фіксованими термінами погашення.

Український страховий ринок, порівняно зі страховими ринками провідних країн, перебуває в стадії формування, а його частка у вітчизняній економіці ще доволі мала. Тепер коротко зупинимось на основних етапах його розвитку.

Перші страхові кооперативи почали з'являтися на теренах колишнього СРСР в зв'язку з появою в 1988 році Закону "Про кооперацію". Вже тоді їх діяльність зосереджувалася на страхові послуги, що пропонувалися в розвинених країнах Заходу. Завдяки цьому і в Україні почав зростати асортимент страхових послуг, виник інститут перестрахування, почали створюватися комерційні страхові компанії.

Країни з перехідною економікою здебільшого дуже обережно використовують досвід розвинутих країн, враховуючи національні особливості формування ринку страхових послуг і економіки країни в цілому. Його становлення не відбувалося в класичних формах, як у країнах Західної Європи. Перехід від надмонополізму до конкурентного середовища, від державної форми власності до приватизації з функціонуванням різних форм власності, від адміністрування до підприємництва, від адміністративно-командної системи регулювання страхової діяльності до створення системи її державного регулювання в Україні викликав „зворотний" порядок стосовно європейської класичної форми. Становлення національного ринку страхових послуг розпочалося і продовжується шляхом переходу від монополій Держкомстраху СРСР до створення великої кількості страхових компаній усіх форм власності, що спричинило досить своєрідні способи використання досвіду розвинутих країн. Прагнення прискорити процес призводить до неможливості учасниками ринку країн з перехідною економікою користуватися класичними ринковими важелями внаслідок як власної неготовності, так і неготовності суспільства до споживання „класичних” страхових послуг.

Початок становлення українського страхового ринку у 1991 р. відбувався за відсутності власного страхового законодавства і органу державного нагляду за страховою діяльністю. Але саме в цей час починається бурхливий розвиток ринку страхових послуг, оскільки почали з’являтись потенційні страхувальники — громадяни та підприємці.

Скорочення державних соціальних програм створило можливість для розвитку ринку особистого страхування, а зростання економічної та ділової активності активізувало проведення майнового страхування. Все це призвело до значного зростання кількості страхових компаній та розширення мережі їх філій, незважаючи на повну відсутність адекватного цьому процесу страхового законодавства.

Отже, до 1993 р. становлення національного ринку страхових послуг характеризувалося повною неможливістю здійснення страхування як нормального економічного процесу, адже „стихійно” створені страхові компанії не мали достатніх коштів для проведення страхування і брали на себе зобов’язання, з якими не могли пізніше розрахуватися.

Після виходу в травні 1993 року Декрету Кабінету Міністрів України “Про страхування” почався новий етап розвитку страхового ринку України. З його прийняттям страховики і, відповідно, страхувальники отримали нормативну базу, і страхування сформувалося як окрема галузь ринку фінансових послуг. Це був перший документ, який визначив правові основи страхової діяльності в Україні, і в якому був зазначений орган державного нагляду за страховою діяльністю — Комітет із страхового нагляду.

Було впроваджено єдиний державний реєстр страхових компаній і видано ліцензії, передбачено обов’язкову звітність страховиків за результатами року, встановлено певну залежність між обсягами максимального зобов'язання та розмірами страхових резервів. Страхову діяльність визначено як виключний вид діяльності, здійснювати її можна лише за тими видами, які зазначено в ліцензії.

Протягом 1994 – 1995 років значно зросли обсяги страхового ринку, сформувалися тенденції до збільшення кількості страхових договорів та їхньої спеціалізації, набули розвитку перестрахувальні операції як на внутрішньому (національному), так і на зовнішньому (світовому) страхових ринках, почали постійно зростати страхові резерви, посилилася фінансова надійність страховиків, підвищився рівень гарантії щодо виконання ними взятих зобов'язань.

Страхові компанії почали усвідомлювати роль страхування як засобу соціально-економічного захисту суспільства від різноманітних несприятливих подій, а також місце страхової галузі в процесі розбудови ринкової економіки. Страховики починають безпосередньо втручатися в процес формування дієздатного та більш ефективного ринку страхових послуг, створюють Лігу страхових організацій України — добровільне об'єднання страховиків, головним завданням якого до цього часу є постійна робота над удосконаленням нормативно-законодавчої бази зі страхування, а також попередження негативних явищ, зловживань та недобросовісної конкуренції на вітчизняному ринку страхових послуг.

Недосконалість законодавчої бази відчувалася дедалі більше, тому розпочалася робота над проектом Закону України „Про страхування". Він був прийнятий 7 березня 1996 року, і це поклало початок третього етапу становлення та розвитку вітчизняного ринку страхових послуг.

Реалізація даного Закону через низку Постанов і Розпоряджень Кабінету Міністрів України, перереєстрація страховиків у 1997 році, а також низка нормативних актів Укрстрахнагляду посприяли створенню протягом 1996-1997 років законодавчого поля для розвитку страхування. Закон установив систему контролю за рівнем платоспроможності страховиків і порядок розрахунку резервів, посилив норми, що регулюють нагляд за страховою діяльністю, впорядкував види обов'язкового страхування. Зазначені вище заходи створили передумови для стабільного розвитку страхового ринку в Україні. Урядом було ухвалено послідовно дві Програми його розвитку.

Перша Програма, ухвалена Кабінетом Міністрів 1998р., визначала головні завдання та пріоритети галузі на 1998-2000 рр. та складалася з таких головних розділів:

В цілому її було виконано, хоча з багатьох об'єктивних і суб'єктивних причин окремі її пункти було не реалізовано, або реалізовано не повністю.

У травні 1999 р. Верховна Рада України ухвалила в першому читанні проект Закону України „Про внесення змін до Закону України „Про страхування", де було передбачено законодавчу реалізацію змін, намічених Програмою. У 2000р. до Верховної Ради було також подано законопроект щодо врегулювання питань обов'язкового державного страхування.

Зазначені законопроекти передбачали також заходи з підвищення платоспроможності страховиків. З цією метою було створено й зареєстровані об'єднання страховиків у вигляді Моторного, Авіаційного бюро, а також відповідний гарантійний фонд з експортно-імпортних ризиків. Фактично створюється орган, де страховики самостійно на демократичних засадах встановлюють загальні „правила гри", затверджують нормативні регуляційні документи щодо розвитку галузі, координують здійснення страхування, погоджуючи умови, страхові тарифи, розмір комісійних, тощо, а також проводять єдину міжнародну політику.

У цілому перша Програма дала змогу комплексно підійти до подальшого розвитку страхового ринку в усіх головних аспектах і напрямках, хоча окремі її пропозиції так і не було втілено в життя.

Утім, життя наполегливо вимагало морального вдосконалення загальної стратегії страхування, що дало поштовх на початку 2000 р. приступити до створення нової комплексної програми. Після тривалих дискусій документ було подано до Кабінету Міністрів і після доопрацювання

2 лютого 2001 р. затверджено ним як Програму розвитку страхового ринку на 2001-2004 р.

Аналіз територіальної структури ринку страхових послуг України свідчить, що він у цілому поділений на три великих регіони, а саме: центральний, східний і південний.

У даний час спостерігається значний дисбаланс розподілу страхових компаній по території України: у Києві зосереджено більше половини, п'ята частина припадає на Одесу, Харків і Дніпропетровськ. В цих містах розташовано більше 70% усіх страхових компаній, що, в свою чергу відображається на структурі платежів і виплат по регіонах.

Більшість вітчизняних страховиків є акціонерними товариствами. Кількість страхових компаній станом на 31.12.2006 року становила 411, в той час як на початок 1997р. їх було лише 224.

Загальна (валова) сума страхових премій, отриманих страховиками від страхування та перестрахування ризиків за 12 місяців 2006 року — 13830 млн. грн.

У порівнянні з 2005 роком обсяги валових страхових премій збільшилися на 976,4 млн. грн., що становить 7,6%.

Загальна (валова) сума страхових виплат за підсумками 12 місяців 2006 року дорівнювала 2599,6 млн. грн. і зросла в порівнянні з 2005 роком на 705,4 млн. грн. (37,2%).

За договорами перестрахування на кінець 2006 року українські страховики сплатили 5621, 6 млн. грн. (41% від валових страхових премій).

Структура перестрахування за межами України (у перестраховиків–нерезидентів) за часткою валових страхових премій, сплачених за договорами перестрахування, наступна: Росія — 201,8 млн. грн. (36%), США — 132,8 млн. грн. (24%), Німеччина — 87,5 млн. грн. (16%), Франція — 52,9 млн. грн. (9%), Швейцарія — 35,6 млн. грн. (6%), Австрія — 25,7 млн. грн. (5%), Великобританія — 13,3 млн. грн. (2,2%), інші країни — 11,3 млн. грн. (1,8%).

Загальна сума виплат, отримана українськими страховиками, які передавали свої ризики в перестрахування, становила 396,3 млн. грн. (15,2%) від всіх валових страхових виплат.

Сукупний розмір активів страховиків (валюта балансу) становив 23994,6 млн. грн., з них активи, визначенні статтею 31 Закону України „Про страхування” — 17488,2 млн. грн. В 2005 році відповідно — 20920,1 млн. грн. і 12346,5 млн. грн.

Сплачений статутний капітал страховиків — 8391,2 млн. грн., та в порівнянні з 2005 роком зріс на 1,7 млрд. грн. Іноземні інвестиції в статутних фондах мали 66 страхових компаній на суму 1093,5 млн. грн. (у 2005 році — 58 компаній з іноземним капіталом 897,6 млн. грн.).

Величина сформованих страхових резервів станом на кінець четвертого кварталу 2006 року — 6014,1 млн. грн., що на 968,3 млн. грн. більше, ніж на кінець 2005 року.

З огляду на вищесказане бачимо, що страховий ринок України зазнає істотних змін. На сьогоднішній день він перебуває на порозі поступового інтегрування у світовий. Зросла участь України в міжнародних організаціях, посилилися контакти з міжнародним страховим ринком, збільшились іноземні інвестиції. Страхові організації з іноземною часткою капіталу приносять нашим споживачам нові технології, передовий досвід та якісно новий рівень надання послуг.

Останнім часом значно активізувалася міжнародна діяльність страхових компаній, а саме відбувається злиття тих, які містяться в різних країнах, і відкриття нових філій за кордоном. З 16 червня 1999 року набула чинності Угода про партнерство між Україною та країнами Євросоюзу в частині банківської та страхової діяльності, яка передбачає, зокрема, створення для іноземних страховиків умов, не гірших за ті, що існують для страховиків резидентів. Завдяки цьому збагатився вітчизняний досвід у страховій справі, зокрема в організації підприємницької діяльності страховиків. Саме страхування стало налаштовуватися на потреби захисту підприємницької діяльності та вирішення соціальних проблем, тобто наближатись до ролі, яку виконує страхування у країнах ринкової орієнтації, де воно не тільки обслуговує виробничі галузі, але й стимулює їх, насамперед інвестиційно, що, в свою чергу, значною мірою зменшує навантаження бюджету в цьому напрямку. Зокрема, Міжнародною асоціацією нагляду за страховою діяльністю (IAIS) розроблено принципи та стандарти нагляду за страховою діяльністю, які полягають в описі суттєвих елементів надійної системи управління активами і основи для звітності за повним спектром інвестиційної діяльності. Цей стандарт визначає принципи для використання належної практики контролю за ризиками, пов'язаними з інвестиційною діяльністю страховиків, які, в свою чергу стимулюють активну інвестиційну політику.

Страхування майнових ризиків так само як і розширення страхування відповідальності також сприяє розвитку підприємницької діяльності.

Згідно згадуваної вище Угоди про партнерство між Україною та країнами Євросоюзу страхуванню відводиться значна роль у розвитку міжнародного бізнесу, адже збільшуються товарообмін інших країн з нашою державою, транзитні вантажоперевезення. В свою чергу, страхування вантажів, туристів, транспортних засобів, інвестиційних проектів є необхідним компонентом формування нормальних міжнародних відносин.

Існує тісний зв'язок між страхуванням і кредитною діяльністю. Населення багатьох країн надає перевагу заощадженню своїх коштів через страхові компанії, які в свою чергу, до настання страхових випадків можуть використовувати їх як джерело кредитних ресурсів.

Саме в страхуванні створюються значні резерви грошових ресурсів, які стають джерелом зростання інвестицій в економіку. Акумульовані в страхових компаніях ресурси через систему інвестування сприяють розширенню виробництва та прискоренню виконання інших програм.

Як свідчить статистика, страхування — чи не єдина галузь економіки України, в якій протягом останніх років спостерігається стабільний значний щорічний приріст обсягів наданих послуг.

Схоже українські підприємства та фізичні особи вже готові вкладати кошти в страхування, а отже — у власне майбутнє. Але для справді активного розвитку цивілізованого ринку страхування необхідне збільшення платоспроможності населення та прийняття деяких законодавчих актів.

1.2. Сутність страхування. Основні поняття і типи договорів страхування.

На сьогоднішній день діяльність на страховому ринку визначається Законом України „Про страхування" від 07.03.96 р. [ ] зі змінами та доповненнями та іншими нормативно-правовими документами. Цей Закон регулює відносини у сфері страхування та спрямований на створення ринку страхових послуг, посилення страхового захисту майнових інтересів підприємств, установ, організацій та громадян.

Згідно даного Закону [, стаття 1] страхування — це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів громадян та юридичних осіб у разі настання певних подій (*страхових випадків*), визначених *договором страхування* або чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати громадянами та юридичними особами страхових платежів (*страхових внесків*, *страхових премій*) та доходів від розміщення коштів цих фондів.

Страховиками визнаються фінансові установи, які створені у формі акціонерних, повних, командитних товариств або товариств з додатковою відповідальністю згідно з Законом України "Про господарські товариства" з урахуванням особливостей, передбачених цим Законом, а також одержали у встановленому порядку ліцензію на здійснення страхової діяльності.

Страхувальниками визнаються юридичні особи та дієздатні громадяни, які уклали із страховиками договори страхування або є страхувальниками відповідно до законодавства України.

Страховий випадок — подія, передбачена договором страхування або законодавством, яка відбулася, і з настанням якої виникає обов'язок страховика здійснити виплату страхової суми (страхового відшкодування) страхувальнику, застрахованій або іншій третій особі.

Договір страхування — це письмова угода між страхувальником і страховиком, згідно з якою страховик бере на себе зобов'язання у разі настання страхового випадку здійснити страхову виплату страхувальнику або іншій особі, визначеній у договорі страхування страхувальником, на чию користь його укладено (подати допомогу, виконати послугу тощо), а страхувальник зобов'язується сплачувати страхові платежі у визначені строки та виконувати інші умови договору. Він укладається для того, щоб виключити фінансові втрати, пов'язані з невизначеністю настання тих чи інших страхових подій, а показником ступеня невизначеності може бути ймовірність їх настання.

Страховий платіж (страховий внесок, страхова премія) — плата за страхування, яку страхувальник зобов'язаний внести страховику згідно з договором страхування.

Загальною страховою премією страховика називатимемо суму, зібрану за рахунок укладення договорів страхування, а ціну договору страхування надалі називатимемо *страховою премією*. Один з основних принципів, який враховується при укладанні договору страхування, — це *принцип еквівалентності фінансових зобов'язань сторін* (страховика та страхувальника), який математично виражається *рівністю математичних сподівань двох величин: суми всіх страхових внесків і суми всіх страхових відшкодувань.* Саме з цієї умови визначається розмір *ризикової премії.* З врахуванням *ризикової надбавки (надбавка за безпеку),* яка утворюється для виплат відшкодування, що несуттєво перевищує середнє значення відшкодування, отримується *нетто-премія*, в основі побудови якої за будь-яким договором страхування лежить ймовірність настання страхового випадку.

Власне нетто-премія виражає ціну страхового ризику, а навантаження покриває видатки страховика по організації страхування, на проведення заходів, які знижують ризик, містить елементи прибутку, а разом вони визначають величину *страхового внеску* (*брутто-премію*). З огляду на теорію страхова премія може бути подана як функція від величини запиту. Відзначимо деякі обов'язкові властивості страхової премії:

- ціна договору повинна бути додатною;
- якщо відомо, що ризик детермінований (страхова подія настане з ймовірністю 1 і збиток становитиме суму С), то страхова премія повинна в точності дорівнювати С;
- ціна одночасного страхування декількох ризиків повинна бути меншою або дорівнювати сумі цін ризиків, що розглядаються окремо.

Отже, згідно договору страхування страхувальник платить страхову премію. Якщо страховий випадок не наступив, то він заплатив за свій спокій. В цьому і полягає ризик страхувальника.

Ризик страховика полягає в тому, що він, в разі настання страхової події після сплати страхової премії, зобов'язаний заплатити обумовлену договором страхування суму, яка значно перевищує її розмір.

Під *страховою сумою* розумітимемо розмір максимальної відповідальності страховика за одним договором страхування. Розмір страхової суми фігурує в договорі страхування. Зазначимо, що деякі договори страхування передбачають повну компенсацію втрат (страхова сума виплачується повністю). Типовим представником такого класу договорів є договір страхування життя. В інших випадках страхова компанія виплачує компенсацію, що відповідає реально заподіяним збиткам, і розмір виплачуваної компенсації, як правило, менший від страхової суми. Така ситуація типова для майнового, автомобільного та ін. видів страхування. Зазначимо також, що в деяких випадках оцінка максимальних збитків неможлива (страхування відповідальності за збитки, заподіяні третіми особами). Формально в таких випадках можна вважати, що страхова сума дорівнює нескінченності.

Відповідальність страховика обмежена не тільки зверху страховою сумою. Можливе і обмеження знизу, якщо згідно з договором страхувальник бере участь у відшкодуванні збитку. Тоді в договорі обумовлюється обмеження відповідальності страховика при відповідному зменшенні внесків страхувальника — це *франшиза*, яка може бути *умовною* або *безумовною*.

При однаковій величині франшизи L відповідальність страховика більша для умовної франшизи, ніж для безумовної. Цим визначається різниця в страхових внесках.

Якщо безумовна франшиза складає L, то за кожним запитом про виплату віднімається ця сума. Тобто можна нехтувати збитками, меншими за франшизу. Якщо ж розмір збитку $X > L$, то страховик відшкодовує тільки частину його: $X - L = Y$, тобто виплата $V = \max\{0, Y\}$. Природно, що ця обставина відіб'ється і на ціні договору.

Якщо договір страхування передбачає умовну франшизу, то страховик повністю звільняється від відшкодування збитків, які менші вказаної суми, але відшкодовує весь збиток, який більший за неї, тобто $V = \begin{cases} X, & X > L, \\ 0, & X < L. \end{cases}$

При умовній франшизі відповідальність страховика вища, ніж при безумовній. В обох випадках необхідно знати закон розподілу збитку.

Умовна франшиза є комбінацією звичайного договору страхування та безумовної франшизи. Нехай X — збиток, $(X - L)$ — запит про виплату (на практиці інколи може покривати, наприклад, витрати на визначення величини збитку). Отже, виплати страховика: $Y = 0$ при $X < L$ і $Y = X - L$ при $X > L$.

Таким чином, при франшизі страхувальник добровільно погоджується на певну компенсацію збитку в обмін на зниження страхового внеску.

Нехай франшиза $L = 1000$ у.о., розмір збитку $X = 3000$ у.о. Тоді при безумовній франшизі страховик відшкодовує тільки його частину $V = 3000 - 1000 = 2000$ у.о., а при умовній $V = X = 3000$ у.о.

Крім франшизи розглядається ще сумісний платіж, який означає, що застрахована сторона повинна покрити частину збитків. Наприклад, в договорі страхування може бути обумовлено, що сумісний платіж складає 20% будь-яких збитків, а страхова компанія виплачує решту 80%.

Сумісний платіж подібний до франшизи тим, що також зобов'язує клієнтів оплачувати частину збитків з власної кишені. Різниця полягає в обчисленні частки, яку повинен заплатити клієнт, і методах, з допомогою яких в клієнта формується стимул до уникнення збитків.

Заслуговують на увагу ще дві схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку: пропорційне відшкодування та відшкодування за правилом першого ризику.

При пропорційному відшкодуванні для об'єкта реальною вартістю C, застрахованого на суму $S < C$, при настанні страхового випадку, який призвів до збитку величиною X, страховик виплачує відшкодування $V = XS/C$.

При відшкодуванні за правилом першого ризику для величини збитку $X < S$ передбачається повне його відшкодування. Якщо ж $X > S$, то виплачується страхова сума S, тобто виплата $V = \min\{X, S\}$.

Вважаємо, що об'єкт загальною вартістю $C = 5000$ у.о. застрахований на суму $S = 2500$ у.о. Тоді при пропорційному відшкодуванні $V = SX/C = (2500 \cdot 3000/5000) = 1500$ у.о., а при відшкодуванні за правилом першого ризику $V = S = 2500$ у.о.

Заслуговують на увагу наступні два приклади.

Приклад 1.1. Реальна ціна котеджу 200000 у.о. Власник застрахував його від пожежі в компанії А на 60000 у.о. і в компанії В на 40000 у.о. Сталася пожежа, внаслідок чого реальний збиток склав 70000 у.о. Яке відшкодування повинна сплатити кожна компанія?

Розв'язок. В кожному випадку $C = 200000$, $S_1 = 60000$, $S_2 = 40000$, $S = S_1 + S_2 = 100000 = 50\%C$; $X = 70000$. Страхувальник повинен отримати відшкодування $V = 50\% \cdot 70000 = 35000$, причому компанія А виплатить $V_1 = 60\% \cdot 35000 = 21000$, компанія В виплатить $V_2 = 40\% \cdot 35000 = 14000$.

Приклад 1.2. В умовах попереднього прикладу: $C = 200000$, $S_1 = 150000$, $S_2 = 100000$, $X = 200000$ (повне знищення). Скільки повинна заплатити кожна компанія?

Розв'язок. $S = S_1 + S_2 = 150000 + 100000 = 250000 > C$. Але відшкодування V не повинно перевищувати реальну ціну C. Тому $V_1 = 200000 \cdot (150000/250000) = 120000$, а $V_2 = 200000 \cdot (100000/250000) = {}$ $= 80000$.

1.3. Особливості та завдання актуарних розрахунків

Актуарні розрахунки — це процес, у ході якого визначаються витрати, необхідні на страхування даного об'єкта.

Основним завданням актуарних розрахунків є визначення собівартості та вартості послуги, що надається страховиком страхувальнику і яка включає в себе:

- обрахунок витрат, необхідних для страхування даного об'єкта;
- врахування імовірнісних характеристик події, що оцінюється;
- виявлення загальних закономірностей явищ, що проявляються через масу обумовлених випадкових подій, наявність яких призводить до значних коливань страхових платежів;
- визначення оптимальних розмірів спеціальних резервів, що знаходяться в розпорядженні страховика і забезпечує з певною ймовірністю всі запити, що надходять;
- прогнозування.

У більш узагальненій формі актуарні розрахунки можна подати як систему математичних і статистичних закономірностей, що регламентують взаємини між страховиком і страхувальником.

В актуарних розрахунках варто передбачити деякі особливості, пов'язані з практикою страхової справи. Найбільш важливими з них є:

- події, які оцінюються, мають імовірнісний характер, що відбивається на розмірі, пред'явлених до сплати страхових премій;
- визначення собівартості послуги, що надається страховиком, проводиться у відношенні до всієї страхової сукупності;
- необхідне виділення спеціальних резервів, що знаходяться в розпорядженні страховика, визначення оптимальних розмірів цих резервів;
- експертна оцінка договорів страхування;
- дослідження норми позичкового відсотка і тенденцій його зміни в конкретному часовому інтервалі;
- наявність повного чи часткового збитку, пов'язаного зі страховим випадком, що визначає потребу виміру величини його розподілу в часі та просторі за допомогою спеціальних таблиць;
- дотримання принципу еквівалентності, тобто встановлення адекватної рівноваги між інтересами страхувальника, вираженими через страхову суму, і страховим забезпеченням, наданим страховою компанією, завдяки отриманим страховим преміям;
- виділення групи ризику в межах даної страхової сукупності.

Осіб, які проводять актуарні розрахунки, називають ще *актуаріями*. Зокрема, якщо укладання договору цілком лежить на плечах фахівця з правових питань, то актуарій займається лише визначенням його ціни.

Актуарій повинен вирішити для даної страхової компанії наступні завдання:

- визначити величину ризикової премії, яка забезпечує еквівалентність зобов'язань і ризику у страховика і страхувальника;
- визначити величину ризикової надбавки;
- визначити величину страхового запасу (капіталу), який забезпечить виживання (не розорення) компанії з певною надійністю;

- проаналізувати можливість підвищення стійкості компанії з допомогою перестрахування і розрахувати плату за перестрахування;
- оцінити положення компанії на страховому ринку і залежно від ситуації сформулювати підтверджені розрахунками рекомендації, які закріплюють позиції компанії.

1.4. Ймовірносні методи в страхуванні

Основний інструмент актуарних розрахунків — це теорія ймовірностей, оскільки застраховані ризики є *випадковими величинами*. Тому при здійсненні страхових операцій взагалі, а при актуарних розрахунках зокрема, доводиться збирати, обробляти і оцінювати випадкові величини. Потім на основі отриманих результатів розраховується ціна страхових продуктів і розмірів страхових платежів. Проте використання тільки теорії ймовірностей не в змозі надати необхідні цифрові дані для практичного використання страхових операцій. Вони, в свою чергу, можуть бути отримані на основі спостережень.

Під випадковою подією у страхуванні розуміють страховий випадок, що може відбутися чи не відбутися. Діяльність страховика, певною мірою, подібна до підкидання монети (можливі тільки два результати: страховий випадок з ймовірністю p і його відсутність з ймовірністю $q=1-p$), але і є відмінності. По-перше, ймовірності можливих результатів (страхових випадків) не рівні між собою; по-друге, розмір страхової виплати, як правило, не є визначеною заздалегідь величиною, а визначається волею випадку.

Тому при знаходженні *ймовірності* $P(A)$ *настання страхової події A* не можна користуватися *класичним означенням*. В цьому випадку користуються *статистичним означенням, при якому під ймовірністю* $P(A)$ *розуміють число, навколо якого коливається відносна частота настання події A в довгих серіях експерименту (відносна частота — відношення числа* *випробувань, у яких подія А з'явилася, до загального числа проведених випробувань).*

Розглядають *дискретні* та *неперервні випадкові величини*. У страхуванні до дискретних величин належать — кількість укладених договорів із певного виду страхування, кількість страхових випадків та поданих згідно з ними запитів про виплату відшкодування; до неперервних — загальний обсяг відповідальності згідно з укладеними договорами, а також часові показники: проміжки часу між укладанням договорів страхування та виплатою страхового відшкодування за окремо взятими договорами.

Випадкові величини описуються *законами або функціями розподілу ймовірностей та певними числовими характеристиками.*

Для моделювання страхових процесів найчастіше застосовуються *нормальний та біномінальний розподіли, розподіл Пуассона і розподіл Парето.* Зокрема, нормальним розподілом досить часто апроксимуються інші, більш складні розподіли, і на його підставі виводяться деякі важливі для страхування формули і показники.

Серед числових характеристик випадкових величин розглядають переважно чотири: *математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.*

Математичне сподівання $M\eta$ використовується при обчисленні страхової премії, а також разом із середньоквадратичним відхиленням σ визначає коефіцієнт варіації $W\eta\left(W\eta = \sigma / M\eta\right)$, який показує наскільки близько знаходяться значення очікуваних виплат до їх середнього значення.

Таким чином, коефіцієнт варіації можна вважати в певному сенсі *показником ризиковості даного страхового портфеля*. Зауважимо, що коефіцієнт варіації сумарних виплат даного портфеля обернено пропорційний його об'єму. Зокрема, якщо він є *не більшим одиниці,* то страхова компанія може прийняти даний ризик. Крім того, завдяки даній вимозі, із формули для коефіцієнта варіації знаходять кількість договорів, які потрібно укласти для прийняття даного ризику.

За допомогою коефіцієнта варіації вирішується питання про доцільність об'єднання двох страхових портфелів A і B. Зокрема, якщо сумарний коефіцієнт варіації менший за коефіцієнт варіації портфеля A, то портфель B доцільно приєднувати до портфеля A, в іншому разі — ні. Крім того, дане питання можна вирішувати також за допомогою *перевірки статистичних гіпотез* про те, що розподіли величини збитку в кожному з портфелів збігаються (мають однакові функції розподілу). Це можна зробити за допомогою критерію Колмогорова-Смирнова. Зокрема, якщо гіпотеза приймається, то портфелі можна об'єднувати.

За допомогою *критерію* χ^2 можна перевіряти гіпотези про розподіл числа запитів, які були подані протягом певного терміну (наприклад, протягом року), а також гіпотези про розподіл величини збитку в страхових портфелях.

На підставі *центральної граничної теореми*, згідно з якою сума значної кількості доданків завжди розподілена за нормальним законом незалежно від того, які закони розподілу доданків, визначається функція розподілу запитів на виплату відшкодувань, встановлюється показник гарантій безпеки (надійності) компанії від сумарних виплат страхових відшкодувань, обчислюється розмір резервного фонду.

Страховика цікавить перевищення фактичного числа страхових випадків над очікуваними, що може призвести до *банкрутства (розорення)* страхової компанії. Тому, задавши *ймовірність розорення* ε (означення дивись далі), або, що те саме, *надійність* $\gamma = 1 - 2\varepsilon$, за допомогою *інтервального оцінювання* можна стверджувати, що число страхових випадків з надійністю γ (*ймовірністю нерозорення* $1 - \varepsilon = (1+\gamma)/2$) не вийде за *праву границю довірчого інтервалу*.

Покажемо на конкретних прикладах як застосовують основні формули та теореми теорії ймовірностей.

Приклад 1.3. Укладено 4 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, дорівнює 0,1. Припускаючи, що надходження запитів незалежні між собою, знайти ймовірність того, що:

1) запити надійдуть за чотирма договорами;
2) запити не надійдуть за жодним договором;
3) запит надійде принаймні за одним договором;
4) запит надійде за одним договором.

Розв'язок. Нехай $A_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ — подія, яка полягає в тому, що запит надійде за i-им договором, а $\overline{A}_i$ — подія, протилежна до події A_i. Тоді $P\left(A_i\right)=p=0{,}1$, $P\left(\overline{A}_i\right)=q=0{,}9$. Оскільки події A_i (і відповідно $\overline{A}_i$) незалежні, то за формулою множення незалежних в сукупності подій отримаємо:

1) $P\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(A_3\right)\cdot P\left(A_4\right)=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}0001$;

2) $P\left(\overline{A}_1\cdot \overline{A}_2\cdot \overline{A}_3\cdot \overline{A}_4\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)\cdot P\left(\overline{A}_4\right)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}6561$;

3) оскільки подія $\overline{A}$={запит надійде принаймні за одним договором} є протилежною до події, яка полягає в тому, що запит не надійде за жодним договором, то $P(\overline{A})=1-0{,}6561=0{,}3439$;

4) ймовірність того, що запит надійде за одним договором дорівнює $4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}2916$.

Приклад 1.4. Агентство зі страхування автомобілів поділяє водіїв на три класи: малоризикових, помірно ризикових, сильноризикових і вважає, що з усіх водіїв, які застрахували автомобіль, 30% належить до першого класу, 50% — до другого і 20% — до третього. Ймовірності протягом року потрапити в аварію водіям першого, другого, третього класів відповідно дорівнюють 0,02; 0,02; 0,03. Деякий водій застрахував свою машину і протягом року потрапив в аварію. Знайти ймовірність того, що він належить до водіїв другого класу.

Розв'язок. Нехай подія A = {водій, який застрахував машину, зробив аварію} може наступити тільки разом із деякими з подій H_1 = {водій належить до першого класу}, H_2 = {водій належить до другого класу}, H_3 = {водій належить до третього класу}. Тоді за умовою задачі ймовірність $P(A/H_1)=0{,}02$, $P(A/H_2)=0{,}02$, $P(A/H_3)=0{,}03$. Ймовірність того, що водій, який спричинив аварію, належить до водіїв другого класу, обчислюємо за формулою Байєсса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}.$$

Отримаємо $P(H_2/A)=0{,}5\cdot 0{,}02/(0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}5\cdot 0{,}02+0{,}2\cdot 0{,}03)=5/11$.

Нехай укладено n однотипних договорів страхування, в кожному з яких страхова подія A може з'явитися з ймовірністю p (відповідно, ймовірність не появи $q=1-p$). Дискретна випадкова величина η = {число появ страхової події A в n договорах} може набувати значення 0,1,2,..., n з ймовірностями

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k} \qquad (1.1)$$

Закон розподілу випадкової величини η називають біноміальним і задають у вигляді таблиці

η	0	1	...	n
$P_n(k)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	...	$P_n(n)$

Для нього математичне сподівання $M\eta$, дисперсія $D\eta$, коефіцієнт варіації $W\eta$ обчислюються за формулами:

$$M\eta=np,\quad D\eta=npq,\quad W\eta=\sqrt{q/np}. \qquad (1.2)$$

Якщо тепер число n однотипних договорів страхування є достатньо велике, а ймовірність настання страхової події A в кожному з них набагато менша 1 (зазвичай $p\le 0{,}1$), то для обчислення ймовірностей появи страхового випадку k раз користуються не формулою Бернуллі, а асимптотичною формулою Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad (1.3)$$

де $\lambda = np$ - середнє число страхових випадків при різних значеннях n.

Приклад 1.5. Укладено 4 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини $\eta = \{$число запитів, які надійшли протягом року$\}$.

Розв'язок. Випадкова величина η набуває значення $k = 0, 1, 2, 3, 4$ з ймовірностями, які обчислюються за формулою (1.1). Враховуючи, що за умовою $p = 0{,}1$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, матимемо:

$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$; $P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$;

$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$; $P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$;

$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$.

Тоді закон розподілу випадкової величини η матиме вигляд

η	0	1	2	3	4
P_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Приклад 1.6. Ймовірність надходження запиту на відшкодування протягом року за одним договором страхування дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що протягом року надійде 3 запити, якщо укладено 600 однотипних договорів.

Розв'язок. Оскільки $p = 0{,}003$ — маленьке, а $n = 600$ — велике, то скористаємося формулою Пуассона (1.3), $\lambda = np = 0{,}003 \cdot 600 = 1{,}8$. Тоді за таблицею 3 у додатку при $k = 3$, $\lambda = 1{,}8$ отримуємо, що $p \approx 0{,}16$.

Приклад 1.7. Нехай страховий портфель А складається з $n = 100000$ договорів зі страховими сумами $S = 2000$ у.о. і ймовірностями $p = 0{,}0015$. Чи може страхова компанія прийняти даний страховий портфель?

Розв'язок. Для страхового портфеля А сумарна ризикова премія $M\eta = 100000 \cdot 2000 \cdot 0,0015 = 300000$ (у.о.), сумарне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2000\sqrt{100000 \cdot 0,0015 \cdot 0,9985} = 24476,5$, коефіцієнт варіації $W\eta = 24476,5 / 300000 = 0,0815$.

Оскільки $W\eta < 1$, то компанія може прийняти даний страховий портфель.

Приклад 1.8. Ймовірність настання страхового випадку за одним договором страхування $p = 0,001$. Скільки потрібно укласти даних однотипних договорів, щоб можна було прийняти даний ризик.

Розв'язок. Даний ризик може бути прийнятий, якщо коефіцієнт варіації $W\eta < 1$. Для біноміального закону розподілу $W\eta = \sqrt{\dfrac{q}{np}} < 1$ або $n > \dfrac{q}{p} = \dfrac{0,999}{0,001} = 999$.

Таким чином, даний ризик буде прийнятим, якщо укладено не менше 1000 договорів.

Приклад 1.9. Нехай страховий портфель А складається з 100000 договорів зі страховими сумами 2000 у.о. і ймовірностями 0,0015. Чи може страхова компанія брати страховий портфель Б, який складається з 20 договорів з ймовірностями 0,02 і страховими сумами 10000 у.о.?

Розв'язок. Для страхового портфеля Б отримуємо $M\eta = 20 \cdot 10000 \cdot 0,02 = 4000$, $\sigma = 10000\sqrt{20 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 6261,2$.

Після його прийняття, компанія отримає ризикову премію $M\eta = 300000 + 4000 = 304000$, а $\sigma = \sqrt{24476,5^2 + 6261,2^2} = 25260$, $W\eta = = 25260 / 304000 = 0,0831$.

Враховуючи результати прикладу 1.7., бачимо, що сталося незначне погіршення $[0,0815 < 0,0831]$ і оскільки немає покращення, то компанія не зацікавлена в прийнятті нового ризику.

Зауважимо, що якщо страхувальників в портфелі Б збільшити до 100, то отримаємо: $M\eta = 100 \cdot 10000 \cdot 0,02 = 20000$, $\sigma = 10000\sqrt{100 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 14000$, сумарна ризикова премія $M\eta = 300000 + 20000 = 320000$, сумарне $\sigma = \sqrt{24476,5^2 + 14000^2} = 28196$, $W\eta = 28196/320000 = 0,0881$ — гірше ніж 0,0815 і 0,0831.

Як випливає з прикладу 1.9 і наведеного зауваження, компанії, яка займається малими ризиками, великі ризики не потрібні.

Приклад 1.10. Страховий портфель В складається з 500 договорів зі страховими сумами 10000 у.о. і ймовірністю $q = 1/75$. Чи може страхова компанія прийняти страховий портфель Б з прикладу 1.9.

Розв'язок. Для портфеля В сумарна ризикова премія $M\eta = 66667$ у.о.,

$\sigma = 10000\sqrt{500\frac{1}{75} \cdot \frac{74}{75}} \approx 25650$ у.о., $W\eta = 25650/66667 = 0,385$.

Для портфеля Б $M\eta = 4000$ у.о., $\sigma = 6261$. Для об'єднаного портфеля $M\eta = 66667 + 4000 = 70667$ (у.о.), $\sigma = \sqrt{25650^2 + 6261^2} \approx 26400$ (у.о.), $W\eta = 26400/70667 = 0,374 < 0,385$.

Ситуація покращилася, завдяки тому, що обсяг портфеля В (500) значно більший за обсяг портфеля Б (20).

Приклад 1.11. На основі фактичних даних складена таблиця розподілу величини збитку η в двох портфелях:

η	$[0,10)$	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
n_{i1}	4	11	17	23	14	6	28	17	6	4
n_{i2}	6	14	10	30	13	10	23	8	7	3

Чи можна для рівня значущості $\alpha = 0,05$ вважати розподіли збитку в цих двох портфелях однаковими.

Розв'язок. Якщо невідомі теоретичні закони $F_1(x)$ і $F_2(x)$, то нульова гіпотеза H_0: $F_1(x) = F_2(x)$ при конкуруючій H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$ перевіряється за допомогою критерію Колмогорова-Смирнова:

$$\lambda_{cn} = \sqrt{n_1 \cdot n_2 / (n_1 + n_2)} \cdot \max\left|F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)\right|,$$

де $F_{n_1}(x) = n_{i1}^H / n_1$, $F_{n_2} = n_{i2}^H / n_2$, $n_i^H = \sum_{j=1}^{k} n_j$ — накопичувальна частота.

Складемо наступну таблицю

η	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
n_{i2}^H	4	15	32	55	69	75	103	120	126	130
$n_{i2}^н$	6	20	30	60	73	83	106	114	121	124
$F_{n_1}(x)$	0,031	0,115	0,246	0,423	0,531	0,577	0,792	0,923	0,969	1
$F_{n_2}(x)$	0,048	0,161	0,242	0,484	0,589	0,669	0,855	0,919	0,976	1
$\lvert\Delta\rvert$	0,017	0,046	0,004	0,061	0,058	0,092	0,063	0,004	0,007	

$|\Delta| = |F_{n1}(x) - F_{n2}(x)|$, $\max|\Delta| = 0,092$, $n_1 = 130$, $n_2 = 124$, $\lambda = 0,092\sqrt{130 \cdot 124 / 254} = 0,733$.

За таблицею 5 у додатку знаходимо $t_\alpha = 1,36$ як розв'язок рівняння $K(t_\alpha) = 1 - \alpha = 0,95$. Оскільки $0,733 < 1,36$, то гіпотеза приймається і портфелі можна об'єднувати.

Приклад 1.12. Записи страхової компанії показали, що 30% власників договорів страхування подали запити на відшкодування. Для перевірки було відібрано 15 чоловік, які мають договори. Знайти ймовірність того, що від них протягом року надійде: а) п'ять запитів; б) не менше 10 запитів.

Розв'язок. а) скористаємося локальною формулою Муавра-Лапласса:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}, \qquad x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.4)$$

При $m=5$, $n=15$, $p=0,3, q=0,7$, маємо $x_m=\dfrac{5-15\cdot 0,3}{\sqrt{15\cdot 0,3\cdot 0,7}}\approx 0,28$,

$\varphi(0,28)=0,3836$ (таблиця 1 у додатку). Тоді $P_{15}(5)=\dfrac{0,3836}{1,77}\approx 0,217$.

б) дану ймовірність шукатимемо за інтегральною формулою Муавра-Лапласса

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{1.5}$$

В нашому випадку

$$\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{15-15\cdot 0,3}{\sqrt{15\cdot 0,3\cdot 0,7}}\approx 5,93;\quad \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{10-15\cdot 0,3}{\sqrt{15\cdot 0,3\cdot 0,7}}\approx 3,11.$$

За таблицею 2 у додатку $\Phi(5,93)=0,5$, $\Phi(3,11)=0,49903$. Тоді

$P_{15}(10\le m\le 15)=\Phi(5,93)-\Phi(3,11)=0,5-0,49903=0,00097.$

Нехай, як і раніше, укладено n однотипних договорів з однаковими страховими сумами S і ймовірностями настання страхових випадків p. Тоді ймовірність того, що абсолютне значення відхилення відносної частоти $W_n(A)=\dfrac{m}{n}$ від ймовірності p настання страхової події A за одним договором не перевищує числа $\Delta>0$, обчислюється за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta\right)\approx 2\Phi\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \tag{1.6}$$

звідки, поклавши $t_\gamma=\Delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, отримаємо нерівності:

$$p-t_\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}\le\frac{m}{n}\le p+t_\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}, \tag{1.7}$$

$$np-t_\gamma\sqrt{npq}\le m\le np+t_\gamma\sqrt{npq}. \tag{1.8}$$

У випадку, коли формулу (1.6) застосувати не можна, то для оцінки ймовірності користуються нерівністю Чебишева

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta\right)>1-\frac{pq}{n\Delta^2}. \qquad (1.9)$$

Формули (1.6) і (1.9) використовуються для знаходження мінімального числа договорів, які потрібно укласти, щоб з надійністю γ можна очікувати, що частка страхових подій відхилиться від ймовірності p не більше, ніж на число $\Delta>0$, а формули (1.7) і (1.8) — для обчислення ризикової надбавки.

Приклад 1.13. Оцінити з допомогою нерівності Чебишева мінімальне число договорів, яке потрібно укласти, щоб з надійністю $\gamma=0{,}95$ ($\varepsilon=0{,}025$) можна стверджувати, що частка страхових випадків відхилиться від ймовірності $p=0{,}1$ (за модулем) не більше, ніж на $\Delta=0{,}02$. Порівняти з результатами, отриманими за формулою (1.6).

Розв'язок. Скористаємося спочатку нерівністю (1.8), обчисливши попередньо: $pq/(n\Delta^2)=0{,}09/(n\cdot0{,}0004)=225/n$; $1-(225/n)\ge0{,}95$; $0{,}05\ge225/n$; $n\ge225/0{,}05=4500$.

Таким чином, потрібно укласти не менше 4500 договорів страхування.

Врахувавши в формулі (1.6) $t=\Delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$ і те, що за умовою прикладу $\varPhi(t)=0{,}475$ (за таблицею 2 у додатку $t_{0{,}95}=1{,}96$), отримаємо, що $\Delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=1{,}96$. Звідси $n=\dfrac{(1{,}96)^2\cdot0{,}09}{0{,}0004}\approx864{,}36$.

Оскільки 865 договорів є набагато меншим за 4500, то бачимо, що нерівність (1.9) дає досить грубу оцінку.

Контрольні запитання та задачі

1. Що розуміють під страхуванням, страховою подією, договором страхування?
2. Кого називають страховиком, а кого страхувальником?
3. Які ви знаєте основні характеристики договорів страхування?

4. Дайте коротку характеристику наступним схемам участі страхувальника у відшкодуванні збитку: франшиза, сумісний платіж, пропорційне відшкодування, відшкодування за правилом першого ризику.
5. Що називають страховою сумою, страховою премією, і яким умовам вона повинна задовольняти?
6. Сформулюйте основну задачу актуарних розрахунків.
7. Хто такі актуарії і чим вони займаються?
8. Укладено: а) 3; б) 4 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що запит не надійде за жодним договором, дорівнює: а) 0,95, б) 0,97. Припускаючи, що надходження запитів незалежні між собою, знайти ймовірність того, що:

   1) запити надійдуть за всіма договорами;

   2) запити не надійдуть за жодним договором;

   3) запит надійде принаймні за одним договором;

   4) запит надійде за одним договором.
9. Відомо, що 20% водіїв — новачки, для яких ймовірність потрапити в аварію протягом року дорівнює 0,2. Для 30% водіїв з середнім стажем безаварійної їзди ця ймовірність дорівнює 0,15. Досвідчені водії (їх 40%) потрапляють в аварію з ймовірністю 0,1, а 10% „асів" — з ймовірністю 0,05. Водій потрапив в аварію. Знайти ймовірність того, що він належить до водіїв з середнім стажем безаварійної роботи.
10. Проводяться три види страхування. Ймовірність того, що страхового випадку не буде: для першого виду страхування — 0,9; для другого — 0,95; для третього — 0,85. Питома вага кількості договорів для кожного з трьох видів договорів становить відповідно 50%, 30% і 20%. Знайдіть ймовірність того, що страхового випадку не буде.
11. Укладено: а) 2; б) 3 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, дорівнює а) 0,03; б) 0,02. Скласти закон

розподілу випадкової величини η = {число запитів, які надійшли протягом року}.

12. Ймовірність надходження запиту на відшкодування протягом року за одним договором страхування дорівнює: а) 0,001; б) 0,002. Знайти ймовірність того, що протягом року надійде а) 4; б) 5 запитів, якщо укладено а) 400; б) 500 договорів.
13. Страховий портфель Б складається з $n = 300$ договорів зі страховими сумами $S = 1000$ у.о. і ймовірністю $p = \frac{1}{49}$. Чи може страхова компанія прийняти даний ризик?
14. Страховий портфель В складається з 500 договорів зі страховими сумами 10000 у.о. і ймовірністю $q = 1/75$. Чи може страхова компанія В прийняти страховий портфель Б з прикладу 13.
15. В умовах прикладу 1.11 таблиці розподілу величини збитку η наступні

а)

η	[0, 30)	[30, 60)	[60, 90)	[90, 120)	[120, 150)
m_{i1}	15	21	32	27	18
m_{i2}	13	24	25	29	17

б)

η	[0, 50)	[50, 100)	[100, 150)	[150, 200)	[200, 250)	[250, 300)
m_{i1}	15	25	29	37	27	17
m_{i2}	20	27	17	41	28	19

Чи можна для рівня значущості $\alpha = 0,05$ вважати розподіли збитку в двох портфелях однаковими?

16. Записи страхової компанії показали, що а) 40%; б) 20% власників договорів страхування подали запити на відшкодування. Для перевірки було відібрано а) 20; б) 25 чоловік, які мають договори. Знайти ймовірність того, що протягом року надійде а) 3; б) 4 запити; а) не більше 10; б) не менше 15 запитів на відшкодування.
17. В умовах прикладу 1.5 врахувати а) $p = 0,003$; б) $p = 0,005$.

18. В умовах прикладу 1.13 врахувати а) $\gamma = 0,99$; $p = 0,2$; $\Delta = 0,01$;

б) $\gamma = 0,99$; $p = 0,3$; $\Delta = 0,03$.

2. ЗАГАЛЬНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКУ, ЙОГО АНАЛІЗ ТА УПРАВЛІННЯ НИМ В СТРАХУВАННІ

2.1. Методи визначення величини ризикової премії

Нехай страховий випадок наступає з ймовірністю *p*, а величина збитку X є фіксованою. Тоді, виходячи з принципу еквівалентності фінансових зобов'язань страховика та страхувальника, отримуємо, що ризикова премія T_0 дорівнює добутку ймовірності настання страхового випадку p на величину збитку X, тобто $T_0 = pX$.

Приклад 2.1. Два автомобілі, перший вартістю $S_1 = 2000$ у.о., другий вартістю $S_2 = 10000$ у.о. – застраховані від викрадення. Страховик оцінив ймовірність викрадення першого автомобіля $p_1 = 0,01$, а другого – $p_2 = 0,04$. Знайти одноразові ризикові премії.

Розв'язок. Ризикові премії:

$T_0^1 = S_1 p_1 = 2000 \cdot 0,01 = 20$ у.о.; $T_0^2 = S_2 p_2 = 10000 \cdot 0,04 = 400$ у.о.

Легко побачити, що на розмір ризикової премії впливають обидва фактори: страхова сума і ймовірність настання страхової події (випадку), причому остання не тільки вказує як часто відбуватимуться такі події, але і виконує функцію ризикової премії за одну одиницю страхової суми.

Чільне місце відводиться комбінованому страхуванню, яке дозволяє дещо знизити величину ризикової премії через практичну неможливість одночасного виникнення декількох страхових випадків, що, в свою чергу, дозволить страховій компанії знижувати свої тарифи, підвищуючи одночасно конкурентноздатність на страховому ринку при тій же надійності. Проілюструємо цей прийом на конкретному прикладі, який є аналогом відповідного прикладу з [,с.39], а потім перенесемо його на загальний випадок.

Приклад 2.2. Страхувальник має певні заощадження в євро та хоче придбати квартиру на первинному ринку за гривні, але оплату може провести тільки через два місяці. Не бажаючи втратити в заощадженнях внаслідок зниження обмінного курсу, він страхує свої заощадження на суму в 1000 євро:

- Від зниження курсу в розмірі 1-10 коп. (подія A з ймовірністю 0,04).
- Від зниження курсу в розмірі 11-20 коп. (подія B з ймовірністю 0,02).
- Від зниження курсу в розмірі більше 21 коп. (подія C з ймовірністю 0,005).

Знайти величини ризикових премій, якщо заощадження застраховані за кожним ризиком в різних компаніях і в одній компанії одночасно в одному договорі. За договором страхування страхова сума виплачується незалежно від величини фактичного збитку.

Розв'язок. Якщо ризики застраховані в трьох різних компаніях, то страхувальник заплатив ризикову премію в розмірі $0,04 \cdot 1000 + 0,02 \cdot 1000 +$ $+0,005 \cdot 1000 = 65$ (євро). Очевидно, що одночасно може відбутися не більше, ніж один страховий випадок із трьох. Тому слід розглядати не подію $A \cup B \cup C$, а подію $\left(\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right)$, ймовірність якої дорівнює 0,04·0,98·0,995+0,96·0,02·0,995+0,96·0,98·0,005=0,0621812.

Тоді ризикова премія T_0=0,6218·1000=62,18 (євро) і є меншою за 65 євро.

У випадку n страхових випадків, які не можуть наступити одночасно, замість події $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ слід розглядати подію

$$\left(\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 ... \cap \overline{A}_n\right) \cup ... \cup \left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap A_n\right)\right)$$

та обчислити її ймовірність.

Якщо тепер величина збитку є випадковою величиною з відомим законом розподілу, то спочатку шукають умовне математичне сподівання $M\left(X \mid A\right)$ величини збитку X при настанні страхової події (страхового випадку) A з ймовірністю настання p. Тоді ризикова премія $T_0 = pM\left(X \mid A\right)$.

Зокрема, для неперервної випадкової величини X умовне математичне сподівання $M\left(X \mid A\right)=\int_0^a x\cdot f\left(x\right)dx$, а ризикова премія

$$T_0 = p\int_0^a x\cdot f\left(x\right)dx. \qquad (2.1)$$

Тут вважається, що збиток відшкодовується повністю. Якщо ж відшкодовується не весь збиток *X*, а лише передбачена договором частина *V*, то

$$MV = pM\left(V|A\right)=p\int_0^a f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx, \quad 0<g\left(x\right)<X \qquad (2.2)$$

Саме *MV* і лежить в основі визначення ризикової премії, а $\left(X-V\right)$ – це участь страхувальника у відшкодуванні збитку (взамін на зниження ризикової премії).

Для випадку, коли величина збитку X є дискретною випадковою величиною, у прикладі 2.3 обчислюється величина ризикової премії для всіх схем участі страхувальника у відшкодуванні збитку.

Приклад 2.3 Умовний закон розподілу величини збитку *X* задається таблицею:

X	50	100	150	250	1000
p_i	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

а ймовірність настання страхового випадку $p=0{,}1$. Знайти величину ризикової премії для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку.

Розв'язок. Ризикова премія

$T_0 = pM\left(X \mid A\right)=0{,}1\left(50\cdot 0{,}3+100\cdot 0{,}3+150\cdot 0{,}2+250\cdot 0{,}1+1000\cdot 0{,}1\right)=20.$

Якщо повна вартість об'єкту $C=1000$ і застрахований він на суму $S=250$, то при пропорційному відшкодуванні збитку ризикова премія

$T_0 = 20 \cdot 250/1000 = 5$, а при відшкодуванні за правилом першого ризику $T_0 = 0{,}1\left(50 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}3 + 150 \cdot 0{,}2 + 250 \cdot 0{,}1\right) = 10$.

Вважатимемо, що величина франшизи $L = 200$. Тоді для безумовної франшизи $T_0 = 0{,}1\left(\left(250 - 200\right) \cdot 0{,}1 + \left(1000 - 200\right) \cdot 0{,}1\right) = 8{,}5$, а для умовної франшизи $T_0 = \left(250 \cdot 0{,}1 + 1000 \cdot 0{,}1\right) \cdot 0{,}1 = 12{,}5$.

Нехай тепер величина збитку X є неперервною випадковою величиною.

В роботі І.А. Корнілова [с. 91-92] наведені формули для обчислення величини ризикової премії T_0, коли величина збитку X розподілена за рівномірним законом. Вважатимемо що майно вартістю C страхується на суму S, а ймовірність настання страхового випадку A дорівнює p.

Якщо майно страхується на повну вартість, то $T_0 = pC/2$. При пропорційному відшкодуванні збитку $T_0 = pS/2$, а при відшкодуванні за правилом першого ризику $T_0 = p\left(S - S^2/2C\right)$.

Для умовної франшизи $T_0 = p\dfrac{C^2 - L^2}{2C}$, а для безумовної $T_0 = p\dfrac{\left(C - L\right)^2}{2C}$, де L – величина франшизи.

Приклад 2.4. Майно вартістю $C = 20000$ у.о. застраховане на суму $S = 15000$ у.о., а величина франшизи $L = 6000$ у.о. Визначити величину ризикової премії при повному, пропорційному та за правилом першого ризику відшкодуванні збитку, а також для умовної та безумовної франшизи, якщо ймовірність настання страхового випадку $p = 0{,}01$, а величина збитку розподілена рівномірно від 0 до повної вартості майна.

Розв'язок. Скориставшись вище наведеними формулами, за умовами прикладу для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку маємо:

$$T_0^1 = \frac{0{,}01 \cdot 20000}{2} = 100;\ T_0^2 = \frac{0{,}01 \cdot 15000}{2} = 75;$$

$$T_0^3 = 0,01\left(15000 - \frac{225000000}{2\cdot 20000}\right) = 93,75;\ \ T_0^4 = 0,01\left(\frac{(20000)^2 - (60000)^2}{2\cdot 20000}\right) = 91;$$

$$T_0^3 = 0,01\left(\frac{(20000 - 60000)^2}{2\cdot 20000}\right) = 49.$$

На основі отриманих результатів стверджуємо, що:

– величина ризикової премії за правилом першого ризику більша за величину ризикової премії при пропорційному відшкодуванні збитку;

– величина ризикової премії для умовної франшизи є більшою за величину ризикової премії для безумовної;

– величини ризикової премії для чотирьох вище наведених схем є меншими за ризикову премію при повному відшкодуванні.

Як і раніше, майно вартістю C страхується на суму S, ймовірність настання страхового випадку A дорівнює p, але величина фактичного збитку X розподілена за показниковим законом розподілу з функцією густини

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Якщо $S = C$, то величина ризикової премії [,с.38] $T_0 = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \exp(-\lambda C)\right)p.$

В [2] показано, що при пропорційному відшкодуванні збитку $T_0 = \frac{S}{\lambda C}\left(1 - e^{-\lambda C}\right)p$, при відшкодуванні за правилом першого ризику $T_0 = \frac{p}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda S}\right)$, для безумовної франшизи $T_0 = \frac{p}{\lambda}\left(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}\right)$, а для умовної $T_0 = p\left(Le^{-\lambda L} + \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}\right)\right).$

Приклад 2.5. За умовою прикладу 2.4 вважати, що величина збитку розподілена за показниковим законом з середнім значенням $\frac{1}{\lambda} = 8000$.

Розв'язок. Як і в прикладі 2.4, скориставшись вище наведеними формулами, матимемо:

$$T_0^1 = 0{,}01 \cdot 8000\left(1 - e^{-\frac{20000}{8000}}\right) = 73{,}44; \quad T_0^2 = \frac{15000}{20000} \cdot 73{,}44 = 55{,}88;$$

$$T_0^3 = 0{,}01 \cdot 8000\left(1 - e^{-\frac{15000}{8000}}\right) = 67{,}67; \quad T_0^4 = 0{,}01 \cdot 8000\left(e^{-\frac{6000}{8000}} - e^{-\frac{20000}{8000}}\right) = 31{,}23;$$

$$T_0^5 = 0{,}01 \cdot 6000 e^{-\frac{6000}{8000}} + 31{,}23 = 59{,}58.$$

Зауваження 2.1. Із знайденого значення ризикової премії $T_0^1 = 73{,}44$ випливає, що значення $\frac{1}{\lambda} = 7344 < 8000$ і не буде мати місце рівність для будь-якого значення C, причому зі збільшенням C різниця буде прямувати до нуля. Це пояснюється властивостями показникового розподілу.

Зауваження 2.2. Слід розрізняти пред'явлений і оплачений запити. Вони не обов'язково збігаються (пред'явлений запит дорівнює розміру реального збитку, а оплачений визначається умовами договору страхування). Зрозуміло, що оплачений запит не буде більшим пред'явленого. В даному прикладі досліджується саме оплачуваний запит, причому вважається що ці величини однакові між собою.

На основі отриманих результатів можна зробити висновки, аналогічні до висновків прикладу 2.4

В [3] подані формули для обчислення величини ризикової премії, коли величина збитку X розподілена за нормальним законом розподілу з функцією густини $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Якщо майно вартістю C страхується на повну вартість $S = C$, то

$$T_0 = p\left(\frac{\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) + \frac{C}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right),$$

При пропорційному відшкодуванні збитку:

$$T_0 = p\left(\frac{S}{C}\left(\frac{\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)+\frac{S}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)\right).$$

При відшкодуванні за правилом першого ризику:

$$T_0 = p\left(\frac{\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{S-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(S-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)+\frac{S}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{S-\mu}{\sigma}\right)\right)\right).$$

При безумовній франшизі:

$$T_0 = p\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{\frac{-(L-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{\frac{-(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)+\frac{L-\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)+$$

$$+p\frac{(C-L)}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

При умовній франшизі:

$$T_0 = p\left(\frac{\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(L-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{\frac{-(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)+\frac{C}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right).$$

де $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ – функція Лапласа.

Аналогічно до прикладів 2.4. і 2.5. можна обчислити значення величин ризикових премій для різних схем участі страхувальника у відшкодуванні збитку, але в силу громіздкості обчислень ми їх не наводимо.

2.2. Визначення величини ризикової надбавки

При проведенні страхування, сума виплачуваного страхового відшкодування об'єктам, що постраждали, як правило, відхиляється від страхової суми за ними. Причому, якщо за окремим договором виплата може бути тільки меншою або дорівнювати страховій сумі, то середня по групі договорів виплата на один договір може і перевищувати середню страхову суму. В цьому випадку при побудові нетто-премії вводиться ризикова надбавка. Нехай страховик володіє однорідним портфелем з n договорів з однаковими страховими сумами S і ймовірностями настання страхових випадків p. Його цікавить не тільки значення середнього числа настання страхових випадків і відносної частоти, але й величин d_1 і d_2 можливого перевищення цих значень з надійністю γ, що може призвести до розорення страхової компанії. Одним із засобів запобігання цьому є ризикова надбавка, визначення якої починається з побудови довірчого інтервалу для числа страхових випадків, як правило, симетричного відносно середнього значення. При цьому страховика цікавить найнесприятливіша ситуація: вихід за праву границю, і, відповідно, ймовірність цього. Різниця між правою границею та середнім значенням (d_1 або d_2) і є тією частиною ризику страховика, яку він хоче і повинен усунути.

Зокрема, з формул (1.8) і (1.7) отримуємо, що $d_1 = t\sqrt{npq}$, $d_2 = t\sqrt{pq/n}$, де t є розв'язком рівняння $\Phi(t) = \gamma/2$.

Якщо ми стверджуємо, що з надійністю γ фактичне число страхових випадків не вийде за праву границю, то ймовірність виходу за неї дорівнює $(1-\gamma)/2$.

Очевидно, що підвищення надійності γ призводить до розширення довірчого інтервалу. Тоді для страховика виникає проблема допустимої величини ризикової надбавки. Її збільшення відсуває праву границю довірчого інтервалу, зменшуючи ймовірність виходу за неї, або, що те саме, – знижує ймовірність розорення страховика, під якою розуміють ймовірність неможливості страховиком виконати свої зобов'язання. Тоді ймовірність нерозорення характеризує можливість виконання страховиком своїх зобов'язань, коли наявні в нього засоби перевищують загальну величину запиту на виплату.

Оскільки, як ми зауважили, ймовірність виходу за праву границю дорівнює ймовірності розорення страховика ε, то для надійності γ

ймовірність розорення $\varepsilon = (1-\gamma)/2$. Далі, надійність γ – це ймовірність того, що число страхових випадків потрапляє в довірчий інтервал, і з ймовірністю $(1-\gamma)/2$ воно вийде за праву границю. Тоді ймовірність нерозорення визначається цими двома ймовірностями і дорівнює $1-\varepsilon = \gamma + \frac{1-\gamma}{2} = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$.

Таким чином, страховика цікавить ймовірність виходу за „односторонню" праву границю. Тому, якщо ми будемо писати „з надійністю $\gamma = 0,95$", то це означає, що ймовірність розорення $\varepsilon = 0,025$, а ймовірність нерозорення $1-\varepsilon = 0,975$; $t_{0,95} = 1,96$.

Надалі в прикладах поряд із значенням γ вказуватимемо і значення ε.

Нехай випадкова величина η = {число страхових випадків в даному портфелі}. Тоді $M\eta = np$, $D\eta = npq$.

Оскільки сумарно зібрана ризикова премія дорівнює *npS*, а сумарна ризикова надбавка – $\sqrt{npq} \cdot S$, то відносна ризикова надбавка

$$\theta = t\sqrt{npq} \cdot S / npS = t\sqrt{q/p} \cdot 1/\sqrt{n} \qquad (2.3)$$

Перший множник характеризує вимогу на надійність (правильно було б писати t_γ), другий ступінь ризику в одному окремому договорі з цього портфеля (нагадаємо, що з (1.2) при $n = 1$ коефіцієнт варіації $W\eta = \sqrt{q/p}$), третій – обсяг портфеля (зауважимо, що добуток другого співмножника на третій – ступінь ризику для всього портфеля).

Легко побачити, що відносна ризикова надбавка збільшується, якщо:

- підвищується вимога до надійності або ступінь ризику в одному договорі (знижується ймовірність страхового випадку);
- зменшується обсяг портфеля.

Приклад 2.6. Портфель складається з $n = 1000$ однотипних договорів страхування, а ймовірність настання страхового випадку $p = 0,1$. Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ $(\varepsilon = 0,025)$ величину відхилення числа страхових випадків від середнього значення.

Розв'язок. За таблицею 2 у додатку $t_{0,95} = 1,96$, а $np = 100$, $\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9} \approx 9,48$. Тоді ризикова надбавка $d_1 = 1,96 \cdot 9,84 = 19,29$, а відносна ризикова надбавка $\theta = d_1 / np = 19,29/100 = 0,1929$ або 19,29%. При відносній ризиковій надбавці $\theta = 19,29\%$ число страхових випадків не перевищить $100 + 19,29 = 119,29 < 120$.

Нехай тепер число договорів портфеля збільшено в 10 разів, тобто $n = 10000$, $p = 0,1$. Тоді $np = 1000$, $npq = 900$, $\sqrt{npq} = 30$, $t_{0,95} = 1,96$, $d_1 = 1,96 \cdot 30 = 58,8$, $\theta = 58,8/1000 = 0,0588$, тобто відносна надбавка зменшилася більше, ніж в 3 рази.

Це означає, що страховик з таким портфелем може знижувати ризикову надбавку. В свою чергу, страховик з портфелем з прикладу 2.6, щоб конкурувати на страховому ринку, також повинен знижувати тарифи, що може призвести до зниження надійності, а можливо і до розорення.

Приклад 2.7. В умовах прикладу 2.6 знайти, яку надійність може забезпечити ризикова надбавка в розмірі 10% ризикової премії.

Розв'язок. Оскільки ризикова премія $T_0 = 0,1 \cdot 1000 = 100$, то ризикова надбавка $d_1 = 0,1 \cdot 100 = 10$. З другої сторони $10 = t_\gamma \cdot 9,48$, звідки $t_\gamma = 10/9,48 =$ 1,055, $\Phi(1,055) = 0,35314$ і $\gamma = 2\Phi(1,055) = 0,71$.

Приклад 2.8. В умовах прикладу 2.6. з надійністю $\gamma = 0,95$ $(\varepsilon = 0,025)$ знайти величину відхилення відносної частоти $W_n(A)$ настання страхової події *A* від її ймовірності p.

Розв'язок. За таблицею 2 у додатку $t_{0,95} = 1,96$. Тоді $d_2 = t_\gamma \sqrt{pq/n} =$ $= 1,96\sqrt{0,1 \cdot 0,9/1000} = 0,019$.

Приклад 2.9. В страховій компанії 6000 договорів, в кожному з яких ймовірність настання страхового випадку $p = 0,005$. Виплачувана страхова сума за одним договором $S = 100000$ у.о., а одноразова нетто-премія $T_H = 800$ у.о. На який прибуток може розраховувати страховик з надійністю $\gamma = 0,95$ $(\varepsilon = 0,025)$?

Розв'язок. Загальна сумарна нетто-премія з всього портфеля складає $6000 \cdot 800 = 4800000$ (у.о.). Очікуване число страхових випадків $np =$ $= 6000 \cdot 0,005 = 30$, а середнє квадратичне відхилення $\sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0,995} =$ $= 5,4635$.

За таблицею 2 у додатку $t_{0,95} = 1,96$, а величина відхилення числа страхових випадків від середнього значення $d_1 = t_\gamma \sqrt{npq} = 1,96 \cdot 5,4635 =$ $= 10,71$. Таким чином, слід орієнтуватися на $np + d_1 = 30 + 10,71 \approx 41$ страхових випадків. Тоді в страховика залишиться $4800000 - 4100000 = 700000$ (у.о.).

Приклад 2.10. В умовах прикладу 2.9 визначити надійність, з якою можна стверджувати, що зібраної нетто-премії вистачить для виплати відшкодувань.

Розв'язок. Зібраної нетто-премії вистачить для виплати $4800000 : 100000 = 48$ відшкодувань. З формули $m - np \le t_\gamma \sqrt{npq}$ отримуємо $48 - 30 \le t_\gamma \cdot 5,4635$ або $t_\gamma \ge \dfrac{18}{5,4635} = 3,29$ і $\Phi(t_\gamma) \ge \Phi(3,29) = 0,4995$.

Надійність γ знайдемо з умови $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$, тобто $\gamma = 0,999$.

Таким чином, з надійністю $\gamma = 0,999$ можна стверджувати, що зібраної нетто-премії вистачить для виплати відшкодувань.

Ризикова премія $T_0 = p \cdot S = 100000 \cdot 0,005 = 500$ (у.о.), відповідно ризикова надбавка $T_p = 800 - 500 = 300$ (у.о.) і $\theta = 60\%$.

Приклад 2.11. Страховий портфель нараховує $n = 200$ договорів з однаковими виплатами $S = 30$ у.о. і ймовірностями настання страхових випадків $p = 0{,}1$. Знайти величину нетто-премії, щоб з надійністю $\gamma = 0{,}95$ $(\varepsilon = 0{,}025)$ можна було б гарантувати виплати за всіма запитами.

Розв'язок. Ризикова премія на один договір $M\eta = p \cdot S = 0{,}1 \cdot 30 = 3$ (у.о.), сумарна ризикова премія $npS = 3 \cdot 200 = 600$(у.о.). Тоді сумарна ризикова надбавка $d_1 = t_\gamma \sqrt{npq} \cdot S = 1{,}96\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 200} \cdot 30 = 249{,}31$, а за формулою (2.3) відносна ризикова надбавка $\theta = 249{,}31/600 = 0{,}42$ і $T_н = T_o(1+\theta)$ $= 3 \cdot 1{,}42 = 4{,}26$ у.о.

Розглянемо процес формування ризикової надбавки в договорах комбінованого страхування, на основі прикладу 2.2.

Знаходимо апостеріорні ймовірності $p_1 = \dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}995}{0{,}0621812} = 0{,}622$, $p_2 = \dfrac{0{,}96 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}995}{0{,}0621812} = 0{,}303$, $p_3 = \dfrac{0{,}96 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}005}{0{,}621812} = 0{,}075$, які ми використовуватимемо в якості вагових коефіцієнтів при побудові ризикової надбавки. Крім того ,

$$pq(A) = 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 0{,}0384, \sigma_1 = 0{,}1959; pq(B) = 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 0{,}196, \sigma_2 = 0{,}14;$$
$$pq(C) = 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 0{,}004975, \sigma_3 = 0{,}0705.$$

Якщо страхувати кожен ризик окремо, то ризикова надбавка

$$T_p = t_\gamma(0{,}1959 + 0{,}14 + 0{,}0705) = 0{,}4064 t_\gamma$$

Для комбінованого договору страхування ризикову надбавку побудуємо спочатку на основі середньоквадратичного відхилення. Тоді, враховуючи ваги, отримаємо $T_p = t_\gamma(0{,}622 \cdot 0{,}1959 + 0{,}303 \cdot 0{,}14 + 0{,}075 \cdot 0{,}705) = 0{,}1692 t_\gamma$, що значно менше за $0{,}4064 t_\gamma$.

Якщо ж опиратися не на середнє квадратичне відхилення, а на дисперсію, то

$$T_p = t_\gamma \sqrt{0{,}0384 \cdot 0{,}622 + 0{,}0196 \cdot 0{,}303 + 0{,}004975 \cdot 0{,}075} = 0{,}1738 t_\gamma$$

Таким чином, видно, що в комбінованих договорах здешевлення страхування досягається не тільки за рахунок ризикової премії, але й за рахунок ризикової надбавки, тобто суттєво знижуються обидві складові нетто-премії, що тягне за собою і зниження брутто-премії, причому величина зміни ризикової надбавки залежить від правила її формування (на основі середнього квадратичного відхилення або на основі дисперсії).

Нехай, як і раніше, p – ймовірність настання страхового випадку, X – величина фактичного збитку, але відшкодовується лише передбачена договором частина V.

Для розрахунку ризикової надбавки необхідно знайти величину дисперсії, DV, яка визначається через умовну дисперсію $D(V|A)=M(V^2|A)-(M(V|A))^2$ формулою

$$DV = pD(V|A)+p(1-p)(M(V|A))^2 . \qquad (2.4)$$

Зауважимо, що ігнорування другого доданку в формулі (2.4) призведе до неоправданого суттєвого зниження середнього квадратичного відхилення, що негативно відіб’ється на оцінці ризикової надбавки і надійності.

Розглянемо спочатку випадок, коли величина збитку X – є дискретна випадкова величина. Продемонструємо механізм обчислення ризикової надбавки T_p для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку на прикладі 2.3, в якому обчислені величини ризикової премії для ймовірності настання страхового випадку p=0,1, і якими ми скористаємося при обчисленні величини ризикової надбавки.

1. Майно вартістю C страхується на повну суму. Тоді $M(V|A)=200$,

$$D(V|A)=50^2\cdot 0,3+100^2\cdot 0,3+150^2\cdot 0,2+250^2\cdot 0,1+1000^2\cdot 0,1-200^2=74500,$$

$$DV=0,1\cdot 74500+0,1\cdot 0,9\cdot 200^2=11050, \sigma_V=105,12.$$

Вважаємо, що повна вартість майна $C=1000$ і застраховане воно на суму $S=250$.

2. При пропорційному відшкодуванні збитку

$$M(V|A)=200\cdot 250/1000=50, D(V|A)=74500\cdot 250/1000=18625,$$

$$DV=0,1\cdot 18625+0,1\cdot 0,9\cdot 50^2=1975, \sigma_V=45,69$$

3. За правилом першого ризику $M(V \mid A)=100$,

$$D(V \mid A)=50^2 \cdot 0,3+100^2 \cdot 0,3+150^2 \cdot 0,2+250^2 \cdot 0,1-100^2=4500;$$

$$DV=0,1 \cdot 4500+0,1 \cdot 0,9 \cdot 10000=1350, \sigma_V=36,7.$$

Якщо величина франшизи L=200, то:

4. Для безумовної франшизи $M(V \mid A)=85$,

$$D(V \mid A)=(250-200)^2 \cdot 0,1+(1000-200)^2 \cdot 0,1-85^2=57025,$$

$$DV=0,1 \cdot 57025+0,1 \cdot 0,9 \cdot 85^2=6352,75, \sigma_V=79,7.$$

5. Для умовної франшизи $M(V \mid A)=125$,

$$D(V \mid A)=250^2 \cdot 0,1+1000^2 \cdot 0,1-125^2=90625,$$

$$DV=0,1 \cdot 90625+0,1 \cdot 0,9 \cdot 125^2=10468,75, \sigma_V=102,3.$$

Зауважимо, що для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку (2-5) середнє квадратичне відхилення менше за середнє квадратичне відхилення для схеми повного відшкодування.

Для заданої надійності γ ризикову надбавку шукаємо за формулою $T_p=t_\gamma \cdot \sigma_V$.

Нехай тепер величина збитку X є неперервною випадковою величиною. Зауважимо, що для випадку, коли вона рівномірно розподілена від 0 до повної вартості майна C, в [, с. 91-92] наведені формули для обчислення величини умовної дисперсії для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку, а в []; для обчислення дисперсії DV:

1. $DV=\frac{pC^2}{12}+pq\frac{C^2}{4}$, $\sigma_V=C\sqrt{\frac{p}{12}+\frac{pq}{4}}$.

2. $DV=\frac{pS^2}{12}+pq\frac{S^2}{4}$, $\sigma_V=S\sqrt{\frac{p}{12}+\frac{pq}{4}}$.

3. $DV=\frac{pC^2}{12}\left(\frac{4S^2}{C^3}-\frac{3S^4}{C^4}\right)+pq\left(S-\frac{S^2}{2C}\right)^2$,

$$\sigma_V=S\sqrt{\frac{p}{12}\left(\frac{4S}{C}-\frac{3S^2}{C^2}\right)+\frac{pq}{4}\left(\frac{2C-S}{C}\right)^2}.$$

4. $DV = p\left(\frac{C^3 - L^3}{3C} - p\frac{\left(C^2 - L^2\right)^2}{4C^2}\right)$,

$$\sigma_V = \sqrt{p\left(\frac{C^3 - L^3}{3C} - p\frac{\left(C^2 - L^2\right)^2}{4C^2}\right)}.$$

5. $DV = \frac{pC^2}{12}\left(1 - \frac{L}{C}\right)^3\left(1 + \frac{3L}{C}\right) + \frac{pqC^2}{4}\left(1 - \frac{L}{C}\right)^4$,

$$\sigma_V = C\sqrt{\frac{p}{12}\left(1 - \frac{L}{C}\right)^3\left(1 + \frac{3L}{C}\right) + \frac{pq}{4}\left(1 - \frac{L}{C}\right)^4}.$$

Приклад 2.12. За умовами прикладу 2.4 визначити величину ризикової надбавки для надійності $\gamma = 0,95$.

Розв'язок. За таблицею 2 у додатку $t_{0,95} = 1,96$. Тоді ризикова надбавка $T_p = t_\gamma \cdot \sigma_V$ і нам залишилось лише за вище наведеними формулами обчислити σ_V. Маємо:

$$\sigma_V^1 = 20000\sqrt{\frac{0,01}{12} + \frac{0,01 \cdot 0,99}{4}} = 1150,36;$$

$$\sigma_V^2 = 15000\sqrt{\frac{0,01}{12} + \frac{0,01 \cdot 0,99}{4}} = 862,77;$$

$$\sigma_V^3 = 15000\sqrt{\frac{0,01}{12}\left(\frac{4 \cdot 15000}{20000} - \frac{3 \cdot (15000)^2}{(20000)^2}\right) + \frac{0,01 \cdot 0,99}{4}\left(\frac{2 \cdot 20000 - 15000}{20000}\right)^2} = 1056,51;$$

$$\sigma_V^4 = \sqrt{0,01\left(\frac{20000^3 - 6000^3}{3 \cdot 20000} - 0,01\frac{20000^2 - 6000^2}{4 \cdot 20000^2}\right)} = 1121,31;$$

$$\sigma_V^5 = 20000\sqrt{\frac{0,01}{12}\left(1 - \frac{6000}{20000}\right)^2\left(1 + \frac{3 \cdot 6000}{20000}\right) + \frac{0,01 \cdot 0,99}{4}\left(1 - \frac{6000}{20000}\right)^4} = 740,29.$$

Тоді $T_p^1 = 1,96 \cdot 1150,36 = 2254,71$; $T_p^2 = 1691,03$; $T_p^3 = 2070,76$; $T_p^4 = 2197,77$; $T_p^5 = 1450,97$.

Для випадку, коли величина збитку X розподілена за показниковим законом розподілу, в [ ] наведені наступні формули для обчислення величини дисперсії DV :

1. $DV = \dfrac{p}{\lambda^2}(1 + 2C\lambda e^{-\lambda C} - e^{-2\lambda C}) + \dfrac{pq}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda C})^2.$

2. $DV = \dfrac{pS^2}{\lambda^2 C^2}(1 + 2C\lambda e^{-\lambda C} - e^{-2\lambda C}) + \dfrac{pqS^2}{\lambda^2 C^2}(1 - e^{-\lambda C})^2.$

3. $DV = \dfrac{p}{\lambda^2}(1 + 2S\lambda e^{-\lambda S} - e^{-2\lambda S}) + \dfrac{pq}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda S})^2.$

4. $DV = \dfrac{p}{\lambda^2}(-2(C - L)\lambda e^{-\lambda C} + (e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C})(2 - e^{-\lambda L} + e^{-\lambda C})) + \dfrac{pq}{\lambda^2}(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C})^2.$

5. $DV = p(L^2 e^{-\lambda L} + \dfrac{2}{\lambda}(Le^{-\lambda L} - Ce^{-\lambda C}) + \dfrac{2}{\lambda^2}(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}) -$

$$- \frac{1}{\lambda^2}(Le^{-\lambda L} + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}))^2 + pq(Le^{-\lambda L} + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda L} - e^{\lambda C}))^2.$$

Скориставшись ними, за умовами прикладу 2.5 можна обчислити величину ризикової надбавки для кожної схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку, але в силу громіздкості обчислень ми їх не наводимо.

Після розрахунку нетто-премії встановлюється розмір страхового внеску чи брутто-премії. Для обчислення останньої до нетто-премії додають навантаження. Витрати на проведення страхування зазвичай розраховуються на 1(о.с.с.), наприклад, 100 грн., а інші надбавки встановлюються у відсотках до брутто-премії.

Розмір сукупної брутто-премії розраховується за формулою:

$$T_б = T_Н + F_Н, \qquad (2.5)$$

де $T_б$ – брутто-премія, $T_Н$ - нетто-премія, $F_Н$ - навантаження.

В цій формулі величини $T_б$, $T_Н$, $F_Н$ вказуються в абсолютному розмірі, тобто в гривнях із 100 грн. страхової суми.

Оскільки низка статей навантаження встановлюється у відсотках до брутто-премії, то остання на практиці визначається за формулою: $T_б = T_Н + F'_Н + F_{R/Z} \cdot T_б$, де $F'_Н$ - статті навантаження, що передбачаються в тарифі в грн. із 100 грн. страхової суми, $F_{K/Z}$ – частка статей навантаження, що закладаються в тариф у відсотках до брутто-премії.

Звідси після нескладних перетворень маємо:

$$T_б = \frac{T_Н + F'_Н}{1 - F_{K/Z}} \qquad (2.6)$$

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-премії, то $F'_Н = 0$ і (2.6) прийме вигляд:

$$T_б = \frac{T_Н}{1 - F_{K/Z}} \qquad (2.7)$$

Приклад 2.13. Нетто-премії по страхуванню домашнього майна визначені в сумі 0,2 грн. із 100 грн. страхової суми, а статті навантаження складають: витрати на проведення страхування (включаючи оплату праці страхових агентів) – 0,06 грн.; витрати на проведення запобіжних заходів – 4% брутто-премії; прибуток – 15% брутто-премії. Визначити величини брутто-премії.

Розв'язок. В нашому випадку $T_Н$ = 0,2 грн., $F'_Н$ = 0,06 грн., $F_{K/Z}$ = 0,19. Тоді за формулою (2.7) $T_б$ = (0,2 + 0,06)/(1 – 0,19) = 0,32 грн.

2.3. Індивідуальні моделі ризику

Елементарною складовою *фінансового ризику страхової компанії* є *індивідуальний запит, величина якого X* вимірюється в певних грошових одиницях.

Якщо ми маємо справу з великою *однорідною групою договорів* і не цікавимося долею конкретних договорів з цієї групи, то ми можемо говорити про випадкові величини.

В ході розвитку *актуарної математики* були виділені основні типи випадкових величин, які адекватно описують розміри індивідуальних запитів до страхової компанії. Крім того, були означені основні операції над цими величинами, які становлять інтерес для моделювання конкретних ситуацій, і досить часто зустрічаються в страховій справі.

Загальною базою актуарних розрахунків у ризиковому страхуванні є *моделі страхового ризику*. Однією з таких моделей є модель індивідуального ризику, яка ґрунтується на таких припущеннях:

- вивчається портфель договорів страхування, укладених на один і той самий термін одночасно;
- ризики всіх договорів однакові, а страховий випадок для кожного з договорів портфеля може реалізуватися за час дії договору не більше одного разу;
- вважається, що договір страхування діє протягом фіксованого проміжку часу, достатньо малого, щоб можна було знехтувати депозитними та інфляційними процентами ;
- кількість договорів фіксована і не випадкова;
- плата за страхування вноситься на початку періоду, що аналізується, і ніяких додаткових надходжень протягом періоду немає;
- страхова сума виплачується повністю зразу після надходження запиту.

Отже, розглядається портфель, який складається з n договорів страхування, укладених на однаковий термін. За час своєї дії договір може призвести до появи не більше ніж до одного запиту, а виплата за ним складає будь-яку величину в межах страхової суми S. Страхова подія A виникає з ймовірністю q, однаковою для всіх договорів портфеля. Потрібно визначити розмір ризикової премії договору страхування в умовах моделі індивідуального ризику.

Нехай число запитів на один договір описує випадкова величина $N_j = \begin{cases} 1, q_j \\ 0, 1 - q_j \end{cases}$, яку називають *індикатором страхового випадку* для j-го договору. Тоді відшкодування за j-им договором описує випадкова величина $X_j = N_j Y_j$, де Y_j - розмір оплачуваного збитку за одним договором.

Випадкові величини N_j і Y_j, як правило, незалежні, оскільки фактори, що їх визначають, різні. Крім того, величину Y_j, яка описує можливий збиток, можна вважати неперервною випадковою величиною, а ризикова премія $T_0 = MX_j$.

Твердження 2.1. Для випадкової величини $X_j = N_j Y_j$ справедливі рівності

$$MX_j = MN_j \cdot MY_j = q_j MY_j,$$
$$DX_j = MN_j \cdot DY_j + DN_j \left(MY_j\right)^2 = qDY_j + q(1-q)\left(MY_j\right)^2 \qquad (2.8)$$

Знаючи розподіл випадкової величини Y_j, можна обчислювати відповідні характеристики, оскільки розподіл розміру збитку має сенс тільки при висуненні запитів на виплату. Тому надалі працюватимемо з умовними розподілами.

Приклад 2.14. Ймовірність страхового випадку $q = 0{,}1$, а умовний закон розподілу розміру збитку задається таблицею

Y_j	100	200	300	400
p_j	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти розмір ризикової премії.

Розв'язок. Умовне математичне сподівання $MY_j = 100 \cdot 0{,}4 + 200 \cdot 0{,}3 +$ $+300 \cdot 0{,}2 + 400 \cdot 0{,}1 = 200$. Тоді за формулою (2.8) величина ризикової премії $MX_j = qMY_j = 200 \cdot 0{,}1 = 20$.

Приклад 2.15. Застрахований об'єкт коштує 1000 грн. Збиток, у разі виникнення пожежі, рівномірно розподілений від нуля до повної вартості об'єкта, а ймовірність виникнення пожежі $q = 0,01$. Визначити середнє, дисперсію виплат на один договір і коефіцієнт варіації.

Розв'язок. Нехай Y_j – випадкова величина, яка описує величину можливого збитку при пожежі, рівномірно розподілена на відрізку від 0 до 1000 грн., а N_j, як і раніше, – індикатор страхового випадку даного договору. Тоді виплати за j-им договором описує випадкова величина $X_j = N_j Y_j$, числові характеристики якої шукаємо за формулою (2.8).

З теорії ймовірностей відомо, що для рівномірно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини Y_j виконується $MY_j = \dfrac{b+a}{2}$, $DY_j = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. Для нашої задачі $MY_j = 500$, $DY_j = 1000000/12$. Крім того, $MN_j = q = 0,01$, $DN_j = q(1-q) = 9,9 \cdot 10^{-3}$. Таким чином, середньоочікувані виплати $MX_j = 500 \cdot 0,01 = 5$ грн.; а дисперсія виплат на один договір $DX_j = 0,01 \cdot 1000000/12 + 0,01 \cdot 0,99 \cdot 250000 = 3308,3$ грн.

Значення коефіцієнта варіації виплат на один договір $W = \dfrac{\sqrt{3308,3}}{5} \approx 11,5$ вказує на неприйняття страховиком даного ризику.

Приклад 2.16. Деяка страхова подія настає з ймовірністю $q = 0,2$, а можливі збитки Y_j розподілені за показниковим законом з параметром $\lambda = 1/2$. Визначити середнє, дисперсію і коефіцієнт варіації виплат на один договір.

Розв'язок. З теорії ймовірності відомо, що для показниково розподіленої з параметром λ випадкової величини Y_j виконується $MY_j = \sqrt{DY_j} = \dfrac{1}{\lambda}$. Для нашої задачі $MY_j = \sqrt{DY_j} = 2$, $MN_j = q = 0,2$, $DN_j = q(1-q) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$. Таким чином, середньоочікувані виплати (2.8)

$MX_j = MN_j \cdot MY_j = 2 \cdot 0,2 = 0,4$ грн., а дисперсія виплат на один договір $DX_j = 0,2 \cdot 4 + 0,16 \cdot 4 = 1,44$ грн.

Коефіцієнт варіації виплат на один договір $W = \sqrt{\frac{1-q}{q}} = \sqrt{\frac{1-0,2}{0,2}} = 2$.

Відзначимо, що знайдене середнє значення пред'явленого запиту $MX_j = 0,4$ грн. є меншим за значення параметра $\lambda = 0,5$, що характерно для показникового розподілу (див. зауваження 2.1).

Приклад 2.17. Щорічні виплати страхової компанії моделюються як неперервна випадкова величина X з функцією густини $f_X(x) = \frac{3}{(1+x)^4}$, $x > 0$. Визначити середні виплати компанії за один місяць.

Розв'язок. Для шуканої величини MX маємо

$$MX = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{3x}{(1+x)^4}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{3(x+1)^{-2}}{-2} + (x+1)^{-3}\right)\Bigg|_0^A = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.18. Закон розподілу розміру страхового відшкодування X задається таблицею

X	20	30	40	50	60	70	80
p_i	0,15	0,1	0,05	0,2	0,1	0,1	0,3

.

Знайти ймовірність того, що розмір страхових відшкодувань відрізняється від свого середнього менше, ніж на σ_X.

Розв'язок. Маємо $MX = 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,1 + \ldots + 70 \cdot 0,1 + 80 \cdot 0,3 = 55$. $DX = MX^2 - (MX)^2 = 20^2 \cdot 0,15 + 30^2 \cdot 0,1 + \ldots + 70^2 \cdot 0,1 + 80^2 \cdot 0,3 - (55)^2 = 475$, $\sigma_X = 21,794$. Нам потрібно знайти ймовірність події $\{|X - 55| < 21,794\}$, або, що те саме, $\{33,206 < X < 76,794\}$. Маємо $P\{33,206 < X < 76,794\} =$ $= P\{X = 40\} + P\{X = 50\} + P\{X = 60\} + P\{X = 70\} = 0,45$.

Приклад 2.19. Величина ризикової премії $MX = 2$, дисперсія величини збитку $DY = 16$, а величини відшкодування – DX = 30. Обчислити ймовірність настання страхового випадку та середній розмір страхового відшкодування.

Розв'язок. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} qMY = 2; \\ DY = 16; \\ qDY + q(1-q)(MY)^2 = 30, \end{cases}$ отримаємо для q рівняння $8q^2 - 17q + 2 = 0$, корені якого $q_1 = 2$ і $q_2 = 1/8$. Оскільки $q_1 = 2 > 1$, то середній розмір збитку $MY = 2/q = 2 : \frac{1}{8} = 16$.

Приклад 2.20. Умовний закон розподілу страхового відшкодування X задається таблицею

X	0	500	1000	10000	50000	100000
p_i	0,9	0,06	0,03	0,008	0,001	0,001

.

Знайти середній розмір MY величини збитку після настання страхового випадку.

Розв'язок. Середнє значення величини страхового відшкодування

$$MX = 0 \cdot 0,9 + 500 \cdot 0,06 + 1000 \cdot 0,03 + 10000 \cdot 0,008 + 50000 \cdot 0,001 +$$
$$+100000 \cdot 0,001 = 290$$

Ймовірність настання страхового випадку знаходиться безпосередньо з закону розподілу та дорівнює $q = 1 - 0,9 = 0,1$. Тоді з формули $MX = qMY$ отримуємо, що $MY = 290 : 0,1 = 2900$.

Приклад 2.21. Для прогнозу середнього розміру збитку після настання страхового випадку актуарій використовує метод ковзної середньої за останні три роки. В поточному році середній збиток дорівнює 101, рік назад – 99, а 2 роки назад – 100.

Зробіть прогноз середнього збитку за рік на найближчі 5 років.

Розв'язок. Приймемо поточний рік за початковий і позначимо через y_n середній збитток за n-ий рік, а через $\hat{y}_n$ його прогноз на n-ий рік. За умовою прикладу $y_{-2}=100$, $y_{-1}=99$, $y_0=101$. Тоді $\tilde{y}_1=\dfrac{y_{-2}+y_{-1}+y_0}{3}=100$,

$\tilde{y}_2=\dfrac{y_{-1}+y_0+\tilde{y}_1}{3}=100$, $\tilde{y}_3=\dfrac{y_0+\tilde{y}_1+\tilde{y}_2}{3}=100{,}33$, $\tilde{y}_4=\dfrac{\tilde{y}_1+\tilde{y}_2+\tilde{y}_3}{3}=100{,}11$,

$\tilde{y}_5=\dfrac{\tilde{y}_2+\tilde{y}_3+\tilde{y}_4}{3}=100{,}15$.

Нехай тепер укладено n договорів страхування. Ймовірності надходження запиту за j-им договором дорівнюють q_j, $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Відшкодування за j-им договором описує, як і раніше, випадкова величина $X_j=N_jY_j$, а відшкодування за всіма договорами портфеля – випадкова величина $X=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$. Тоді формула (2.8) набуде вигляду

$$MX=\sum_{j=1}^{n}q_jMY_j,\ DX=\sum_{j=1}^{n}\left(q_jDY_j+q_j\left(1-q_j\right)\left(MY_j\right)^2\right). \tag{2.9}$$

Якщо в моделі всі виплати фіксовані, то їх дисперсії $DY_j=0$, і

відповідно $DX=\sum\limits_{j=1}^{n}q_j\left(1-q_j\right)\left(MY_j\right)^2$. При $q_j=q=const$

$$MX=q\sum_{j=1}^{n}MY_j,\ DX=q\sum_{j=1}^{n}DY_j+q\left(1-q\right)\sum_{j=1}^{n}\left(MY_j\right)^2.$$

Приклад 2.22. Статистичний аналіз даних про розміри страхових відшкодувань за деяким портфелем договорів показав, що, величина $Z=\ln X$ має нормальний розподіл з параметрами $a=6{,}012$ і $\sigma^2=1{,}792$.

Знайти ймовірність того, що $200<X<500$.

Розв'язок. Шукану ймовірність $p=P\left(200<X<500\right)$ запишемо у вигляді $p=P\left(200<e^Z<500\right)=P\left(\ln 200<Z<\ln 500\right)$. Поклавши $\eta=\dfrac{Z-a}{\sigma}$ і скориставшись інтегральною формулою Муавра-Лапласса, матимемо

$p=P\left(\dfrac{\ln 200-a}{\sigma}<\eta<\dfrac{\ln 500-a}{\sigma}\right)=P\left(\dfrac{\ln 200-6{,}012}{\sqrt{1{,}792}}<\eta<\dfrac{\ln 500-6{,}012}{\sqrt{1{,}792}}\right)\approx$

$\approx \Phi(0{,}151) - \Phi(-0{,}533) \approx 0{,}262$.

Приклад 2.23. Портфель складається з 300 незалежних договорів страхування терміном на 1 рік. Усі страхові суми однакові – 1000 у.о. Ймовірність надходження запитів за кожним із 100 договорів $p_1 = 0{,}1$ і $p_2 = 0{,}2$ за кожним із 200 договорів. Знайти середнє, дисперсію виплат і коефіцієнт варіації.

Розв'язок. Згідно умови $MY_j = 1000$ у.о., $DY_j = 0$. Тоді за формулою (2.9) отримаємо: $MX = 1000(100 \cdot 0{,}1 + 200 \cdot 0{,}2) = 50000$ у.о., $DX = 1000^2 (100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8) = 41 \cdot 10^6$ у.о., $\sigma = 6403$ у.о., $W(X) = \sigma / MX = (6403/50000) \cdot 100\% = 13\%$.

Такий ризик є прийнятним для страховика.

Приклад 2.24. Портфель містить 8000 договорів страхування терміном на 1 рік, серед яких 5000 договорів на страхову суму 10000 у.о. і 3000 – на суму 20000 у.о. Ймовірності надходження запитів однакові та дорівнюють 0,02. Знайти середнє, дисперсію виплат і коефіцієнт варіації.

Розв'язок. За формулою (2.9)

$MX = 50000 \cdot 10^4 \cdot 0{,}02 + 3000 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}02 = 220 \cdot 10^4$ у.о.;

$DX = 5000 \cdot 10^8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 3000 \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 \approx 333{,}2 \cdot 10^8$ у.о.;

$\sigma = 18{,}25 \cdot 10^4$ у.о.; $W(X) = 18{,}25 \cdot 10^4 / 220 \cdot 10^4 = 0{,}0783$.

Як зазначалося раніше, завдяки коефіцієнту варіації можна говорити про прийняття страховиком даного ризику. Зокрема, аналізуючи розв'язки прикладів 2.23, 2.24 стверджуємо, що страховик може приймати даний ризик.

2.4. Колективні моделі ризику

Як і для моделі індивідуального ризику, в моделі колективного ризику аналізується відносно короткий проміжок часу та припускається, що страхова премія повністю вноситься на початку періоду, який аналізується. Проте, на відміну від моделі індивідуального ризику, в моделі колективного ризику весь портфель укладених договорів страхування розглядається як єдине ціле без розчленування окремих складових. Відповідно, страхові випадки не пов'язуюються з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Звідси випливає, що основною характеристикою портфеля є не число укладених договорів, а загальне число N запитів на відшкодування. Очевидно, що N = {кількість запитів на виплату} є випадковою величиною.

Друга важлива відмінність моделі колективного ризику полягає в тому, що випадкові величини X_i ={розмір i-го відшкодування} мають ідентичні розподіли. Це припущення означає певну рівноцінність страхових випадків, пов'язану з тим, що вони розглядаються як наслідок загального ризику компанії, а не індивідуальних договорів.

Крім того, випадкові величини N і X_i є взаємно незалежними. Оскільки X_i описують реальне відшкодування, то вони є строго додатними.

Загальна сума відшкодувань у колективній моделі, як і в індивідуальній, становить суму окремих виплат: $Z = X_1 + X_2 + ... + X_k$.

Розподіл випадкової величини Z залежить від розподілу випадкової величини N і розподілів випадкових величин X_k.

Для характеристики випадкової величини N найчастіше користуються розподілом Пуассона, або від'ємним біноміальним розподілом. Випадкова величина X може описуватися дискретними розподілами, логарифмічно-нормальним і показниковим, розподілом Парето, гамма-розподілом та деякими іншими. На підставі розподілу складових визначається розподіл загальної суми відшкодувань Z.

Тому для застосування моделі колективного ризику актуарій у першу чергу повинен визначити розподіли складових X та N, а тоді на підставі формул, які описують ці розподіли, визначити величину сукупного збитку та його середньоквадратичне відхилення.

Можна показати, що якщо випадкові величини N і Z незалежні (або N є марковським процесом), тобто N не залежить від майбутніх виплат X, то

$$MZ = MN \cdot MX , \; DZ = MN \cdot DX + \left[MX \right]^2 DN . \qquad (2.10)$$

Порівняння формул (2.8) і (2.10) вказує на відмінність в підходах до індивідуальної та колективної моделі. В індивідуальних моделях спочатку обчислюються середні значення виплат за кожним договором, а потім ці середні сумуються за числом договорів. В колективних – моделюється число запитів, тому сумування за договорами замінюється добутком двох математичних сподівань $\left(MN \cdot MX \right)$, значення яких нам потрібно знайти.

Виявляється, таке можна зробити лише в деяких випадках. Нехай число запитів N розподілене за законом Пуассона з параметром λ. Тоді сума виплат Z має складний розподіл Пуассона. Оскільки для розподілу Пуассона $MN = DN = \lambda$, то (2.10) набуде вигляду

$$MZ = \lambda MX , \; DZ = \lambda DX + \lambda \left[MX \right]^2 = \lambda MX^2 \qquad (2.11)$$

Сума декількох випадкових величин, які мають розподіл Пуассона, має складний розподіл Пуассона. Параметр $\lambda = \sum_i \lambda_i$, $w_i = \lambda_i / \lambda$.

Приклад 2.25. Страховий портфель нараховує $N = 10000$ договорів страхування на 1 рік. Серед них $N_1 = 5000$ застраховано на 10000 у.о., а $N_2 = 5000$ на 20000 у.о. Ймовірність пред'явлення запиту дорівнює 0,04 за всіма договорами.

Визначити математичне сподівання та дисперсію загального розміру виплат для всього портфелю.

Розв'язок. Розв'яжемо приклад з допомогою індивідуальної моделі. Оскільки число виплат N_1 і N_2 в кожному субпортфелі випадкове, то загальний розмір запитів на виплати $Z = 10000 N_1 + 20000 N_2$. Тоді за формулою (2.9), враховуючи, що дисперсії виплат дорівнюють 0, отримуємо

$$MZ = 5000 \cdot 0,04 \cdot 10000 + 5000 \cdot 0,04 \cdot 20000 = 6 \cdot 10^6;$$

$$DZ = 5000 \cdot 0,04 \cdot 0,96 \cdot 10000^2 + 5000 \cdot 0,04 \cdot 0,96 \cdot 20000^2 = 9,6 \cdot 10^{10}.$$

Розв'яжемо дану задачу з допомогою колективної моделі, тобто не визначаємо число запитів в кожному субпортфелі, а працюємо з портфелем в цілому. Виходячи зі складного розподілу Пуассона, знаходимо інтенсивності, врахувавши, що при однакових n і q однакові і λ_i: $\lambda_1 = \lambda_2 = 5000 \cdot 0,04 = 200$.

Тоді для субпортфелів розмір виплат має складний розподіл Пуассона з $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 400$, $w_1 = w_2 = 200/400 = 0,5$, і $MX = 0,5 \cdot 10000 + 0,5 \cdot 20000 = 15000$, $MX^2 = 0,5 \cdot 10^8 + 0,5 \cdot 4 \cdot 10^8 = 2,5 \cdot 10^8$.

Відповідно за формулою (2.11) $MZ = 400 \cdot 15000 = 6 \cdot 10^6$; $DZ = 400 \cdot 2,5 \cdot 10^8 = 10 \cdot 10^{10}$.

Порівнюючи два розв'язки, бачимо, що математичні сподівання збіглися, а дисперсія в колективній моделі дещо більша за дисперсію в індивідуальній.

2.5. Визначення тарифної нетто-премії з діючих ризикових видів страхування

2.5.1. При стійкості тимчасового ряду показників збитковості зі 100 грн. страхової суми

Важливе місце при визначенні нетто-премії відводиться *показнику збитковості страхової суми.* Слід зауважити, що складові частини цього показника наводяться як з метою вказати, що він застосовується для визначення страхових тарифів, так і з метою націлити фахівців на його використання при аналізі показників страхової діяльності.

Нехай A – страхова подія (страховий випадок), а $P(A)$ - його ймовірність. Через K позначимо *коефіцієнт співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір*. Тоді *ймовірністю збитку* називається добуток ймовірності страхового випадку $P(A)$ на коефіцієнт *K*: $P(A)\cdot K$. Якщо добуток $P(A)\cdot K$ помножити на 1 о.с.с., зокрема, на 100 грн., то число

$$g = P(A)\cdot K\cdot 100\text{грн.} \tag{2.12}$$

називається показником збитковості із 100 грн. страхової суми.

Представимо формулу (2.12) в розгорнутому вигляді. Згідно з визначенням $P(A) = K_B / K_Д$, $K = C_B / C_C$, де K_B – кількість виплат за певний період (в основному за рік), $K_Д$ – кількість укладених договорів у даному році, C_B – середня виплата на один договір, C_C – середня страхова сума на один договір. Тоді:

$$g = \frac{K_B\cdot C_B}{K_Д\cdot C_C}\cdot 100 = \frac{B}{C}\cdot 100\ \text{грн.} \tag{2.13}$$

У грошовому виразі чисельник *B* вказаного відношення дорівнюватиме сумі страхового відшкодування, а знаменник *C* – максимально можливому страховому відшкодуванню, яке дорівнює страховій сумі застрахованих об'єктів.

При стійкості тимчасового ряду показників збитковості за останні 5 років ризикова премія розраховується як середньо п'ятирічна збитковість і забезпечує виплати в звичайному для останніх п'яти років розмірі. Ряд показників збитковості вважається стійким, якщо в ньому відсутня виражена тенденція до збільшення (зменшення) збитковості.

Необхідність включення ризикової надбавки в тарифну нетто-премію пояснюється тим, що в несприятливі роки ризикової премії буде недостатньо для виконання страховими компаніями своїх зобов'язань, а ризикова надбавка створює певний запас міцності для страховика. В сприятливі роки не використана на виплати ризикова надбавка направляється в резервний фонд.

Визначення ризикової надбавки проводиться на основі ряду показників збитковості зі 100 грн. страхової суми за останні 5 років.

Статистичним аналогом ризикової надбавки є виправлене середнє квадратичне відхилення $S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}}$, де $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ – середня арифметична збитковість за останні п'ять років, y_i – показник збитковості в конкретному *і*-му році, *n* – число років у тимчасовому ряді показників збитковості (в нашому випадку *n* = 5).

Приклад 2.26. За останні 5 років за даним видом страхування рівень збитковості становить по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми y_i: 0,25; 0,3; 0,22; 0,27; 0,31. Визначити величину ризикової надбавки, сукупної нетто-премії.

Розв'язок. Розв'язок подамо у вигляді таблиці, обчисливши попередньо середню збитковість за 5 років: $\overline{y}=\frac{0,25+0,3+0,22+0,27+0,31}{5}=0,27$ грн.

Роки	Збитковість із 100 грн. страхової суми $\left(y_i\right)$ грн.	Середня збитковість $\left(\overline{y}\right)$ грн.	Відхилення $\left(y_i-\overline{y}\right)$	Квадрати відхилення $\left(y_i-\overline{y}\right)^2$
1	0,25	0,27	-0,02	0,0004
2	0,3	0,27	0,03	0,0009
3	0,22	0,27	-0,05	0,0025
4	0,27	0,27	0	0
5	0,31	0,27	0,04	0,0016
Сума	1,35		0	0,0054

Далі, $S=\sqrt{\frac{0,0054}{\left(5-1\right)}}=\sqrt{0,00135}\approx 0,036$ грн., а нетто-премія визначається як сума середньо п'ятирічної збитковості (0,27 грн.) та ризикової надбавки (0,036 грн.) і становить у нашому прикладі 0,306 грн.

2.5.2. При наявності вираженої тенденції до збільшення (зниження) збитковості із 100 грн. страхової суми

При наявності вираженої тенденції до збільшення (зменшення) збитковості приходять до встановлення свідомо збиткового чи зайво рентабельного тарифу. У цьому випадку розрахунок ризикової премії базується на побудові прогнозу збитковості на майбутні 3 роки.

В цьому випадку користуються методом екстраполяції лінійного тренду. Це математичний метод прогнозної оцінки значень досліджуваного показника, в основі якого лежить продовження лінії знайденого тренду в області майбутніх значень даного показника.

Спочатку оцінюються параметри b_0 і b_1 шуканого рівняння лінійного тренду $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot t$, де $\hat{y}$ – збитковість із 100 грн. страхової суми, t – час у роках.

Оцінки параметрів є розв'язками наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} t_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} \ y_i = nb_0 + b_2 \sum_{i=1}^{n} t_i \end{cases},$$

де n – число років у тимчасовому ряді показників збитковості; y_i – значення збитковості в i-му році; t_i – номер року, якому відповідає значення збитковості, що дорівнює y_i.

Приклад 2.27. За 5 років за даним видом страхування рівень збитковості по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми задається у вигляді ряду y_i: 0,29; 0,3; 0,37; 0,5; 0,54. Обчислити ризикову надбавку та нетто-премію.

Розв'язок. Складемо таблицю для розрахунку показників, необхідних для визначення значень параметрів b_0 і b_1:

Номер рядка t_i	Фактична збитковість по роках (y_i)	$t_i \cdot y_i$	t_i^2
1	0,28	0,28	1
2	0,3	0,6	4
3	0,37	1,11	9
4	0,5	2	16
5	0,54	2,7	25

Сума	1,99	6,69	55

На основі останнього рядка таблиці записуємо наступну систему рівнянь $\begin{cases} 1,99 = 5b_0 + 15b_1 \\ 6,69 = 15b_0 + 55b_2 \end{cases}$, розв'язки якої $b_0 = 0,182$ і $b_1 \approx 0,072$, а відповідне рівняння лінійного тренду має вигляд: $\hat{y} = 0,182 + 0,072t$.

Підставляючи в отримане рівняння лінійного тренду послідовно значення $t_i = 1,2,3,4,5$, визначаємо теоретичні (вирівняні) значення збитковості зі 100грн. страхової суми для кожного наступного року $\hat{y}_i$:

$\hat{y}_1 = 0,182 + 0,072 \cdot 1 = 0,254$ грн.; $\hat{y}_2 = 0,182 + 0,072 \cdot 2 = 0,326$ грн.;

$\hat{y}_3 = 0,182 + 0,072 \cdot 3 = 0,398$ грн.; $\hat{y}_4 = 0,182 + 0,072 \cdot 4 = 0,47$ грн.;

$$\hat{y}_5 = 0,182 + 0,072 \cdot 5 = 0,542 \text{ грн.}$$

Знайдений тренд екстраполюється ще на 3 роки, для чого в його рівняння підставляються значення $t = 6,7,8$.

$\hat{y}_6 = 0,182 + 0,072 \cdot 6 = 0,614$ грн.; $\hat{y}_7 = 0,182 + 0,072 \cdot 7 = 0,686$ грн.;

$$\hat{y}_8 = 0,182 + 0,072 \cdot 8 = 0,758 \text{ грн.}$$

Отримана оцінка $\left(\hat{y}_8 = 0,758 \right)$ може бути прийнята за ризикову премію.

Для розрахунку ризикової надбавки складемо таблицю

Номер рядку t_i	Фактична збитковість по роках (y_i)	Теоретична збитковість $\hat{y}_i$	Відхилення $\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)$	Квадрати відхилення
1	0,28	0,254	– 0,026	0,000676
2	0,3	0,326	0,026	0,000676
3	0,37	0,398	0,028	0,000784
4	0,5	0,47	– 0,03	0,0009
5	0,54	0,542	0,002	0,000004
				0,003040

Користуючись результатами останнього рядка, отримаємо

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{5-1} = \frac{(0,000676 + 0,000676 + 0,000784 + 0,0009 + 0,000004)1}{4} =$$
$$= 0,00076.$$

Звідси ризикова надбавка $S = \sqrt{0,00076} \approx 0,03$ грн., а нетто-премія становить $0,76 + 0,03 = 0,79$ грн. із 100 грн. страхової суми.

2.5.3. Визначення тарифних брутто-премій на основі затвердженої нормативної структури

Обчислені у викладеному вище порядку ризикова премія і ризикова надбавка підсумовуються за кожним ризиковим видом страхування.

Отриманий результат є часткою тарифної брутто-премії, призначеної для формування фонду виплат за даним видом страхування.

На основі передбаченої у нормативній структурі тарифної ставки, а потім окремих статей навантаження в гривнях із 100 грн. страхової суми, за формулою (2.7) знаходять брутто-премію.

Нехай затверджена така нормативна структура тарифної ставки:

1) нетто-премія на формування фонду виплат (включаючи відрахування на формування резервного фонду) – 70%;
2) навантаження всього – 30% в тому числі:
   - витрати на проведення страхування – 16%;
   - витрати на фінансування запобіжних заходів – 4%;
   - прибуток – 10%.

Приклад 2.28. В умовах прикладу 2.26 обчислити брутто-премію, навантаження та його статті.

Розв'язок. За формулою (2.7) брутто-премія $T_б = \dfrac{100 \cdot 0,306}{100 - 30} \approx 0,44$ грн.

Тоді:

- навантаження $\left(\dfrac{0,44 \cdot 4}{100} \approx 0,13\text{грн.}\right)$;

– витрати на проведення страхування $\left(\frac{0,44 \cdot 16}{100} \approx 0,07 \text{грн.}\right)$;

– витрати на фінансування запобіжних заходів $\left(\frac{0,44 \cdot 4}{100} = 0,02 \text{грн.}\right)$;

– прибуток $\left(\frac{0,44 \cdot 10}{100} = 0,04 \text{грн.}\right)$.

2.6. Визначення тарифних ставок для нових видів страхування

Як зазначалося вище, за діючими видами страхування основою побудови нетто-премії є збитковість із 100 грн. страхової суми за ряд років. За новими видами страхування цей показник відсутній.

Нетто-премія за новими видами страхування, як і за діючими, складається з ризикової премії та ризикової надбавки.

Ризикова премія може бути розрахована, виходячи з *частості страхового випадку* і відношення середньої виплати до середньої очікуваної страхової суми, а ризикова надбавка – з використанням *коефіцієнта вибірковості*.

Поява нового виду страхування завжди пов'язана з наявністю страхового інтересу в певної категорії потенційних страхувальників. Це означає, що, з одного боку, є об'єкти страхування, а з іншого боку – страхові ризики, яким ці об'єкти піддаються з тією чи з іншою частістю.

Пропонована частість страхового випадку за новим видом страхування-це відношення числа потенційних об'єктів страхування, що піддаються тому чи іншому набору ризиків (окремому ризику), які складають обсяг відповідальності з цього виду страхування, до загального числа потенційних об'єктів страхування $Ч_{пр} = {K_c}/{K_o}$, де $Ч_{пр}$ – передбачувана частість страхового випадку за новим видом страхування; K_c – кількість потенційних страхових випадків (виплат страхового відшкодування чи страхових сум) за певний період; K_o – загальне число потенційних об'єктів страхування.

При побудові ризикової премії за новим видом страхування враховується відшкодування середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми (коригуючий коефіцієнт: $К_{кр} = C_в / C_c$, де $C_в$ – передбачувана середня виплата на один договір (об'єкт) страхування; C_c – передбачувана середня страхова сума на один договір (об'єкт) страхування.

Величина ризикової надбавки за новим видом страхування може бути розрахована із застосуванням коефіцієнта вибірковості, що дозволяє врахувати вплив рівня розвитку на рівень збитковості страхової суми. Цей вплив полягає в тому, що із збільшенням рівня розвитку рівень збитковості відносно знижується, оскільки в страхування входять нові категорії страхувальників, які менше підпадають під страховий ризик.

Коефіцієнт вибірковості розраховується за формулою:

$$К_{виб} = \frac{1 - К_o\left(1 - К_p\right)}{К_p}, \tag{2.14}$$

де $К_p$ – коефіцієнт передбачуваного рівня страхування; $К_0$ – коефіцієнт відставання відносного зниження (збільшення) суми виплат порівняно із зниженням (збільшенням) рівня розвитку страхування. Зауважимо, що $0 < К_p < 1$.

Для коефіцієнта відставання також виконується $0 < К_0 < 1$. Він показує на скільки приблизно зменшаться виплати страхувальникам при зменшенні рівня розвитку, скажімо, на 10%.

Наприклад, якщо $К_0 = 0,7$, то це означає, що зниження рівня ризику страхування на 10% призводить до зменшення суми проведених виплат на 7%.

Тарифна нетто-премія $Т_н$ за новим видом страхування визначається множенням трьох розглянутих вище показників. Крім того, оскільки тарифна ставка розраховується, як правило, із 100 грн. страхової суми, то згадуваний добуток слід помножити на 100. Таким чином,

$$T_н = Ч_{пр} \cdot K_{пр} \cdot K_{вит} \cdot 100 \ грн. \tag{2.15}$$

Приклад 2.29. Розробляється індивідуальне добровільне страхування спортсменів від нещасних випадків. За даними статистики в країні близько 500 тис. спортсменів, а в середньому щорічно травмуються 32,5 тис. Передбачуване відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми $K_{пр} = 0{,}3$. Передбачається, що страхуванням буде охоплено 40% спортсменів, причому коефіцієнт відставання $K_0 = 0{,}8$. Обчислити тарифну нетто-премію, ризикову премію та ризикову надбавку.

Розв'язок. Маємо $Ч_{пр} = K_c / K_0 = 32{,}5/500 = 0{,}065$, $K_{пр} = 0{,}3$, $K_0 = 0{,}8$, $K_p = 0{,}4$. Тоді за формулою (2.15) $T_н = Ч_{пр} \cdot K_{пр} \cdot K_{вит} \cdot 100 = = 0{,}065 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 100 = 2{,}55$ грн. При цьому ризикова премія $T_o = Ч_{пр} \cdot K_{пр} \cdot 100 = 1{,}95$ грн., а ризикова надбавка $T_p = T_н - T_o = 0{,}6$ грн.

2.7. Визначення нетто-премій на основі статистичних даних

Нехай, як і раніше, N_j – індикатор страхового випадку для j-ого договору. Тоді відшкодування за j-им договором описує випадкова величина $X_j = N_j \cdot Y_j$, де Y_j – розмір оплачуваного збитку за одним договором, а загальне відшкодування за всіма запитами – випадкова величина $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$, причому розподіли випадкових величин Y_j – невідомі.

В цьому році очікується укладення n договорів страхування. У минулому було укладено n^* договорів зі страховими сумами за ними V_1^*, $V_2^*, \ldots, V_n^*$, і за якими протягом року надійшло N^* запитів з виплатами за ними $Y_{k1}^*, Y_{k2}^*, \ldots, Y_{kN^*}^*$, де – k_1, $k_2, \ldots$, k_{N^*} – їх номери. Тоді середнє відшкодування на один запит $\overline{Y}^* = \dfrac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} Y_{ki}^*$.

Твердження 2.2. Якщо припустити, що

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} MY_j \approx \overline{Y}^*; \\ \dfrac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} MY_j \approx \overline{Y}^*, \end{cases}$$

то справедлива оцінка

$$\sum_{j=1}^{n}(MY_j)^2 \approx n(\overline{Y}^*)^2. \qquad (2.16)$$

Середнє відхилення $(\overline{R}^*)^2$ виплат за запитами Y_{ki}^* від їх середнього значення $\overline{Y}^*$ визначимо за формулою $(\overline{R}^*)^2 = \dfrac{1}{N^*-1}\sum_{i=1}^{N^*}(Y_{Ri}^* - \overline{Y}^*)^2$.

Вважатимемо, що $(\overline{R}^*)^2 \approx \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} DY_j$ – середня дисперсія. Тоді відповідні характеристики для X :

$$MX = M\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} MX_j = \sum_{j=1}^{n} MY_j N_j = \sum_{j=1}^{n} MY_j \cdot MN_j = qn\overline{Y}^* \qquad (2.17)$$

(тут ми скористалися тим, що випадкові величини Y_j і N_j – незалежні, $MN_j = q$, $\sum_{j=1}^{n} MY_j \approx n\overline{Y}^*$).

Далі

$$DX = D\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} DX_j = \sum_{j=1}^{n}(MX_j^2 - (MX_j)^2) \qquad (2.18)$$

Враховуючи, що випадкові величини Y_j і N_j – незалежні, шукаємо

$$MX_j^2 = M(Y_j^2 \cdot N_j^2) = MY_j^2 \cdot MN_j^2 = qMY_j^2 = q(DY_j + (MY_j)^2),$$

$$(MX_j)^2 = (M(Y_j \cdot N_j))^2 = q^2(MY_j)^2.$$

Підставивши дані значення в (2.18), отримаємо

$$DX = \sum_{j=1}^{n}((DY_j + (MY_j)^2)q - q^2(MY_j)^2) = qn(\overline{R}^*)^2 + q(1-q)n(\overline{Y}^*)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_X = \sqrt{qn(\bar{R}^*)^2 + q(1-q)\,n\,(\bar{Y}^*)^2} \qquad (2.19)$$

Нехай випадкова величина $Z = (X - MX)/\sigma_X$. Якщо випадкові величини X_j – незалежні і n – велике, то Z розподілена за нормальним законом розподілу, тобто $P(Z < t) = \Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}dt$.

Для заданого рівня надійності γ з рівняння $\Phi(t) = \gamma/2$ знаходимо, як і раніше, t_γ. Тоді $((X - MX)/\sigma_X) \le t_\gamma$ і $X \le t_\gamma \sigma_x + MX$. Підставляючи в останню нерівність вирази для середнього значення MX (2.17) і середнього квадратичного відхилення σ_x, отримаємо

$$X \le nq\bar{Y}^* + t_\gamma \sqrt{qn(\bar{R}^*)^2 + q(1-q)\,n\,(\bar{Y}^*)^2} = T_O + T_P = T_H, \qquad (2.20)$$

де T_0 – ризикова премія, T_P – ризикова надбавка, T_H – нетто-премія.

Приклад 2.30. Статистика відшкодувань за деяким портфелем наступна: на $n^* = 300$ укладених договорів страхування надійшло $N^* = 10$ запитів з відшкодуваннями Y_{ki}^*: 10; 15; 10; 5; 15; 10; 8; 8; 9; 10. Очікується укладення $n = 400$ подібних договорів. Визначити розмір нетто-премії, яка б з надійністю $\gamma = 0{,}95$ $(\varepsilon = 0{,}025)$ забезпечила виплати за всіма запитами.

Розв'язок. Середнє відшкодування (виплата) за одним запитом $\bar{Y}^* = \dfrac{1}{10}(10+15+10+5+15+10+8+8+9+10) = 10$, а середнє відхилення виплат $(\bar{R}^*)^2 = \dfrac{1}{9}((10-10)^2 + (15-5)^2 + \cdots (9-10)^2 (10-10)^2) = 28/3$.

Оскільки за статистикою в портфелі з 300 договорів надійшло 10 запитів, то $q = 10/300 = 1/30$, а за таблицею 2 у додатку знаходимо, що $t_\gamma = 1{,}96$.

Для того, щоб з надійністю $\gamma = 0{,}95$ $(\varepsilon = 0{,}025)$ забезпечити виплати за всіма запитами, які можуть надійти для страхового портфеля з $n = 400$

договорами, нетто-премія T_H для всього портфеля повинна дорівнювати (2.20)

$$T_H = 400 \cdot \frac{1}{30} \cdot 10 + 1,96\sqrt{\frac{1}{30} \cdot 400 \cdot \frac{28}{3} + \frac{1}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot 400 \cdot 100} = \frac{400}{3} + \frac{221,1}{3} = 207,023.$$

Відповідно, ризикова премія $T_O = 133,3$, а ризикова надбавка $T_P = 73,7$, що становить 55,3% ризикової премії.

Контрольні запитання та задачі

1. За якою формулою обчислюється величина ризикової премії, коли величина збитку X є фіксованою, випадковою величиною з відомим законом розподілу?

2. Наведіть формули для обчислення величини ризикової премії для різних схем участі страхувальника у відшкодуванні збитку, коли величина збитку розподілена за рівномірним, показниковим та нормальними законами розподілу.

3. В чому суть принципу еквівалентності фінансових зобов'язань страховика та страхувальника при побудові нетто-премії?

4. Для чого при побудові нетто-премії вводиться ризикова надбавка і за якою формулою вона розраховується?

5. На яких припущеннях ґрунтується модель індивідуального ризику?

6. З яких припущень виходять в моделі колективного ризику?

7. Яку випадкову величину називають індикатором страхового випадку для *j*-ого договору, що вона описує, і чому дорівнює математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, яка описує відшкодування за *j*-им договором?

8. Що називається ймовірністю збитку, показником збитковості і що він виражає у грошовому виразі?

9. За рахунок чого знижується нетто-премія в комбінованому договорі страхування?

10. Як розраховується величина ризикової премії та ризикової надбавки при стійкості тимчасового ряду показників збитковості?

11. Ймовірність страхового випадку $q = 0,08$, а умовний розподіл збитку задається таблицею

Y_j	50	100	150	250	1000
p_j	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1

Знайти розмір ризикової премії.

12. Ймовірність страхового випадку $q = 0,03$, а умовний розподіл збитку задається таблицею

Y_j	2000	4000	5000	10000
p_j	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти розмір ризикової премії.

13. Об’єкт застрахований від пожежі на суму 6 млн. у.о., яка дорівнює ціні об’єкта. Ймовірність виникнення пожежі дорівнює 0,0001, а величина збитку рівномірно розподілена на відрізку від 0 до 6 млн. у.о. Знайти середнє значення, дисперсію і коефіцієнт варіації.

14. Страховий випадок настає з ймовірністю 0,05, а збиток розподілений рівномірно на відрізку (0; 600). Знайти середнє значення, дисперсію та коефіцієнт варіації.

15. В умовах прикладу 2.23 300 замінити на 400, 1000 на 1500, 100 на 150, 0,1 на 0,07, 200 на 250, 0,2 на 0,08.

16. В умовах прикладу 2.23 300 замінити на 500, 1000 на 2000, 100 на 200, 0,1 на 0,01 , 200 на 300, 0,2 на 0,15.

17. В умовах прикладу 2.24 8000 замінити на 5000, 5000 на 2000, 10000 на 8000, 3000 на 3000, 20000 на 10000, 0,02 на 0,01.

18. В умовах прикладу 2.24 8000 замінити на 7000, 5000 на 3000, 10000 на 11000, 3000 на 4000, 20000 на 13000, 0,02 на 0,05.

19. В умовах прикладу 2.24 знайти математичне сподівання та дисперсію виплат в колективній моделі.

20. Страховий портфель нараховує 6000 договорів з страховою сумою 10 у.о. і 4000 договорів з страховою сумою 20 у.о. Ймовірності надходження запитів однакові та дорівнюють 0,02. Знайти математичне сподівання та дисперсію виплат в умовах колективної моделі.

21. Портфель складається з $n = 6000$ однотипних договорів страхування, а ймовірність настання страхового випадку $p = 0,01$. Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ $(\varepsilon = 0,025)$: а) величину відхилення числа страхових випадків від середнього значення; б) величину відхилення відносної частоти $W_n(A)$ настання страхової події A від її ймовірності.

22. Величина індивідуального запиту η (о.с.с.) має наступний закон розподілу

а)

η	0	1	3	4
p_i	0,9835	0,0101	0,006	0,0004

б)

η	0	1	2	4
p_i	0,9775	0,0172	0,005	0,0003

Укладено а) $n = 6400$; б) $n = 8100$ однотипних договорів страхування. Знайти величину нетто-премії, щоб з надійністю а) $\gamma = 0,98$ $(\varepsilon = 0,01)$; б) $\gamma = 0,99$ $(\varepsilon = 0,005)$ можна було б гарантувати виплати за всіма запитами.

23. В страховій компанії а) $n = 5000$; б) $n = 4000$ договорів, в кожному з яких ймовірність настання страхового випадку дорівнює а) $S = 1200$ у.о., б) $S = 1900$ у.о., а одноразова нетто-премія дорівнює а) $T_H = 600$ у.о.; б) $T_H = 500$ у.о. На який прибуток може розраховувати страховик з надійністю а) $\gamma = 0,98$ $(\varepsilon = 0,01)$; б) $\gamma = 0,99$ $(\varepsilon = 0,005)$.

24. В умовах прикладу 23 визначити з якою надійністю можна стверджувати, що зібраної нетто-премії вистачить для виплати відшкодувань.

25. Страховий портфель налічує а) $n = 300$; б) $n = 400$ договорів з однаковими виплатами а) $S = 70$ у.о.; б) $S = 80$ у.о. і з ймовірностями настання страхових випадків а) $p = 0,05$; б) $p = 0,03$. Знайти величину нетто-премії, щоб з надійністю а) $\gamma = 0,98$ $(\varepsilon = 0,01)$; б) $\gamma = 0,99$ $(\varepsilon = 0,005)$ можна було б гарантувати виплати за всіма запитами.

26. Страхувальник застрахував своє майно на суму а) 2000 у.о.; б) 1500 у.о. в одній компанії одночасно в одному договорі від трьох страхових подій A, B, C, які не можуть відбутися одночасно, причому а) $P(A)=0,03$, $P(B)=0,04$, $P(C)=0,05$; б) $P(A)=0,15$, $P(B)=0,25$, $P(C)=0,3$. Знайти величину ризикової премії та ризикової надбавки.

27. Страховий портфель налічує а) $n=200$; б) $n=300$ однотипних договорів страхування. Визначити величину нетто-премії для всього портфеля, яка б з надійністю а) $\gamma=0,98$ $(\varepsilon=0,01)$; б) $\gamma=0,99$ $(\varepsilon=0,005)$ забезпечила виплати за всіма запитами.

28. В умовах прикладу 27 визначити величину брутто-премії, якщо навантаження $F_{K/Z}$ складає а) 15%, б) 20% брутто-премії.

29. За останні п'ять років за даним видом страхування рівень збитковості становить по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми: а) y_i: 0,18; 0,19; 0,17; 0,25; 0,23; б) y_i: 0,19; 0,21; 0,22; 0,20; 0,17. Визначити величину нетто-премії.

30. За останні п'ять років за даним видом страхування рівень збитковості становить по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми: а) y_i: 0,16; 0,17; 0,20; 0,22; 0,23; б) y_i: 0,18; 0,20; 0,22; 0,23; 0,25. Визначити величину нетто-премії.

31. Розробляється індивідуальне страхування. За даними статистики близько а) 450000; б) 550000 осіб можуть підлягати даному виду страхування. Протягом року може настати а) 25000; б) 30000 страхових подій. Передбачуване відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми а) $K_{пр}=0,4$; б) $K_{пр}=0,35$. Передбачається, що страхуванням буде охоплено а) 35%; б) 45% всіх осіб, причому коефіцієнт відставання дорівнює а) $K_O=0,75$; б) $K_O=0,85$. Обчислити нетто-премію, ризикову премію та ризикову надбавку.

32. В умовах прикладу 2.30 покласти:

а) $n^* = 325$; $N^* = 13$; $n = 441$; $\gamma = 0,98$; Y^*_{Ki}: 48,46, 51, 50, 48, 52, 53, 50, 47, 48, 51, 52, 46.

б) $n^* = 280$; $N^* = 12$, $n = 324$, $\gamma = 0,99$; Y^*_{Ki}: 100, 110, 108, 95, 98, 103, 100, 101, 98, 101, 95, 98.

3. МОДЕЛІ ЧИСЛА ЗАПИТІВ (ПОЗОВІВ)

3.1. Пуассонівський стаціонарний (найпростіший) потік подій

Послідовність *випадкових подій* A_i, які можуть настати одна за одною в будь-які *випадкові моменти часу*, назвемо *потоком подій*. Якщо події в потоці розрізняють за моментами їх надходження, то вони називаються *однорідними*, і *неоднорідними* — в іншому випадку.

Потоки однорідних подій зручно графічно зображати на осі часу послідовністю точок t_1, t_2, t_3 ..., які відповідають *моментам їх настання.*

Означення 3.1. Потік подій називається *регулярним*, якщо події в ньому наступають послідовно, через строго визначені проміжки часу.

Означення 3.2. Потік подій називається *потоком без післядії*, якщо для будь-якої пари взаємно неперетинаючих проміжків часу число подій, які настали за один з них, не залежить від числа подій, які настали за інший.

Зауважимо, що регулярний потік властивістю відсутності післядії не володіє, оскільки післядія в ньому породжується його регулярністю.

Означення 3.3. Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірністю настання за малий проміжок часу більше однієї події можна знехтувати порівняно з ймовірністю настання за цей проміжок не більше однієї події.

Ординарність потоку означає, що події в ньому за досить малий проміжок часу або не настають, або настають лише по одній.

Означення 3.4. Потік подій називається *стаціонарним*, якщо для будь-якого проміжку часу ймовірність настання певного числа подій в ньому залежить лише від його довжини і не залежить від того, де на осі часу він розміщений.

Означення 3.5. Потік подій, який володіє властивостями відсутності післядії, ординарності та стаціонарності, називається *найпростішим потоком*, а який володіє властивостями відсутності післядії та ординарності — *пуассонівським.*

Означення 3.6. Середнє число подій потоку, які настають за одиницю часу, називається *інтенсивністю або середньою густиною потоку*.

Інтенсивність найпростішого потоку не змінюється з часом.

Означення 3.7. Декілька потоків називаються *порівнювальними за інтенсивністю*, якщо інтенсивність жодного з них не перевищує суми інтенсивностей решти.

Теорема 3.1. В найпростішому потоці з інтенсивністю λ число подій $\eta(t)$, які настали за проміжок часу $[0;t]$, розподілене за *законом Пауссона*:

$$P(\eta(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,..., \tag{3.1}$$

причому

$$M\eta(t)=D\eta(t)=\lambda t, \sigma\eta(t)=\sqrt{\lambda t} \tag{3.2}$$

Наслідок 3.1. Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ характерні наступні твердження:

1) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ не настане жодної події

$$P(\eta(t)=0)=e^{-\lambda t}; \tag{3.3}$$

2) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане менше k подій, $k=1,2,3,...$

$$P(\eta(t)<k)=e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}, (k=1,2,3...); \tag{3.4}$$

3) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане не менше $k=1,2,3,...$ подій

$$P(\eta(t)\geq k)=1-e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}, (k=1,2,3,....); \tag{3.5}$$

4) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане принаймні одна подія

$$P(\eta(t) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad (3.6)$$

5) інтенсивність потоку λ дорівнює математичному сподіванню $M\eta(t)$ випадкової величини $\eta(t)$.

Іншою важливою характеристикою найпростішого потоку є *неперервна випадкова величина* τ={ проміжок часу між будь-якими двома сусідніми подіями потоку}.

Теорема 3.2. В найпростішому потоці з інтенсивністю λ для випадкової величини τ:

1) *інтегральна функція розподілу* $F(t) = P(\tau < t)$

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t}, (t \geq 0); \qquad (3.7)$$

2) *диференціальна функція розподілу*

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t \geq 0); \qquad (3.8)$$

3) *математичне сподівання* $M\tau$, *дисперсія* $D\tau$, *середнє квадратичне відхилення* $\sigma(\tau)$ обчислюються за формулами:

$$M\tau = \lambda^{-1}, \quad D\tau = \lambda^{-2}, \quad \sigma(\tau) = \lambda^{-1}. \qquad (3.9)$$

Наслідок 3.2. Ймовірність $P(\tau \geq t)$ того, що проміжок часу τ між будь-якими двома сусідніми подіями в найпростішому потоці буде не меншим за t, обчислюється за формулою

$$P(\tau \geq t) = e^{-\lambda t}, (t \geq 0) \qquad (3.10)$$

3.2. Пуассонівський нестаціонарний потік подій

Означення 3.8. Потік подій називається *нестаціонарним*, якщо ймовірність появи певного числа подій за будь-який проміжок часу залежить не тільки від довжини цього проміжку, але й від моменту його початку.

Нестаціонарність потоку означає, що його *ймовірнісні характеристики*, зокрема, інтенсивність $\lambda(t)$, залежать від часу t.

Для *дискретної випадкової величини* $\eta(t_0,\tau)=\{$число подій, які настають в потоці за проміжок часу $[t_0,t_0+\tau]$, $\tau>0$ $\}$ справедлива.

Теорема 3.3. В нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$:

1) випадкова величина $\eta(t_0,\tau)$ розподілена за законом Пауссона

$$P_m(t_0,\tau)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},\ (m=0,1,2,...),\tag{3.11}$$

де $P_m(t_0,\tau)$ — ймовірність того, що за проміжок часу $[t_0,t_0+\tau]$ в потоці наступить рівно m подій;

2) параметр a є математичним сподіванням $M\eta(t_0,\tau)$ випадкової величини $\eta(t_0,\tau)$, яке залежить не тільки від τ, але і від t_0, тобто

$$a=a(t_0,\tau)=M\eta(t_0,\tau)=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt;\tag{3.12}$$

3) дисперсія

$$D\eta(t_0,\tau)=a \text{ і } \sigma_\eta(t_0,\tau)=\sqrt{a}.\tag{3.13}$$

Наслідок 3.3. В нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ ймовірність того, що за проміжок часу від t_0 до $t_0+\tau\left([t_0,t_0+\tau]\right)$:

1) не настане жодної події

$$P(\eta(t_0;\tau)=0)=e^{-a};\tag{3.14}$$

2) настане менше $k(k=1,2,...)$ подій

$$P(\eta(t_0;\tau)<k)=e^{-a}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!},\quad (k=1,2,....);\tag{3.15}$$

3) настане не менше $k(k=1,2,...)$ подій

$$P(\eta(t_0,\tau)\ge k)=1-e^{-a}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!},\quad (k=1,2,....);\tag{3.16}$$

4) настане принаймні одна подія

$$P(\eta(t_0,\tau)\ge 1)=1-e^{-a}.\tag{3.17}$$

Розглянемо неперервну випадкову величину $T(t_0)=\{$проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настала в момент часу $t_0\}$, вид закону розподілу якої залежатиме і від t_0 і від функції $\lambda(t)$. Справедливі наступні формули:

1) ймовірність того, що проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0, буде менший τ , обчислюється за формулою

$$F_{T(t_0)}(\tau)=F(\tau)=P(T(t_0)<\tau)=1-e^{-a};\tag{3.18}$$

2) ймовірність того, що проміжок часу $T(t_0)$ між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0, буде не менший τ:

$$P\big(T(t_0)\ge\tau\big)=1-F_{T(t_0)}(\tau)=e^{-a};\tag{3.19}$$

3) диференціальна функція розподілу випадкової величини $T(t_0)$:

$$f_{T(t_0)}(\tau)=f(\tau)=\frac{d}{d\tau}F(\tau)=\frac{d}{d\tau}(1-e^{-a})=e^{-a}\lambda(t_0+\tau);\tag{3.20}$$

4) математичне сподівання випадкової величини $T(t_0)$, тобто середній проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0:

$$MT(t_0)=\int_0^\infty \tau f_{T(t_0)}(\tau)d\tau=\int_0^\infty \tau e^{-a}\lambda(t_0+\tau)d\tau;\tag{3.21}$$

5) дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $T(t_0)$:

$$DT(t_0) = \int_0^\infty \tau f_{T(t_0)}(\tau) d\tau = \int_0^\infty \tau e^{-a} \lambda(t_0 + \tau) d\tau, \sigma\left(T(t_0)\right) = \sqrt{DT(t_0)}\,. \qquad (3.22)$$

3.3. Найпростіша динамічна модель числа запитів за фіксований проміжок часу

Індивідуальні моделі числа запитів досить детально були розглянуті в 2.3. Проте, виявляється, що *страхові події*, які призводять до появи запитів, відбуваються в не передбачувані моменти часу. Невизначеність цих моментів є такою ж важливою компонентою ризику в діяльності компанії, як і невизначеність величин самих запитів.

Одне з центральних припущень *теорії запитів* полягає в тому, що *процес настання страхових випадків і пов'язані з цим величини запитів можуть і повинні вивчатися окремо*.

Загалом *процес запитів* – це *довільний точковий (дискретний) процес*, тобто *довільна випадкова послідовність точок* $t_1, t_2, ...$ *на осі часу*. Проте реальні статистичні дані вказують на те, що цей процес володіє певними властивостями і може бути достатньо повно описаний за допомогою відносно простих моделей.

Найчастіше при цьому використовується *пуассонівська модель запитів*.

Розглянемо взаємонеперетинаючі проміжки часу (t_i, t_{i+1}), а через $N(t_i, t_{i+1})$ позначимо число запитів, які надійшли за проміжок часу (t_i, t_{i+1}) (число запитів за проміжок часу $(0,t)$ позначимо через $N(t) = N(0,t)$).

Припустимо, що процес надходження запитів, є найпростішим потоком подій. Іншими словами, це таке припущення про висунення запитів на виплати, при якому ймовірність висунення запитів у будь-який момент часу не чинить впливу на висунення запиту в будь-який інший момент часу.

Дані припущення є природними і у випадку, коли йдеться про *портфель* з n договорів, кожен з яких може спричинити один запит (або не спричинити), і у випадку, коли йдеться про індивідуальний договір, який за час дії може спричинити декілька запитів.

Розглянемо тепер питання про кількість запитів на момент часу t.

Справедливе:

Твердження 3.1. Для найпростішого потоку надходження запитів їх число за фіксований проміжок часу Δt розподілене за законом Пуассона з параметром $\lambda \cdot \Delta t$ для деякого $\lambda > 0$:

$$P_k(\Delta t) = P\left(N(t, t + \Delta t) = k\right) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}, k = 0,1,2,... \quad (3.23)$$

Це означає, що ймовірність того, що за час Δt буде висунено рівно k запитів на виплату можна обчислювати за формулою (3.23) і, відповідно, ймовірність того, що число запитів не перевищить k

$$P_{0 \le i \le k}\left(\Delta(t)\right) = \sum_{i=0}^{k} P_i(\Delta t). \quad (3.24)$$

Твердження 3.2. Параметр λ розподілу (3.23) числа запитів є *середнім значенням кількості запитів за одиничний період часу*.

Параметр λ ще називають *показником запитів*.

Дійсно, якщо $N(t)$ має розподіл Пуассона з параметром λt, то за означенням математичного сподівання $MN(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Приклад 3.1. Для аналізу зміни з часом поточного фонду компанії, яка займається страхуванням автомобілів, важливо володіти інформацією про процес надходження в компанію запитів на виплату.

Спостереження за попередній період показало, що число запитів, які надійшли за будь-який проміжок часу, не залежить від моменту надходження, а залежить від його тривалості; запити в будь-які два взаємно неперетинаючі інтервали надходять незалежно; за досить малі проміжки часу в компанію надходить по одному запиту. Очікуване число запитів, які надходять в компанію за тиждень, дорівнює 2.

Знайти ймовірність того, що:

1) за місяць надійде 7 запитів;

2) за місяць надійде менше 7 запитів;

3) за місяць надійде не менше 7 запитів;

4) за тиждень не надійде жодного запиту;

5) за два тижні надійде принаймні один запит;

6) інтервал часу між двома сусідніми запитами менший за два дні, не менший за два дні.

Розв'язок. З умови задачі видно, що потік запитів на виплату є найпростішим потоком. В даній ситуації за одиницю часу природно взяти тиждень. За умовою задачі інтенсивність λ дорівнює двом запитам за тиждень.

Нехай $\eta(t)$ — число запитів на виплату за проміжок t (тижнів), а T — проміжок часу між двома сусідніми запитами.

1) $t=1$ місяць $=4$ тижні і $k=7$. Тоді за формулою (3.1)

$$P_7(4)=\frac{(2\cdot 4)^7}{7!}e^{-8}\approx 0{,}143;$$

2) за формулою (3.4) $P(\eta(4)<7)=e^{-8}\sum_{m=0}^{6}\frac{(2\cdot 4)^m}{m!}=0{,}321$;

3) за формулою (3.5) $P(\eta(4)\geq 7)=1-P(\eta(4)<7)=1-0{,}321=0{,}679$;

4) $t=1$ тиждень. За формулою (3.3) $P(\eta(1)=0)=e^{-2\cdot 1}=0{,}135$;

5) $t=2$ тижні. За формулою (3.6) $P(\eta(2)\geq 1)=1-e^{-2\cdot 2}=0{,}981$;

6) $t=2$ дні = $2/7$ тижня. За формулою (3.7) $P(T<2/7)=1-e^{-2\cdot(2/7)}=$

$=0{,}393$. За формулою (3.10) $P(T\geq 2/7)=e^{-2\cdot(2/7)}=0{,}607$.

Приклад 3.2. Проаналізуємо потік надходжень в страхову компанію запитів на виплату відповідно до страхових договорів за період з початку листопада до кінця січня. Вивчення цього потоку за розглядуваний період в минулі роки показало, що число запитів на виплату, які надходять в компанію за проміжок часу τ, залежить не тільки від його тривалості, але й від моменту надходження.

Незалежність надходжень запитів на виплату в будь-які неперетинаючі інтервали часу і надходження запитів по одному в малі проміжки часу зберігаються і в даній ситуації.

Залежність числа запитів, які надходять в компанію, від часу задається рівністю $\lambda(t)=t^{1/4}$.

Знайти ймовірність того, що:

1) за листопад надійде 6 запитів;
2) за грудень надійде 6 запитів;
3) за січень надійде не менше 5 запитів;
4) за перші два тижні листопада не надійде жодного запиту;
5) за другий і третій тиждень грудня надійде принаймні один запит;
6) інтервал часу між двома сусідніми надходженнями запитів буде не меншим трьох днів, якщо перша з них надійде в перший день другого тижня січня;
7) інтервал часу між двома сусідніми надходженнями запитів буде меншим за два дні, якщо перша з них надійшла на початку третього тижня грудня.

Розв'язок. Потік запитів на виплату є потоком без післядії і ординарним. Але, на відміну від потоку в попередньому прикладі, даний потік вже не буде стаціонарним, а відповідно найпростішим.

В якості одиниці часу використаємо один тиждень:

Нехай $\eta(t_0,\tau)$ — випадкове число запитів, які надійшли в компанію за проміжок часу $[t_0,t_0+\tau]$, а $T(t_0)$ — випадковий інтервал часу між двома сусідніми запитами, перший з яких надійшлов в момент часу t_0.

1) $\tau=1$ місяць = 4 тижні, момент початку проміжку $t_0=0$, $m=6$.

За формулою (3.12) $a = M\eta(0,4) = \int\limits_0^{0+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_0^4 = \frac{4}{5} 4^{5/4} = 4{,}525$, а з (3.11) $P_6(0,4) = \frac{(4{,}525)^6}{6!} e^{-4{,}525} \approx 0{,}129$;

2) $\tau = 1$ місяць = 4 тижні, $t_0 = 4$, $m = 6$.

За формулою (3.12) $a = M\eta(4,4) = \int\limits_4^{4+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_4^8 = \frac{4}{5}\left(8^{5/4} - 4^{5/4}\right) \approx$ $\approx 6{,}238$, а з (3.11) $P_6(4,4) = \frac{(6{,}238)^6}{6!} e^{-6{,}238} \approx 0{,}16$;

3) $\tau = 1$ місяць = 4 тижні, $t_0 = 8, k = 5$.

За формулою (3.12) $a = M\eta(8,4) = \int\limits_8^{8+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_8^{12} = 0{,}8\left(12^{5/4} - 8^{5/4}\right) \approx$ $\approx 7{,}104$. Далі, згідно (3.16) $P(\eta(8,4) \geq 5) = 1 - e^{-7{,}104} \sum\limits_{m=0}^{4} \frac{(7{,}104)^m}{m!} \approx 0{,}836$;

4) $\tau = 2$ тижні, $t_0 = 0$, $m = 0$.

З (3.12) $a = M\eta(0,2) = \int\limits_0^2 t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_0^2 = 0{,}8 \cdot 2{,}378 \approx 1{,}903$, а з (3.14) $P(0,2) = e^{-1{,}903} \approx 0{,}149$;

5) $\tau = 2$ тижні, $t_0 = 5$.

З (3.12) $a = M\eta(5,2) = \int\limits_5^{5+2} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_5^7 = \; = 0{,}8\left(7^{5/4} - 5^{5/4}\right) \approx 3{,}127$, а з (3.16) $P(\eta(5,2) \geq 1) = 1 - e^{-3{,}127} = 0{,}956$;

6) $t_0 = 9$, $\tau = 3$ дні = 3/7 тижнів.

З (3.12) $a = M\left(9;3/7\right) = \int\limits_9^{9+3/7} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_9^{9\frac{3}{7}} \approx 0{,}747$, за (3.19): $P\left(T\left(9\right) \geq 3/7\right) = e^{-0{,}747} = 0{,}474$;

7) $t_0 = 6$, $\tau = 2$ дні $= \frac{2}{7}$ тижні.

З (3.12) $a = M\eta(6,\frac{2}{7}) = \int\limits_{6}^{6+\frac{2}{7}} t^{1/4}dt = \frac{4}{5}t^{5/4}\Big|_{6}^{6\frac{2}{7}} \approx 0,45$, а з (3.18) $\mathrm{P}\big(T(6) < 2/7\big) = \, = 1 - e^{-0,45} \approx 0,362.$

Зауваження 3.1. При розв’язуванні прикладу 3.2 ми скористалися наступним рисунком:

Рис.3.1

Наприклад, в п. 6 $t_0 = 9$, оскільки для січня момент початку проміжку $t_0 = 8$.

Оскільки параметр λ є середнім значенням кількості запитів за одиничний період часу, то за допомогою методу *максимальної правдоподібності* знайдемо його *точкову оцінку* для випадків, коли укладено один договір на один рік і n договорів на один рік, які можуть спричинити декілька запитів.

Нехай один договір терміном на один рік спричиняє декілька запитів (майнове страхування). Вважатимемо, що випадкова величина N ={число запитів, які можуть надійти за цим договором} розподілена за законом Пуассона, тобто ймовірність надходження запиту залишається сталою протягом всього року, а події, які відбуваються в деякій частині року, суттєво не впливають на події в будь-якій іншій частині року. Для визначення ціни такого договору необхідно знайти точкову оцінку параметра λ (на практиці на початковому етапі значення ціни встановлюється на основі тарифів, які діють для інших подібних ризиків).

Розглянемо спочатку найпростішу ситуацію: один договір, укладений на один рік, за час дії призвів до появи одного запиту. Тоді за формулою

$P\left(N(1)=1\right)=\lambda e^{-\lambda}$. Для оцінки параметра λ введемо функцію $L(\lambda)=\lambda e^{-\lambda}$, $\lambda>0$, яку називають *функцією правдоподібності*. Потрібно визначити таке значення λ, яке б максимізувало $L(\lambda)$ або, що те саме, функцію $l(\lambda)=\ln L(\lambda)=-\lambda+\ln\lambda$. Далі, $\dfrac{dl}{d\lambda}=-1+\dfrac{1}{\lambda}=0$. Звідси $\overline{\lambda}=1$ - *оцінка максимальної правдоподібності*.

Очевидно, що робити певні висновки на основі одного договору, тривалістю 1 рік, не зовсім вірно.

Нехай тепер маємо n однотипних і незалежних договорів страхування і кожний договір за час своєї дії може призвести до появи декількох запитів. Позначимо через $k_i(t)$ число запитів за i-тим договором на момент часу t. Нехай процес надходження запитів розподілений за законом Пуассона з параметром λ, а функція правдоподібності $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}P\left(N_i(t)=k_i\right)=$ $=\prod\limits_{i=1}^{n}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^{k_i}}{k_i!}$. Далі при $t=1$ $l(\lambda)=\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n}e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\right)=$ $=-n\lambda+\ln\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}k_i-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(k_i!\right)$. Продиференціювавши по λ, отримаємо $-n+\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0$, або $\overline{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=\overline{k}$.

Таким чином, точковою оцінкою $\overline{\lambda}$ параметра λ є середнє число запитів $\overline{k}$, які надходять за одним договором.

Приклад 3.3. Застраховано 750 автомобілів. Число запитів, які були подані кожним власником протягом року, задається таблицею

x_i	0	1	2	3	4	5
k_i	425	233	68	20	1	1

.

де x_i – число запитів, які були подані кожним власником, а k_i – число власників, які подали x_i запитів. Перевірити гіпотезу про те, що число поданих запитів має розподіл Пуассона, якщо рівень значущості $\alpha = 0,01$.

Розв'язок. Нехай випадкова величина η={число поданих запитів}. За умовою прикладу потрібно перевірити нульову гіпотезу $H_0 : P(\eta = i) = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = M\eta$ – невідомий параметр.

Оскільки точкова оцінка параметру λ розподілу Пуассона дорівнює середньому числу запитів $\overline{k}$,то

$$\overline{\lambda} = \overline{k} = \frac{1}{750}(424 \cdot 0 + 233 \cdot 1 + 68 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5) = 0,6 .$$

Теоретичні ймовірності p_i обчислюються за формулою Пуассона (3.1.) при $t = 1$ $\lambda = 0,6$, (див. також таблиця 3 у додатку): $P_0 = P(\eta = 0) = 0,549$; $P_1 = P(\eta = 1) = 0,329$; $P_2 = P(\eta = 2) = 0,099$;

Оскільки останні дві варіанти мають частоти менші від п'яти і сума цих частот менша від п'яти, то об'єднаємо їх з варіантою $x_i = 3$. Відповідно ймовірність $p_3 = P(\eta = 3) = 1 - 0,549 - 0,329 - 0,099 = 0,023$. Тоді теоретичні частоти $k_i' = kp_i : k_0' = 750 \cdot 0,549 = 411,75$; $k_1' = 750 \cdot 0,329 = 246,75$; $k_2' = 750 \cdot 0,099 = 74,25$; $k_3' = 750 \cdot 0,023 = 17,25$.

Далі, $$\chi^2_{сп} = \sum_{i=0}^{3} \frac{(k_i - k_i')^2}{k_i} = \frac{(424 - 411,75)^2}{411,75} + \frac{(233 - 246,25)^2}{246,75} +$$

$$+ \frac{(68 - 74,25)^2}{74,25} + \frac{(22 - 17,25)^2}{17,25} = 2,97$$

Для числа ступенів свободи $l = m - s - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ із таблиці 5 у додатку знаходимо, що $\chi^2_{кр} = 9,2$. Оскільки $2,97 < 9,2$, то гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 3.4. Нехай розміри відшкодувань X_k за запитами до страхової компанії мають показниковий розподіл. Знайти оцінку максимальної правдоподібності, якщо $k=10$ і $X_k: 10,11,18,8,8,1,9,10,10,9$.

Розв'язок. Оцінку $\overline{\lambda}$ параметра λ знайдемо методом максимальної правдоподібності. Оскільки для показникового розподілу густина $f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$, то функція правдоподібності $L(\overline{x},\lambda)=\lambda e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda^{-\lambda x_2}\cdots\lambda e^{-\lambda x_k}=$ $=\lambda^k e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{k}x_i}$, а $l(\lambda)=\ln L(\overline{x},\lambda)=k\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{k}x_i$. Тоді $\dfrac{dl(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{k}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=0$, звідки $\overline{\lambda}=1/\overline{x}$. Далі $\overline{x}=\dfrac{1}{10}(10+11+18+8+8+1+9+10+10+9)=9{,}4$, $\overline{\lambda}=10{,}64$.

Таким чином, середній розмір одного відшкодування $\overline{\lambda}=10{,}64$.

Розглянемо тепер питання про час очікування першого запиту та інтервали часу між запитами.

Припустимо, що процес надходження запитів є найпростішим з параметром λ. Оскільки число запитів в період часу t має розподіл Пуассона з середнім λt, то за формулою (4.3) $P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$.

Нехай випадкова величина T={період часу до подання першого запиту}. Врахувавши, що події A={за період часу t не надійшли запити} і $B=\{T>t\}$ збігаються, то отримаємо $P(T>t)=e^{-\lambda t}$. Таким чином, функції розподілу та густини розподілу випадкової величини T дорівнюють:

$$F(t)=P(T<t)=1-P(T>t)=1-e^{-\lambda t},\ f(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

Твердження 3.4. Якщо процес запитів – найпростіший, то період часу до першого запиту має показниковий розподіл.

Внаслідок незалежності поведінки найпростішого процесу на неперетинаючих інтервалах часу, періоди часу між послідовними запитами мають показниковий розподіл.

Твердження 3.5. Інтервали часу між запитами незалежні.

Твердження 3.6. Момент t_n подання n-го запиту має *гамма-розподіл* з параметрами λ і $\alpha = n+1$: $P\left(x < t_n < x + \Delta x\right) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \Delta x$.

Твердження 3.7. Якщо відомо, що на інтервалі $(0,t)$ поданий запит, то момент його подання рівномірно розподілений на цьому інтервалі.

Справедливе і більш загальне твердження: якщо відоме число запитів, поданих за деякий проміжок часу, то моменти подання цих запитів незалежні та *рівномірно розподілені* на розглядуваному проміжку.

Контрольні запитання і задачі

1. Який потік називається регулярним, потоком без післядії, ординарним, стаціонарним, пуассонівським, найпростішим?
2. Дайте визначення інтенсивності потоку.
3. Які потоки називаються порівнювальними за інтенсивністю?
4. За якою формулою можна знайти ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$:

   — не настане жодної події;

   — настане менше k подій;

   — настане принаймні одна подія?
5. Чому дорівнює ймовірність того, що проміжок часу t між будь-якими двома сусідніми подіями в найпростішому потоці буде: меншим t, не меншим t?
6. За яким законом розподілена випадкова величина $\eta(t) = \{$ число подій, які настали за проміжок часу $[0;t]$ в найпростішому потоці з інтенсивністю $\lambda\}$?
7. Який потік подій називається нестаціонарним?
8. Який розподіл має випадкова величина $\eta\left(t_0;\tau\right) = \{$число подій, які настають в нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю

$\lambda(t)$ на проміжку часу $[t_0;t_0+\tau]$}? За якими формулами обчислюється її математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення?

9. Чому дорівнює ймовірність того, що в нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ за проміжок часу від t_0 до $t_0+\tau$:

   — не настане жодної події;

   — настане менше *k* подій;

   — настане не менше *k* подій;

   — настане принаймні одна подія?

10. За якими формулами для випадкової величини $T(t_0)$={проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настала в момент часу t_0} обчислюються $F(\tau)=P\big(T(t_0)<\tau\big)$, $P\big(T(t_0)>\tau\big)$, $f_{T(t_0)}(\tau)$, $MT(t_0)$, $DT(t_0)$, $\sigma\big(T(t_0)\big)$?

11. Що буде оцінкою параметра λ, якщо процес надходження запитів розподілений за законом Пуассона?

12. Який розподіл мають випадкові величини T_1 = {період часу до подання першого запиту} і T_2 = {періоди часу між послідовними запитами}, якщо процес надходження запитів – найпростіший.

13. За яким законом розподілена випадкова величина T_n = {момент надходження *n*-го запиту}.

14. В умовах прикладу 3.1 знайти ймовірність того, що:
    1) за тиждень в компанію надійдуть: п’ять запитів, менше п’яти запитів, не менше п’яти запитів;
    2) за два дні в компанію не надійде жодного запиту;
    3) за день в компанію надійде принаймні один запит;
    4) проміжок часу між двома сусідніми запитами: менший чотирьох годин, не менший чотирьох годин.

Очікуване число запитів, які надійдуть в компанію за день, дорівнює 2. День прирівнюється до 8 робочих годин.

15. В умовах прикладу 14 знайти ймовірність того, що:
    1) за три дні надійде 6 запитів, менше 6 запитів, не менше 6 запитів;
    2) за день не надійде жодного запиту;
    3) за три дні надійде принаймні один запит;
    4) проміжок часу між двома сусідніми запитами буде меншим 3 годин; не меншим 3 годин.

    Як і в прикладі 14 день прирівнюється до 8 робочих годин, число запитів – 3 в день.

16. В умовах прикладу 3.2 вважати $\lambda(t)=\sqrt{t}+3$. Знайти ймовірність того, що:
    1) за перший тиждень надійде 2 запити;
    2) за другий тиждень надійде 2 запити;
    3) за третій тиждень надійде не менше 2 запити;
    4) за перші два дні першого тижня не надійде жодного запиту;
    5) за другий і третій день другого тижня надійде принаймні один запит;
    6) інтервал часу між двома сусідніми надходженнями запитів буде не меншим двох днів, якщо перший з них надійшов в перший день третього тижня;
    7) інтервал часу між двома сусідніми надходженнями запитів буде меншим за два дні, якщо перший надійшов на початку другого тижня.

17. В умовах прикладу 16 вважати $\lambda(t)=t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{6}}$.

18. Застраховано а) 50000; б) 757 автомобілів. Число запитів, які були подані кожним власником протягом року, задаються таблицями:

а)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
k_i	40544	8082	1205	145	20	3	1

б)

x_i	0	1	2	3	4	5
k_i	427	235	72	21	1	1

де x_i — число запитів, які були подані кожним власником, а k_i — число власників, які подали x_i запитів. Перевірити гіпотезу про те, що число поданих запитів має розподіл Пуассона, якщо рівень значущості $\alpha = 0{,}01$.

19. Нехай розміри відшкодувань x_i за запитами до страхової компанії мають показниковий розподіл. Знайти оцінку максимальної правдоподібності, якщо:

а)

x_i	50	40	35	30	28	25
k_i	1	2	3	3	2	1

б)

x_i	100	90	85	81	77	75	72
k_i	1	1	2	3	2	1	1

4. БАНКРУТСТВО СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

Як зазначалося в 2.2, одним із способів запобігання розоренню страхової компанії є ризикова надбавка, визначення якої починається з побудови довірчого інтервалу для числа страхових випадків, як правило, симетричного відносно середнього значення. Збільшення ризикової надбавки відсуває праву границю довірчого інтервалу, зменшуючи ймовірність виходу за неї, або що те саме, – знижує ймовірність розорення страховика, під якою розуміють ймовірність неможливості виконати страховиком свої зобов’язання. Тоді ймовірність нерозорення характеризує можливість їх виконання.

Таким чином, для надійності γ ймовірність розорення $\varepsilon = (1-\gamma)/2$, а ймовірність нерозорення $1-\varepsilon = (1+\gamma)/2$.

Питання розорення вже частково розглядалися в прикладах 2.6-2.12 і буде розглядатися в 4.1 і 4.2.

4.1. Статичні моделі розорення

Індивідуальні запити становлять інтерес не самі по собі, а перш за все з точки зору їх наслідків для фінансового положення компанії.

Якщо в деякий момент часу t надходить запит величиною X і капітал в цей момент U_t не менше, ніж X, то компанія успішно виконує свої зобов'язання.

Якщо ж $X > U_t$, то компанія не зможе оплатити запит. В цьому випадку можна говорити про її *розорення*. *Ймовірність розорення* має велике значення для компанії і служить основою для прийняття важливих рішень.

Нехай величина *сумарного запиту* до страхової компанії $S = X_1 + ... + X_n$, де X_i — величина запиту за i – им договором. Якщо цей сумарний запит більший, ніж *капітал компанії*, то компанія не зможе виконувати свої зобов'язання і розориться, а ймовірність розорення компанії

$$\varepsilon = P(X_1 + X_2 + ... + X_n > U_t).$$

Приклад 4.1. Страховий портфель налічує n=1000 однотипних договорів страхування терміном на 1 рік з ймовірністю p=0,1 настання страхових випадків. Якою повинна бути права границя для числа страхових випадків, щоб ймовірність розорення $\varepsilon = 0{,}025$? Вважаючи, що для цієї галузі страхування *ризикова надбавка* складає в середньому 10% *ризикової премії*, оцінити конкурентноздатність страхової компанії.

Розв'язок. Згідно з умовою задачі $np = 100$, $npq = 90$, $\sqrt{npq} = 9{,}48$. З того, що $\varepsilon = (1-\gamma)/2 = 0{,}025$ випливає, що $\gamma = 0{,}95$ і $t_{0,95} = 1{,}96$, а ризикова надбавка $d_1 = t_\gamma \sqrt{npq} = 1{,}96 \cdot 9{,}48 = 18{,}58$.

При відносній ризиковій надбавці $\theta = d_1 / np = 18{,}58/100 = 0{,}1858$ (або 18,58%), число страхових випадків не перевищить $100 + 18{,}58 < 119$.

З позиції конкурентноздатності надбавка 19% є завеликою.

Нехай тепер за умовами прикладу 4.1 ми хочемо забезпечити ймовірність розорення $\varepsilon = 0{,}01$. Якою повинна бути відносна ризикова надбавка θ? Маємо:
$\varepsilon = (1-\gamma)/2 = 0{,}01 \Rightarrow \gamma = 0{,}98 \Rightarrow t_{0,98} = 2{,}325 \Rightarrow d_1 = 2{,}325 \cdot 9{,}48 = 22{,}1$
$\Rightarrow \theta = 22{,}1/100 = 22{,}1\%$. Це ще більше, ніж в прикладі 4.1.

Знайдемо ймовірність розорення, яку забезпечує ризикова надбавка в 10%: $d_1 = 0{,}1 \cdot 100 = 10 \Rightarrow t_\gamma = 10/9{,}48 = 1{,}053 \Rightarrow \gamma = 0{,}7 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}15$.

В даному випадку неприємності страховика зумовлені протиріччям між відносно високою ймовірністю настання страхового випадку і порівняно невеликим об'ємом страхового портфеля $n = 1000$.

Збільшимо тепер об'єм страхового портфеля до $n = 10000$, тобто в 10 разів. Тоді $np = 1000$, $npq = 900$, $\sqrt{npq} = 30$. Якщо $\varepsilon = 0{,}025$, то $\gamma = 0{,}95$, $t_{0,95} = 1{,}96$, $d_1 = 1{,}96 \cdot 30 = 58{,}8$, $\theta = 58{,}8/1000 = 0{,}0588$ проти 0,1858 в прикладі 4.1, тобто зменшилась більше, ніж в три рази.

Страховик в цьому випадку може знижувати ризикову надбавку і тоді його тарифи будуть меншими, ніж у конкурента. Тоді конкурент з малим портфелем також повинен знижувати свої тарифи, а це різко знизить його надійність і він може розоритись.

Звідси видно, чому великі компанії виживають, а дрібні розорюються.

Нехай тепер $\varepsilon = 0{,}01$. Тоді $\gamma = 0{,}98$; $t_{0,98} = 2{,}325$; $d_1 = 2{,}325 \cdot 30 = 69{,}75$; $\theta = 69{,}75/1000 = 0{,}06975$, або 7%.

Врешті знайдемо ймовірність розорення, яку забезпечить ризикова надбавка в 10% від ризикової премії, тобто $d_1 = 0{,}1$, $np = 100$, тоді $t_\gamma = 100/30 = 3{,}33$, що відповідає $\gamma = 0{,}999$ і ймовірність розорення $\varepsilon = 0{,}0005$.

На основі вищесказаного бачимо, що доцільно зупинитись на варіанті: ймовірність розорення $\varepsilon = 0{,}01$ і ризикова надбавка 7%. При цьому страхова компанія вирішує задачу забезпечення достатньої надійності за рахунок клієнта, а послуги дешевші за середні послуги на страховому ринку.

Таким чином, якщо на страховому ринку в деякій підгалузі середня відносна ризикова надбавка складає 10% ризикової премії, то мала компанія не в змозі витримати конкуренцію, а велика, маючи солідний запас, тримається на плаву, не прикладаючи до цього жодних зусиль. Вона навіть може знижувати свої тарифи, витісняючи конкурентів з ринку і нічим при цьому не ризикуючи.

Приклад 4.2. В страховій компанії 6000 однотипних договорів, в кожному з яких ймовірність страхового випадку $p = 0{,}005$, а страхова сума на один договір $S = 100000$ у.о. Одноразова нетто-премія $T_H = 800$ у.о. Знайти ймовірність розорення страхової компанії, якщо страховий резерв і договір перестрахування відсутні.

Розв'язок. Сумарна нетто-премія зі всього портфеля $T_H = 6000 \cdot 800 = = 4800000$; $np = 6000 \cdot 0{,}005 = 30$; $npq = 30 \cdot 0{,}995 = 29{,}85$; $\sqrt{npq} = 5{,}4635$.

Зібраних внесків вистачить для виплати $480000 : 100000 = 48$ відшкодувань. Тому $\varepsilon = P(m > 48) = P\left(t_\gamma \sqrt{npq} > 48 - 30\right) = P\left(t_\gamma \cdot 5{,}4635 > 18\right) = = P(t_\gamma > 18 / 5{,}4635) = P(t_\gamma > 3{,}2946) = (1 - \gamma) / 2$, де $\gamma = 2\Phi(3{,}2946) = = 2 \cdot 0{,}4995 = 0{,}999$. Тоді $\varepsilon = (1 - 0{,}999) / 2 = 0{,}0005$.

Приклад 4.3. Страховий портфель налічує 8000 договорів страхування терміном на 1 рік, з яких 5000 договорів на страхову суму 10000 у.о., 3000 договорів на суму 20000 у.о., а ймовірності надходження запитів на виплату однакові та дорівнюють 0,02. Поклавши 1о.с.с.=10000 у.о., знайти ймовірність того, що розмір виплат перевищить 240о.с.с.

Розв'язок. Маємо

$MZ = 5000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 + 3000 \cdot 2 \cdot 0{,}02 = 220 \textit{о.с.с}$,

$DZ = 5000 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 3000 \cdot 2^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 333{,}2$.

Далі, $P(Z > 240) = P\left(t_\gamma > (240 - 220) \big/ \sqrt{333{,}2}\right) = P\left(t_\gamma > 1{,}096\right) = (1 - \gamma)/2$, де $\gamma = 2\Phi(1{,}096) = 0{,}72$, $P(Z > 240) = (1 - 0{,}72)/2 = 0{,}14$.

Приклад 4.4. Страховий портфель складається з *n*=400 однотипних договорів зі страховою сумою $S = 1000$ у.о. і ймовірністю настання страхових подій $p = 0{,}01$. Знайти сумарну нетто-премію, яка забезпечує ймовірність нерозорення не нижче 0,95.

Розв'язок. Оскільки $n = 400$, $S = 1000$ у.о., $p = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}05$, то $np = 4$, $npq = 3{,}96$, $\sqrt{npq} = 1{,}99$, $(1-\gamma)/2 = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}9$, $y_{0,9} = 1{,}645$, $d_1 = 1{,}645 \cdot 1{,}99 = 3{,}274$, $np + d_1 = 4 + 3{,}274 = 7{,}274$. Тоді сумарна нетто-премія $T_н = 1000 \cdot 7{,}274 = 7274$.

Приклад 4.5. Є два субпортфелі з параметрами: $n_1 = 1000$; $p_1 = 0{,}001$; $S_1 = 10$; $n_2 = 4000$; $p_2 = 0{,}0005$; $S_2 = 3$. Знайти одноразову відносну ризикову надбавку, яка забезпечує ймовірність нерозорення $1 - \varepsilon = 0{,}95$.

Розв'язок. За умовою маємо: $\varepsilon = 0{,}05 = (1-\gamma)/2 \Rightarrow \gamma = 0{,}9 \Rightarrow t_{0,9} = 1{,}645$.

Далі: $n_1 p_1 = 1$; $n_1 p_1 q_1 = 0{,}999$; $n_1 p_1 S_1 = 10$; $n_1 p_1 q_1 S_1^2 = 99{,}9$; $n_2 p_2 = 2$; $n_2 p_2 q_2 = 1{,}999$; $n_2 p_2 S_2 = 6$; $n_2 p_2 q_2 S_2^2 = 17{,}991$.

Для всього портфеля $MX = n_1 p_1 S_1 + n_2 p_2 S_2 = 10 + 6 = 16$; $DX = = n_1 p_1 q_1 S_1^2 + n_2 p_2 q_2 S_2^2 = 99{,}9 + 17{,}991 = 117{,}891$; $\sqrt{117{,}891} = 10{,}86$; $d_1 = t_{0,9}\sqrt{DX} = 1{,}645 \cdot 10{,}86 = 17{,}86$; $\theta = d_1 / MX - 17{,}86/16 = 1{,}116$, або 111,6 %.

Як бачимо, відносна надбавка досить велика.

4.2. Динамічні моделі розорення

Дані моделі відрізняються від статичних тим, що в них події розгортаються в часі.

Найпростіша модель такого роду включає тільки два процеси: процес надходження страхових премій і процес страхових виплат, які протікають в різних масштабах часу і мають різні масштаби виміру.

Оскільки число N_t страхових виплат на відрізку $[0, t]$ є пуассонівським процесом з інтенсивністю α, то $MN_t = \alpha t$. Розміри виплат, що їх проводить страхова компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин $\{Y_k, k \geq 1\}$, однаково розподілених з функцією розподілу $F(x)$. Припускатимемо, що $F(0) = 0$ (це означає, що величини Y_k додатні), існують математичне сподівання $MY_k = \mu$ та дисперсія $DY_k = \sigma^2$. Крім того, вважатимемо, що процес N_t і послідовність $\{Y_k\}$ взаємно незалежні. Момент $\{T_k\}$ k-ого стрибка процесу N_t є моментом надходження до страхової компанії k-ого запиту, і в цей момент компанія виплачує суму Y_k.

Випадковий процес $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ виражає суму виплат, які проведені компанією на відрізку $[0,t]$, причому $MS_t = MN_t \cdot MY_k = \alpha t \mu$.

Страхові премії надходять частіше, ніж проводяться страхові виплати, при цьому величина премії є меншою за величину страхової виплати.

Якщо за основний брати процес страхових виплат, то в масштабах цього процесу надходження премій можна вважати неперервним детермінованим процесом.

В найпростішому випадку надходження страхових премій характеризується одним параметром c – швидкістю надходження страхових премій.

Це означає, що якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ компанія мала капітал U_0 і до моменту $0+t$ запити не надходили, то капітал компанії в момент t буде $U_t = U_o + ct$. Ми нехтуємо процентами на капітал і інфляцією, щоб не ускладнювати математичний аналіз.

Тоді прибуток компанії за цей час $Q_t = ct - S_t$, а $MQ_t = ct - \alpha\mu t = = (c - \alpha\mu)\, t$. Відносна ризикова надбавка $\rho = \dfrac{MQ_t}{MS_t} = \dfrac{c - \alpha\mu}{\alpha\mu} = = \dfrac{c}{\alpha\mu} - 1$.

Якщо розміри виплат розподілені за показниковим законом з математичним сподіванням μ, то ймовірність розорення (банкрутства) $\varepsilon(U_0)$ при початковому капіталі U_0 обчислюється за формулою

$$\varepsilon(U_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho} \exp\left\{ -\dfrac{\rho U_0}{\mu(1+\rho)} \right\}, & c > \mu\alpha \\ 1, & c \le \mu\alpha \end{cases}. \tag{4.1}$$

Приклад 4.6. Число страхових виплат є пуассонівським процесом з інтенсивністю $\alpha = 0,3$ виплат в місяць. Розмір виплат розподілений за показниковим законом з математичним сподіванням $\mu = 10\,о.с.с.$ Премії поступають зі швидкістю $c = 5\,о.с.с.$ в місяць, а початковий капітал компанії $U_0 = 5\,о.с.с.$ Обчислити ймовірність розорення.

Розв'язок. Щоб скористатися формулою (4.1), обчислюємо спочатку ρ. Маємо $\rho = \dfrac{c}{\alpha\mu} - 1 = \dfrac{5}{0,3 \cdot 10} - 1 = \dfrac{2}{3}$. Тоді $\varepsilon(5) = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} \exp\left(-\dfrac{\frac{2}{3} \cdot 5}{10\left(1+\frac{2}{3}\right)} \right) =$

$= 0,6\exp(-0,2) = 0,49122$.

Нехай U_0 – початковий капітал компанії. Випадковий процес $U_t = U_o + ct - S_t$ назвемо *процесом ризику*. Зазначимо, що U_t – сумарний капітал компанії в момент часу t. Подамо його короткий опис. Для цього відрізок часу $[0,t]$ точками $T_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ – моментами k-ого стрибка процесу N_t, розіб'ємо на n часових відрізків (не обов'язково рівних). Зауважимо, що $T_n = t$.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що в момент часу t надходження n-ого запиту відбулося розорення компанії.

Тепер зміна капіталу в часі описується так: в момент $t = 0$ компанія має деякий початковий капітал $U_0 = U$. На момент T_1 надходження першого запиту капітал виросте (за рахунок надходження премії) до величини $U + cT_1$. Проте в момент T_1 компанія оплатить запит величиною Y_1 і капітал зменшиться до величини $U + cT_1 - Y_1$.

На момент T_2 надходження другого запиту капітал збільшиться на суму $c(T_2 - T_1)$ і складе $U + cT_1 - Y_1 + c(T_2 - T_1) = U + cT_2 - Y_1$. В момент T_2 надходить запит величиною Y_2 і капітал зменшується до величини $U + cT_2 - Y_1 - Y_2$.

Цей процес продовжується доти, доки в момент надходження чергового запиту засобів компанії не вистачить для його оплати. В цьому випадку говорять про розорення компанії.

В рамках цієї моделі компанія не розориться, якщо для всіх n справедлива нерівність $U_t = U + cT_n - (Y_1 + ... + Y_n) \geq 0$. Якщо ж $U + cT_1 - Y_1 \geq 0$; $U + cT_2 - (Y_1 + Y_2) \geq 0$, ..., $U + cT_{n-1} - (Y_1 + ... + Y_{n-1}) \geq 0$, але $U + cT_n - \ - (Y_1 + ... + Y_n) < 0$, то в момент t надходження n–ого запиту компанія розориться, а ймовірність розорення $\varepsilon(U) = P\{U_t < 0$ при всіх $t > 0\}$.

Функція $\varphi(U) = 1 - \varepsilon(U)$ виражає ймовірність того, що на інтервалі часу $[0, t]$ розорення (банкрутство) не відбудеться.

Приклад 4.7. Початкові активи компанії дорівнюють 1, а за портфелем договорів може наступати не більше одного страхового випадку. Відомо, що величина збитку (при настанні страхового випадку) дорівнює 5, ймовірність настання страхового випадку $p = \frac{1}{3}$, час настання страховго випадку t задається функцією густини $f(t) = 2t^{-3}, t > 1$, а страхова премія сплачується неперервно з швидкістю $c = 3$.

Знайти ймовірність розорення.

Розв'язок. Оскільки на момент T активи компанії дорівнюватимуть $1 + 3T$, то вона збанкрутує, якщо $1 + 3T < 5$ або $T < \frac{4}{3}$. Відповідно ймовірність розорення $\varepsilon = \frac{1}{3} P\left(T < \frac{4}{3}\right)$, і задача зводиться до знаходження значення функції розподілу $F(t)$ в точці $t = \frac{4}{3}$. Маємо $F_T(t) = \int_1^t \frac{2}{u^3} du = -u^{-2}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t^2}, t \geq 1$, звідки $\varepsilon = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right) \approx 0{,}1458$.

4.3. Статистичні показники надійності страхових компаній

До статистичних показників надійності страхових компаній належать:

1. *Коефіцієнт ліквідності* $K_Л$ характеризує можливість швидкого перетворення активів страхової компанії в грошову форму, а отже, – швидкість можливого виконання нею своїх зобов'язань. Він дорівнює: $K_Л = A/Q$, де A – поточні активи, Q – зобов'язання страхової компанії.

2. *Коефіцієнт платоспроможності* $K_П$ характеризує достатність власних коштів страхової компанії для виконання своїх зобов'язань. Його визначають як відношення: $K_П = Ф/Н$, де $Ф$ – фактичний запас платоспроможності, $Н$ – нормативний запас платоспроможності.

Фактичний запас платоспроможності страхової компанії в розумінні страхувальників, власне кажучи, є власним капіталом підприємства. Тому коефіцієнт платоспроможності еквівалентний відношенню чистих активів до нормативного запасу платоспроможності.

3. *Коефіцієнт рентабельності* K_P характеризує прибутковість страхової компанії, тобто ступінь перевищення доходів над витратами, і визначається відношенням $K_P = П_P/Д$, де $П_P$ – річний прибуток страхової компанії, $Д$ – річна сума страхової компанії.

4. *Коефіцієнт надійності страхової компанії* $K_Н$ характеризує сукупний рівень ліквідності, платоспроможності і рентабельності страхової компанії та визначається за формулою $K_Н = \sqrt[3]{K_Л \cdot K_П \cdot K_P}$.

Запропонована методика оцінки надійності страхових компаній має практичне значення. На підставі опублікованого балансу та звіту певної страхової компанії про фінансові результати можна обчислити коефіцієнт ліквідності, платоспроможності, рентабельності та надійності, а потім зіставити їх з іншими компаніями. Це порівняння повинно допомогти страхувальнику прийняти рішення про можливий вибір партнера на страховому ринку.

Контрольні запитання та задачі

1. Що розуміють під ймовірністю розорення, ймовірністю нерозорення?
2. Як визначається ймовірність розорення компанії у випадку статичної моделі?
3. Який розподіл має випадкова величина η ={число запитів для портфеля з n договорів}?
4. В чому різниця між динамічними та статичними моделями розорення?
5. Які процеси включає в себе динамічна модель розорення?
6. Чому дорівнює математичне сподівання випадкового процесу S_t, який виражає суму виплат , проведених компанією на відрізку $[0,t]$.
7. Який процес називається процесом ризику?
8. Як означають ймовірність розорення для динамічних моделей?
9. За якою формулою обчислюється ймовірність розорення, якщо розміри виплат розподілені за показниковим законом?
10. Які ви знаєте статистичні показники надійності страхових компаній та дайте їх коротку характеристику?
11. Страховий портфель налічує а) $n = 800$; б) $n = 1100$ однотипних договорів страхування терміном на 1 рік, з ймовірністю а) $p = 0{,}05$: б) $p = 0{,}07$ настання страхових випадків. Якою повинна бути права границя для числа страхових випадків, щоб ймовірність розорення а) $\varepsilon = 0{,}05$; б) $\varepsilon = 0{,}01$. Вважаючи, що для цієї галузі страхування ризикова надбавка складає а) 12%; б)15% ризикової премії, оцінити конкурентноздатність страхової компанії.
12. В страховій компанії а) 8000; б) 7000 однотипних договорів, в кожному з яких ймовірність страхового випадку а) $p = 0{,}003$; б) $p = 0{,}007$. Страхова сума на один договір а) 90000 у.о.; б)110000 у.о. Одноразова нетто-премія а) $T_H = 700$ у.о.; б) $T_H = 900$ у.о. Знайти ймовірність

розорення страхової компанії, якщо страховий резерв і договір перестрахування відсутні.

13. Страховий портфель налічує а) 800; б) 1000 договорів страхування, з яких а) 500 на страхову суму 1000 у.о. і 300 на суму 2000у.о.; б) 800 на страхову суму 2000 у.о. і 200 на суму 3000 у.о., а ймовірності надходження запитів на виплату однакові та дорівнюють 0,01. Поклавши 1о.с.с. = 1000 у.о., знайти ймовірність того, що розмір виплат перевищить а) 250 о.с.с.; б) 220 о.с.с.
14. Страховий портфель складається з а) $n = 500$; б) $n = 300$ однотипних договорів зі страховою сумою а) $S = 1500$ у.о.; б) $S = 2000$ у.о і ймовірністю надходження запитів а) $p = 0,02$; б) $p = 0,03$. Знайти сумарну нетто-премію, яка забезпечує ймовірність нерозорення не нижче а) 0,9; б) 0,975.
15. Для субпортфелів з пункту б) прикладу 13 знайти одноразову відносну ризикову надбавку, яка забезпечує ймовірність нерозорення а) $1 - \varepsilon = 0,98$; б) $1 - \varepsilon = 0,975$.
16. Число страхових виплат є пуассонівським процесом з інтенсивністю а) $\alpha = 0,4$; б) $\alpha = 0,5$ виплат в місяць. Розмір виплат розподілений за показниковим законом з математичним сподіванням а) $\mu = 8\, о.с.с.$; б) $\mu = 9\, о.с.с.$ Премії поступають зі швидкістю а) $c = 4\, о.с.с.$; б) $c = 6\, о.с.с.$ в місяць, а початковий капітал компанії а) $U_0 = 10\, о.с.с.$; б) $U_0 = 18\, о.с.с.$ Обчислити ймовірність розорення.
17. Початкові активи компанії дорівнюють а) 2;б) 3, а за портфелем договорів може наступати не більше одного страхового випадку. Відомо, що величина збитку (при настанні страхового випадку) дорівнює а) 7;б) 6, ймовірність настання страхового випадку а) $p = \frac{1}{2}$; б) $p = \frac{9}{19}$, час настання страховго випадку t задається функцією густини а) $f(t) = t^{-1}$,

$t > 1$; б) $f(t) = 3t^{-4}, t > 1$, а страхова премія сплачується неперервно з швидкістю а) $c = 4$; б) $c = 2$.Знайти ймовірність розорення.

5. ФОРМУВАННЯ СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

Визначення розмірів страхових тарифів є першою частиною обов'язків професійного актуарія. Проте, незважаючи на досконалість визначення їх розмірів, завжди існує певна ймовірність того, що страхове відшкодування протягом певного періоду (наприклад, протягом одного року) перевищить середній рівень, закладений в тарифах. В зв'язку з цим страхові компанії передбачають певні заходи на випадок таких збитків, до яких відноситься створення *страхових резервів (фондів)*.

Страховий резерв (фонд) — це виражений в грошовій формі розмір майбутніх зобов'язань, на які страхова компанія повинна мати активи. Тому другою, не менш важливою, сферою обов'язків актуарія є перевірка правильності формування страхових резервів.

Інакше кажучи, актуарій повинен оцінити наскільки створюваний страховий резерв (фонд) достатній для виплати страхового відшкодування, які фінансові можливості страхової компанії виконати свої зобов'язання перед страхувальником.

Оскільки страхові резерви призначаються для забезпечення майбутніх виплат страхових сум, то вони утворюються в тих випадках, у яких компанії несуть відповідальність згідно з договорами страхування. У страхових компаніях облік договорів страхування, надходжень страхових внесків і виплат страхових сум повинен бути організований таким чином, щоб забезпечити отримання інформації, необхідної для формування страхових резервів.

В свою чергу, створення страхових резервів впливає на зниження показників ймовірності розорення страхових компаній.

Важливе місце у формуванні страхових резервів відводиться ризиковій надбавці. Можливість знизити ймовірність розорення компанії простим збільшенням цієї надбавки обмежена конкуренцією на страховому ринку. Більше того, може скластися ситуація, при якій доведеться знижувати цю надбавку.

На підвищення надійності страхових компаній важливий вплив має об'єм страхового портфеля: чим він більший, тим вища надійність.

Компанія може підтримувати високу конкурентну здатність, зменшуючи ризикову надбавку практично без збитку для надійності.

Таким чином, найбільша частка ризику страхової компанії покривається зібраними ризиковими преміями (біля 60%) і ризиковою надбавкою (10-20%). Далі починається зона відповідальності початкового капіталу (початкового резерву). Очевидно, що створення досить великого резерву є недоцільним через те, що засоби відведені в резерв або взагалі не приносять дохід, або приносять значно менший за той, який би приносили при інвестуванні.

Виникає пошук розумного компромісу між надійністю та величиною резерву, яка може змінюватися залежно від ситуації. Тому страхова компанія інколи змушена зменшувати величину ризикової надбавки, зменшуючи при цьому ймовірність розорення. В зв'язку з цим для підтримання стійкості на попередньому рівні необхідно розширити зону відповідальності резерву, тобто збільшувати його, залучаючи додатковий власний капітал.

Другою причиною збільшення резерву може бути досить велика плата за перестрахування.

На практиці початковий резерв формують таким чином, щоб він разом із ризиковою премією та ризиковою надбавкою забезпечував би ймовірність нерозорення в межах 90-95%, а решта передають на перестрахування.

Нехай страховий портфель налічує n однотипних договорів страхування з однаковою для всіх ймовірністю p настання страхових випадків і страховою сумою S.

Як і раніше, N_j – індикатор страхового випадку для j-го договору, а відшкодування за j-им договором описує випадкова величина $X_j = N_j S$.

Загальне число запитів (один договір спричиняє один запит) описує випадкова величина $N = \sum_{j=1}^{n} N_j$, а загальне відшкодування за всіма запитами – випадкова величина $X = NS$. Знаючи розподіл випадкової величини *N*, знайдемо ймовірність розорення ε та величину резервного фонду *U*, який би з ймовірністю $1-\varepsilon = (1+\gamma)/2$ забезпечив виплати за всіма запитами. Вважатимемо, що випадкові величини N_j – незалежні.

Позначимо через $P_k = P(N = k)$ ймовірність того, що до страхової компанії надійде рівно k запитів. Оскільки N_j незалежні, то

$$P(N=k) = P(N_1 = 1,\ \ldots,\ N_k = 1, N_{k-1} = 0,\ \ldots,\ N_n = 0) +$$

$$+P(N_1 = 0,\ \ldots,\ N_k = 1, N_{k+1} = 1, N_{k+2} = 0,\ \ldots,\ N_n = 0) + \ldots +$$

$$+P(N_1 = 0,\ \ldots, N_{n-k-1} = 0,\ N_{n-k} = 1,\ \ldots, N_n = 1) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Таким чином, ми отримали, що число запитів для портфеля з *n* незалежних договорів страхування індивідуального ризику має *біноміальний закон розподілу*, для якого

$MN = np, \quad DN = np(1-p), W_N = \sqrt{(1-p)np},$

$MX = Spn, DX = S^2 np(1-p), \ \ \sigma_X = S\sqrt{np(1-p)}.$

Отже, ймовірність того, що число запитів N не перевищить деякого числа m обчислюється за формулою $1-\varepsilon_m = P(N \le m) = \sum_{l \ge 1}^{m} p_l$, а $P(N > m) = \varepsilon_{m.}$. Позначимо через $m^* = \min\limits_{m}\left\{1-\varepsilon_m, \frac{1+\gamma}{2}\right\}$. Тоді резервний фонд в розмірі $U = m^* S$ забезпечує з ймовірністю $(1+\gamma)/2$ виплату всіх запитів, що надійшли до страхової компанії. Ймовірність розорення дорівнює ε_m.

Розмір резервного фонду можна ще обчислити, скориставшись центральною граничною теоремою. Для цього для випадкової величини

$Z = (N - MN)/\sigma_N$ і надійності γ розв'язують рівняння $2\Phi\left(\frac{N - MN}{\sigma_N}\right) = \gamma$.

Його розв'язок:

$$N^* = np + t_\gamma \sqrt{np(1-p)} \qquad (5.1)$$

вказує на кількість запитів, які страхова компанія зможе виплатити з ймовірністю $1 - \varepsilon = (1+\gamma)/2$. Тут t_γ – розв'язок рівняння $2\Phi(t)=\gamma$. Відповідно, резервний фонд

$$U = N^* \cdot S. \qquad (5.2)$$

Співставивши значення N^* з формули (5.1) і значення правої границі довірчого інтервалу (1.8), бачимо, що вони на перший погляд однакові. Але, насправді, відрізняються між собою величиною надійності γ.

Оскільки, як зазначалося вище, частка ризику страховика на 70-80% покривається зібраними ризиковими преміями та ризиковою надбавкою, то $0{,}7 < \gamma_1 < 0{,}8$; оскільки страховий резерв повинен на 90-95% забезпечувати всі виплати, то $0{,}8 < \gamma_2 < 0{,}95$.

Таким чином, забезпечуючи ймовірність нерозорення $(1+\gamma)/2$, ми знайдемо величину резерву U. Віднявши від нього величину нетто-премії T_H, будемо мати величину початкового резерву (власний капітал компанії) U_0, який, зокрема, дорівнює

$$U_0 = U - T_H = \left(npS + t_{\gamma_2}\sqrt{npq}S - npS - t_{\gamma_1}\sqrt{npq}S\right) = \left(t_{\gamma_2} - t_{\gamma_1}\right)\sqrt{npq}S.$$

Нетто-премія T_H, зібрана зі всього портфеля, разом з резервом U повинні компенсувати перевищення розміру виплат X над очікуваним (середнім) розміром виплат. Якщо цих засобів недостатньо, то укладається договір перестрахування.

Приклад 5.1. Страховий портфель налічує 6000 договорів страхування з страховою сумою 10 у.о. і 4000 договорів страхування з страховою сумою 20 у.о., а ймовірності надходження запитів на виплату однакові та дорівнюють 0,01. Оцінити ймовірність розорення, якщо компанія має капітал 300 у.о.

Розв'язок. Сумарна ризикова премія $MX = 0,01(6000 \cdot 10 \cdot +4000 \cdot 20) =$ $=1400$; $DX = 6000 \cdot 10^2 \cdot 0,01 \cdot 0,99 + 4000 \cdot 20^2 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 21780$, а $\sqrt{D}$=147,6. Тоді $P = P(X > 1400 + 300) = P(t_\gamma > 300/147,6) = P(t_\gamma > 2,03) =$ $= (1 - 2\Phi(2,03))/2 = (1 - 0,9576)/2 = 0,0212$.

Приклад 5.2. Страховий портфель налічує $n = 3000$ однотипних договорів з однаковою для всіх ймовірністю $p = 0,003$ настання страхових випадків і страховою сумою $S = 10000$у.о. Якими коштами повинна володіти страхова компанія, щоб забезпечити ймовірність розорення $\varepsilon = 0,05$.

Розв'язок. Оскільки ймовірність розорення $\varepsilon = 0,05 = (1-\gamma)/2$, то $\gamma = 0,9$ і $t_{0,9} = 1,645$. Далі $np = 0,003 \cdot 3000 = 9$, $npq = 0,003 \cdot 3000 \cdot 0,997 \approx 9$. Тоді за формулою (5.1) $N^* = 9 + 1,645 \cdot \sqrt{9} \approx 13,935$, а за формулою (5.2) $U = 14 \cdot 1\,о.с.с. = 14\,о.с.с.$, в тому числі $9\,о.с.с.$ ризикової премії. Якщо решта $14 - 9 = 5(о.с.с.)$ вирішувати тільки з допомогою ризикової надбавки, то нетто – премія складе $(14/9) \approx 1,56$ ризикової премії, а відносна надбавка – 56 %.

Приклад 5.3 Страховий портфель налічує $n = 400$ однотипних договорів страхування з однаковою для всіх ймовірністю $p = 0,075$ настання страхових випадків і страховою сумою $S = 1000$ у.о. Ризикова надбавка складає $\theta = 10\%$ ризикової премії. Знайти капітал, який забезпечує ймовірність нерозорення $1 - \varepsilon = 0,95$.

Розв'язок. Оскільки ймовірність розорення $\varepsilon = 0,05 = (1-\gamma)/2$, то $\gamma = 0,9$ і $t_{0,9} = 1,645$. Далі, $np = 0,075 \cdot 400 = 30$, $npq \approx 27,75$. Тоді за формулою (5.1) $N^* = 30 + 1,645 \cdot \sqrt{27,75} \approx 38,67$ і страхова компанія повинна володіти коштами в сумі $39 \cdot 1000 = 39000$ у.о. З іншого боку, величина зібраних нетто – премій згідно конкурентноздатності на страховому ринку

$T_H = (1+\theta)npS = 1{,}1\cdot 400\cdot 0{,}075\cdot 1000 = 33000$. Таким чином, початковий резерв компанії $U_0 = 39000 - 33000 = 6000$ (у.о.).

Приклад 5.4. Страховий портфель налічує $n = 20$ однотипних договорів з однаковою для всіх ймовірністю $p = 0{,}02$ настання страхових випадків і страховою сумою $S = 10000$ у.о. Визначити: а) розмір резервного фонду U, який з ймовірністю $1-\varepsilon = 0{,}999$ забезпечить всі виплати, які надійдуть за даними договорами; б) скільки необхідно укласти договорів, щоб $W_N < \frac{1}{3}$, і яким повинен бути резервний фонд, щоб з надійністю $\gamma = 0{,}95$ забезпечити виплати за запитами, які настали ?

Розв'язок. а) побудуємо спочатку розподіл випадкової величини $N = \{$число запитів, які надійшли від портфеля, 20 договорів$\}$. Оскільки випадкова величина N розподілена за біноміальним законом, то ймовірності $P_n\left(N=k\right)$ знайдемо за формулою Бернуллі$\left(1.1\right)$:

$$p_0 = P\left(N=0\right) = C_{20}^0\left(0{,}02\right)^0\cdot\left(0{,}98\right)^{20} = 0{,}6676;$$
$$p_1 = P\cdot\left(N=1\right) = C_{20}^1\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^{19} = 0{,}2725;$$
$$p_2 = P\left(N=2\right) = C_{20}^2\cdot\left(0{,}02\right)^2\cdot\left(0{,}98\right)^{18} = 0{,}0523;$$
$$p_3 = P\left(N=3\right) = C_{20}^3\left(0{,}02\right)^3\cdot 0{,}98^{17} = 0{,}0065;$$
$$p_4 = P\left(N=4\right) = C_{20}^4\cdot\left(0{,}02\right)^2\cdot\left(0{,}98\right)^{16} = 0{,}0006.$$

Сума цих п'яти значень дорівнює 0,9995. Таким чином, $m^* = 4$ і відповідний страховий фонд $U = m^*\cdot S = 4\cdot 10000 = 40000$(у.о.).

Зауважимо, що якщо компанія має капітал в 40000 у.о., то може прийняти даний ризик, оскільки ймовірність того, що страхових випадків не буде взагалі дорівнює 0,668.

б) знайдемо n таке, що $W_N < \frac{1}{3}$. Підставивши $p = 0{,}02$, отримаємо $\sqrt{\frac{1-0{,}02}{n\cdot 0{,}02}} < \frac{1}{3}$, звідки $n > 441$. Далі, $MN = np = 441\cdot 0{,}02 = 8{,}82$, $DN = 441\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98 = 8{,}64, \sigma_N = \sqrt{8{,}64} = 2{,}94, \Upsilon = \left(N - 8{,}82\right)/2{,}94.$

Розв'язуючи рівняння $2\Phi\left(\frac{N-8{,}82}{2{,}94}\right)=0{,}95$, отримаємо, що $\frac{N-8{,}82}{2{,}94}=1{,}96$, або $N=14{,}5824<15$. Це означає, що резервний капітал $U = 15\cdot 10000 = 150000$(у.о.) забезпечить ймовірність нерозорення страхової компанії на рівні 0,95.

Замінимо в страховому портфелі прикладу 5.4 $p=0{,}02$ на $p=0{,}1$. Розраховуючи за формулою Бернуллі (1.1) ймовірності $P(N=k), k=\overline{1,20}$, отримаємо: 0,122; 0,27; 0,285; 0,19; 0,09; 0,032; 0,009; 0,002; ... , сума яких 0,999. Це означає, що настане не більше 7 страхових випадків і страховий резерв $U = 7\cdot 10000 = 70000$(у.о.).

Ризикові премії, зібрані в першому портфелі,$T_o=20\cdot 10000\cdot 0{,}02=$ $=4000$ (у.о.), а в другому – $T_o=20\cdot 10000\cdot 0{,}1=20000$ (у.о.). Тоді власний капітал в першому портфелі $40000-4000=36000$(у.о.), а в другому – $70000-20000=50000$(у.о.), проте частка власного капіталу в першому портфелі становить 10 %, в другому – 29 %.

Контрольні запитання та задачі

1. Що таке страховий резерв і для чого він призначений?
2. Як обчислюють розмір резервного фонду для моделі індивідуального ризику?
3. Якого принципу дотримуються при формуванні страхового резерву?
4. Які причини спонукають до збільшення величини резерву?
5. Страховий портфель налічує а) $n_1=4000$; б) $n_1=3000$ договорів страхування зі страховою сумою а) $S_1=100$ у.о.; б) $S_1=150$ у.о.і а) $n_2=5000$; б) $n_2=6000$ договорів страхування зі страховою сумою а) $S_2=200$у.о.; б) $S_2=250$ у.о., а ймовірності надходження запитів на виплату однакові та дорівнюють а) $p=0{,}02$; б) $p = 0{,}03$. Оцінити

ймовірність розорення, якщо компанія має капітал а) $U_0 = 3000$ у.о.; б) $U_0 = 4000$ у.о.

6. Страховий портфель налічує а) $n_1 = 1000$; б) $n_1 = 2000$ однотипних договорів страхування з однаковою для всіх ймовірністю а) $p = 0,001$ б) $p = 0,002$ настання страхових випадків і страховою сумою а) $S_2 = 100$ у.о.; б) $S_2 = 200$ у.о. Якими коштами повинна володіти страхова компанія, щоб забезпечити ймовірність розорення а) $\varepsilon = 0,03$; б) $\varepsilon = 0,04$.
7. Страховий портфель налічує а) $n = 300$; б) $n = 500$ договорів страхування зі страховою сумою а) $S = 800$ у.о.; б) $S = 900$ у.о. Ризикова надбавка складає а) $\theta = 15\%$; б) $\theta = 18\%$ ризикової премії. Знайти капітал, який забезпечує ймовірність розорення а) $1 - \varepsilon = 0,96$; б) $1 - \varepsilon = 0,97$.
8. Страховий портфель налічує а) $n = 30$; б) $n = 40$ однотипних договорів з однаковою для всіх ймовірністю а) $p = 0,01$; б) $p = 0,03$ настання страхових випадків і страховою сумою а) $S = 8000$ у.о.; б) $S = 7000$ у.о.Визначити: а) розмір резервного фонду U, який з ймовірністю а) $1 - \varepsilon = 0,9$; б) $1 - \varepsilon = 0,95$ забезпечить всі виплати, які надійдуть за даними договорами; б) скільки необхідно укласти договорів, щоб а) $W_N < \frac{1}{2}$; б) $W_N < \frac{1}{5}$, і яким повинен бути резервний фонд, щоб з надійністю а) $\gamma = 0,975$; б) $\gamma = 0,999$ забезпечити виплати за запитами, які настали ?

6. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

6.1. Перестрахування та співстрахування

В розглянутих раніше математичних моделях фінансових процесів страхування ми вважали, що виплата страхового відшкодування відбувається в повному розмірі збитку, завданого об’єкту страховим випадком. Тепер розглядатимемо ситуацію, коли страховик передає частину ризику (за певну оплату) іншій страховій компанії.

Перестрахування — це система економічних страхових відносин між страховими організаціями (страховиками) з приводу укладених із страхувальниками договорів страхування, у відповідності з якими страховик, приймаючи на страхування ризики, частину відповідальності за ними (з врахуванням своїх фінансових можливостей) передає на узгоджених умовах іншим страховикам з метою створення по можливості збалансованого портфеля, забезпечення фінансової стійкості та рентабельності страхових операцій.

Перестрахування називають також „вторинним" страхуванням або страхуванням страховиків. В зв'язку з цим формуються особливі групи (об'єднання) страхових компаній-перестраховиків — *пули*, члени яких (за певними правилами) передають частину свого ризику пулу, а він перерозподіляє отриманий ризик між членами пулу.

Основна ідея перестрахування полягає в наступному. Страхувальник, укладаючи договір страхування за певним ризиком, передає його страховику, внаслідок чого страховик приймає на себе невизначеність страхових подій і пов'язаних з ними страхових виплат, яких може бути настільки багато, або розміри деяких з них будуть настільки високими, що становитиме загрозу неплатоспроможності страховика. В цьому випадку страховик може сам застрахуватися від високих ризиків. Для цього він звертається до іншого страховика та укладає *договір перестрахування* (перестрахувальну угоду).

Найбільш розповсюдженими термінами, які використовуються в перестрахуванні, є:

перестрахувальник (цедент) — страховик, який частину прийнятих на страхування ризиків разом з частиною страхової премії за ними передає іншому страховику, а взамін отримує зобов'язання на відшкодування частини витрат, пов'язаних з ризиками страхових випадків, які настали;

перестраховик (цесіонарій, цесіонер) — страховик, який прийняв на перестрахування ризики. Процес передачі ризиків на перестрахування називають *цесією*. Перестраховик не має жодних прав і обов'язків за укладеним цедентом договором страхування. Прийнявши на перестрахування ризик, перестраховик може частково передати його іншому страховику (перестраховику), який, в свою чергу, може передати його наступному страховику (перестраховику). Ця операція третійного та наступних розміщень ризиків отримала назву *ретроцесія,* а страховик, який прийняв ризик в порядку наступних за цесією розміщень ризику, отримав назву *ретроцесіонарія* або *ретроцесіонера*. Перестраховик, який передає ризики в ретроцесію, називається *ретроцедентом.*

Зауважимо, що страховик, який уклав з перестраховиком договір про перестрахування, залишається відповідальним перед страхувальником в повному обсязі відповідно до договору страхування.

Перестрахуванням ризиків досягається не тільки захист страхового портфеля від впливу на нього серії наступних страхових випадків або навіть одного катастрофічного, але і те, що оплата сум страхового відшкодування за такими випадками не перекладається на одне страхове товариство, а здійснюється всіма разом, які беруть участь в перестрахуванні відповідного ризику.

Поряд з перестрахуванням розглядають *співстрахування*, яке не є формою перестрахування, а полягає в тому, що великий ризик ділиться між декількома страховиками (один і той же об'єкт страхування страхується спільно декількома страховиками). Даний спосіб забезпечення страхового захисту застосовується при страхуванні крупних об'єктів, коли одна страхова компанія не в змозі взяти на себе крупні ризики.

При співстрахуванні деякого об'єкта страхові компанії підписують один договір страхування, в якому містяться умови, які визначають права та обов'язки кожного страховика із страхування даного об'єкта. При цьому страхувальнику може видаватися спільний або окремий договір страхування з всіма страховиками, які надаватимуть страхове відшкодування даного ризику, і кожен із страховиків несе відповідальність за законодавчо встановлену для нього частину ризику по відношенню до будь-якої пред'явленої вимоги. При співстрахуванні страховик несе відповідальність тільки за відшкодування своєї частки кожної вимоги. Частки відповідальності кожного страховика визначаються пропорційно до отриманої кожним із них премії. На практиці заведено, щоб страховик, який бере участь в меншій частці, підлягав умовам страхування страховика, який має найбільшу частку.

В співстрахуванні (як і в перестрахуванні) останнім часом набули розвитку страхові пули. За цим видом страхування учасники (члени) пула передають за згодою між собою ризики понад суму власного утримання в загальний фонд. Таким чином, кожний учасник пула, так би мовити, двічі відповідає за певний ризик: по-перше, як незалежний страховик і, по-друге, як учасник пула. Для управління пулом (ризиками, за які відповідальний страховий пул) його учасниками створюється тимчасове (на період дії договору) бюро, яке виступає в якості представника пулу. Дане бюро не є, як правило, юридичною особою.

Таким чином, співстрахування є однією з форм забезпечення стійкості страхового захисту, який використовує принцип співробітництва між страховиками.

6.2. Класифікація типів перестрахувальних угод

На практиці існує багато варіантів основних видів перестрахування. Наведемо приблизну класифікацію форм перестрахування.

За типом зобов'язань виділяють *факультативне* та *облігаторне* перестрахування.

Факультативне перестрахування історично виникло раніше і, таким чином, є першим різновидом перестрахування. При факультативному перестрахуванні кожен ризик передається за відповідним договором між цедентом і цесіонарієм. Пропонуючи ризик в факультативне перестрахування, страховик готує спеціальний документ-пропозицію, який називається *сліпом* і в якому подається детальна характеристика ризику, а потім передає його вибраному одному або декільком перестраховикам (цесіонерам). Перестраховик (цесіонер), розглянувши сліп, може прийняти його, відмовитися, прийняти частково або зробити запит про додаткову інформацію. Після того, як перестраховик погодився прийняти пропонований ризик на перестрахування, оформляється договір факультативного перестрахування. Таким чином, при факультативному перестрахуванні здійснюється індивідуальна робота за кожним договором, який передається в перестрахування.

Головні недоліки факультативного перестрахування:

1) розміщення ризиків потребує великих грошових затрат і багато часу;
2) затримується автоматичне прийняття угоди за крупними ризиками на час, поки страховик не знайде відповідного перестраховика.

Така форма перестрахування зазвичай обмежується ризиками, які не належать до інших форм перестрахування.

За *облігаторним* перестрахуванням, на відміну від факультативного, передаються зразу всі ризики одного виду. Даний різновид перестрахування допускає обов'язкову віддачу цедентам раніше узгодженої частини ризику і відповідно частину премії за всіма виданими договорами одного виду страхування. Цесіонарій, зі свого боку, зобов'язується, відповідно до умови договору облігаторного перестрахування, приймати ці частини ризику.

Таким чином, облігаторне перестрахування відноситься не до окремого ризику, а до страхового портфеля в цілому.

Порівняно з факультативним перестрахуванням тут досягається значна економія адміністративних коштів.

За типом наданих відшкодувань виділяють *пропорційне* та *непропорційне* перестрахування.

Пропорційне перестрахування передбачає, що частка перестраховика (цесіонарія) в кожному переданому йому ризику визначається за раніше обумовленим співвідношенням (пропорцією) до частки власного утримання перестрахувальника (цедента).

Основою формування договорів *пропорційного* перестрахування є пайова участь сторін в розподілі відповідальності. За узгодженою часткою участі в договорі між перестраховиком і перестрахувальником розподіляються страхові суми, страхові премії і збитки. Пропорційне перестрахування, таким чином, зменшує розмір чистого прибутку прямого страховика і в основному використовується для того, щоб реалізувати можливість укладення більших за обсягом угод (договорів). Дані договори відносять до договорів облігаторного типу. Основними формами договорів пропорційного перестрахування є: а) *квотні*; б) *ексцедентні*; в) *квотно-ексцедентні*.

а) за *квотним* договором цедент зобов'язується передати перестраховику, а перестраховик зобов'язується прийняти частку (фіксований процент) у всіх ризиках певного типу. Перестраховик платить такий же процент за кожним страховим відшкодуванням і отримує (за вирахуванням комісії) цей же процент з початкової брутто-премії. *Перестрахувальна комісія* регулює оплату затрат цедента на придбання страхування. В залежності від того, чи вона перевищує, чи дорівнює, чи менша від дійсних затрат передаючої компанії, цедент буде мати на комісії прибуток, нульовий дохід або збиток. Крім того, договором квотного перестрахування може бути передбачений *ліміт відповідальності* страховика, тобто максимальна сума, яку він відшкодовує за певним ризиком.

Квотні договори широко застосовують для:

– розподілу ризику;

– перестрахування великої кількості приблизно однакових ризиків;

– укладення страхового портфеля з великим ризиком;

– сприяння укладенню взаємних договорів;

– фінансової підтримки при суттєвому збільшенні обсягів страхування, коли цедент не в змозі прийняти всі договори страхування.

Недоліки квотного перестрахування:

– права передаються в однаковій пропорції на кожний ризик без різниці між ризиками, тобто в перестрахування передаються невеликі ризики, за які при інших формах перестрахування цедент зміг би бути особисто відповідальний, зберігаючи при цьому всю суму премії;

– права передаються незалежно від величини ризику, тоді як страховик може мати бажання передати, наприклад, більшу частку великих ризиків.

Таким чином, не дивлячись на всі переваги, недоліком квотного перестрахування є недостатнє вирівнювання частки ризику, що залишився.

Нехай портфель страховика складається з трьох однорідних груп договорів, оцінка максимальних витрат від яких дорівнює відповідно 400 г.о., 650 г.о., 800 г.о., розрахований максимальний рівень власного утримання 500 г.о., а квота 30% від страхового портфеля передана в перестрахування. Тоді власна участь цедента складе 280 г.о., 455 г.о., 500 г.о. Це означає, що ризик по першій групі надто перестрахований, а по третій перевищує ліміт власної участі.

б) *ексцедентне перестрахування* – перестрахування на базі ексцедента сум. Ця форма перестрахування допускає передачу перестрахувальником обумовленої частини ризиків понад встановлене власне утримання. Тобто за договором ексцедентного перестрахування перестрахувальник передає в перестрахування ризики понад встановлену суму власного утримання, а перестраховик зобов'язується прийняти в перестрахування ці ризики. Оскільки договір може включити декілька груп ризиків, то до нього необхідно додати таблиці лімітів власного утримання по цих групах ризиків. Величина *ексцедента* за договором є кратною величині власного утримання перестрахувальника. Наприклад, умовами договору може бути передбачено, що сума ексцедента кратна чотирьом часткам (лініям) власного утримання. Обсяг такого договору складає відповідно 5 часток. Схема розподілу відповідальності за ексцедентним договором така, що величина премії і участь у збитку пропорційні прийнятій в договорі частці. Наприклад, договір складається з 5-кратного власного утримання, яке для однієї з окремих груп ризиків складе 1000 г.о. В цьому випадку при страхуванні на суму 5000 г.о. 1000 г.о. залишається у власному утриманні, а в перестрахування передається 4000 г.о. Якщо страхова сума за договором страхування складає 6000 г.о. або 10000 г.о., то в перестрахування передається також 4000 г.о., а у власному утриманні перестрахувальника залишається відповідно 2000 г.о. (1000 г.о. власного утримання і 1000 г.о. непокритих перестрахуванням) або 6000 г.о. (1000 г.о. власного утримання і 5000 г.о. непокритих перестрахуванням). Таким чином, угода про перестрахування на базі ексцедента сум вирішує проблему перестрахування лише в межах певної границі, кратної власному утриманню.

Ексцедентні договори найбільш часто застосовуються, оскільки дають можливість цеденту залишити на своєму утриманні всі невеликі ризики. Проте для перестраховика це означає, що до нього переходять ризики, за якими збиток значний. Тому шляхом збільшення ліміту власного утримання цедента його інтереси можуть задовільнитися.

в) комбінація квотного та ексцедентного перестрахування можлива завдяки укладанню *квотно-ексцедентного договору страхування*. При цьому вся сума відповідальності ділиться на дві частини. По-перше, визначається, в межах якої суми (ліміту) буде розподілятися відповідальність за принципом квотного договору, та які будуть квоти відповідальності цедента та цесіонарія. Понад ту частину відповідальності, яка розподіляється за принципом квотного договору, визначається ексцедент, кратний сумі цієї частини. У відношенні тієї частини відповідальності, яка перевищує ліміт відповідальності за квотним договором, діє принцип ексцедентного договору.

При непропорційному перестрахуванні застосовуються три типи договорів: *договір ексцедента збитку* („ексцес оф лос”), *договір ексцедента збитковості* (договір „стоп лосс”), *договір перестрахування найбільшого збитку*.

а) *договір ексцедента збитку* є найбільш поширеною формою непропорційного перестрахування і служить для захисту страхового портфеля компанії від крупних непередбачуваних збитків. За умовами цього договору відповідальність перестраховика настає тільки тоді, коли розмір збитку перевищить обумовлену договором перестрахування суму, тобто *пріоритет цедента*. Відповідальність перестраховика також обмежується, в свою чергу, певним лімітом. Таким чином, відповідальність за збитком ділиться на дві можливі частини: перший збиток до певного ліміту виплачує цедент, а збиток, який перевищує ліміт цедента до певної границі, виплачує перестраховик. Цей діапазон відповідальності перестраховика називається *ексцедентом збитку*.

Платиться постійна ставка перестрахувальної премії, як ціни перестрахувального покриття, тобто фіксований процент від вихідної премії.

Такий вид перестрахування використовується тоді, коли страховик намагається не вирівняти окремі ризики даного виду, а безпосередньо забезпечити фінансову рівновагу страхових операцій в цілому, яка може бути порушена завдаванням збитку в особливо великих розмірах за деякими ризиками страхового портфеля.

Нехай верхня границя відповідальності перестраховика дорівнює 1 о.с.с., а участь цедента в пріоритеті – 0,5 о.с.с. Якщо груповий збиток менший від 0,5 о.с.с., то він відшкодовується цедентом в повному обсязі. Якщо збиток більший за 0,5 о.с.с., але менший від 1 о.с.с., то 0,5 о.с.с.

оплачує цедент, а все решта – перестраховик. Якщо збиток більший від 1,5 о.с.с., наприклад, 1,8 о.с.с., то перестраховик оплачує 1 о.с.с., а цедент 0,5 + 0,3 = 0,8 (о.с.с.).

б) *договір ексцедента збитковості,* або договір „стоп лосс", служить для захисту фінансового положення страховика за певним видом страхування. Під *ексцедентом збитковості* розуміють перевищення розміру сумарних виплат страховика за будь-яким певним видом страхування за узгоджений проміжок часу. Розмір збитковості, понад який діє договір, зазвичай встановлюється з таким розрахунком, щоб компанія, яка передає договір, не мала можливості отримати певну вигоду з даного договору. Даний договір служить не для того, щоб гарантувати страховій компанії прибуток, а для того, щоб захистити її від надзвичайних додаткових втрат. Границі відповідальності перестраховика встановлюються в границях певного процента збитковості страхових сум (наприклад, від 100% до 105%) за рік або в абсолютній сумі. Застосування договорів „стоп лосс" доцільне тоді, коли один або декілька страхових випадків можуть сильно вплинути на результати роботи страхової компанії за відповідний період. Договір ексцедента збитковості може застосовуватися в якості доповнення до інших видів договорів страхування.

Таким чином, згідно з договором ексцедента збитковості перестраховик оплачує до певної границі суму всіх страхових відшкодувань, яка перевищує певний процент від вихідного обсягу премій (утримання – точка „стоп лосс").

Нехай збитковість встановлена на рівні (точка „стоп лосс") 105%. Якщо за встановлений в договорі термін збитковість перевищила 105%, то сума перевищення покривається перестраховиком.

в) *договір перестрахування найбільшого збитку* передбачає виплату певної кількості найбільших відшкодувань (три) за рік. Можлива комбінація з договором ексцедента збитку (за кожне з трьох найбільших відшкодувань виплачується перевищення над сумою в 1 млн., але не більше ніж 10 млн. за всі три). Іноколи комбінують з договором „стоп лосс" (виплачується частина суми трьох максимальних страхових відшкодувань, від 4% до 10% вихідного обсягу премій).

Приклад 6.1. В договорі квотного перестрахування частка перестраховика складає 20% за кожним ризиком цього виду, але не більше ніж 25000 о.с.с. за кожним випадком. Цедент прийняв від страховика 3 ризики: 100000, 125000 і 150000 о.с.с. За всіма договорами настали страхові випадки, які привели до повного знищення об'єкта. Скільки заплатить перестраховик цеденту?

Розв'язок. Розмір переданого ризику складе відповідно: 20000, 25000, 25000 о.с.с. (в третьому випадку 20% складе 30000 о.с.с., але є обмеження до 25000 о.с.с.). Тому частка перестраховика в відшкодуванні – 70000 о.с.с.

Приклад 6.2. Укладено договір про перестрахування трьох найбільших збитків за рік, але не більше 100 о.с.с. за три разом взятих. Фактичні збитки за рік склали (в о.с.с.): 10, 17, 21, 35, 18, 42, 22, 20, 15. Скільки заплатить перестраховик?

Розв'язок. $42+35+22=99<100$ і тому 99 (о.с.с.).

Приклад 6.3. Страхова сума – 500 о.с.с. Границя покриття – 200 о.с.с. Страховий внесок – 20 о.с.с. Як він розподілиться між цедентом і перестраховиком (при однакових надбавках)?

Розв'язок. Ризик ділиться в пропорції $200:300=2:3$. Тому і внески розподіляються відповідно: $20\cdot\frac{2}{5}=8$ і $20\cdot\frac{3}{5}=12$ (о.с.с.).

Приклад 6.4. Страховик прийняв ризик, для якого з практичною достовірністю можна вважати, що збиток не перевищить 30 о.с.с. Він встановив рівень власного утримання 5 о.с.с. і уклав договір про ексцедентне перестрахування з лімітом відповідальності перестраховика 10 о.с.с., а потім він уклав інший договір про перестрахування ризику понад обумовлений першим договором. В результаті страхового випадку фактичний збиток склав 22 о.с.с. Як розподілені виплати?

Розв'язок. Страховик виплачує 5 о.с.с., перший перестраховик – 10 о.с.с., другий перестраховик – 7 о.с.с.

Приклад 6.5. Розмір збитку не перевищує 50 о.с.с. Власне утримання цедента – 10 о.с.с. Решта ризику передана на квотне перестрахування, в якому цедент сплачує 20% збитку. Реальний збиток склав 30 о.с.с. Скільки виплатить кожна сторона?

Розв'язок. Страховик платить $10+20\cdot 0{,}2=14$ о.с.с., перестраховик – $20\cdot 0{,}8=16$ о.с.с.

Приклад 6.6. В договорі перестрахування на основі ексцедента збитковості передано два ризики. Ціна об'єктів – 30 о.с.с. і 50 о.с.с. Договір передбачає виплату перестраховиком 20 о.с.с. понад 5 о.с.с. Збитки склали відповідно 5 о.с.с. і 15 о.с.с. Визначити виплати сторін.

Розв'язок. Передано ризик від 6-ти до 25-ти о.с.с. Реальний збиток – 20 о.с.с., з яких страховик платить 5 о.с.с., а перестраховик – 15 о.с.с.

6.3. Оцінка обсягу ризику, який передається на перестрахування

При розгляді ризикової надбавки ми стикнулися з неможливістю забезпечити потрібну надійність тільки за рахунок внесків страхувальників. Тому для підвищення ймовірності виживання необхідно створити резерв або укласти договір про перестрахування.

Надалі нам буде потрібний розв'язок наступного прикладу. Зауважимо, що при великому однорідному портфелі допустима нормальна апроксимація.

Приклад 6.7. Страховий портфель нараховує $N=3000$ однотипних договорів з однаковою для всіх ймовірністю $p=0{,}003$ настання страхових випадків і страховою сумою $S=250000$ у.о. = 1 о.с.с. Знайти розмір резервного фонду U, який з надійністю $\gamma=0{,}9$ $(\varepsilon=0{,}05)$ забезпечить всі виплати, які надійдуть за даними договорами.

Розв'язок. Згідно з умовою задачі $Np=9$, $Npq=3000\cdot 0{,}003\cdot 0{,}997=$ $=8{,}973\approx 9$, $\sqrt{Npq}\approx\sqrt{9}=3, \Phi(t)=\Phi\left(\frac{U-9}{3}\right)=0{,}45$. За таблицею 2 у додатку знаходимо, що $t_{0,45} = (U-9)/3 = 1,645$, звідки $U = 9 + 3 \cdot 1,645 = 13,935$ о.с.с. Тут ми вважаємо, що весь збиток компенсується з резерву. Якщо б ризикові премії вносились одноразово, то було б достатньо резерву $t\sqrt{D} = 1,645 \cdot 3 = 4,935 \approx 5$ о.с.с.

Надалі вважатимемо, що $U = 14$ о.с.с.

Припустимо, що в однорідному портфелі страховик утримує (проводить) виплату відшкодування збитку до „*a*" включно, а ризик відшкодування збитку від „*a*" до „*b*" передає на перестрахування. Далі (більше „*b*") розміщена зона незабезпеченого ризику, попадання в яку може привести до фінансового спустошення страховика. Потрібно оцінити обсяг відповідальності перестраховика, на основі чого визначається математичне сподівання його ризику. Таким чином, з принципу еквівалентності зобов'язань сторін буде знайдена ризикова премія в перестрахувальному договорі. При необхідності можна оцінити і відхилення ризику перестраховика від середнього значення, що дозволить вказати його ризикову надбавку та відповідно уточнити нетто-премію.

Спочатку вважатимемо, що відносна ризикова надбавка в перестрахувальному договорі фіксована [, 62].

Наближено оцінку математичного сподівання ризику перестраховика MZ можна провести за формулою

$$MZ = \int_a^b (x-a) f(x) dx, \qquad (6.1)$$

де $f(x)$ – функція розподілу сумарного збитку

Зокрема, якщо допустима нормальна апроксимація сумарного збитку, то математичне сподівання [, 63]:

$$MZ = \frac{(b-a)^2}{3}\left[f\left((a-\mu)/\sigma\right) + f\left((b-\mu)/\sigma\right)\right], \qquad (6.2)$$

де $f(x)$ – функція густини нормального розподілу, μ і σ – його параметри.

Визначивши математичне сподівання ризику перестраховика, приймемо його за ризикову премію в перестрахувальному договорі. Якщо відомі відносна ризикова надбавка перестраховика для подібного ризику, його навантаження і комісійні, які уступають цеденту, то можна поступово знайти нетто-премію та брутто-премію.

Приклад 6.8. За умовою прикладу 6.7 потрібно підвищити надійність до $\gamma = 0{,}98$ ($\varepsilon = 0{,}01$) з допомогою перестрахування. Оцінити ризикову премію, нетто-премію, брутто-премію в перестрахувальному договорі, якщо відносна ризикова надбавка – 30% ризикової премії, а навантаження та комісійні – 20%.

Розв'язок. Визначимо границі відповідальності перестрахувальника. Нижня границя (приклад 6.7) $a = 14$ о.с.с. Оскільки $t_{0,98} = 2{,}33$, то $b = Np + t_\gamma \sqrt{Npq} = 9 + 2{,}33 \cdot 3 \approx 16$, а за таблицею 1 у додатку отримаємо $f\left((a-\mu)/\sigma\right) = f(1{,}645) = 0{,}1031$, $f\left((b-\mu)/\sigma\right) = f(2{,}33) = 0{,}0264$. Підставивши їх в (6.2), матимемо $T_0 = \dfrac{(16-14)^2}{3}(0{,}1031 + 0{,}0264) = 0{,}173$ о.с.с. $T_H = 0{,}173 \cdot 1{,}3 = 0{,}2249$ о.с.с., $T_b = 0{,}2249 : 0{,}8 = 0{,}2811$ (о.с.с.).

Зауваження 6.1. Якщо густину розподілу сумарного збитку в портфелі вдається апроксимувати нормальним законом, то математичне сподівання можна знайти *точно* за формулою [, с. 64]

$$MZ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right\} + \\ + \frac{a-\mu}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right]. \qquad (6.3)$$

В [ ] наведені аналогічні формули до формули (6.3) для випадків, коли величина фактичного сумарного збитку X розподілена рівномірно від нуля до повної вартості майна nC (6.4) і за показниковим законом (6.5), а також для кожного з трьох наведених випадків знайдено дисперсії ризику перестраховика DZ. Маємо

$$MZ=\int_a^b (x-a)f(x)dx=\frac{1}{nC}\frac{(b-a)^2}{2} \qquad (6.4)$$

$$MZ=\int_a^b (x-a)\lambda\exp(-\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda e^{\lambda b}}\left(e^{\lambda(b-a)}-\lambda(b-a)-1\right). \qquad (6.5)$$

Нехай величина сумарного збитку X розподілена рівномірно від 0 до повної вартості майна nC Тоді

$$DZ=\frac{(nC)^2}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{(nC)^3}\left(4-3\frac{(b-a)}{nC}\right). \qquad (6.6)$$

Величина сумарного збитку X розподілена за показниковим законом

$$DZ=\frac{1}{\lambda^2 e^{\lambda b}}\left(e^{\lambda(b-a)}-\lambda(b-a)-1\right)\left(2-\frac{1}{e^{\lambda b}}\left(e^{\lambda(b-a)}-\lambda(b-a)-1\right)\right)- \\ -(b-a)^2 e^{\lambda b} \qquad (6.7)$$

Величина сумарного збитку розподілена за нормальним законом розподілу:

$$DZ=\frac{(a-\mu)^2+\sigma^2}{2}\left(\Phi\left(\frac{(b-\mu)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(a-\mu)}{\sigma}\right)\right)-\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}}+ \\ +\frac{\sigma(a-\mu)}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)-MZ^2. \qquad (6.8)$$

На практиці досить часто трапляються ситуації, в яких розмір збитку є дискретною випадковою величиною з деяким законом розподілу. В цьому випадку актуарія цікавлять величина сумарного збитку та його розподіл.

В залежності від наявності або відсутності в перестраховика інформації про малі збитки виникають різні варіанти.

Знайдемо ризикову премію страховика і перестраховика, якщо страховик залишив собі ризик до a о.с.с., а весь ризик понад значення a передав на ексцедентне перестрахування.

Нехай η = {величина сумарного збитку}, ξ_1 = {величина збитку, який відшкодовує страховик}, ξ_2 = {величина збитку, який відшкодовує перестраховик}.

Приклад 6.9. Портфель складається з двох однакових договорів з величиною збитку η_1, який задається законом розподілу

η_1	0	100	200	400
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

,

і за якими страховик повністю звільняється від відшкодування збитку величиною $\xi_1 > 300$ о.с.с. Такий збиток повністю відшкодовує перестраховик.

Знайти величини ризикових премій для страховика та перестраховика.

Розв'язок. Величина сумарного збитку η має наступний закон розподілу

η	0	100	200	300	400	500	600	800
p_i	0,16	0,24	0,25	0,12	0,12	0,06	0,04	0,01

Далі $P(\xi_1 = 0) = P(\eta = 0) + P(\eta > 300) = 0,16 + 0,12 + 0,06 + 0,04 + 0,01 =$ $= 0,39$, $P(\xi_2 = 0) = P(\eta \le 300) = 0,16 + 0,24 + 0,25 + 0,12 = 0,77$. Тоді закони розподілу випадкових величин ξ_1, ξ_2 мають вигляд

ξ_1	0	100	200	300
p_i	0,39	0,24	0,25	0,12

ξ_2	0	400	500	600	800
p_i	0,77	0,12	0,06	0,04	0,01

Для випадкових величин η, ξ_1, і ξ_2 знайдемо математичні сподівання (ризикові премії):

$M\eta = 0 \cdot 0,16 + 100 \cdot 0,24 + \ldots + 800 \cdot 0,01 = 220$ о.с.с.;

$M\xi_1 = 0 \cdot 0,39 + \ldots + 300 \cdot 0,12 = 110$;

$M\xi_2 = 0 \cdot 0,77 + \ldots + 800 \cdot 0,01 = 110$.

Ризикові премії для страховика і перестраховика однакові та дорівнюють 110 о.с.с.

Приклад 6.10. Змінимо умову договору про перестрахування. Якщо $\eta > 300$ о.с.с., то страховик відшкодовує $\xi_1 = 300$, перестраховик – $\xi_2 = \eta - 300$.

Знайти ризикові премії страховика та перестраховика.

Розв'язок. Оскільки $P(\eta > 300) = 0{,}12 + 0{,}06 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}23$, то для страховика $P(\xi_1 = 300) = 0{,}12 + 0{,}23 = 0{,}35$. Тоді закон розподілу ξ_1 набуде вигляду:

ξ_1	0	100	200	300
p_i	0,16	0,24	0,25	0,35

.

Відповідно, $M\xi_1 = 0 \cdot 0{,}16 + 100 \cdot 0{,}24 + 200 \cdot 0{,}25 + 300 \cdot 0{,}35 = 179$ о.с.с.

Оскільки перестраховик знає про всі збитки, то закон розподілу $\left(P\left(\xi_2 = 0\right) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77\right)$ має вигляд:

ξ_2	0	100	200	300	500
p_i	0,77	0,12	0,06	0,04	0,01

,

а шукана ризикова премія $M\xi_2 = 0 \cdot 0{,}77 + 100 \cdot 0{,}12 + 200 \cdot 0{,}06 +$ $+500 \cdot 0{,}01 = 41$ (о.с.с.).

Приклад 6.11. За умовами прикладу 6.9, вважаємо, що перестраховик знає лише про ті страхові випадки, за якими доведеться виплачувати відшкодування. Знайти величину ризикової премії.

Розв'язок. Значення випадкової величини ξ_2 залишаються тими самими, але змінюються ймовірності цих значень. Існує повна ймовірність того, що страховик дізнається про страховий випадок $P(\eta > 300) = 0{,}23$. Тоді за формулою $P(B \setminus A) = P(AB) / P(A)$ знаходимо наступні умовні ймовірності:

$$P(\xi_2 = 400 | \eta > 300) = \frac{0{,}12}{0{,}23} = \frac{12}{23}; \quad P(\xi_2 = 500 | \eta > 300) = \frac{0{,}06}{0{,}23} = \frac{6}{23};$$

$$P(\xi_2 = 600 | \eta > 300) = \frac{0{,}04}{0{,}23} = \frac{4}{23}; \quad P(\xi_2 = 800 | \eta > 300) = \frac{0{,}01}{0{,}23} = \frac{1}{23}.$$

Фактично, кожне значення ймовірності $P(\xi_2 = x_i \mid \eta > 300)$ збільшується в $1/0,23 \approx 4,348$ рази. Відповідно в 4,348 рази збільшується ризикова премія: $M\xi_2 = 110 \cdot 4,348 = 478,28$ о.с.с.

Приклад 6.12. За умовами прикладу 6.10, вважаємо, що перестраховик знає лише про ті страхові випадки, за якими йому доведеться виплачувати відшкодування. Знайти величину ризикової премії.

Розв'язок. Як і в прикладі 6.11, всі ймовірності та ризикова премія збільшуються в 4,348 рази, тобто $M\xi_2 = 41 \cdot 4,348 = 178,27$ о.с.с. Таким чином, ризикова премія зменшилась на величину $478,28 - 178,27 \approx 300$ о.с.с., на яку знизились виплати перестраховика.

Аналіз вищенаведених прикладів показує залежність ціни договору від умов, а також впливу повноти інформації на ціну страхування в цілому.

Приклад 6.13. В умовах прикладу 6.10 вважати, що навантаження дорівнює 10 % від середнього квадратичного відхилення. Знайти ціну договору при ексцедентному перестрахуванні в умовах повної інформації.

Розв'язок. При ексцедентному перестрахуванні в умовах повної інформації ризикова премія розподіляється між страховиком і перестраховиком, а навантаження береться з ваговим коефіцієнтом, який дорівнює частці сторін в ризиковій премії.

Нам залишається знайти σ_{ξ_1} і σ_{ξ_2}. Маємо

$$D\xi_1 = 0^2 \cdot 0,16 + 100^2 \cdot 0,24 + 200^2 \cdot 0,25 + 300^2 \cdot 0,35 - (179)^2 = 11859,$$
$$D\xi_2 = 0^2 \cdot 0,77 + 100^2 \cdot 0,12 + 200^2 \cdot 0,06 + 300^2 \cdot 0,04 + 500^2 \cdot 0,01 - (41)^2 = 8019,$$
$$\sigma_{\xi_1} = 108,9; \ \sigma_{\xi_2} = 89,54.$$

Тоді повна ціна договору (нетто-премія T_H):

$$T_H = 179 + \frac{0,1 \cdot 108,9 \cdot 179}{220} + 41 + \frac{0,1 \cdot 89,54 \cdot 41}{220} = 230,53 \text{ о.с.с.}$$

Використовуючи результати прикладу 6.9, отримаємо:

$$D\eta = 0^2 \cdot 0,16 + 100^2 \cdot 0,24 + \ldots + 800^2 \cdot 0,01 - (220)^2 = 29800, \quad \sigma_\eta = 172,63,$$

а нетто-премія без перестрахування $T_H = 220 + 0,1 \cdot 172,63 = 237,26$ о.с.с.

6.4. Аналіз доцільності укладення договору перестрахування.

Приклад 6.14. Компанія має 10000 договорів, за якими протягом року можуть бути виплачені або часткова компенсація в розмірі 1 о.с.с. з ймовірністю 0,002, або повна компенсація в розмірі 10 о.с.с. з ймовірністю 0,005 (1 о.с.с.= 100000 г.о.). На який прибуток може розраховувати страховик з надійністю $\gamma = 0,9 \ (\varepsilon = 0,05)$?

Розв'язок. Нехай η_i – збиток страховика в одному договорі. Ризикова премія дорівнює математичному сподіванню збитку в одному договорі: $M\eta_i = 1 \cdot 0,002 + 10 \cdot 0,005 = 0,052$ о.с.с.. Дисперсія $D\eta_i = M\eta_i^2 - \left[M\eta_i \right]^2 =$ $= 1^2 \cdot 0,002 + 10^2 \cdot 0,005 - 0,052^2 \approx 0,499296$ (о.с.с.)^2, $\sigma_{\eta_i} \approx 0,71$ о.с.с.

За таблицею 2 у додатку знаходимо, що $t_{0,9} = 1,645$. Тоді ризикова надбавка $d = (t_\gamma \sigma_{\eta_i} / \sqrt{n}) = 1,645 \cdot 0,71/100 = 0,01168$ о.с.с. і нетто-премія $T_H = 0,052 + 0,01168 = 0,06368$ о.с.с.

Для всього портфеля $M\eta = 10000 \cdot 0,052 = 520$ о.с.с., $D\eta = 10000 \cdot 0,499296 = 4992,96$ о.с.с., $\sigma_\eta = \sqrt{4992,96} \approx 70,66$ о.с.с., а сумарна нетто–премія $10000 \cdot 0,06368 = 636,68$ о.с.с. Тоді очікуваний прибуток $636,68 - 520 = 116,68$(о.с.с.) дорівнює сумарній ризиковій надбавці.

Приклад 6.15. Компанія має 10000 договорів, за якими протягом року можуть бути виплачені або часткова компенсація в розмірі 1 о.с.с. з ймовірністю 0,002, або повна компенсація в розмірі 10 о.с.с. з ймовірністю 0,005 (1 о.с.с.= 100000 г.о.). Припустимо, що страховик хоче перестрахувати великі ризики, тобто власне утримання дорівнює 1 о.с.с., а перестраховик встановлює свою ризикову надбавку в розмірі 60%. Знайти ймовірність розорення.

Розв'язок. Розіб'ємо ризик страховика до укладення договору про перестрахування η на дві складові: η_1 – ризик, залишений у страховика, η_2 – ризик переданий на перестрахування.

У цедента є два запити: 1о.с.с. з ймовірністю $0{,}002+0{,}0005=0{,}0025$ і 0 о.с.с. з ймовірністю $1-0{,}0025=0{,}9975$, відповідно, а $M\eta_1=1\cdot 0{,}0025+$ $+0\cdot 0{,}9975=0{,}0025$ о.с.с., $D\eta_1=1^2\cdot 0{,}0025+0^2\cdot 0{,}9975-0{,}0025^2\approx 0{,}0025$ (о.с.с.), $\sigma_{\eta_1}=0{,}05$ о.с.с.

Для всього портфеля $M\eta_1=25,\quad D\eta_1=25,\quad \sigma\eta_1=5$.

З позиції перестраховика ситуація наступна: індивідуальний запит перестраховика η_2 набуває два значення 9 о.с.с. з ймовірністю 0,0005 і 0 з ймовірністю 0,9995. Тоді $M\eta_2=9\cdot 0{,}0005+0\cdot 0{,}9995=0{,}0045$ о.с.с., а дисперсія $D\eta_2=9^2\cdot 0{,}0005+0^2\cdot 0{,}9995-0{,}0045^2=0{,}0405$.

Для всіх договорів, переданих на перестрахування, сумарна ризикова премія складе: $M\eta_2=10000\cdot 0{,}0045=45$ о.с.с., а з відносною ризиковою надбавкою 60% загальна нетто-премія: $45\cdot 1{,}6=72$ о.с.с.

Нам залишилось обчислити величину сумарної нетто-премії. Маємо $M\eta_1=1\cdot 0{,}002+10\cdot 0{,}0005=0{,}007$ о.с.с., $D\eta_1=1^2\cdot 0{,}002+10^2\cdot 0{,}0005-0{,}007^2\approx 0{,}052$ (о.с.с.), $\sigma_{\eta_1}=0{,}23$ о.с.с. $t_{0,9}=1{,}645$; $d=(t_\gamma \sigma_{\eta_i} \big/ \sqrt{n})=1{,}645\cdot 0{,}23/100=0{,}00378$ о.с.с. і нетто-премія $T_H=\left(0{,}007+0{,}00378\right)\cdot 10000=107{,}8$ о.с.с. З цієї суми страховик заплатив перестраховику 72 о.с.с. і залишив собі $107{,}8-72=35{,}8$ о.с.с. Очікуваний дохід цедента $35{,}8-25=10{,}8$ о.с.с. замість 37,8 о.с.с. до перестрахування.

Визначимо ймовірність розорення цедента, яка до перестрахування дорівнювала 0,05. Після перестрахування розорення означає перевищення сумарного розміру η_1 вимог до страховика, тобто величини його залишку $A = 35{,}8$ о.с.с.. Виконаємо спочатку нормування випадкової величини η_1:

$$P(\eta_1 > A) = P\left(\frac{\eta_1 - Np}{\sqrt{Npq}} > \frac{A - Np}{\sqrt{Npq}}\right) = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\frac{A - Np}{\sqrt{Npq}}\right)\right] = \varepsilon .$$

Підставивши відповідні значення, отримаємо $P(\eta_1 > 35{,}8) =$

$$= P\left(\frac{\eta_1 - 10000 \cdot 0{,}0025}{(0{,}0025 \cdot 0{,}9975 \cdot 10000)^{0,5}} > \frac{35{,}8 - 25}{0{,}5}\right) = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\frac{10{,}8}{5}\right)\right] = 0{,}5\left[1 - \Phi(2{,}16)\right] =$$

$= 0{,}5(1 - 0{,}9692) = 0{,}0154$.

Отже, вдалося знизити ймовірність розорення з 5% до 1,54% за рахунок зменшення очікуваного доходу в $37{,}8 : 10{,}8 \approx 3{,}5$ рази.

Приклад 6.16. За умовами прикладу 6.15, варіюючи розміром власного утримання r, $1 < r < 10$, оптимізувати ймовірність розорення та очікуваний дохід.

Розв'язок. Індивідуальний запит до страховика η_1 набуває три значення: 1 о.с.с. з ймовірністю 0,002, r о.с.с. з ймовірністю 0,0005 і 0 о.с.с. з ймовірністю 0,9975. Його математичне сподівання та дисперсія дорівнюють:

$$M\eta_1 = 1 \cdot 0{,}002 + r \cdot 0{,}0005 + 0 \cdot 0{,}9975 = 0{,}0005(r + 4);$$

$$D\eta_1 = 1^2 \cdot 0{,}002 + r^2 \cdot 0{,}0005 + 0 - 25 \cdot 10^{-8}(r + 4)^2 = 0{,}0005(r^2 + 4).$$

Запит до перестрахувальної компанії η_2 набуває значення 0 з ймовірністю 0,9995 і $(10 - r)$ з ймовірністю 0,0005. Тому $M\eta_2 = 0 \cdot 0{,}995 +$ $+ 0{,}0005 \cdot (10 - r) = 0{,}0005 \cdot (10 - r)$, $D\eta_2 \approx (10 - r)^2 \cdot 0{,}0005$, плата за перестрахування одного запиту з врахуванням відносної ризикової надбавки 60% дорівнює: $1{,}6 \cdot 0{,}0005 \cdot (10 - r) = 0{,}0008(10 - r)$.

Характеристики сумарного запиту до страховика: $NM\eta_1 = 10000 \cdot 0{,}0005(r + 4) = 5(r + 4)$,

$ND\eta_1 = 10000 \cdot 0{,}0005(r^2 + 4) = 5(r^2 + 4)$.

Характеристики сумарного запиту до перестраховика:

$NM\eta_2 = 10000 \cdot 0{,}0005(10-r) = 5(10-r),\; ND\eta_2 = 10000 \cdot 0{,}0005(10-r)^2 = 5(10-r)^2.$

Зауважимо, що дисперсію ризику перестраховика використовують при знаходженні ризикової надбавки, яка за умовою фіксована.

Сумарна нетто-премія дорівнює: $10000 \cdot 0{,}0008 \cdot (10-r) = 80-8r$. Тоді очікуваний дохід цедента після перестрахування: $107{,}8-(80-8r) = 27{,}8+8r$.

Розорення цедента настає, якщо сумарний запит до нього η_1 більший за його капітал $27{,}8+8r$. Використовуючи нормальну апроксимацію, матимемо:

$$0{,}5\left\{1-\Phi\left[\left((27{,}8+8r)-5(r+4)\right)\Big/\sqrt{5r^2+20}\right]\right\} = 0{,}5\left\{1-\Phi\left[\frac{7{,}8+3r}{\sqrt{5r^2+20}}\right]\right\}$$

Використовуючи метод дослідження функції на екстремум, обчислимо найбільше значення функції $\varphi(r) = (7{,}8+3\cdot r)\Big/\sqrt{5r^2+20}$. Маємо $\varphi'(r) = (60-39r)\Big/(5r^2+20)^{3/2} = 0 \;\Rightarrow\; 60-39r = 0 \;\Rightarrow\; r = 1{,}54 \quad \varphi(1{,}54) =$ $= (7{,}8+3\cdot 1{,}54)\Big/\sqrt{5\cdot 1{,}54^2+20} = 2{,}2$.

За таблицею 2 у додатку знаходимо, що $\Phi(2{,}2) = 0{,}972$ і $\varepsilon = 0{,}5(1-0{,}972) = 0{,}014$.

Середній дохід компанії $7{,}8+3\cdot 1{,}54 = 12{,}42$ о.с.с.

Таким чином, якщо змінити границю власного утримання з 1 о.с.с. до 1,54 о.с.с., то ймовірність фінансового розорення зміниться, а очікуваний дохід зросте.

6.5. Перестрахування для індивідуального ризику

Розглянемо, як визначається величина власного утримання для різних типів договорів перестрахування.

а) квотний договір з утриманням α, $0<\alpha<1$.

Як відзначалося вище, застосування квотного перестрахування означає, що від кожного ризику в перестрахування віддається однаковий процент $1-\alpha$. Нехай збиток за j-тим договором складає Y_j. Тоді величина збитку, який оплачує цедент, дорівнює αY_j. Позначимо величину оплачуваного збитку в випадку застосування квотного перестрахування як $Y_j^{\alpha} = \alpha Y_j$. Власне відшкодування в цьому випадку описуватиме випадкова величина $\tilde{X}_j = N_j \cdot Y_j^{\alpha} = \alpha N_j \cdot Y_j = \alpha N_j$, а сумарне власне відшкодування за портфелем описує випадкова величина $\tilde{X} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} N_j Y_j = \alpha X$.

Нехай нетто-премія за одним договором визначається за формулою

$$T_{Hj} = MX_j + T_{Pj} = \left(1 + \frac{T_{Pj}}{MX_j}\right) MX_j = \left(1+\theta_j\right) MX_j ,$$

де MX_j – середньоочікувані виплати на один договір, T_{Pj} – ризикова надбавка, θ_j – відносна ризикова надбавка. Вважатимемо надалі, що премії розраховуються, виходячи з того, що сумарний страховий фонд (сума всіх страхових премій) U_0 для даного портфеля повинен забезпечити всі виплати за ним з надійністю γ. Формально це означає, що $P\left(U_0 - X \geq 0\right) = \gamma$ і ця умова повинна виконуватися для власної нетто-премії. Отже, передаючи ризики в перестрахування, цедент, з одного боку, зменшує величину очікуваних виплат $\tilde{X} = \alpha X$, а з другого боку, частина зібраних коштів спрямовується на оплату перестрахувальної премії.

Нехай $T_{Hj} = \left(1+\theta_j\right) MX_j$ – перестрахувальна премія за одним договором, X_j – перестрахувальне відшкодування за одним договором, θ_j – відносна ризикова надбавка для перестрахувальної премії. Тоді страховий фонд

$$U_0=\sum_{j=1}^{n}\left(T_{Hj}-T'_{Hj}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(1+\theta_j\right)MX_j-\left(1+\theta'_j\right)MX'_j\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(1+\theta_j\right)MX_j-\left(1+\theta'_j\right)\left(1-\alpha\right)MX_j\right)=\sum_{j=1}^{n}MX_j\left(\theta_j-\theta'_j+\alpha\left(1+\theta'_j\right)\right). \tag{6.9}$$

Зокрема, якщо відносні ризикові надбавки θ_j і θ'_j однакові для всіх договорів портфеля і відповідно дорівнюють θ і θ', то страховий фонд

$$U_0=\sum_{j=1}^{n}MX_j\left(\theta_j-\theta'_j+\alpha\left(1+\theta'_j\right)\right)=\left(\theta_j-\theta'_j+\alpha\left(1+\theta'_j\right)\right)MX\,. \tag{6.10}$$

Звідси видно, що при $\theta'>\dfrac{\theta+\alpha}{1-\alpha}$ цедент зазнаватиме збитки, при $\theta'<\dfrac{\theta+\alpha}{1-\alpha}$ цедент буде у виграші, а для рівня власного утримання виконується $\alpha>\dfrac{\theta'-\theta}{1+\theta'}$.

Для визначення величини власного утримання скористаємося рівнянням $P\left(U_0-\tilde{X}\geq 0\right)=\gamma$, з якого $P\left(U_0-\alpha X\geq 0\right)=\gamma$, або $P\left(X\leq\dfrac{U_0}{\alpha}\right)=\gamma$.

Вважаючи, що обсяг страхових договорів є достатнім для застосування центральної граничної теореми, матимемо $\dfrac{\dfrac{U_0}{\alpha}-MX}{\sigma X}=t_\gamma$, звідки

$$\frac{U_0}{\alpha}=t_\gamma\sigma X+MX\,, \tag{6.11}$$

де t_γ – розв’язок рівняння $2\Phi\left(t\right)=\gamma$. Підставивши в (6.11) вираз для U_0, отриманий в (6.9), матимемо

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}MX_j\left(\theta_j-\theta'_j+\alpha\left(1+\theta'_j\right)\right)=\frac{U_0}{\alpha}=t_\gamma\sigma X+MX\,. \tag{6.12}$$

Приклад 6.17. Нехай середнє очікуване значення загального відшкодування за деяким портфелем $MX=100$ о.с.с., а його середнє квадратичне відхилення $\sigma X=9$ о.с.с. Компанія встановила відносну ризикову надбавку $\theta = 0,2$. Відносна ризикова надбавка перестрахувальника θ'. Для надійності $\gamma = 0,95$ встановити зв'язок між θ' і α.

Розв'язок. Мінімальний резерв, який забезпечує виплати всіх відшкодувань з деякою ймовірністю γ, обчислюється за формулою (6.10) і дорівнює $U_0 = 100\left(0,2 + \alpha - \theta'\left(1-\alpha\right)\right) = t_\gamma \sigma X + MX$.

Оскільки надійність $\gamma = 0,95$ ($\varepsilon = 0,025$), то $t_\gamma = 1,96$ і $100\left(0,2 + \alpha - \theta'\left(1-\alpha\right)\right) = 1,96 \cdot 9 + 100 = 117,64$. Відповідно, $\alpha - \theta'\left(1-\alpha\right) \approx$ $\approx 0,976 \;\Rightarrow\; \theta' = \left(\alpha - 0,976\right)/\left(1-\alpha\right)$.

Приклад 6.18. Портфель складається з договорів страхування від пожежі. Всі застраховані об'єкти умовно розбиті на дві групи. Для об'єктів першої групи ймовірність пожежі дорівнює 0,1, а можливі втрати рівномірно розподілені на відрізку від нуля до повної вартості об'єкта. Таких об'єктів 50 і повна вартість кожного 1 о.с.с. Для всіх об'єктів другої групи (всього 30) ймовірність пожежі також однакова та дорівнює 0,2, а витрати Y_j задаються функцією густини розподілу $f_{Yj}\left(x\right) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0,1\right] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$. Перестрахувальна компанія встановила відносну ризикову надбавку на рівні $\theta'\%$ кожного ризику даного портфеля. Яким може бути власне утримання для даного портфеля, якщо вважати, що страхова компанія хоче забезпечити всі виплати за даним портфелем з надійністю $\gamma = 0,99$?

Розв'язок. Знайдемо спочатку числові характеристики кожного ризику, який входить в описаний портфель. Для розрахунку математичного сподівання MX_j і дисперсії DX_j випадкової величини $X_j = N_j Y_j$ скористаємось формулами $MX_j = MN_j \cdot MY_j, \quad DX_j = MN_j \cdot DY_j + DN_j \cdot \left(MY_j\right)^2$.

Тоді для договорів першого типу (з верхнім індексом (1)) матимемо

$$MX_j^{(1)} = 0{,}1\int_0^1 1\cdot x dx = 0{,}05; \quad DX_j^{(1)} = 0{,}1\cdot\left(\int_0^1 1\cdot x^2 dx - (10{,}5)^2\right) + 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{1200};$$

$$\sigma X_j^{(1)} = \sqrt{DX_j^{(1)}} \approx \frac{\sqrt{3}}{10}; \quad WX_j^{(1)} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}99.$$

Аналогічно для договорів другої групи (верхній індекс (2))

$$MX_j^{(2)} = 0{,}2\int_0^1 2x\cdot x dx = \frac{2}{15} \approx 0{,}13; \quad DX_j^{(2)} = 0{,}2\cdot\left(\int_0^1 2x\cdot x^2 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot\frac{4}{9} =$$

$$= \frac{37}{450} \approx 0{,}082; \quad \sigma X_j^{(2)} \approx 0{,}287; \quad WX_j^{(2)} = \frac{0{,}287}{0{,}13} \approx 2{,}21.$$

Загальні характеристики портфеля

$$MX = 50MX_j^{(1)} + 30MX_j^{(2)} = 50\cdot\frac{1}{20} + 30\cdot\frac{2}{15} \approx 6{,}5;$$

$$DX = 50DX_j^{(1)} + 30DX_j^{(2)} = 50\cdot\frac{37}{1200} + 30\cdot\frac{37}{450} \approx 4{,}008;$$

$$\sigma X = \sqrt{4{,}008} \approx 2{,}002; \quad WX = (2{,}002/6{,}5) \approx 0{,}308.$$

Нехай ризикові надбавки розраховуються пропорційно індивідуальним середнім квадратичним відхиленням виплат. Тоді для договорів першої та другої групи відносні ризикові надбавки без врахування перестрахування відповідно дорівнюють

$$\theta_j^{(1)} = \frac{t_\gamma\cdot\sigma X}{50\sigma X_j^{(1)} + 30\sigma X_j^{(2)}}\cdot\sigma X_j^{(1)}\cdot\frac{1}{MX_j^{(1)}} \approx 0{,}302\cdot 0{,}17\cdot\frac{1}{0{,}05} = 1{,}026;$$

$$\theta_j^{(2)} = \frac{t_\gamma\cdot\sigma X}{50\sigma X_j^{(1)} + 30\sigma X_j^{(2)}}\cdot\sigma X_j^{(2)}\cdot\frac{1}{MX_j^{(2)}} \approx 0{,}302\cdot 0{,}287\cdot\frac{1}{0{,}13} = 0{,}667.$$

Резерв перестрахування обчислюється за формулою (10.4)

$$U_0 = 50MX_j^{(1)}\left(\theta_j^{(1)} - \theta_j' + \alpha\left(1+\theta_j'\right)\right) + 30MX_j^{(2)}\left(\theta_j^{(2)} - \theta_j' + \alpha\left(1+\theta_j'\right)\right) =$$

$$= 50\cdot\frac{1}{20}\left(1{,}026 - \theta' + \alpha\left(1+\theta_j'\right)\right) + 30\cdot\frac{2}{15}\left(0{,}667 - \theta' + \alpha\left(1+\theta_j'\right)\right) \approx$$

$$\approx 5{,}23 + 6{,}5\left(\alpha + \theta'(\alpha - 1)\right).$$

Умова беззбитковості полягає в тому, що $U_0 \geq t_\alpha + MX$. Мінімальний рівень власного утримання відповідно встановлюється у випадку рівності. В умовах нашого прикладу це означає, що $\frac{1}{\alpha}\left(5,23+6,5\left(\alpha+\theta'(\alpha-1)\right)\right)=$ $=2,58\cdot 2,002+6,5=11,67$, тобто $\alpha=\frac{5,23-6,5\theta'}{5,17-6,5\theta'}$.

б) ексцедентний договір з однією лінією $\overline{Y}$.

В цьому випадку компанія залишається відповідальною за частину ризику, яка не перевищує величини однієї лінії, тобто, якщо величина збитку за договором не перевищує $\overline{Y}$, то його оплачує цедент, а в випадку перевищення збитком величини $\overline{Y}$, сума перевищення оплачується перестраховиком. Величина оплачуваного збитку для одного договору може бути записана $\overline{Y}=\begin{cases} Y_j, Y_j \leq \overline{Y}; \\ \overline{Y}, Y_j > \overline{Y}. \end{cases}$

Середнє значення для величини оплачуваного збитку за одним договором $\tilde{Y}$ можна розрахувати наступним чином

$$\begin{aligned} M\tilde{Y}_j &= \int_0^{\overline{Y}} x f_{Y_j}(x)\,dx + \overline{Y}\cdot P\left(Y_j > \overline{Y}\right) = \\ &= MY_j - \int_{\overline{Y}}^{\infty}\left(x-\overline{Y}\right) f_{Y_j}(x)\,dx = MY_j - \int_0^{\infty} x f_{Y_j}(x)\left(x+\overline{Y}\right)dx = MY_j - B. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Величина B — сума, на яку в середньому зменшується оплачуваний збиток при ексцедентному перестрахуванні. Далі

$$\begin{aligned} M\tilde{Y}_j^2 &= \int_0^{\overline{Y}} x^2 f_{Y_j}(x)dx + \overline{Y}^2\cdot P(Y_j > \overline{Y}) = MY_j^2 - \int_{\overline{Y}}^{\infty}\left(x^2-\overline{Y}^2\right) f_{Y_j}(x)dx = \\ &= MY_j^2 - \int_0^{\infty} x\left(x-2\overline{Y}\right) f_{Y_j}(x)\left(x+\overline{Y}\right)dx = MY_j^2 - C. \end{aligned}$$

Дисперсія оплачуваного збитку на один договір

$$D\tilde{Y}_j = M\tilde{Y}_j^{\,2} - \left(MY_j\right)^2 = MY_j^{\,2} - C - \left(MY_j - B\right)^2 = DY_j - (C + B^2) + 2BY_j \qquad (6.14)$$

Власне відшкодування, яке виплачується на один договір, описує випадкова величина $\tilde{X}_j = N_j \cdot \tilde{Y}_j$, сумарне власне відшкодування – $\tilde{X} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j$, а числові характеристики власного відшкодування:

$$M\tilde{X}_j = MN_j \cdot \left(M\tilde{Y}_j - B\right) = qMY_j - qB = MX_j - qB;$$

$$M\tilde{X} = \sum_{j=1}^{n} MX_j - qB; \qquad (6.15)$$

$$D\tilde{X}_j = q\left(DY_j - \left(C + B^2\right) + 2BMY_j\right) + q(1-q)\left(MY_j - B\right)^2 = q\left(MY_j^2 + q\left(MY_j - B\right)^2\right);$$

$$D\tilde{X} = qMY^2 - q^2 \sum_{j=1}^{n} \left(MY_j - B\right)^2. \qquad (6.16)$$

Нехай тепер величина збитку Y_j розподілена від 0 до повної вартості майна C. Тоді за формулами (6.13) і (6.14) отримуємо [ ]

$$M\tilde{Y}_j = MY_j - \int_{\overline{Y}}^{C} \left(x - \overline{Y}\right) f_{Y_j}(x)\,dx = MY_j - \frac{1}{C}\int_{\overline{Y}}^{C} \left(x - \overline{Y}\right) dx = \frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C},$$

$$M\tilde{Y}_j^2 = MY_j^2 - \int_{\overline{Y}}^{C} \left(x^2 - \overline{Y}^2\right) \frac{1}{C}\,dx = \frac{C^2}{3} - \frac{1}{C}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{\overline{Y}}^{C} - \overline{Y}^2 \left. x \right|_{\overline{Y}}^{C} \right) = \overline{Y}^2 - 2\frac{\overline{Y}^3}{3C},$$

$$D\tilde{Y}_j = \overline{Y}^2 - \frac{2\overline{Y}^3}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C} \right)^2.$$

За формулами (6.15) і (6.16) знаходимо величину ризикової премії $M\tilde{X}_j$ та сумарної ризикової премії $M\tilde{X}$, а також величину дисперсії власного відшкодування $D\tilde{X}_j$ та сумарної дисперсії власного відшкодування $D\tilde{X}$. Маємо

$$M\tilde{X}_j = p\left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C} \right), \quad M\tilde{X} = pn\left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C} \right),$$

$$D\tilde{X}_j = p\left(\overline{Y^2} - \frac{2\overline{Y^3}}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C}\right)^2\right) + p\left(1 - p\right)\left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C}\right)^2,$$

$$D\tilde{X} = n\left(p\left(\overline{Y^2} - \frac{2\overline{Y^3}}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C}\right)^2\right) + p\left(1 - p\right)\left(\frac{C}{2} - \frac{\left(C - \overline{Y}\right)^2}{2C}\right)^2\right).$$

Вважаємо, що величина збитку Y_j розподілена за показниковим законом з параметром λ. Тоді згідно формул (6.13), (6.14)

$$M\tilde{Y}_j = MY_j - \int_0^\infty x\lambda \exp\left(-\lambda\left(x + \overline{Y}\right)\right)dx = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right),$$

$$M\tilde{Y}_j^2 = \int_0^\infty x^2\lambda \exp\left(-\lambda x\right)dx - \int_0^\infty x^2\lambda \exp\left(-\lambda\left(x + \overline{Y}\right)\right)dx - 2\overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\int_0^\infty x \exp\left(-\lambda x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}} - \overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\right)$$

$$D\tilde{Y}_j = \frac{2}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}} - \overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\right) - \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - e^{-2\lambda\overline{Y}} - 2\overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\right).$$

Далі за формулами (6.15) і (6.16) отримуємо

$$M\tilde{X}_j = \frac{p}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right),\ M\tilde{X} = \frac{pn}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right),$$

$$D\tilde{X}_j = \frac{p}{\lambda^2}\left(1 - e^{-2\lambda\overline{Y}} - 2\overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\right) + p\left(1 - p\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right)\right)^2$$

$$D\tilde{X} = n\left(\frac{p}{\lambda^2}\left(1 - e^{-2\lambda\overline{Y}} - 2\overline{Y}\lambda e^{-\lambda\overline{Y}}\right) + p\left(1 - p\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\overline{Y}}\right)\right)^2\right).$$

Якщо величина збитку розподілена за нормальним законом, то за формулою (6.13) матимемо

$$M\tilde{Y}_j = \int_0^{\overline{Y}} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx + \int_{\overline{Y}}^{\infty}\overline{Y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-\mu}{\sigma}}^{\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}}\left(t\sigma + \mu\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sigma dt + \frac{\overline{Y}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sigma dt =$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)-\exp\left(-\frac{\left(\bar{Y}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)\right)+\frac{\mu}{2}\left(\Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)+\frac{\bar{Y}}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

$$M\tilde{Y}_j^2=\int_0^{\bar{Y}}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx+\int_{\bar{Y}}^{\infty}\bar{Y}^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\bar{Y}^2}{2}+\frac{\sigma^2+\mu^2-\bar{Y}^2}{2}\Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\sigma^2+\bar{Y}^2}{2}\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)+\frac{\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)-$$

$$-\frac{\sigma\left(\mu+\bar{Y}\right)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\bar{Y}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Далі $D\tilde{Y}_j=M\tilde{Y}_j^2-(M\tilde{Y}_j)^2$, а за формулами (6.15) і (6.16) обчислюємо $M\tilde{X}_j$, $D\tilde{X}_j$, і, відповідно, $M\tilde{X}$ і $D\tilde{X}$.

Приклад 6.19. Портфель складається з двох типів договорів страхування. В першому випадку страхова подія настає з ймовірністю 0,1, а втрати мають експоненціальний розподіл з середнім $\lambda=1$. В другому випадку можливі витрати рівномірно розподілені на відрізку від нуля до одиниці (повної вартості об'єкта), а страховий випадок настає з ймовірністю 0,2. Визначити, як змінюються середнє очікуване власне відшкодування і його дисперсія, якщо укласти угоду про ексцедентне перестрахування з лінією $\bar{Y}$.

Розв'язок. Розрахуємо числові характеристики власного відшкодування на один договір для договорів першої та другої групи:

$MX_j^{(1)}=qMY_j=0{,}1\cdot 1=0{,}1$,

$DX_j^{(1)}=qDY_j^{(1)}+q\left(q-1\right)\left(MY_j^{(1)}\right)^2=0{,}1\cdot 1+0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1=0{,}19$,

$\sigma X_j^{(1)}=\sqrt{DX_j^{(1)}}\approx 0{,}44$, $WX_j^{(1)}=\frac{0{,}44}{0{,}1}=4{,}4$.

Ми врахували, що математичне сподівання та дисперсія експоненціального розподілу дорівнюють 1.

$$MX_j^{(2)} = qMY_j^{(2)} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1,$$

$$DX_j^{(2)} = qDY_j^{(2)} + q(q-1)\left(MY_j^{(2)}\right)^2 = 0,1 \cdot \frac{1}{12} + 0,1 \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{4} = 0,048;$$

$$\sigma X_j^{(2)} = \sqrt{DX_j^{(2)}} \approx 0,219; \; WX_j^{(2)} = \frac{0,219}{0,1} = 2,19.$$

Сумарні характеристики портфеля

$$MX = 40MX_j^{(1)} + 20MX_j^{(2)} = 40 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1 = 6;$$

$$DX = 40 \cdot 0,19 + 20 \cdot 0,048 = 8,56, \; \sigma X = \sqrt{DX} \approx 2,93; \; WX = 0,49.$$

Розрахуємо числові характеристики з врахуванням перестрахування.

Для одного договору першої групи числові характеристики:

$$M\tilde{X}_j^{(1)} = q\left(1 - B^{(1)}\right) = 0,1 - 0,1B^{(1)};$$

$$DX_j^{(1)} = q\left(1 + q\left(1 - B^{(1)}\right)^2\right) = 0,1 + 0,01\left(1 - B^{(1)}\right)^2.$$

Аналогічно, для одного договору другої групи

$$M\tilde{X}_j^{(2)} = q\left(1 - B^{(2)}\right) = 0,1 - 0,2B^{(2)};$$

$$D\tilde{X}_j^{(2)} = q\left(0,25 + q\left(0,5 - B^{(2)}\right)^2\right) = 0,05 + 0,04\left(0,5 - B^{(2)}\right)^2.$$

Розрахуємо значення параметрів $B^{(1)}$ і $B^{(2)}$. Маємо

$$B^{(1)} = \int_0^{\infty} xe^{-\lambda\left(X + \overline{Y}\right)}dx = e^{-\lambda\overline{Y}}\int_0^{\infty} xe^{-\lambda X}dx = e^{-\lambda\overline{Y}} \cdot \frac{1}{\lambda} = e^{-\overline{Y}}.$$

$$B^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\overline{Y}} dx, & \overline{Y} \in [0,1]; \\ \dfrac{1}{2}, & \overline{Y} > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\overline{Y}, & \overline{Y} \in [0,1]; \\ \dfrac{1}{2}, & \overline{Y} > 1. \end{cases}$$

Тоді середнє очікуване власне відшкодування за портфелем договорів з врахуванням перестрахування

$$M\tilde{X} = \begin{cases} 6 - 4e^{-\overline{Y}} - \dfrac{\overline{Y}}{2}, & \overline{Y} \in [0,1]; \\ 5,5 - 4e^{-\overline{Y}}, & \overline{Y} > 1. \end{cases}$$

Дисперсія

$$D\bar{X} = \begin{cases} 6 - 0,8e^{-\bar{Y}} + 0,2e^{-2\bar{Y}} - 0,8\bar{Y} + 0,2\left(\bar{Y}\right)^2, & \bar{Y} \in [0,1]; \\ 5,6 - 0,8e^{-\bar{Y}} + 0,4e^{-2\bar{Y}}, & \bar{Y} > 1. \end{cases}$$

Контрольні запитання та задачі

1. Що називається перестрахуванням?
2. Кого називають перестраховиком, а кого перестрахувальником?
3. Що таке співстрахування?
4. Коротко охарактеризуйте факультативне, облігаторне, пропорційне, непропорційне перестрахування; квотні, ексцедентні, квотно–ексцедентні договори перестрахування, договір ексцедента збитку, договір ексцедента збитковості, договір перестрахування найбільшого збитку.
5. В договорі квотного перестрахування частка перестраховика складає: а) 25%; б) 15% за кожним ризиком цього виду, але не більше: а) 25000 о.с.с.; б) 20000 о.с.с. за кожним випадком. Цедент прийняв від страховика 3 ризики: а) 125000, 150000 і 155000 о.с.с.; б) 90000, 95000 і 100000 о.с.с. За всіма договорами настали страхові випадки, які привели до повного знищення об'єкта. Скільки заплатить перестраховик цеденту?
6. Укладено договір про перестрахування трьох найбільших збитків за рік, але не більше: а) 125 о.с.с.; б) 150 о.с.с. за три разом взятих. Фактичні збитки за рік склали (в о.с.с.): а) 15, 11, 21, 13, 25, 35, 18, 40, 22; б) 12, 14, 21, 13, 20, 40, 16, 42, 22. Скільки заплатить перестраховик?
7. Страхова сума: а) 600 о.с.с.; б) 550 о.с.с. Границя покриття: а) 300 о.с.с.; б) 200 о.с.с. Страховий внесок: а) 20 о.с.с.; б) 15 о.с.с.. Як він розподілиться між цедентом і перестраховиком (при однакових надбавках)?

8. Страховик прийняв ризик, для якого з практичною достовірністю можна вважати , що збиток не перевищить: а) 40 о.с.с.; б) 20 о.с.с. Він встановив рівень власного утримання: а) 60 о.с.с.; б) 45 о.с.с. і уклав договір про ексцедентне перестрахування з лімітом відповідальності перестраховика: а) 20 о.с.с.; б) 10 о.с.с., а потім він уклав інший договір про перестрахування ризику понад обумовлений першим договором. В результаті страхового випадку фактичний збиток склав: а) 33 о.с.с.; б) 32 о.с.с.. Як розподілені виплати?
9. Розмір збитку не перевищує 50 о.с.с. Власне утримання цедента 10 о.с.с. Решта ризику передана на квотне перестрахування, в якому цедент сплачує 20% збитку. Реальний збиток склав 30 о.с.с. Скільки виплатить кожна сторона?
10. В договорі перестрахування на основі ексцедента збитковості передано два ризики. Ціна об'єктів: а) 40 о.с.с. і 60 о.с.с.; б) 35 о.с.с. і 55 о.с.с. Договір передбачає виплату перестраховиком: а) 30 о.с.с. понад 10 о.с.с.; б) 25 о.с.с. понад 5 о.с.с. Збитки склали відповідно: а) 15 о.с.с. і 25 о.с.с.; б) 10 о.с.с. і 20 о.с.с. Визначити виплати сторін.
11. Страховий портфель налічує а) $N = 4000$; б) $N = 2000$ однотипних договорів з однаковою для всіх ймовірністю: а) $p = 0{,}004$; б) $p = 0{,}002$ настання страхових випадків і страховою сумою: а) $S = 300000$ у.о. = 1 о.с.с.; б) $S = 200000$ у.о. = 1 о.с.с.. Знайти розмір резервного фонду U, який з надійністю $\gamma = 0{,}95$ забезпечить всі виплати, які надійдуть за даними договорами.
12. За умовою прикладу 11 потрібно підвищити надійність до $\gamma = 0{,}98$ ($\varepsilon = 0{,}01$) з допомогою перестрахування. Оцінити ризикову премію, нетто-премію, брутто-премію в перестрахувальному договорі, якщо відносна надбавка: а) 35%; б) 40% ризикової премії, а навантаження та комісійні: а) 25%; б) 30%.

13. В портфелі два однакових договори з розподілом збитку η_1, який задається законом розподілу

а)

η_1	0	100	300	500
p_i	0,5	0,3	0,1	0,1

б)

η_1	0	100	300	600
p_i	0,5	0,3	0,15	0,05

і за якими страховик повністю звільняється від оплати збитку у розмірі: а) $\xi_1 > 400$ о.с.с.; б) $\xi_1 > 450$ о.с.с. такий збиток повністю оплачує перестраховик.

Знайти величини ризикових премій для страховика та перестраховика.

14. В прикладі 13 змінимо умову договору про перестрахування. Якщо а) о.с.с.; б) $\eta > 450$ о.с.с., то страховик платить: а) $\xi_1 = 400$; б) $\xi_1 = 450$, перестраховик платить: а) $\xi_2 = \eta - 400$; б) $\xi_2 = \eta - 450$.

Знайти ризикові премії страховика та перестраховика.

15. В умовах прикладу 13 вважаємо, що перестраховик знає лише про ті страхові випадки, за якими доведеться виплачувати відшкодування. Знайти величину ризикової премії.

16. В умовах прикладу 14 вважаємо, що перестраховик знає лише про ті страхові випадки, за яких йому доведеться виплачувати відшкодування. Знайти величину ризикової премії.

17. В умовах прикладу 14 вважати, що навантаження дорівнює: а) 20%; б) 15% від середнього квадратичного відхилення. Знайти ціну договору при ексцедентному перестрахуванні в умовах повної інформації.

18. Компанія має: а) 12000; б) 15000 договорів, за якими протягом року можуть бути виплачені: або часткова компенсація в розмірі а) 1 о.с.с. з ймовірністю 0,003, б) 1 о.с.с. з ймовірністю 0,0025 або повна компенсація в розмірі: а) 12 о.с.с. з ймовірністю 0,0005; б) 15 о.с.с. з ймовірністю 0,0006 (1 о.с.с.=100000 г.о.). На який прибуток може розраховувати страховик з надійністю $\gamma = 0,9$ $(\varepsilon = 0,05)$?

19. Припустимо, що страховик хоче перестрахувати великі ризики, тобто власне утримання дорівнює: а) 15 о.с.с.; б) 20 о.с.с., а перестраховик встановлює свою ризикову надбавку в розмірі: а) 55%; б) 65%. Знайти ймовірність розорення.
20. Варіюючи розміром власного утримання: а) r, $1<r<15$; б) r, $1<r<12$, оптимізувати ймовірність розорення та очікуваний дохід.
21. Нехай середнє очікуване значення загального відшкодування за деяким портфелем: а) $MX=110$ о.с.с.; б) $MX=95$ о.с.с., а його середнє квадратичне відхилення $\sigma X=9$ о.с.с.. Компанія встановила відносну ризикову надбавку $\theta=0,2$. Відносна ризикова надбавка перестрахувальника θ'. Для надійності $\gamma=0,95$ встановити зв'язок між θ' і α.
22. Портфель складається з договорів страхування від пожежі. Всі застраховані об'єкти умовно розбиті на дві групи, для яких відомо наступне: ймовірність пожежі для об'єктів першої групи однакова та дорівнює: а) 0,2; б) 0,15, а можливі втрати рівномірно розподілені на відрізку від нуля до повної вартості об'єкта. Таких об'єктів а) 60; б) 40 і повна вартість кожного 1 о.с.с. Для всіх об'єктів другої групи (а) 20; б) 40) ймовірність пожежі також однакова та дорівнює а) 0,3; б) 0,1, а втрати Y_j задаються функцією густини розподілу а) $f_{Y_j}(x)=\begin{cases}4x+2, x\in[0,1]\\0, \quad x>1\end{cases}$, б) $f_{Y_j}(x)=\begin{cases}x+4, x\in[0,1]\\0, \quad x>1\end{cases}$.

Перестрахувальна компанія встановила відносну ризикову надбавку на рівні $\theta'\%$ кожного ризику даного портфеля. Яким може бути власне утримання для даного портфеля, якщо вважати, що вона хоче забезпечити всі виплати за даним портфелем з надійністю: а) $\gamma=0,97$; б) $\gamma=0,98$?
23. Портфель складається з двох типів договорів страхування. В першому випадку страхова подія настає з ймовірністю: а) 0,05; б) 0,2, а втрати

мають експоненціальний розподіл з середнім: а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = 1$. В другому випадку можливі втрати рівномірно розподілені на відрізку від нуля до одиниці (повної вартості об'єкта), а страховий випадок настає з ймовірністю: а) 0,4; б) 0,3. Визначити, як змінюються середнє очікуване власне відшкодування і його дисперсія, якщо укласти угоду про ексцедентне перестрахування з лінією $\overline{Y}$.

7. ВИЗНАЧЕННЯ СТРАХОВОГО ТАРИФУ В СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

7.1. Вступ. Загальні зауваження

Умови страхування життя зазвичай передбачають виплати в зв'язку з різними подіями: дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування або в випадку його смерті протягом цього терміну; з втратою здоров'я внаслідок травми і деяких хвороб.

Страхування життя, як правило, здійснюється в двох видах: страхування сум (капіталу) і страхування рент (ануїтетів). В першому випадку при настанні страхової події (смерті, дожиття і т. д.) виплачується одночасно певна сума грошей. В другому — страхова компанія проводить регулярні платежі застрахованому (страхувальнику), причому початок виплат і їх тривалість залежить, як і в першому випадку, від події в житті застрахованого (страхувальника). Таким чином, на відміну від звичайних регулярних платежів з відомими сумами та термінами, які в фінансовій практиці називаються *рентами,* платежі страхової компанії відносяться до класу умовних або *страхових рент (ануїтетів).* Умовні ренти складають також основу пенсійних схем, оскільки пенсії є регулярними платежами, початок і кінець яких безпосередньо пов'язаний з подіями в житті учасника пенсійної схеми (хвороба, інвалідність і т.д.).

Договори страхування відносяться до спеціального виду фінансових договорів і є в найпростішому вигляді угодою між двома суб'єктами (особами): страхувальником і страховиком, який страхує страхувальника від певного ризику. В страхуванні життя ризик, який страхується, відноситься до життєдіяльності страхувальника та визначається такими подіями, як смерть, хвороба, інвалідність, дожиття і т.д. В більшості випадків як самі події, так і терміни їх настання, є випадковими.

Зауважимо, що хоча смерть є вірогідною подією, випадковим є термін її настання.

Фінансовий аспект договору страхування полягає у взаємних фінансових зобов'язаннях. З боку страхувальника – це сплачення премії, з боку страховика – виплати застрахованої суми або ренти. Зобов'язання виплати премії, як правило, безумовне і здійснюється або в вигляді одноразової оплати при укладенні договору або в виді серії виплат. З боку страховика зобов'язання виплати умовне та пов'язане з настанням (або ненастанням) певних страхових подій. Ці страхові події відносяться до класу випадкових, і терміни їх настання є випадковими величинами. Оскільки в фінансовій практиці дані суми в різні моменти часу мають різну поточну вартість, то вартість зобов'язань страховика є випадковою величиною та наперед нічого не можна сказати про точне її значення. Проте страхові події в страхуванні життя відносяться до подій, для яких характерна статистична стійкість. Це дозволяє застосовувати ймовірнісні та статистичні методи для оцінки премій та резервів за великою групою однорідних договорів страхування. Тому баланс між преміями та страховими сумами здійснюється не точним досягненням для кожного окремого договору, а по всій сукупності договорів.

Фінансове забезпечення договорів зі страхування життя визначається в основному двома факторами.

Перший пов'язаний з можливістю отримання прибутку на інвестований капітал, утворений резервами страхової компанії. Ці резерви створюються з премій страхувальників, власного капіталу, нерозподіленого прибутку і т.д. В розрахунках, пов'язаних з преміями та резервами, цей фактор враховується в вигляді так званої очікуваної процентної ставки. Реальне її значення пов'язане з положенням на фінансовому ринку та піддається коливанням, пов'язаним зі зміною кон'юнктури, інфляцією та іншими причинами. Як правило, вибране значення процентної ставки є більш-менш правдоподібною оцінкою реальної процентної ставки.

Другим фактором, який відіграє важливу роль в забезпеченні договорів страхування, є статистична оцінка страхових подій, які в страхуванні відносяться до демографічних подій. Ця оцінка представлена в основному в різних таблицях смертності. Ці два фактори в реальності завжди діють сукупно та в актуарних розрахунках завжди враховуються.

7.2. Таблиці смертності. Страхові ймовірності

При проведенні фінансових операцій в страхуванні життя необхідно володіти даними про те, скільки осіб із застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів страхування і скільки з них кожен рік може померти.

Тривалість життя окремих людей є випадковою величиною та коливається в досить широких межах. *Демографічною статистикою* визначена залежність смертності від віку людей. Ця залежність представлена в так званих *таблицях смертності.*

Таблиці смертності є числовою моделлю процесу вимирання з віком деякої абстрактної сукупності людей.

Вони містять розрахункові показники, які характеризують смертність населення в окремих вікових групах і *дожиття до певного віку* при переході в іншу вікову групу, показують, як послідовно зі збільшенням віку зменшується ця сукупність, досягаючи нуля зразу після *граничного віку* ω.

Наведемо як ілюстрацію фрагмент повної таблиці смертності для чоловіків

Таблиця 7.1

Вік x	Чоловіки		
	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047
1	97953	200	0,002042
2	97753	113	0,001156

3	97640	85	0,000871
...	...	...	...
30	91419	597	0,00653
31	90822	639	0,007036
32	90183	695	0,007707
33	89488	757	0,008459
...	...	...	...
50	70354	2001	0,028442
...	...	...	...
60	50246	2127	0,042332
...	...	...	...
98	95	32	0,336842
99	63	22	0,349206
100	41	41	1

Основний показник таблиці смертності — *число людей* l_x в *віці рівно* x *років, які залишилися в живих* із початкової сукупності l_0, зазвичай 100000 чоловік. Число l_0 називається *коренем таблиці смертності*. Зауважимо, що і початковий вік і початкова кількість людей в таблиці можуть бути будь-якими – вибір певного віку не впливає на результати актуарних розрахунків. Для актуарних розрахунків беруться повні таблиці смертності, в яких вік показаний з інтервалом в 1 рік.

Останній рядок таблиці смертності відповідає так званому граничному віку ω. В наведеному фрагменті $\omega = 100$ років. Вважають також, що $l_{\omega+1} = 0$, тобто кількість людей, які дожили до віку, більшого за ω, дорівнює нулю.

Величина d_x показує *число людей, які померли в віці* $x: d_x = l_x - l_{x+1}$. Так, до 30 років із 100000 новонароджених хлопчиків доживе 91419, до 60 – 50246.

В останньому стовпці таблиці наведені ймовірності q_x *вмерти протягом року, доживши до віку* $x: q_x = d_x / l_x$. Тоді ймовірність прожити ще рік для людини в віці x (тобто дожити до віку $x+1$) дорівнює $p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$. Аналогічно, ймовірність прожити від віку x до $x+n: {}_n p_x = l_{x+n} / l_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$.

Приклад 7.1. Визначити для чоловіка в віці 30 років ймовірність: а) померти протягом року; б) прожити ще 3 роки; в) дожити до 98 років.

Розв'язок. а) з фрагменту таблиці смертності знаходимо, що $d_{30} = 597$, $l_{30} = 91419$. Тоді $q_{30} = d_{30}/l_{30} = 597/91419 = 0{,}00653$;

б) при $x = 30$ і $n = 30$ знаходимо ${}_3p_{30} = l_{33}/l_{30} = 89488/91419 = 0{,}9789$;

в) при $x = 30$, $n = 98 - 30 = 68$ ${}_{68}p_{30} = l_{98}/l_{30} = 95/91419 = 0{,}0010$.

За даними таблиці смертності знаходять і ймовірності смерті в певному віці. Наприклад, ймовірність померти в віці від x до $x+n$:

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j; \tag{7.1}$$

– ймовірність померти через m років (протягом року $m+1$) для чоловіка в віці x років:

$$ {}_{m|}q_x = {}_mp_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x}\cdot\frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x}; \tag{7.2}$$

– ймовірність для чоловіка в віці x років померти в віковому інтервалі від $x+m$ до $x+m+n$ років:

$$ {}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} = {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}. \tag{7.3}$$

Приклад 7.2. Визначити для чоловіка в віці 30 років ймовірність померти: а) протягом 20 наступних років; б) через 20 років; в) протягом 10 років після досягнення ним 50 років.

Розв'язок. а) за формулою (7.1) ${}_{20}q_{30} = \dfrac{91419 - 70354}{91419} \approx 0{,}32$;

б) за формулою (7.2) ${}_{20|}q_{30} = \dfrac{2001}{91419} \approx 0{,}022$;

в) за формулою (7.3) ${}_{50}q_{60} = \dfrac{70354 - 50246}{70354} \approx 0{,}29$.

Використаємо отримані в прикладах 7.1 і 7.2 результати при обчисленні одноразових премій для різного роду договорів страхування.

Приклад 7.3. Нехай кожна з N осіб застрахувала своє життя на 3 роки на суму 1000$. За умовою договору ця сума виплачується спадкоємцям особи, яка померла в віці до 33 років. Особі, яка дожила до цього віку, нічого не виплачується, а премія не повертається. Яка теоретична одноразова премія за кожен з цих договорів?

Розв'язок. Згідно з таблицею смертності (таблиця 7.1) із $l_{30} = 91419$ осіб в віці 30 років протягом найближчих трьох років помре ${}_3d_{30} = l_{30} - l_{33} = 91419 - \quad -89488 = 1931$ чоловіків. Ймовірність для тридцятирічного чоловіка померти до досягнення 33 років дорівнює ${}_3q_{30} = \dfrac{l_{30} - l_{35}}{l_{30}} = 1 - \dfrac{89488}{91419} = 0,021123$.

Відповідно з групи N чоловік в середньому помре $D = N \cdot {}_3q_{30} = 0,021123N$ чоловік і на кожного з них буде виплачено 1000$. Загальні витрати компанії $S = 1000 \cdot 0,021123N$. Для забезпечення цих виплат необхідно при укладенні договору страхування з кожного із страхувальників отримати премію в розмірі $T_0 = \dfrac{S}{N} = 1000 \cdot \dfrac{0,021123N}{N} = 21,12\,(\$)$.

Приклад 7.4. Нехай кожен із N чоловік застрахував своє життя на 1000$ терміном на три роки за умови попереднього прикладу. Яку щорічну премію повинен вносити кожен страхувальник на початок кожного страхового року?

Розв'язок. Відмінність від попереднього прикладу полягає лише в способі оплати премії, яка вноситься щорічно: перший раз – всіма страхувальниками при укладенні договору, на початку наступного року – тими, хто дожив до 31 року, на початку другого – тими, хто дожив до 32 років. Загальний розмір зобов'язань компанії не змінився і складає, як і в попередньому прикладі, $S = 1000N\,{}_3q_{30}$.

Першу премію оплатять всі N чоловіків, другу $-Nl_{31}/l_{30}$, третю – Nl_{32}/l_{30}. Якщо премія стала і дорівнює T_0, то загальні надходження складуть

$$T_0 \cdot N(l_{30} + l_{31} + l_{32}) / l_{30}.$$

Прирівнявши їх до загальних зобов'язань, отримаємо

$$\frac{T_0 \cdot N}{l_{30}}(l_{30} + l_{31} + l_{32}) = 1000\frac{l_{30} - l_{33}}{l_{30}} \cdot N.$$

Підставивши дані з таблиці 7.1, матимемо $T_0\left(91419 + 90822 + 90183\right) = 1000 \cdot \left(91419 - 89488\right)$, звідки $T_0 = 7{,}09$ \$.

Із розглянутих прикладів видно, що конкретне число осіб, які уклали договір, несуттєве для визначення величини премій. Воно буде відігравати роль в оцінці сумарних резервів і фінансової стійкості страхової компанії.

В деяких актуарних розрахунках (наприклад, в пенсійному страхуванні) необхідні ймовірності дожиття подружніх пар, які також розраховуються за таблицями смертності. Нехай мова йде про подружжя у віці x і y років та необхідно оцінити ймовірності прожити ще n років для кожного з них, які позначимо як ${}_nP_x$ і ${}_nP_y$. Тоді ${}_nP_x = l_{x+n} / l_x$, ${}_nP_y = l_{y+n} / l_y$. В свою чергу ймовірності померти для кожного з подружжя ${}_nq_x = 1 - {}_nP_x$, ${}_nq_y = 1 - {}_nP_y$.

Вважаючи, що дружина та чоловік досягають віку x і y в один день, а смерть одного – страхова подія незалежна від смерті іншого, обчислимо ймовірність прожити подружжя ще n років (ймовірність „збереження" подружньої пари), яка розраховується як добуток двох незалежних подій:

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}, \tag{7.4}$$

де $l_x \cdot l_y = l_{xy}$, $l_{x+n} \cdot l_{y+n} = l_{xy+n}$.

Знайдемо тепер ймовірність того, що чоловік, який уклав договір страхування в віці x років, коли його дружині було y років, не доживе до $x+n$ років, а дружина, навпаки, доживе до $y+n$ років. Шукана ймовірність

$$ {}_nP_{x|y} = {}_nq_x \cdot {}_nP_y = \left(1 - {}_nP_x\right) \cdot {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{lx_y}, \tag{7.5}$$

Приклад 7.5. Нехай вік чоловіка – 50, а дружини – 45 років. Обчислити ймовірність того, що вони проживуть наступні 5 років, і ймовірність того, що чоловік не проживе 5 років, а дружина проживе.

Розв'язок. За таблицями смертності для чоловіка $l_{50}=83640,\ l_{55}=77007,$ для дружини $l_{45}=96261,\ l_{50}=94348$. Тоді ймовірність того, що подружжя проживе наступні 5 років:

$$_5P_{50;45} = {_5P_{50}} \cdot {_5P_{45}} = \frac{77007}{83640} \cdot \frac{94348}{96261} = 0{,}9024 .$$

Ймовірність того, що чоловік не проживе 5 років, а дружина проживе,

$$_5P_{50|45} = \left(1 - {_5P_{50}}\right) \cdot {_5P_{45}} = \left(1 - 0{,}9207\right) \cdot 0{,}98013 = 0{,}007772$$

7.3 Комутаційні функції

З метою спрощення страхових розрахунків застосовують так звані *комутаційні функції* (їх також називають *комутаційні числа*), для яких складені спеціальні таблиці. Комутаційні функції умовно діляться на дві групи. Перша група функцій визначається числом осіб, які доживають до конкретного віку, друга група – числом осіб, які померли. Основними в першій групі є функції $D_x = v^x l_x$, $N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$. В страхуванні на чисте дожиття смисл функції D_x можна інтерпретувати так: якщо кількість l_0 новонароджених застрахована на чисте дожиття терміном на x років з умовою виплати одиничної суми кожному, хто дожив до віку x, то величина D_x є очікуваною поточною вартістю суми всіх страхових виплат, тобто сумарною страховою премією.

Подібним чином інтерпретується і функція N_x. Нехай кількість l_0 новонароджених застрахована на наступних умовах: починаючи з віку x, пожиттєво на початку кожного року виплачується одна грошова одиниця кожному страхувальнику. Тоді величина N_x є очікуваною поточною вартістю суми всіх страхових виплат, тобто є сумою всіх страхових внесків. Оскільки $a_k = \frac{N_{x+1}}{D_x}$, то функція N_x застосовується в страхуванні ануїтетів.

За означенням $N_x = N_{x+1} + D_{x,}\ N_\omega = D_\omega$. В деяких актуарних розрахунках необхідні суми комутаційних чисел D_x для заданих вікових інтервалів. В цих випадках можна скористатися комутаційними числами N_x:

$$\sum_{i=1}^{k} D_{x+i} = N_{x+1} - N_{x+k+1}.$$

На практиці застосовуються ще два варіанти функції N_x, до яких звертаються тоді, коли платежі проводяться m разів в році. Так для платежів постнумерандо $N_x^{(m)} \approx N_x + \frac{m-1}{2m} D_x$, а для платежів пренумерандо $\tilde{N}_x^{(m)} \approx N_x - \frac{m-1}{2m} D_x$.

Найбільш важливими комутаційними функціями другої групи є функції $C_x = d_x \nu^{x+1}$, $M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j$.

Між комутаційними функціями обох груп існують певні залежності:

$$C_x = d_x \nu^{x+1} = \left(l_x - l_{x+1}\right)\nu^{x+1} = l_x \nu^x \nu - l_{x+1}\nu^{x+1} = D_x \nu - D_{x+1}.$$

Аналогічно можна показати, що $M_x = N_x \nu - N_{x+1}$.

Використовуючи таблиці смертності, для заданої процентної ставки (тобто для прийнятої в страхових організаціях норми дохідності) складаються таблиці комутаційних функцій, які потім застосовуються в актуарних розрахунках. В таблиці 8.2 наведено фрагмент комутаційних функцій (чисел) для чоловіків і річної процентної ставки 5%.

Таблиця 7.2

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397
...	...	...	...	...
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283

...	...	...	...	...
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06
...	...	...	...	...
60	2698,946	24439,09	108,4477	1526,18
...	...	...	...	...
70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632

При страхуванні подружніх пар користуються наступними комутаційними функціями $D_{xy} = l_{xy} \nu^{\frac{(x+y)}{2}} = l_{xy} \left(\frac{1}{1+i} \right)^{\frac{(x+y)}{2}}$,

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \nu^{n+\frac{(x+y)}{2}} = l_{xy+n} \left(\frac{1}{1+i} \right)^{n+\frac{(x+y)}{2}},$$

$$N_{x\,y} = \sum_{i=0}^{\varpi - y} D_{x+i,\, y+i}.$$

Приклад 7.6. Визначити комутаційні числа $D_{50;45}$ і $D_{55;50}$ для подружньої пари з прикладу 7.5.

Розв'язок. Маємо $(x+y)/2 = (50+45)/2 = 47,5$. Комутаційні числа при умові, що процентна ставка дорівнює 9 %, набувають наступних значень:

$D_{50} = 1124;$

$D_{55} = 673,1;$ $D_{45} = 1991,9;$ $D_{50} = 1268,8$. Звідси

$D_{50;45} = 10^{-3} \cdot 1124,8 \cdot 1991,9 \cdot 1,09^{47,5} = \; = 134308;$

$D_{55;50} = 10^{-3} \cdot 673,1 \cdot 1268,8 \cdot 1,09^{5+47,5} = 78770.$

Оскільки добутки комутаційних чисел мають велику розмірність, то їх, зазвичай, множать на 10^{-3}.

7.4. Страхування на чисте дожиття

Страхування на чисте дожиття полягає в страхуванні певної суми грошей на певний термін. Страхова подія, при настанні якої відбудеться виплата, полягає в дожитті застрахованого (страхувальника) до кінця вказаного терміну. У випадку смерті страхувальника в період дії договору сума не виплачується, а премія не повертається.

Нашою метою буде розрахунок величини ${}_nT_x$ – нетто–премії в випадку, коли страхувальник у віці x років укладає зі страховою компанією договір страхування на чисте дожиття терміном на n років. Це означає, що доживши до віку $x+n$ років, страхувальник отримає обумовлену страхову суму S. Нехай страхувальники в кількості l_x (тобто всі, які дожили до віку x) уклали такий договір страхування. Тоді страховик після закінчення терміну договору повинен виплатити суму S кожному, хто дожив до віку $x+n$. Оскільки таких людей буде l_{x+n}, то сумарна виплата складе $l_{x+n} \cdot S$. Дану суму страховик отримує наступним чином. Кожен страхувальник в момент укладення договору вносить величину ${}_nT_x$, а загальна сума складе $l_x\,{}_nT_x$ і може бути інвестована, наприклад, покладена в банк за ставкою i складних процентів. Тоді відповідна нарощена сума за n років $l_x\,{}_nT_x(1+i)^n$.

Отже, $l_{x+n} \cdot S = l_x\,{}_nT_x(1+i)^n$. Звідси

$$ {}_nT_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot S = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot S . \tag{7.6} $$

З позиції теорії ймовірностей величина ${}_nT_x$ є математичним сподіванням страхової суми S, дисконтованої на момент укладення договору. Тому ${}_nT_x$ також називають *очікуваною поточною вартістю*.

Величина $T_{x,\frac{1}{n}} = \dfrac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n}$ називається *актуарним множником дисконтування* за n років і є величиною нетто–премії для одиничної суми при страхуванні на дожиття.

Приклад 7.7. Визначити вартість договору страхування на дожиття на суму 100000 грн. терміном на 20 років для чоловіка віком 30 років. В розрахунках використовувати річну процентну ставку $i = 9\%$.

Розв'язок. Оскільки $S = 100000$ грн., $x = 30,\ n = 20,\ i = 0,09$. $1\big/\left(1,09\right)^{20} =$ $= 0,17843$, $l_{50} = 70354,\ l_{30} = 91419$, матимемо

$$ {}_{n}T_{x} = (1,09)^{-20} \cdot \frac{l_{50}}{l_{30}} \cdot 100000 = 0,17843 \cdot \frac{70354}{91419} \cdot 100000 = 13732 \text{ (грн.)}. $$

Повертаємося до формули (7.7). Помноживши чисельник і знаменник цієї формули на v^{x}, отримаємо:

$$ {}_{n}T_{x} = \frac{v^{n} \cdot l_{x+n}}{l_{x}} S = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^{x} \cdot l_{x}} S = \frac{D_{x+n}}{D_{x}} S . \qquad (7.7) $$

Приклад 7.8. Визначити розмір нетто-премії при страхуванні на дожиття до 50 років чоловіка віком 30 років в умовах застосування складної процентної ставки 5% річних.

Розв'язок. За формулою (7.7) ${}_{n}T_{x} = {}_{20}T_{30} = \left(D_{50}/D_{30}\right) \cdot S =$ $= \dfrac{6135,131}{21152,29} \cdot 10000 = 2900,457$ (у.о.).

Приклад 7.9. Знайти одноразову премію страхування $S = 10000$ у.о. на дожиття 30 річного мужчини до 60 років.

Розв'язок. За формулою (7.7) ${}_{30}T_{30} = S \cdot \left(D_{60}/D_{30}\right) = \dfrac{2689,946}{21152,29} \cdot 10000 =$ $= 1271,704$ (у.о.).

Менша величина премій в даному прикладі пов'язана з великою тривалістю договору і, відповідно, з меншою ймовірністю дожиття страхувальника до потрібного за договором віку.

Страхування на чисте дожиття рідко використовується ізольовано і часто є складовою частиною інших договорів. Для цього виду страхування договір є відносно дорогим, якщо термін страхування не досить великий. Приклад страхування на дожиття показує взаємодію обох факторів: процентної ставки і смертності. При цьому смертність приводить до того, що частка премій померлих перерозподіляється між тими, що залишилися живими на момент закінчення терміну дії договору, створюючи для них додатковий прибуток, крім того, що забезпечується процентами.

Нагадаємо, що *зведена поточна вартість* P страхової суми S визначається за формулою $P=(1+i)^{-n}S$. Порівнюючи її з формулою (7.6), бачимо, що вони відрізняються на величину ${}_nP_x=\dfrac{l_{x+n}}{l_x}<1$. Відповідно нетто–премія (страховий внесок) кожного страхувальника буде меншою (меншим) від зведеної (поточної) вартості страхової суми. Така ситуація пояснюється тим, що згідно принципу солідарної відповідальності страхувальників страхувальник, який дожив до 50 років, отримає частину грошей за рахунок тих страхувальників, які оплатили премії, але не дожили до кінця терміну страхування і тому їх внески розподіляються між живими. Зокрема, в наведеному прикладі з кожних 1000 застрахованих не доживуть до 50 років в середньому $1000-\dfrac{l_{50}}{l_{30}}1000=1000\left(1-\dfrac{70354}{91419}\right)\approx 230$ чоловік. Якщо б нетто–премію страхувальник забезпечував сам, то страховий внесок $P=(1+i)^{-n}S=(1{,}09)^{-20}\cdot 100000=0{,}17843\cdot 100000=17843$(грн.), що набагато більше за 13732 грн.

Той факт, що частина застрахованих не доживе до терміну закінчення договору та їх страхові внески розподіляються серед решти страхувальників, дозволяє говорити про так звану *річну норму дохідності* з врахуванням прибутку (як не дивно) від смертності. Дійсно, якщо число всіх застрахованих (нехай для визначеності на початку року) складе l_x, то величина страхового фонду - $l_x\,{}_nT_x$. Страховий внесок ${}_nT_x$ можна трактувати і як індивідуальний страховий фонд. В кінці року величина страхового фонду складе $l_x\,{}_nT_x(1+i)$, а величина індивідуального страхового фонду – $l_x\,{}_nT_x(1+i)/l_{x+1}$, оскільки число застрахованих зменшиться. Тому можна визначити річну норму дохідності для віку x:

$$i_x = \frac{\frac{l_x p(1+i)}{l_{x+1}} - p}{p} = \frac{l_x + l_x i - l_{x+1}}{l_{x+1}} = \frac{d_x + l_x i}{l_{x+1}} = \frac{l_x}{l_{x+1}}\left(\frac{d_x}{l_x} + i\right) = \frac{q_x + i}{p_x} \qquad (7.8)$$

Інколи i_x називають *актуарною нормою дохідності.* Оскільки $p_x < 1$, то $i_x > q_x + i$, а величина i_x може значно перевищувати ставку i, особливо якщо ця ставка є невеликою.

Зокрема, для наведеного прикладу 8.5:

$$i_{30} = \frac{q_{30} + i}{p_{30}} = \frac{0{,}00653 + 0{,}09}{1 - 0{,}00653} = 0{,}09716; \quad i_{31} = \frac{0{,}007036 + 0{,}09}{1 - 0{,}007036} = 0{,}09772.$$

Природно можна ввести *річний актуарний коефіцієнт нарощення* S_x і відповідно актуарний коефіцієнт дисконтування v_x (для віку x):

$$S_x = 1 + i_x = 1 + \frac{q_x + i}{p_x} = \frac{p_x + q_x + i}{p_x} = \frac{1+i}{p_x} = (1+i)\frac{l_x}{l_{x+1}} \qquad (7.9)$$

$$v_x = \frac{1}{S_x} = v\frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (7.10)$$

Розглянемо тепер методику страхування подружньої пари на дожиття у віці x і y років на даний момент. Страховою подією тут є дожиття до $x+n$ і $y+n$ років або дожиття одного із членів подружжя до обумовленого віку. В першому випадку нетто – премія визначається за формулою ${}_nT_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y \cdot v^n \cdot S = \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}} \cdot S$, де ${}_nP_x$ і ${}_nP_y$ – ймовірності прожити ще n років для кожного з подружжя.

В другому варіанті страхова сума виплачується одному з подружжя, наприклад, дружині, при умові, що вона проживе до $y+n$ років. Отримаємо наступну величину нетто – премії:

$${}_nT_{x|y} = {}_nP_{x|y} \cdot v^n \cdot S = \left(\frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}\right) S \cdot v^n \qquad (7.11)$$

де ${}_nP_{x|y}$ – ймовірність того, що чоловік (який уклав договір у віці x років, коли його дружині було y років) не доживе до віку $x+n$, а дружина, навпаки, доживе до $y+n$ років. Помноживши і розділивши у формулі (7.11) перший дріб на v^y, а другий на $v^{\frac{(x+y)}{2}}$, отримаємо

$$ {}_nT_{x|y} = \left(\frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}} \right) S, \qquad (7.12) $$

де ${}_nT_{x|y}$ – величина, яка дорівнює різниці нетто – премій страхування на дожиття дружини і на дожиття подружньої пари.

Приклад 7.10. Визначити розмір нетто–премії страхування на 5 років на дожиття подружжя за умовами прикладу 7.5 із застосуванням процентної ставки 9 % річних, $S = 10000$ грн.

Розв'язок. Комутаційні числа за умовою, що процентна ставка дорівнює 9%, наступні: $D_x = D_{50} = 1124,8$; $D_{x+n} = D_{55} = 673,1$; $D_y = D_{45} = 1991,9$; $D_{y+n} = D_{50} = 1268,8$; $(x+y)/2 = (50+45)/2 = 47,5$.

Звідси $D_{xy} = D_{50;45} = 10^{-3} \cdot 1124,8 \cdot 1991,9 \cdot 1,09^{47,5} = 134799$;

$$ D_{xy+n} = D_{55;50} = 10^{-3} \cdot 673,1 \cdot 1268,8 \cdot 1,09^{47,5} = 78770. $$

При страхуванні на дожиття подружньої пари отримаємо

$$ {}_nT_{xy} = {}_5T_{50;45} \cdot 10000 = \frac{78770}{134799} \cdot 10000 = 5843,5; $$

При страхуванні на дожиття дружини

$$ {}_nT_{x|y} = {}_5T_{50|45} \cdot 10000 = \left(\frac{1268,8}{1991,9} - \frac{78770}{134799} \right) \cdot 10000 = 526,3. $$

7.5. Страхування ануїтетів

7.5.1.Довічна рента

В багатьох випадках люди воліють отримувати не окрему суму, а регулярний дохід. Коли регулярні виплати здійснюються протягом всього життя страхувальника, то говорять про *довічну ренту*. Періодичність виплат може бути довільною: річна, щоквартальна, щомісячна і т. д. Не зменшуючи загальної періодичності, матимемо на увазі річний період.

Більш предметно, ми будемо говорити про звичайну довічну ренту. Якщо рента купується особою в віці x років в момент укладення контракту, то вона виплачується в кінці кожного року дожиття, тобто в моменти $x+1$, $x+2$, $x+3,...$, тобто рента виплачується в кінці $x+k$ року, якщо страхувальник досяг віку $x+k$, в іншому випадку (в випадку смерті) виплата ренти припиняється.

Знайдемо величину нетто–премії, яку повинен заплатити страхувальник для того, щоб страхова компанія змогла забезпечити щорічну виплату в розмірі S довічної ренти.

Нехай l_x чоловіків віком x укладають договір на довічну ренту з річними виплатами S. Тоді в момент укладення договорів страхування сумарні надходження в страхову компанію складуть $l_x T_{x_1}$. Ця сума повинна забезпечити довічні щорічні виплати для всіх учасників.

За рік після укладення договору l_{x+1} чоловіків, які залишилися в живих, отримають загальну суму $l_{x+1} \cdot S$, поточна вартість якої $l_{x+1} \cdot S/(1+i)$.

За два роки l_{x+2} чоловіків, які залишилися в живих, отримають загальну суму $l_{x+2} \cdot S$, поточна вартість якої $l_{x+2} \cdot S/(1+i)^2$.

Міркуючи аналогічно, отримаємо, що поточна вартість всіх виплат дорівнюватиме

$$S\left(\frac{1}{1+i}l_{x+1} + \frac{1}{(1+i)^2}l_{x+2} + .. + \frac{1}{(1+i)^k}l_{x+k} + ... + \frac{1}{(1+i)^{\omega-x}}l_{\omega}\right),$$

де ω – граничний вік в таблиці смертності.

Тоді з рівності $l_x T_{x_1} = \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k} \cdot S/(1+i)^k$ знаходимо, що нетто–премія

$$T_{x_1} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k} \Big/ (1+i)^k = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{S}{(1+i)^k} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}. \tag{7.13}$$

Оскільки $\frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_k P_x$, то, позначивши через $\nu^k = 1/(1+i)^k$, отримаємо

$$T_{x_1} = \sum_{k=1}^{\omega-x} \nu^k \, {}_k P_x \cdot S. \tag{7.14}$$

Помноживши чисельник і знаменник у правій частині (7.14) на ν^k, матимемо

$$T_{x_1} = S \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \cdot S. \tag{7.15}$$

Ми врахували, що $D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega} = N_{x+1}$.

]

7.5.2. Авансована довічна рента

Дана рента відрізняється від попередньої лише термінами виплати. В ній виплата здійснюється на початку кожного року договору, починаючи з моменту його укладення.

Нетто–премію для такої ренти позначатимемо через T_{x_2}. Рівняння для цієї величини отримуємо на основі аналогічних міркувань,до яких вдалися в попередньому пункті. Єдина відмінність полягає в тому, що перші виплати будуть повернені зразу після укладення договору страхування і загальна величина їх складе $l_x S$, що дорівнюватиме поточній вартості. Міркуючи аналогічно, одержимо, що поточна вартість всіх виплат дорівнює $S\left(l_x + \nu l_{x+1} + \nu^2 l_{x+2} + \ldots + \nu^{\omega-x} l_{\omega}\right)$.

Тоді з рівності $l_x T_{x_2} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \nu^k l_{x+k} \cdot S$ матимемо

$$T_{x_2} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} \nu^k l_{x+k}, \tag{7.16}$$

або $T_{x_2} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} \cdot S = \frac{N_x}{D_x} \cdot S$.

Для нетто–премій T_{x_1} і T_{x_2} двох типів довічних рент справедливе співвідношення $T_{x_1} = T_{x_2} - S$.

Зауважимо, що довічну ренту називають ще рентою *постнумерандо*, а авансовану – *пренумерандо*.

7.5.3. Відкладена довічна рента

Цей вид ренти відрізняється від розглянутих вище тим, що виплати по ній здійснюються не в рік укладення договору страхування, а через вказану в договорі кількість років. Зокрема, якщо договір укладається в віці x років, а величина відтермінування складає m років, то перша виплата буде зроблена в віці $x+m+1$ для звичайної довічної ренти і в віці $x+m$ для авансованої ренти. Позначають відповідно ${}_mT_{x_1}$ і ${}_mT_{x_2}$.

Дисконтуючи загальні суми виплат, складемо рівняння $l_x \cdot {}_mT_{x_1} = \left(v^{m+1} l_{x+m+1} + \ldots + v^{\omega-x} l_\omega\right) S$, звідки

$$ {}_mT_{x_1} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k l_{x+k} = S \sum_{k=m+1}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \cdot S . \qquad (7.17) $$

Аналогічним чином отримуємо нетто–премію для *авансованої відкладеної ренти*

$$ {}_mT_{x_2} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k l_{x+k} = S \sum_{k=m}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x} \cdot S . \qquad (7.18) $$

7.6. Пожиттєве страхування.

Розглянемо один із основних, найбільш розповсюджених, варіантів страхування життя – *пожиттєве страхування*, коли страхова сума виплачується в випадку смерті застрахованого. Нехай такий договір страховик уклав зі страхувальниками (вік яких x років) в кількості l_x

чоловік, причому на випадок смерті кожному застрахованому буде виплачена грошова сума S. Для спрощення будемо вважати, що виплата страхової суми проводиться в кінці року, в якому помер страхувальник. Визначимо одноразову нетто–премію T_x, керуючись еквівалентністю взаємних зобов'язань страховика та страхувальника.

В кінці першого року (починаючи з моменту укладення договору) страховик повинен буде виплатити суму Sd_x (оскільки до віку $x+1$ не доживе d_x осіб), в кінці другого – Sd_{x+1} і т.д. Остання сума, яка дорівнює Sd_ω, буде виплачена через $\omega - x + 1$ років. Зведена вартість всіх страхових виплат дорівнює

$$S\left(\nu d_x + \nu^2 d_{x+1} + \ldots + \nu^{\omega-x+1} d_\omega\right) = \sum_{k=0}^{\omega-x} \nu^{k+1} d_{x+k} \cdot S\,. \tag{7.19}$$

Ця величина, поділена на число всіх страхувальників l_x, дозволяє отримати значення нетто–премії

$$T_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} \nu^{k+1} d_{x+k} \cdot S\,. \tag{7.20}$$

Далі $\dfrac{d_{x+k}}{l_x} = \dfrac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \cdot \dfrac{l_{x+k}}{l_x} = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$. Тоді формулу (7.20) можна записати у вигляді

$$T_x = \frac{S}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} \nu^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}\,. \tag{7.21}$$

Для спрощення розрахунків, зв'язаних зі страхуванням життя, вводять *комутаційні функції* $C_x = \nu^{x+1} \cdot d_x$, $M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_x$, для яких $M_x = M_{x+1} + C_x$ $(M_\omega = C_\omega)$. Тоді нетто–премія

$$T_x = \frac{M_x}{D_x} \cdot S\,. \tag{7.22}$$

На практиці пожиттєве страхування трапляється досить рідко. Як правило, укладаються договори страхування життя на термін і страхова сума виплачується лише у випадку смерті страхувальника до терміну закінчення договору. Якщо цей термін дорівнює n, причому $n \le \omega - x$, то нетто–премія $T^1_{x;\,n}$ обчислюється за формулою

$$T^1_{x;n} = \frac{S}{l_x}\sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} \cdot l_{x+k}\,. \tag{7.23}$$

або

$$T^1_{x;\,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \cdot S\,. \tag{7.24}$$

Між комутаційними функціями першої та другої групи існують наступні залежності:

$$C_x = \nu D_x - D_{x+1}\ \ (C_\omega = \nu D_\omega),\ M_x = \nu N_x - N_{x+1}\ \ (M_\omega = \nu N_\omega)\,. \tag{7.25}$$

Зокрема, якщо $x = 30$ і процентна ставка дорівнює 5%, то

$$M_{30} = \nu N_{30} - N_{31} = \frac{324373{,}2}{1{,}05} - 303220{,}9 = 5705{,}95\,.$$

Приклад 7.11. Чоловік віком 50 років укладає: а) договір на пожиттєве страхування; б) договір страхування життя на двадцять років. Відповідно до договору на випадок смерті страхувальника його спадкоємцям буде виплачена сума $S = 100000$ грн. Визначити величину нетто–премії при нормі дохідності 5%.

Розв'язок. Враховуючи те, що за таблицею 7.1 і формулою (7.22) $x = 50$, маємо

$$T_{50} = \frac{M_{50}}{D_{50}} \cdot 100000 = \frac{2888{,}06}{6135{,}131} \cdot 100000 = 47070 \text{ (грн).}$$

При страхуванні життя на термін за формулою (7.24) отримаємо

$$T^1_{50;\,20} = \frac{M_{50} - M_{70}}{D_{50}} \cdot 100000 = \frac{2888{,}06 - 623{,}6632}{6135{,}131} \cdot 100000 = 36910 \text{ (грн).}$$

На практиці досить часто премії виплачуються з відтермінуванням, що рівносильне заміні разової виплати премії постійною рентою. Нехай відтермінування здійснюється шляхом платежів пренумерандо на протязі t

років. Умова еквівалентності зобов'язань сторін записується $R \cdot \ddot{a}_{x,t|} = S\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_n}$, де R – член страхового ануїтету (розмір щорічної премії $\ddot{a}_{x,t|} = \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$).

Після нескладних перетворень матимемо $R = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} S$.

Страхування на термін і страхування на дожиття на той же термін можуть об'єднуватися в одному договорі. Такий варіант страхування називається *змішаним страхуванням*. Страхова сума виплачується або страхувальнику в випадку його дожиття до закінчення терміну дії договору, або нащадкам страхувальника в випадку його недожиття до закінчення терміну договору. Величина одноразової нетто–премії при змішаному страхуванні $T_{x;\,n} = T^1_{x;\,n} + T_{x;\,\overset{1}{n}}$, де $T^1_{x;\,n} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$, $T_{x;\,\overset{1}{n}} = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$. Тоді

$$T_{x;\,n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \qquad (7.26)$$

Для відтермінування платежів на протязі t років отримаємо

$$R = \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \cdot S. \qquad (7.27)$$

7.6. Страхові пенсійні схеми

Пенсійне страхування по суті є послідовним повторюванням страхування на дожиття. Нехай пенсія виплачується зі 60 років. Тоді вартість страхування разової виплати пенсії, яка дорівнює S′, визначається вартістю страхування на дожиття до 60 років. Аналогічно можна послідовно визначити вартість страхування на дожиття і до іншого віку. Тоді вартість страхування складе:

$${}_1T_x + {}_2T_x + \ldots + {}_{w-x-1}T_x,$$

де w – максимальний вік, який враховується в розрахунках.

Необхідність у розрахунку нетто-тарифів (нетто-премій в розрахунку на 1 грн. встановленої пенсії) виникає при використанні схеми, в якій за величину приймається величина пенсії. Тариф може бути визначений для одноразового внеску або при умові, що премія виплачується з відтер мінуванням.

При одноразовому внеску нетто-тариф, очевидно, дорівнює вартості ренти, яка відповідає умовам виплат пенсій, а нетто-премія – добутку нетто-тарифу на розмір пенсії. Наприклад, для річних пенсій пренумерандо маємо:

$$T_x = R \cdot \text{д}_x = R \frac{N_x}{D_x}, \tag{7.28}$$

де $ä_x = N_x/D_x$, R – розмір річної пенсії.

В свою чергу, для відкладеної на n років пенсії отримаємо:

$$T_x = R \cdot {}_{n1}\text{д}_x = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}, \tag{7.29}$$

де ${}_{n1}ä_x = N_{x+n}/D_x$.

Якщо пенсія страхується не по життєво, а на термін *t* років, то її відстань в момент виходу на пенсію складає:

$$T_x = R \cdot \text{д}_{x_1 t\urcorner} = R \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}, \tag{7.30}$$

а за n років до пенсії:

$$T_x = R \cdot {}_{n1}\text{д}_{x_1 t\urcorner} = R \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}. \tag{7.31}$$

Приклад 7.12. Визначити одноразову нетто-премію, яка виплачується при укладенні пенсійного договору страхування з чоловіком у віці 40 років. Розмір річної пенсії 1000 грн., виплати пренумерандо з 60 років пожиттєво. Норма дохідності 9%.

Розв'язок. В цьому випадку маємо по життєвий ануїтет пренумерандо. Для даних задачі отримаємо (7.28):

$$T_{40} = 1000 \cdot {}_{201}\text{д}_{40} = 1000 \cdot \frac{N_{60}}{D_{40}} = 1000 \cdot \frac{3082{,}2}{2939{,}5} = 1048{,}55(\text{\textit{грн.}})$$

Нехай пенсія страхується на термін 15 років. Тоді згідно (7.30):

$$T_{60} = 1000 \cdot \text{д}_{60;15\neg} = 1000\frac{N_{60} - N_{75}}{D_{60}} = 1000 \cdot \frac{3082{,}2 - 684{,}24}{389{,}17} = 6161{,}73(\textit{грн.})$$

В свою чергу, для страхувальника в 40 років отримаємо (7.31):

$$T_{40} = 1000_{201}\text{д}_{60;15\neg} = 1000\frac{N_{60} - N_{75}}{D_{40}} = 1000\frac{3082{,}2 - 684{,}24}{2939{,}5} = 815{,}77(\textit{грн.})$$

В практиці страхування премії часто виплачуються у виді ряду послідовних платежів, іншими словами, з відтермінуванням. При розрахунку нетто-тарифів з відтер мінуванням для описання внесків можна скористатися обмеженими (на період відтермінування) ануїтетами. З другої сторони пенсії також є страховими ануїтетами. В силу еквівалентності фінансових зобов'язань обох учасників вартості відповідних ануїтетів повинні дорівнювати одна одній. Наприклад, коли один ануїтет (внески) є терміновим обмеженим, інший (пенсії) – пожиттєвим, відтермінованим, причому обидва передбачають щорічні платежі постнумерандо, отримаємо наступну рівність:

$$P \cdot a_{x,t\neg} = R_n a_x,$$

де P – річна сума внесків (нетто-премії),

R – річна сума пенсій.

Тоді:

$$P = R\frac{{}_n a_x}{a_{x;t\neg}} = R\frac{N_{x+n+1}}{D_x} : \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x} = R\frac{N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+t+1}} \qquad (7.32)$$

Наприклад, якщо перша виплата пенсій проводиться в 60 років (x+n+1=60), вік при укладенні страхового контракту 40 років, а відтермінування 10 років, то $P=RN_{60}/(N_{41}-N_{51})$.

Аналогічно, якщо обидва ануїтети передбачають річні виплати пренумерандо, то $P \cdot \ddot{a}_{x;t\neg} = R \cdot {}_n\ddot{a}_x$ і

$$P = R\frac{{}_n\text{д}_x}{\text{д}_{x;t\neg}} = R \cdot \frac{N_L}{N_x - N_{x+t}}, \qquad (7.33)$$

де L – рік виходу на пенсію.

Приклад 7.13. Сорокарічний чоловік вносить премію на протязі 5 років, пенсія річна, пожиттєва, в розмірі 10000 грн. Обидва потоки платежів (премії та виплати) пренумерандо. Обчислити розмір премій.

Розв'язок. Згідно (7.33)

$$\mathrm{P} = 10000 \cdot \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{45}} = 10000 \frac{3082.2}{30375.6 - 18086.4} = 2508.1(\textit{грн.})$$

Чим більший період відтер мінування, тим, очевидно, менша сума внеску. Так при відтермінуванні на 10 років отримаємо

$$\mathrm{P} = 10000 \cdot \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{50}} = 10000 \frac{3082.2}{30375.5 - 10465{,}5} = 1548(\textit{грн.})$$

Розрахуємо розмір пенсій за сумою вкладів. Нехай на рахунок застрахованого щорічно поступають внески, причому кожний внесок забезпечує деяку суму пенсії. Для початку покладемо, що пенсія забезпечується одноразовим внеском T_x. Тоді із співвідношення $T_x = Ra_x$ знаходимо розмір пенсії R. Так для термінової пенсії пренумерандо маємо $R = T_x/ä_x$, для відкладеної пенсії $R = T_x/n\ ä_x$.

Нехай тепер постійна премія виплачується з відтер мінуванням на протязі t років, причому внески однакові. Розмір пенсії без коректування на інфляцію визначається як розв'язок рівняння $P \cdot a_{x t\rceil} = R_n a_x$ або аналогічні вирази відносно R. Наприклад, для відкладеної річної пенсії пренумерандо з обмеженим періодом внесків отримуємо $R = P \cdot ä_{x;t\rceil}\ /\ mä_x/$

Зупинимося тепер на випадку, коли внески проводяться послідовно на протязі деякого терміну і змінюються в часі. Перший внесок P_1 можна розглядати як одноразову премію. Яка забезпечує пенсію в сумі R_1 і т.д. Нехай внески та пенсії виплачуються на початку року, причому пенсія виплачується починаючи з 60 років. Тоді для кожного внеску можна написати рівність:

$$R_1 = P_1 \frac{N_{60}}{D_x}, \quad R_2 = P_2 \frac{N_{60}}{D_{x=1}}, \ldots . R_k = P_k \frac{N_{60}}{D_{x=k-1}} \qquad (7.34)$$

Загальна сума пенсії

$$P = \sum_{j=1}^{k} P_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} R_j \cdot D_{x+j-1}}{N_{60}}$$

Приклад.7.14. Нехай на пенсійний рахунок чоловіка протягом 5-ти років поступають внески пренумерандо, причому перший зроблений у віці 40 років, а їх розміри: R_1=150, R_2=200, R_3=400, R_4=300, R_5=800. Пенсія виплачується з 60 років. Знайти розміри пенсії, які забезпечуються кожним черговим внеском, і розмір пенсії, **забезпеченої всіма внесками.**

Розв'язок. На основі формул (7.34) і (7.35) складено таблицю

x	$\mathbf{D_{x+j-1}}$	$\mathbf{R_j}$	$\mathbf{R_j D_{x+j-1}}$	$\mathbf{P_j}$
40	2939,5	150	440925	143,05
41	2677,7	200	535540	174,75
42	2437,7	400	975080	316,36
43	2217,8	300	65340	215,86
44	2016,6	800	1613280	523,42
Всього			4230165	1372,45

В останньому стовпці показанні розміри пенсій, які забезпечуються кожним черговим внеском і розмір пенсії, забезпечений всіма внесками.

7.8. Страхові резерви.

Важливим фактором, який забезпечує надійність в роботі страхових організацій є визначення розмірів *резервів* як для окремих застрахованих, так і для їх груп і в цілому за всіма договорами страхової організації.

Під резервами розуміють сучасну вартість „чистих" зобов'язань страхової організації. Резерв повинен дорівнювати сучасній вартості виплат, які зобов'язаний здійснити страховик за вирахуванням теперішньої вартості очікуваних внесків страхувальника. Для того, щоб зобов'язання перед страхувальниками були виконані, резерву повинні відповідати деякі активи, які дорівнюють або перевищують його розмір. Формування таких активів є обов'язковою нормальною функцією страховика. Їх ми будемо називати *страховими резервами*.

Резерв можна означити на будь-який момент дії страхового договору. Спочатку визначимо його на початок дії договору до першої виплати премії. У випадку, коли передбачаються щорічні пожиттєві внески пренумерандо в розмірі P_x, отримаємо ${}_0U_x = A_x - P_x \cdot \ddot{a}_x$, де ${}_0U_x$ — розмір резерву для застрахованого у віці x років, A_x — теперішня вартість певних страхових зобов'язань, $\ddot{a}_x = N_x / D_x$. Якщо резерв визначається для тих же умов, але на момент t після початку страхування, то ${}_tU_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$.

Розглянемо процес формування резерву при страхуванні на дожиття, при якому передбачається одночасова премія. Відповідно сума зараховується на рахунок учасника та є початковим резервом, у зв'язку з чим остання формула для страхової суми R набуде вигляду

$$ {}_tU_x = A_{x+t} \cdot R = \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} \cdot v^{n-t} \cdot R = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot R \tag{7.35} $$

Очевидно, що теперішня вартість зобов'язань за даним видом страхування збільшується в часі, оскільки з ростом t знаменник зростає.

В пенсійному страхуванні обумовлюється необхідність ведення персональних рахунків застрахованих. Розглянемо процес зміни в часі суми на персональному рахунку застрахованого S_t і резерву ${}_tU_x$ при страхуванні на дожиття.

На суму одноразового внеску нарощуються проценти за відповідний термін. Тоді на момент t на рахунку учасника знаходиться сума

$$ S_t = {}_nT_x \left(1+i\right)^t \cdot R = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(1+i\right)^t \cdot R = \frac{D_{x+n}}{D_x \cdot v^t} \cdot R, \tag{7.36} $$

де ${}_nT_x$ – розмір премії при страхуванні на дожиття.

Для моменту $t > 0$ маємо $S_t < {}_tU_x$. Таким чином, нарощена сума на персональному рахунку застрахованого менша за резерв на один і той же момент часу, за виключенням початкового.

Із співвідношень ${}_tU_x$ і S_t випливає, що

$$ {}_tU_x = S_t \frac{D_x \cdot v^t}{D_{x+t}} = S_t \frac{l_x}{l_{x+t}} = S_t \frac{1}{{}_tP_x}, \qquad (7.37) $$

де ${}_tP_x$ – ймовірність дожиття особи в віці x до віку $x+t$.

Причина розбіжності між S_t і ${}_tU_x$ полягає в тому, що резерв збільшується не тільки за рахунок накопичених процентів на персональному рахунку, але й за рахунок солідарної відповідальності застрахованих, тобто за рахунок тих учасників, які не дожили до віку $x+t$. Із сказаного випливає, що загальний розмір резерву для тих, що дожили до віку $x+t$ дорівнює сумі засобів на персональних рахунках всіх учасників – які дожили і не дожили до цього віку.

Приклад 7. 12. Чоловік у віці 50 років страхується на дожиття до 60 років, страхова сума $R = 1000$ грн., комутаційні функції визначені для 9%. Знайти величину внеску і резерв на початок терміну, а також приріст резерву за рік.

Розв'язок. Сума внеску та резерв на початку терміну складе:

$$ U_{50} = {}_{10}T_{50} = 1000 \frac{D_{60}}{D_{50}} = 1000 \cdot \frac{389{,}17}{1124{,}8} = 345{,}98. $$

Через рік на рахунку знаходитиметься нарощена сума $S_1 = 345{,}98 \cdot 1{,}09 = \ = 377{,}12$. В той же час резерв складе ${}_1U_{50} = 1000 \frac{D_{60}}{D_{51}} =$

$$ = 1000 \frac{389{,}17}{1017{,}4} = 382{,}51. $$

Якщо ж скористаємося формулою (7.30), то

$$ {}_1U_{50} = 377{,}12 \cdot \frac{1}{{}_1P_{50}} = 377{,}12 \cdot \frac{l_{50}}{l_1} = \ = 377{,}12 \cdot \frac{83640}{82461} = 382{,}51. $$

Таким чином, приріст резерву за один рік за рахунок солідарності застрахованих дорівнює $382{,}51 - 377{,}12 = 5{,}39$.

Для виділення впливу факторів на розмір резерву знайдемо відношення розмірів для двох перших років накопичення при страхуванні на дожиття:

$$\frac{{}_1U_x}{{}_0U_x} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} : \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_x}{D_{x+1}} = \frac{l_x v^x}{l_{x+1} v^{x+1}} = \frac{1}{p_x}(1+i),$$

де p_x – ймовірність прожити один рік після віку x років.

Аналогічно визначимо динаміку резерву за t років:

$$\frac{{}_tU_x}{{}_0U_x} = \frac{1}{{}_tP_x}(1+i)^t, \tag{7.38}$$

Із сказаного випливає, що розміри резерву можна визначати за формулою:

$$_{t+1}U_x = {}_tU_x \frac{1}{{}_tP_x}(1+i)^t, \tag{7.39}$$

Як випливає з отриманого співвідношення, резерв збільшується швидше, ніж проводиться нарощення за рахунок процентів, оскільки ${}_tP_x < 1$, причому ріст процентної ставки прискорює накопичення резерву, а збільшення ймовірності дожиття скорочує його.

Зупинимося на визначенні резерву індивідуального страхування пожиттєвої пенсії з одноразовою виплатою внеску.

Весь період від віку x до граничного віку можна розділити на два часових відрізки. В першому, до початку виплат пенсій відбувається накопичення резерву, в другому – накопичення супроводжується витрачанням засобів. На початок страхування (зразу після внесення премії) резерв дорівнює актуарній вартості страхових виплат, яка в свою чергу дорівнює величині одноразового внеску P_x. Якщо вважати , що розмір річної пенсії дорівнює R і вона виплачується на початок року, то

$$_0U_x = T_x = \frac{N_L}{D_x}R, \tag{7.40}$$

L – вік виходу на пенсію.

Розмір резерву в першому періоді $(x+t<L)$

$$_tU_x = \frac{N_L}{D_{x+t}}R, \tag{7.41}$$

Із збільшенням віку знаменник зменшується і росте резерв. У другому періоді $(x+t \geq L)$

$$ {}_tU_x = \frac{N_L}{D_{x+t}} R, \tag{7.42} $$

Розміри резерву можна отримати і послідовно. Для першого періоду вік визначається формулою ${}_tU_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} R$, а для другого, коли виплачуються пенсії, отримаємо:

$$ {}_{t+1}U_x = {}_tU_x \cdot \frac{1}{p_{x+t}} (1+i) - R, \tag{7.43} $$

В свою чергу рух засобів на персональному рахунку S_t на кожному кроці в часі в першому періоді:

$$ S_t = P_x (1+i)^t, \tag{7.44} $$

а в другому:

$$ S_{t+1} = S_t (1+i) - R, \tag{7.45} $$

Приклад 7.13. Визначити розмір одноразової премії для чоловіка в віці $x = 50$ років, якщо $R = 1000$ грн., $i = 9\,\%$.

Розв'язок. Розмір одноразової премії ${}_0U_{50} = P_{50} = \frac{N_{60}}{D_{50}} R = \frac{3082{,}2}{1124{,}8} \cdot 1000 =$ $= 2740{,}2$ (грн.)

Динаміка резерву в розглядуваному виді страхування різна для кожного періоду. В першому, до початку виплати пенсій вона описується формулою: ${}_{t+1}U_x = {}_tU_x (1+i) \big/ {}_tP_x$, що стосується другого, то тут $\frac{{}_{t+1}U_x}{{}_tU_x} = \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} : \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} =$

$$= \frac{N_{x+t+1}}{N_{x+t}} \cdot \frac{1}{P_{x+t}}\left(1+i\right), \text{ звідки}$$

$$_{t+1}U_x = {}_tU_x \frac{N_{x+t+1}}{N_{x+t} \cdot P_{x+t}}\left(1+i\right) \tag{7.46}$$

Очевидно, що, якщо другий співмножник в правій частині останньої рівності менший множника нарощення $\left(1+i\right)$, то резерв зменшується з кожним кроком в часі.

Приклад 7.14. За умовами прикладу 7.13 знайти величину резерву для чоловіка у віці 61 рік.

Розв'язок. За формулою (7.39)

$$_{11}U_{50} = {}_{10}U_{50} \frac{N_{61}}{N_{60} \cdot P_{61}} \cdot 1{,}09 = 7919 \cdot \frac{2693}{3082 \cdot 0{,}9692} \cdot 1{,}09 = 7781$$

Контрольні запитання та задачі

1. Що розуміють під таблицями смертності ?
2. Що називають коренем таблиці смертності?
3. Якими факторами визначається фінансове забезпечення договорів зі страхування життя?
4. В чому полягає суть страхування на чисте дожиття?
5. Що називають очікуваною поточною вартістю, зведеною поточною вартістю, річною нормою дохідності, актуарною нормою дохідності, річним актуарним коефіцієнтом нарощення, та за якими формулами вони обчислюються?
6. Дайте коротку характеристику комутаційних функцій.
7. Що називають довічною рентою і як визначається нетто–премія для неї?
8. Що називають авансованою довічною рентою і як знаходиться нетто – премія для неї?
9. Яку ренту називають рентою постнумерандо, а яку пренумерандо?

10. Яку ренту називають відкладеною довічною рентою? Які ви знаєте види відкладених довічних рент і за якими формулами визначаються нетто–премії для кожного виду?
11. Що розуміють під пожиттєвим страхуванням і як обчислюється величина нетто–премії?
12. Що розуміють під змішаним страхуванням і як визначають величину нетто–премії для нього?
13. Що називають страховими резервами?
14. Визначити для чоловіка віком: а) 31 років; б) 1 рік ймовірність:

1) померти протягом року; 2) прожити ще 2 роки; 3) дожити до 99 років.

14. Визначити для чоловіка віком: а) 31 роки; б) 32 роки померти протягом: а) 19; б) 28 наступних років; а) за 29 років, б) за 18 років; протягом 30 років після досягнення ним: а) 68 років; б) 69 років.
15. Нехай кожна з N осіб застрахувала своє життя на: а) 2 роки; б) 5 років на суму: а) 1500$; б) 2000$. За умовою договору ця сума виплачується спадкоємцям особи, яка померла в віці до 33 років. Особі, яка дожила до цього віку, нічого не виплачується, а премія не повертається. Яка теоретична одноразова премія за кожен з цих договорів?
16. Нехай кожен із N чоловіків застрахував своє життя на 1500$ терміном на: а) два роки; б) п’ять років за умови попереднього прикладу. Яку щорічну премію повинен вносити кожен страхувальник на початок кожного страхового року?
17. Визначити вартість договору страхування на дожиття на суму 100000 грн. терміном на: а) 18 років; б) 20 років для чоловіка віком: а) 32 роки; б) 40 роки. В розрахунках використовувати річну процентну ставку: а) $i = 8\%$; б) $i = 9{,}5\%$.
18. Знайти одноразову чисту премію ${}_nT_x$ договору на дожиття: а) 31; б) 33 річного мужчини терміном на: а)19; б) 27 років і на суму: а) $S = 13000$ у.о., б) $S = 8000$ у.о.

19. Знайти одноразову премію страхування: а) $S = 12000$ у.о.; б) $S = 8000$ у.о. на дожиття: а) 32 річного; б) 50 річного мужчини до: а) 60 років; б) 98 років.

20. Чоловік у віці а) 32; б) 31 рік укладає 1) договір на пожиттєве страхування, 2) договір страхування життя на: а) 28 років, б) 29 років. Відповідно до договору на випадок смерті страхувальника його спадкоємцям буде виплачена сума: а) $S = 950000$ грн.; б) $S = 120000$ грн. Визначити величину нетто–премії при нормі дохідності 5%.

Індивідуальні завдання

ІЗ - 1

Нехай страховий портфель A складається з N_1 договорів зі страховими сумами S_1 і ймовірностями пред'явлення запитів p_1. Чи зможе страхова компанія перейняти страховий портфель $Б$, який складається з N_2 договорів зі страховими сумами S_2 і ймовірностями пред'явлення запитів p_2

№	N_1	S_1	p_1	N_2	S_2	p_2
1	100000	3000	0,001	5000	1500	0,01
2	110000	2900	0,002	4900	1400	0,0015
3	115000	2800	0,003	4800	1450	0,02
4	117000	2700	0,004	4700	1470	0,025
5	116000	2750	0,005	4600	1460	0,001
6	111000	2950	0,015	4650	1480	0,03
7	101000	2850	0,006	4950	1490	0,035
8	102000	2650	0,025	4850	1410	0,04
9	103000	2600	0,007	4750	1420	0,045
10	104000	2550	0,008	4550	1430	0,05
11	105000	2500	0,009	4500	1440	0,055
12	106000	2450	0,011	4450	1390	0,06
13	107000	2400	0,012	4400	1380	0,065
14	108000	2350	0,013	4350	1370	0,07
15	109000	2300	0,014	4300	1360	0,075
16	112000	2250	0,015	4250	1350	0,08
17	113000	2200	0,016	4200	1340	0,085
18	114000	2150	0,017	4150	1330	0,09
19	118000	2100	0,018	4100	1320	0,092
20	119000	2050	0,019	4050	1310	0,082
21	120000	2000	0,02	4000	1300	0,072
22	121000	1950	0,021	3950	1290	0,062
23	122000	1900	0,022	3900	1280	0,052
24	123000	1850	0,023	3850	1270	0,042
25	124000	1800	0,024	3800	1260	0,032
26	125000	1750	0,025	3750	1250	0,022
27	126000	1700	0,026	3700	1240	0,012
28	127000	1650	0,027	3650	1230	0,011
29	128000	1600	0,028	3600	1220	0,013
30	129000	1550	0,029	3550	1210	0,014

ІЗ – 2

Страховий портфель налічує n договорів з однаковими виплатами S і ймовірностями настання страхових випадків. Знайти величину нетто–премії, щоб з надійністю $\gamma = 0{,}95$ можна було б гарантувати виплати за всіма запитами.

№	n	S	p	№	n	S	p
1	250	35	0,01	16	1000	150	0,01
2	300	40	0,02	17	1050	155	0,02
3	350	45	0,03	18	1100	160	0,03
4	400	50	0,04	19	1150	165	0,04
5	450	55	0,05	20	1200	170	0,05
6	500	60	0,06	21	1750	85	0,06
7	550	65	0,07	22	1800	90	0,07
8	600	70	0,08	23	1850	95	0,08
9	650	75	0,09	24	1900	100	0,09
10	700	80	0,1	25	1950	105	0,1
11	750	125	0,15	26	2000	110	0,2
12	800	130	0,2	27	2050	115	0,25
13	850	135	0,25	28	2100	120	0,45
14	900	140	0,3	29	2150	125	0,01
15	950	145	0,05	30	2200	130	0,02

ІЗ – 3

В страховій компанії n однотипних договорів, в кожному з яких ймовірність настання страхового випадку p, страхова сума на один договір S, одноразова нетто–премія T_H. Знайти ймовірність розорення страхової компанії, якщо страховий резерв і договір перестрахування відсутні.

№	n	p	S	T_H	№	n	p	S	T_H
1	1000	0,011	300	6	16	1450	0,023	500	15
2	1100	0,015	350	7	17	1550	0,025	550	16,5
3	1200	0,016	400	8	18	1650	0,022	600	18
4	1300	0,017	450	9	19	1750	0,023	650	19,5
5	1400	0,012	500	10	20	1850	0,021	700	21
6	1500	0,011	550	11	21	1950	0,024	750	22,5
7	1600	0,013	600	12	22	2050	0,026	800	24
8	1700	0,016	650	13	23	1020	0,03	300	12
9	1800	0,017	700	14	24	1120	0,032	350	14
10	1900	0,015	750	15	25	1220	0,033	400	16

11	2000	0,014	800	16	26	1320	0,034	450	18
12	1050	0,02	300	9	27	1420	0,035	500	20
13	1150	0,021	350	10,5	28	1520	0,031	550	22
14	1250	0,022	400	12	29	1620	0,032	600	24
15	1350	0,024	450	13,5	30	1720	0,036	650	26

ІЗ – 4

Є два субпортфелі з параметрами n_1, p_1, S_1 і n_2, p_2, S_2. Знайти одноразову відносну ризикову надбавку, яка забезпечує ймовірність нерозорення $1-\varepsilon = 0{,}95$.

№	n_1	S_1	p_1	n_2	S_2	p_2
1	100000	3000	0,001	5000	1500	0,01
2	110000	2900	0,002	4900	1400	0,0015
3	115000	2800	0,003	4800	1450	0,02
4	117000	2700	0,004	4700	1470	0,025
5	116000	2750	0,005	4600	1460	0,001
6	111000	2950	0,015	4650	1480	0,03
7	101000	2850	0,006	4950	1490	0,035
8	102000	2650	0,025	4850	1410	0,04
9	103000	2600	0,007	4750	1420	0,045
10	104000	2550	0,008	4550	1430	0,05
11	105000	2500	0,009	4500	1440	0,055
12	106000	2450	0,011	4450	1390	0,06
13	107000	2400	0,012	4400	1380	0,065
14	108000	2350	0,013	4350	1370	0,07
15	109000	2300	0,014	4300	1360	0,075
16	112000	2250	0,015	4250	1350	0,08
17	113000	2200	0,016	4200	1340	0,085
18	114000	2150	0,017	4150	1330	0,09
19	118000	2100	0,018	4100	1320	0,092
20	119000	2050	0,019	4050	1310	0,082
21	120000	2000	0,02	4000	1300	0,072
22	121000	1950	0,021	3950	1290	0,062
23	122000	1900	0,022	3900	1280	0,052
24	123000	1850	0,023	3850	1270	0,042
25	124000	1800	0,024	3800	1260	0,032
26	125000	1750	0,025	3750	1250	0,022
27	126000	1700	0,026	3700	1240	0,012
28	127000	1650	0,027	3650	1230	0,011
29	128000	1600	0,028	3600	1220	0,013

30	129000	1550	0,029	3550	1210	0,014

ІЗ – 5

В портфелі два однакових договори з розподілом збитку η_1, який задається законом розподілу

1)

η_1	0	200	500	1000
p_i	0,5	0,3	0,15	0,05

ξ_1>500

2)

η_1	0	200	400	500
p_i	0,4	0,35	0,15	0,1

ξ_1>500

3)

η_1	0	100	300	500
p_i	0,5	0,3	0,15	0,05

ξ_1>300

4)

η_1	0	100	200	400
p_i	0,35	0,3	0,25	0,1

ξ_1>300

5)

η_1	0	200	300	400
p_i	0,6	0,2	0,15	0,05

ξ_1>500

6)

η_1	0	200	400	600
p_i	0,6	0,25	0,1	0,05

ξ_1>500

7)

η_1	0	100	300	500
p_i	0,7	0,15	0,1	0,05

ξ_1>400

8)

η_1	0	200	500	800
p_i	0,6	0,2	0,15	0,05

ξ_1>500

9)

η_1	0	100	400	700
p_i	0,5	0,4	0,08	0,02

ξ_1>700

10)

η_1	0	200	400	700
p_i	0,55	0,3	0,1	0,05

ξ_1>500

11)

η_1	0	100	300	500
p_i	0,65	0,2	0,1	0,05

ξ_1>500

12)

η_1	0	100	500	700
p_i	0,7	0,15	0,1	0,05

ξ_1>600

13)

η_1	0	300	400	600
p_i	0,6	0,25	0,1	0,05

ξ_1>600

14)

η_1	0	100	300	1000
p_i	0,4	0,35	0,2	0,05

ξ_1>400

17)

η_1	0	100	300	400
p_i	0,35	0,3	0,25	0,1

18)

η_1	0	200	300	400
p_i	0,6	0,2	0,15	0,05

ξ_1>500

$\xi_1>500$

19)

η_1	0	200	400	800
p_i	0,6	0,2	0,15	0,05

$\xi_1>600$

20)

η_1	0	200	400	700
p_i	0,5	0,35	0,1	0,05

$\xi_1>600$

21)

η_1	0	100	400	700
p_i	0,7	0,15	0,1	0,05

$\xi_1>500$

22)

η_1	0	300	400	800
p_i	0,6	0,25	0,1	0,05

$\xi_1>600$

23)

η_1	0	100	300	700
p_i	0,4	0,35	0,2	0,05

$\xi_1>300$

24)

η_1	0	200	400	800
p_i	0,5	0,3	0,15	0,05

$\xi_1>600$

25)

η_1	0	100	400	700
p_i	0,7	0,15	0,1	0,05

$\xi_1>600$

26)

η_1	0	200	500	900
p_i	0,45	0,3	0,2	0,05

$\xi_1>500$

27)

η_1	0	200	400	800
p_i	0,4	0,35	0,15	0,1

$\xi_1>600$

28)

η_1	0	100	200	500
p_i	0,65	0,2	0,1	0,05

$\xi_1>400$

29)

η_1	0	200	500	600
p_i	0,6	0,25	0,1	0,05

$\xi_1>600$

30)

η_1	0	100	400	700
p_i	0,55	0,3	0,1	0,05

$\xi_1>400$

і за якими страховик повністю звільняється від оплати збитку величиною ξ_1 о.с.с. Такий збиток повністю оплачує перестраховик.

Знайти величини ризикових премій для страховика та перестраховика.

ІЗ – 6

Визначити для чоловіка в віці x років ймовірність: а) прожити ще m років; б) дожити до n років.

№ п/п	x	m	n	№ п/п	x	m	n
1	1	30	50	16	1	1	30
2	2	30	60	17	1	2	33
3	3	30	50	18	2	1	50
4	30	1	33	19	3	30	98
5	30	2	33	20	2	31	60
6	30	3	50	21	1	32	98
7	31	1	60	22	1	98	100
8	31	2	50	23	2	98	99
9	32	1	60	24	1	99	100
10	50	50	99	25	0	2	30
11	98	1	100	26	0	3	31
12	98	2	99	27	0	1	3
13	99	1	100	28	30	0	60
14	30	30	98	29	31	0	65
15	2	1	30	30	32	0	98

Рекомендована література

1. Корнилов И.А. Основы страховой математики: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2004.- 400с.
2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело ЛТД.1995.
3. Фапин Г.И., Фапин А.И. Теория риска для актуариев в задачах. – М.: Мир, „Научный мир”, 2004.
4. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.: Дело, 1998.
5. Шумелда Я. основи актуарних розрахунків. Навч. посібник для студ. спец. „Фінанси”. – Т: Підручники, Посібники, 2003.
6. Федорова С. Концепція формування із страхування життя //Вісник страхового ринку України, 2001р. - №2. –С.238–244.
7. Страхування. Підручник / Керівник авт. кол. і наук. ред. С.С. Осадець. – К.:КНЕУ. 1998.
8. Бабко В. Визначення страхових тарифів // Вісник страхового ринку України, 2001р. - №2, С 227 – 237.

ДОДАТОК

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24573	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46582	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47645	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48169
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49609	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49858	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49986
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									

Таблиця 3

Значення розподілу Пуассона $P_m(\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,904084	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

m \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149631
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000002
15						0,000001

Таблиця 4

Значення $\chi^2_{\alpha;k}$, яке відповідає ймовірності $p = P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k})$ для розподілу χ^2

Число ступенів свободи k	Ймовірність α															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,3	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14, 9	16,9	18,5
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	0,187	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,34	8,4	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	21,6
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,35	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Таблиця 5

Значення функції Колмогорова $K(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-2n^2t^2}$

t	*K*(*t*)	*t*	*K*(*t*)	*t*	*K*(*t*)	*t*	*K*(*t*)	*t*	*K*(*t*)	*t*	*K*(*t*)
0,34	0,00017	0,66	0,2236	0,98	0,7079	1,30	0,9319	1,62	0,9895	1,94	0,9989
0,36	0,0005	0,68	0,2558	1,00	0,7300	1,32	0,9387	1,64	0,9908	1,96	0,9991
0,38	0,0013	0,70	0,2888	1,02	0,7500	1,34	0,9449	1,66	0,9918	1,98	0,9992
0,40	0,0028	0,72	0,3223	1,04	0,7704	1,36	0,9505	1,68	0,9929	2,00	0,9993
0,42	0,0055	0,74	0,3560	1,06	0,7889	1,38	0,9557	1,70	0,9938	2,02	0,9994
0,44	0,0097	0,76	0,3896	1,08	0,8061	1,40	0,9603	1,72	0,9946	2,04	0,9995
0,46	0,0160	0,78	0,4230	1,10	0,8223	1,42	0,9646	1,74	0,9953	2,06	0,9996
0,48	0,0247	0,80	0,4559	1,12	0,8374	1,44	0,9648	1,76	0,9956	2,08	0,9997
0,50	0,0361	0,82	0,4880	1,14	0,8514	1,46	0,9718	1,78	0,9965	2,10	0,9997
0,52	0,0503	0,84	05194	1,16	0,8644	1,48	0,9750	1,80	0,9969	2,12	0,9998
0,54	0,0675	0,86	0,5497	1,18	0,8765	1,50	0,9778	1,82	0,9973	2,14	0,9998
0,56	0,0876	0,88	0,5791	1,20	0,8878	1,52	0,9803	1,84	0,9977	2,16	0,9998
0,58	0,1104	0,90	0,6073	1,22	0,8981	1,54	0,9826	1,86	0,9980	2,18	0,999852
0,60	0,1357	0,92	0,6343	1,24	0,9076	1,56	0,9846	1,88	0,9983	2,20	0,999874
0,62	0,1632	0,94	0,6601	1,26	0,9164	1,58	0,9864	1,90	0,9985	2,30	0,999949
0,64	0,1927	0,96	0,6846	1,28	0,9245	1,60	0,9880	1,92	0,9987	2,40	0,999980

Таблиця 6

Значення функції $P(n;k;p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

		p						
n	*k*	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
	0	0,34868	0,10737	0,02825	0,00605	0,00098	10	
	1	,38742	,26844	,12106	,04031	,00977	9	
	2	,19371	,30199	,23347	,12093	,04395	8	
	3	,05740	,20133	,26683	,21499	,11719	7	
	4	,01116	,08808	,20012	,25082	,20508	6	
10	5	0,00149	0,02642	0,10292	0,20066	0,24609	5	10
	6	,00014	,00551	,03676	,11148	,20508	4	
	7	,00001	.00079	,00900	,04247	,11719	3	
	8		,00007	,00145	,01062	,04395	2	
	9			,00014	,00157	,00977	1	
	10			,00001	,00010	,00098	0	
	0	0,20589	0,03518	0,00475	0,00047	0,00003	15	
	1	,34315	,13194	,03052	,00470	,00046	14	
	2	,26690	,23090	,09156	,02194	,00320	13	
	3	,12851	,25014	,17004	,06339	,01389	12	
	4	,04284	,18760	,21862	,12678	,04166	11	
	5	0,01047	0,10318	0,20613	0,18594	0,09164	10	
	6	,00194	,04299	,14724	,20660	,15274	9	
15	7	,00028	,01382	,08113	,17708	,19638	8	15
	8	,00003	,00345	,03477	,11806	,19638	7	
	9		,00067	,01159	,06121	,15274	6	
	10		0,00010	0,00298	0,02449	0,09164	5	
	11		,00001	.00058	,00742	,04166	4	
	12			,00008	,00165	,01389	3	
	13			,00001	,00025	,00320	2	
	14				,00002	,00046	1	
	15					,00003	0	
	0	0,12158	0,01153	0,00080	0,00004		20	
	1	,27017	,05765	,00684	,00049	,00002	19	
	2	,28518	,13691	,02785	,00309	,00018	18	
	3	,19012	,20536	,07160	,01235	,00109	17	
	4	,08978	,21820	,13042	,03499	,00462	16	
	5	0,03192	0,17456	0,17886	0,07465	0,01479	15	
	6	,00887	,10910	,19164	,12441	,03696	14	
	7	,00197	,05455	,16426	,16588	,07393	13	
	8	,00036	,02216	,11440	,17971	,12013	12	
	9	,00005	,00739	,06537	,15974	,16018	11	
20	10	0,00001	0,00203	0,03082	0,11714	0,17620	10	20
	11		,00046	,01201	,07099	,16018	9	
	12		,00009	,00386	,03550	,12013	8	
	13		,00001	,00102	,01456	,07393	7	
	14			,00022	,00485	,03696	6	
	15			0,00004	0,00129	0,01479	5	
	16			,00001	,00027	,00462	4	
	17				,00004	,00109	3	

n	*k*	***p*** 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
20	18					,00018	2	
	19					,00002	1	
	20						0	
25	0	0,07179	0,00378	0,00013				25
	1	,19942	,02361	,00144	,00005			24
	2	,26589	,07084	,00739	,00038	,00001		23
	3	,22650	,13577	,02428	,00194	,00007		22
	4	,13842	,18668	,05723	,00710	,00038		21
	5	0,06459	0,19602	0,10302	0,01989	0,00158		20
	6	,02392	,16335	,14717	,04420	,00528		19
	7	,00722	,11084	,17119	,07999	,01433		18
	8	,00180	,06235	,16508	,11998	,03223		17
	9	,00038	,02944	,13364	,15109	,06089		16
	10	0,00007	0,01178	0,09164	0,16116	0,09742		15
	11	,00001	,00401	,05355	,14651	,13284		14
	12		,00117	,02678	,11395	,15498		13
	13		,00029	,01148	,07597	,15498		12
	14		,00006	,00422	,04341	,13284		11
	15		0,00001	0,00132	0,02122	0,09742		10
	16			,00035	,00884	,06089		9
	17			,00008	,00312	,03223		8
	18			,00002	,00092	,01433		7
	19				,00023	,00528		6
	20				0,00005	0,00158		5
	21				,00001	,00038		4
	22					,00007		3
	23					,00001		2