

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

СКАСКІВ ОЛЕГ

Методичні вказівки до практичних занять

31.01.2023

Вправи до розділу 1

Комплексні числа, області, криві, стереографічна проекція

1.1. Знайти дійсну та уявну частину наступних комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{1}{1-i}; \quad \text{б) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3; \quad \text{в) } \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; \quad \text{г) } \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2.$$

Розв'язування вправи г). Враховуючи, що $i^2 = -1$, а $i^4 = 1$, маємо

$$z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2 = \left(\frac{2 + i}{1 - i}\right)^2 = \frac{4i + 3}{-2i} = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 3/2$.

1.2. Довести рівності

$$\text{а) } |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \text{б) } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{в) } \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2;$$

$$\text{г) } \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2; \quad \text{д) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; \quad \text{е) } \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

Розв'язування вправи в). Нехай $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$, $j = 1, 2$. Тоді

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)\} = \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи означення аргумента, дістаємо потрібну рівність.

1.3. Знайти модулі та аргументи наступних комплексних чисел:

$$\text{а) } -\pi; \quad \text{б) } i\pi; \quad \text{в) } 1 + i^{123}; \quad \text{г) } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{д) } \frac{1-i}{1+i};$$

$$\text{е) } (-4 + 3i)^3; \quad \text{є) } -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}; \quad \text{ж) } 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$$

Розв'язування вправи є). Позначимо $z_1 = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$. Тоді

$$z_1 = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7},$$

тобто $|z_1| = 1$ і $\arg z_1 = \frac{6\pi}{7}$.

Розв'язування вправи ж). Позначимо $z_2 = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$. Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(1 + \cos \frac{\pi}{7})^2 + (\sin \frac{\pi}{7})^2} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{7}} = 2 \cos \frac{\pi}{14}.$$

Для знаходження аргумента зауважимо, що z_2 є сумою двох векторів $a = 1$ та $b = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ і, оскільки $|a| = |b| = 1$ і z_2 зображається

діагоналлю ромба, побудованого на векторах a і b , то $\arg z_2 = \frac{1}{2} \arg b = \frac{\pi}{14}$.

1.4. Дати геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівності

а) $\operatorname{Re} z > 0$; в) $\operatorname{Im} z \leq 1$; в) $\operatorname{Re} z < 1$; г) $|\operatorname{Im} z| < 1, 0 < \operatorname{Re} z < 1$;

д) $|z| \leq 1$; е) $|z - i| > 1$; є) $0 < |z + 1| < 2$; ж) $1 < |z - 1| < 3$;

з) $0 < \arg z < \pi/4$; і) $|\pi - \arg z| < \pi/4$.

Розв'язування вправи ж). Зауважимо, що $|z - z_0|$ означає відстань між точками z і z_0 . Тому умова ж) описує кільце з центром у точці $z_0 = 1$ і радіусами $r_1 = 1$ та $r_2 = 3$.

1.5. Вказати, які лінії описані наступними рівняннями

$$\text{а) } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (a > 0); \quad \text{б) } \operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0; \quad \text{в) } \operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0.$$

Розв'язування вправи б). Оскільки

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = \operatorname{Re} \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \operatorname{Re} \frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},$$

то шуканою лінією є коло $\{z : |z| = 1\}$ без точки $z = -1$.

1.6. Нехай z_1 і z_2 — фіксовані точки. Описати геометрично множину точок z , що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} \text{а) } |z - z_1| &= |z - z_2|; & \text{б) } |z - 1| &= |\operatorname{Re} z|; \\ \text{в) } |z - z_1| + |z - z_2| &= 2a, & a > |z_1 - z_2|/2. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи б). Нехай $z = x + iy$. Тоді $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x|$, звідки $y^2 = 2x - 1$, тобто маємо параболу.

Розв'язування вправи в). Ця умова задає геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок z_1 і z_2 є величина стала, а це є означення еліпса.

1.7. З'ясувати, які криві визначаються наступними параметричними рівняннями

$$\text{а) } z = a + t(b - a), t \in [0, 1]; \quad \text{б) } z = t + it^2, t \in [0, +\infty);$$

$$\text{в) } z = Re^{it}, t \in [0, \pi]; \quad \text{г) } z = t + i/t, t \in [1, +\infty);$$

$$\text{д) } z = 1 + e^{-it}, t \in [0, 2\pi]; \quad \text{е) } z = 2e^{it} - 1, t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{є) } z = \begin{cases} e^{i\pi t}, & t \in [0, 1], \\ t - 2, & t \in [1, 3]. \end{cases}$$

Розв'язування вправи г). Задане параметричне рівняння можна записати у вигляді $x = t$, $y = 1/t$, $t \in [1, +\infty)$, тобто $y = 1/x$, $x \in [1, +\infty)$, а це — частина вітки гіперболи.

1.8. Описати за допомогою нерівностей область D , якщо її край ∂D складається з однієї замкненої кривої, що визначається рівнянням

$$\text{а) } z = a + re^{-it}, 0 < t < 2\pi; \quad \text{б) } z = a + re^{it}, 0 < t < 2\pi;$$

$$\text{в) } z = it, \quad -\infty < t < +\infty; \quad \text{г) } z = t + it^2, \quad -\infty < t < +\infty;$$

$$\text{д) } z = t^2, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $|z - a| = r$ і $0 < t < 2\pi$, то умова а) задає повне коло, яке обходиться за годинниковою стрілкою. Тому шуканою областю є зовнішність цього кола, тобто $D = \{z : |z - a| > r\}$.

1.9. Нехай $M(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ — точка на сфері Рімана, що відповідає точці $z = x + iy$ з комплексної площини, тобто стереографічна проекція точки z , а $k(z_1, z_2)$ — хордальна відстань між точками z_1 і z_2 , тобто просторова відстань між точками $M(z_1)$ і $M(z_2)$. Довести наступні рівності

$$\text{а) } \xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2};$$

$$\text{б) } x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta\zeta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\eta}{1 - \zeta};$$

$$\text{в) } k(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \quad (z_j \neq \infty);$$

$$\text{г) } k(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Доведення рівностей а). Запишемо рівняння променя, що проходить через полюс сфери Рімана $(0,0,1)$ і точку $(x, y, 0)$ на комплексній площині

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t \quad (t \geq 0).$$

Підставляючи ці значення у рівняння сфери Рімана $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4$, маємо $t^2|z|^2 + (1/2 - t)^2 = 1/4$, тобто $t^2(|z|^2 + 1) - t = 0$, звідки $t = 1/(1 + |z|^2)$. Нарешті, підставляючи це значення t у рівняння променя, отримуємо рівності а).

1.10. Прийmemo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Довести рівності

$$\text{а) } e^{i0} = 1; \quad \text{б) } e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \quad \text{в) } 1/e^{i\theta} = e^{-i\theta};$$

$$\text{г) } (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\text{д) } \sum_{j=1}^n \sin(j\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad (\theta \neq 2\pi k);$$

$$\text{е) } \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(j\theta) = \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)} \quad (\theta \neq 2\pi k).$$

Доведення рівностей д). Використовуючи формулу для суми геометричної прогресії, маємо

$$\sum_{j=1}^n e^{ji\theta} = -\frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sin(j\theta) &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(e^{(n+1)i\theta} - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^2} \right) = \\ &= -\frac{\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta) - \sin\theta}{2 - 2\cos\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

1.11. Нехай Φ — опукла неспадна на $[0, +\infty)$ функція. Довести, що

$$\Phi \left(\frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi(|z_j|).$$

Комплексні послідовності та ряди

1.12. При яких значеннях $z \in \mathbb{C}$ збіжні вказані послідовності

$$\text{а) } (z^n); \quad \text{б) } (z^n/n); \quad \text{в) } (nz^n); \quad \text{г) } (1 + z^2 + \dots + z^n);$$

$$\text{д) } \left(\frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} \right); \quad \text{е) } \left(\frac{z^n}{1 + z^n} \right).$$

Розв'язування вправи е). Якщо $|z| < 1$, то $|z|^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) і тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n / (1 + z^n) = 0.$$

Якщо ж $|z| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n / (1 + z^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 / (1 + 1/z^n) = 1$.

Нехай, нарешті, $|z| = 1$ і $z^n \neq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Запишемо $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{z^n}{1 + z^n} &= \frac{e^{in\theta}}{1 + e^{in\theta}} = \frac{e^{in\theta}(1 + e^{-in\theta})}{(1 + e^{in\theta})(1 + e^{-in\theta})} = \\ &= \frac{1 + e^{in\theta}}{2(1 + \cos n\theta)} = \frac{1}{2} + i \frac{\sin n\theta}{2(1 + \cos n\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{n\theta}{2}, \end{aligned}$$

і нам залишилось дослідити збіжність послідовності $(\operatorname{tg}(n\theta/2))$.

Припустимо, що існує скінченна границя $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(n\theta/2)$. Тоді

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{tg}(n\theta/4)}{1 - \operatorname{tg}^2(n\theta/4)} = \frac{2A}{1 - A^2}.$$

А це можливо тільки, коли $A = 0$. Звідси, використовуючи тотожність

$$\operatorname{tg}((n+1)\theta/2) = \frac{\operatorname{tg}(n\theta/2) + \operatorname{tg}(\theta/2)}{1 - \operatorname{tg}(n\theta/2)\operatorname{tg}(\theta/2)},$$

дістаємо рівність $\operatorname{tg}(\theta/2) = 0$, тобто $\theta = 0$. Отже, якщо $|z| = 1$, то наша послідовність збіжна тільки в точці $z = 1$.

1.13. Довести збіжність наступних послідовностей

а) $\left(\frac{z^n}{1+z^{2n}} \right), |z| < 1;$ б) $\left(\frac{z^n}{1+z^{2n}} \right), |z| > 1;$

в) $\left(\frac{1}{n} (1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}) \right), \theta \in (0, 2\pi);$

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (1 - e^{i\theta} + e^{2i\theta} - \dots + (-1)^n e^{in\theta}) \right), \theta \in (-\pi, \pi);$

д) $\left(\frac{1}{n+1} (n+1 + nz + (n-1)z^2 + \dots + z^n) \right), |z| \leq 1, z \neq 1.$

Доведення збіжності послідовності в). Позначимо її через (a_n) . Тоді, використовуючи формулу для суми членів геометричної прогресії, при

$n \rightarrow \infty$ маємо

$$a_n = \frac{1}{n} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}, \quad |a_n| = \frac{1}{n} \frac{1 + \cos(n+1)\theta}{1 - \cos \theta} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

тобто $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

1.14. Знайти всі значення параметрів α і θ , при яких збіжні вказані ряди

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{\pi i n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in\theta}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)^{-\alpha} (e^{\pi i n} - 1);$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln(n^2 + 1))^{\alpha}}{n}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-in\alpha}.$$

Розв'язування вправи б). Нам, фактично, треба дослідити збіжність рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos n\theta, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin n\theta.$$

Якщо $\alpha > 1$, то обидва ці ряди збіжні абсолютно. Якщо $\alpha \leq 0$, то перший з цих рядів розбіжний для всіх θ , а другий розбіжний для всіх $\theta \neq 0$, тобто наш ряд розбіжний.

Залишилося розглянути випадок, коли $0 < \alpha \leq 1$. У цьому випадку $n^{-\alpha} \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), і, якщо $\theta \neq 2\pi k$, то

$$\sum_{n=1}^N \cos n\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)},$$

$$\sum_{n=1}^N \sin n\theta = \frac{\sin((N+1)\theta/2) \sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

тобто ці суми обмежені. Тому за ознакою Діріхле при $\theta \neq 2\pi k$ і $0 < \alpha \leq 1$ наш ряд збіжний. Зауважимо, що якщо $\theta = 2\pi k$ і $0 < \alpha \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos n\theta$ розбіжний.

1.15. Довести, що з будь-якої послідовності комплексних чисел можна вибрати збіжну в $\overline{\mathbb{C}}$ підпослідовність.

1.16. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$ і $z \in \mathbb{C}$. Довести, що

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n = e^{i\theta}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

1.17. Довести збіжність рядів

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i\sqrt{2}n}}{\ln(n+1)} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\mu_n},$$

де (μ_n) — додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність. А яке k ї

1.18. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} k(z_n, A) = 0$, де $k(z_n, A)$ — хордальна відстань (див. 1.9).

Доведення. Маємо (див. 1.9)

$$k(z_n, A) = \frac{|z_n - A|}{\sqrt{1 + |z_n|^2} \sqrt{1 + |A|^2}} \quad (A \neq \infty)$$

і

$$k(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}}.$$

З останньої рівності видно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k(z_n, \infty) = 0.$$

Далі, оскільки $k(z_n, A) \leq |z_n - A|$, то із рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ випливає рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} k(z_n, A) = 0$ при $A \neq \infty$.

Навпаки, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} k(z_n, A) = 0$, але $z_n \not\rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, то існує така послідовність (n_j) , що $(z_{n_j}) \rightarrow \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} k(z_{n_j}, A) &\geq \frac{1}{2} |z_{n_j} - A| \frac{1}{\sqrt{1 + |A|^2}} \frac{1}{|z_{n_j}|} \geq \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{1 + |A|^2}} \frac{|z_{n_j}| - |A|}{|z_{n_j}|} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1 + |A|^2}} > 0 \quad (n_j \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

що неможливо.

Функції комплексної змінної

1.19. Знайти границі (якщо вони існують)

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{z - i}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - 2i}{z + i}; \quad \text{в) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z - 2i}; \\ \text{г) } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}; \quad \text{д) } \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + 2i \right); \quad \text{е) } \lim_{z \rightarrow 1-i} \bar{z}; \\ \text{є) } \lim_{z \rightarrow -1} \arg z; \quad \text{ж) } \lim_{z \rightarrow 0} z/\bar{z}; \quad \text{з) } \lim_{z \rightarrow 0} (x^2/y); \quad (z = x + iy). \end{aligned}$$

Розв'язування вправи е).

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} \bar{z} = \lim_{\bar{z} \rightarrow 1+i} z = 1 + i.$$

1.20. Функції $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}$ і $g(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ неперервні в кожній точці $z \neq 0$. Чи можна їх доозначити так, щоб вони були неперервними і в точці $z = 0$?

1.21. З'ясувати, чи функція $f_1(z) = \exp(-1/|z|)$ ($z \neq 0$), $f(0) = 0$, є рівномірно неперервною в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, а функції

$$f_2(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}, \quad f_3(z) = \frac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{z^2}, \quad f_4(z) = \exp(-1/z^2), \quad f_5(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

в $\{z : 0 < |z| < 1\} = \mathbb{D} \setminus \{0\} := \mathbb{D}^*$.

Дослідження функції f_1 . Визначимо функцію

$$f_1^*(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \mathbb{D}, \\ e^{-1}, & |z| = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція $f_1^*(z)$ є неперервною на $\overline{\mathbb{D}}$, бо $f_1^*(z) = e^{-1}$ при $|z| = 1$, а $\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = 0$. Тоді за теоремою Кантора, функція $f_1^*(z)$ є рівномірно неперервною на $\overline{\mathbb{D}}$, звідки

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_{f_1^*}(\delta, \overline{\mathbb{D}}) = 0.$$

Залишається зауважити, що $\omega_{f_1^*}(\delta, \overline{\mathbb{D}}) = \omega_f(\delta, \mathbb{D})$.

Дослідження функції f_2 . Зауважимо, що $f_2(kx + ix) \rightarrow \frac{1}{k+i}$ при $x \rightarrow 0$, тому, при $x \rightarrow 0$

$$f_2(k_1x + ix) - f_2(k_2x + ix) = \frac{1}{k_1 + i} - \frac{1}{k_2 + i} + o(1) = \frac{k_2 - k_1}{(k_1 + i)(k_2 + i)} + o(1).$$

Але тоді, для $z_j = k_jx + ix$ при фіксованих $k_1 \neq k_2$ для всіх x таких, що $|z_1 - z_2| < \delta$, маємо

$$\omega_{f_2}(\delta, \mathbb{D}^*) \geq |f_2(z_2) - f_2(z_1)| \rightarrow \frac{|k_2 - k_1|}{|(k_1 + i)(k_2 + i)|} \neq 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Отже, функція f_2 не є рівномірно неперервною на $\mathbb{D}^*$.

1.22. Довести, що функції

$$\text{a) } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0; \quad \text{б) } f(z) = \exp(|z|);$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{e^z - 1}; \quad \text{г) } f(z) = \frac{1}{z}.$$

є неперервними в сферичній метриці $k(z, w)$ в розширеній комплексній площині.

Доведення неперервності функції $f(z) = \frac{1}{z}$. Нам треба довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує δ таке, що з нерівності $k(z, z_0) < \delta$ випливає нерівність $k(1/z, 1/z_0) < \varepsilon$.

Припустимо спочатку, що $z_0 \neq 0, \neq \infty$. Тоді, якщо $z \neq 0$, то

$$k(1/z, 1/z_0) = \frac{|1/z - 1/z_0||z||z_0|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z_0|^2}} = k(z, z_0),$$

і нам досить взяти $\varepsilon = \delta$.

Якщо $z_0 = 0$, то $f(z_0) = \infty$ і при $z \neq 0$

$$k(1/z, 1/z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + |1/z|^2}} = \frac{|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = k(z, z_0),$$

і знову досить взяти $\varepsilon = \delta$.

Нарешті, якщо $z_0 = \infty$, то $f(z_0) = 0$ і

$$k(1/z, 1/z_0) = \frac{|1/z|}{\sqrt{1 + |1/z|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} = k(z, \infty),$$

тобто, як і вище, досить взяти $\varepsilon = \delta$.

1.23. Нехай функції f і g неперервні у сферичній метриці. Чи є неперервними у сферичній метриці функції $f + g$, fg , f/g ?

Моногенність та аналітичність. Умови Коші-Рімана

1.24. Знайти всі точки моногенності наступних функцій ($z = x + iy$)

а) $f(z) = \operatorname{Re} z$; б) $f(z) = z \operatorname{Re} z$; в) $f(z) = |z|$; г) $f(z) = x^2 y^2$;

д) $f(z) = x^2 + i(x^2 + y^2)$; е) $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$.

Розв'язування вправи д). Оскільки функції $u = x^2$, $v = x^2 + y^2$ диференційовані у всій площині, то нам залишається перевірка умов Коші-Рімана. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,$$

і умови Коші-Рімана виконуються тільки в точці $z = 0$. Отже, наша функція моногенна тільки в точці $z = 0$.

1.25. Показати, що для функції $f(z) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy$, в точці $z = 0$ умови Коші-Рімана виконуються, але функція f не є моногенною в цій точці.

Справді,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0,$$

тобто умови Коші-Рімана виконуються. Але неважко показати, що функція $u(x, y) = \sqrt[3]{yx}$ не є диференційованою в точці $(0,0)$.

1.26. Для $z = x + iy$ і функції f означимо формальні похідні за допомогою формул

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Довести наступні рівності

$$\text{а) } \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0; \quad \text{б) } \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1; \quad \text{в) } \frac{\partial z^2}{\partial \bar{z}} = 0; \quad \text{г) } \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0; \quad \text{д) } \frac{\partial z}{\partial z} = 1;$$

$$\text{е) } \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = g \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}; \quad \text{є) } \frac{\partial(fg)}{\partial z} = g \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Доведення рівності а).

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + i \frac{\partial y}{\partial x} + i \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 0.$$

1.27. Довести, що умови Коші-Рімана можна записати у вигляді $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

1.28. Довести, що в полярній системі координат $z = re^{i\theta}$ умови Коші-Рімана можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

1.29. Нехай функція $f = u + iv$ моногенна в $\mathbb{C}$ і $u = v^2$. Довести, що $f \equiv \text{const}$.

1.30. Нехай функція f моногенна в області G і $f'(z) \equiv 0$. Довести, що $f \equiv \text{const}$.

1.31. Дослідити на аналітичність наступні функції

$$\text{а) } f(z) = |z|^2 + 2z; \quad \text{б) } f(z) = |z| + z;$$

$$\text{в) } f(z) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right); \quad (z = x + iy).$$

Розв'язування вправи б). Оскільки $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + iy$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

і умови Коші-Рімана набувають вигляду

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Звідси неважко побачити, що задана функція не є аналітичною в жодній точці з $\mathbb{C}$.

1.32. Довести, що якщо всі корені многочлена P , $\deg P \geq 2$, лежать у півплощині $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, то всі корені многочлена P' лежать у цій же півплощині.

1.33. Навести приклад неоднолистої в області G функції f , для якої $f'(z) \neq 0$ в жодній точці з G .

1.34. Обчислити $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ для наступних функцій

$$\text{а) } f(z) = |z|^p, \quad p \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } f(z) = \exp\{p|z|^2\}, \quad p \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } f(z) = \ln |z - 1|; \quad \text{г) } f(z) = \ln(1 + |z|^2).$$

Розв'язування вправи б). Запишемо $f(z) = \exp\{pz\bar{z}\}$. Тоді

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = (p + p^2 z \bar{z}) \exp\{pz\bar{z}\} = p(1 + p|z|^2) \exp\{p|z|^2\}.$$

Геометричний зміст модуля та аргумента похідної

1.35. Лінійне відображення $w = Az + B\bar{z} + C$ називається головною лінійною частиною відображення $w = f(z)$ в точці z_0 , якщо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - (Az + B\bar{z} + C)}{z - z_0} \right| = 0.$$

Знайти головну лінійну частину наступних відображень (у вказаній точці z_0)

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; б) $w = |z|^2$, $z_0 = i$; в) $w = (z - 1)/(z + 1)$, $z_0 = 2$;

г) $w = e^z$, $z_0 = \pi i$; д) $w = 1/\bar{z}$, $z_0 = -i$; е) $w = \bar{z}^2$, $z_0 = 1$.

Розв'язування вправи е). Оскільки $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$, то, якщо $z = x$, маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - (Az + B\bar{z} + C)}{z - z_0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - (A + B)x - C}{x - 1} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)^2 - (A + B - 2)(x - 1) - (A + B + C) + 1}{x - 1} \right|, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $A + B - 2 = 0$ і $A + B + C - 1 = 0$. А якщо $z = 1 + iy$, то

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - (Az + B\bar{z} + C)}{z - z_0} \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{1 - y^2 - 2iy - (A + B + C) - (A - B)iy}{y} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} |-y - (2 + A - B)i|, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $A - B + 2 = 0$. З отриманої системи рівнянь для A, B, C дістаємо $A = 0, B = 2, C = -1$, а отже, шукана головна лінійна частина є $w = 2\bar{z} - 1$.

1.36. Нехай Γ — гладка крива, а $w = f(z) = u + iv$ і функції u, v мають неперервні часткові похідні в околі $[\Gamma]$. Коефіцієнтом лінійного розтягу кривої $[\Gamma]$ в точці $z_0 \in [\Gamma]$ будемо називати величину

$$k = k(z_0) = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0, z \in [\Gamma]} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|.$$

Припустимо, що $[\Gamma] = \{z : \arg(z - z_0) = \beta\}$. Знайти коефіцієнт лінійного розтягу k і кут повороту α променя $[\Gamma]$ у вказаній точці z_0 при наступних відображеннях

$$\text{а) } w = z^2, z_0 = 1; \quad \text{б) } w = ie^{2z}, z_0 = 0; \quad \text{в) } w = 2z + i\bar{z}, z_0 = 0;$$

$$\text{г) } w = \frac{z - z_0}{z + z_0}, z_0 \neq 0; \quad \text{д) } w = \frac{1 - iz}{1 + iz}, z_0 = -i; \quad \text{е) } w = \bar{z}^2, z_0 = i.$$

Розв'язування вправи е). За означенням

$$\begin{aligned} k &= \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|f(re^{i\beta} + z_0) - f(z_0)|}{r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{|(i + re^{i\beta})^2 - i^2|}{r} = \\ &= \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} |2e^{-i\beta} - re^{-2i\beta}| = 2. \end{aligned}$$

Нехай $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Для інших β міркування подібні. Оскільки для функції $g(z) = z^2$ виконується $g'(i) = 2i$, то функція g відображає промінь Γ у криву, дотична до якої в точці $w = -1$ утворює з додатним напрямом дійсної осі кут $\beta + \pi/2$. Але $f = \bar{g}$. Тому функція f відображає промінь Γ у криву, дотична до якої в точці $w = -1$ утворює з додатним напрямом дійсної осі кут $3\pi/2 - \beta$. Отже, $\alpha = 3\pi/2 - 2\beta$.

1.37. Для наступних відображень вказати множину M тих значень z , в яких коефіцієнт лінійного розтягу $k = 1$, і множину Q таких значень z , в яких кут повороту $\alpha = 0$,

$$\begin{array}{llll} \text{а) } w = z^2; & \text{б) } w = z^3; & \text{в) } w = z^2 - 2z; & \text{г) } w = 2z - z^2; & \text{д) } w = 1/z; \\ \text{е) } w = iz^2; & \text{є) } w = -z^3 & \text{ж) } w = i/z; & \text{з) } w = (1 + iz)/(1 - iz). \end{array}$$

Розв'язування вправи з). Оскільки при $z \neq -i$ функція аналітична, то $k = |w'(z)|$ для кожної точки $z \neq -i$. Але $w'(z) = 2i/(1 - iz)^2$. Тому M є множиною таких значень z , для яких $|1 - iz|^2 = 2$, тобто $M = \{z : |1 - iz| = \sqrt{2}\} = \{z : |z + i| = \sqrt{2}\}$. Далі, якщо $z \neq -i$, то кут повороту $\alpha = \arg w'(z) = \arg \frac{-2i(\bar{z} - i)^2}{|z + i|^4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{(1 - i)(\bar{z} - i)}{|z + i|^2} \right)^2 = 0$.

Залишилось зауважити, що $\arg(w^2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\arg w = 0$ або $\arg w = -\pi$, тобто $\operatorname{Im} w = 0$, $w \neq 0$. Отже, $M = \{z : \operatorname{Im} (1 - i)(\bar{z} - i) = 0, z \neq -i\}$.

1.38. Нехай функція f аналітична в точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, а k та α — відповідно коефіцієнт лінійного розтягу і кут повороту променя $\{z : \arg(z - z_0) = \beta\}$ в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Довести, що $k = |f'(z_0)|$ і $\alpha = -2\beta - \arg f'(z_0) + 2\pi n$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$.

1.39. Довести, якщо відображення $w = f(z) = u + iv$ області D з неперервними частинними похідними функцій u і v має в кожній точці з D сталий лінійний розтяг і властивість консерватизму кутів, то f є аналітичною функцією, отже, відображення конформне.

Розв'язування вправи 1.39. Позначимо через F, E, G коефіцієнти першої квадратичної форми відображення $w = f(z)$, тобто $E = u_x^2 + v_x^2$, $F = u_x u_y + v_x v_y$, $G = u_y^2 + v_y^2$. Ортогональні прямі внаслідок консерватизму кутів переходять в ортогональні криві, тому

$$F = u_x u_y + v_x v_y = 0. \quad (9.1)$$

На підставі того, що відображення має сталий лінійний розтяг, вираз $|dw|^2/|dz|^2 = E(dx)^2/|dz|^2 + G(dy)^2/|dz|^2$ не залежить від $\frac{dy}{dx}$, тобто $E = G \neq 0$ і, отже,

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 \neq 0. \quad (9.2)$$

Нехай $J = u_x v_y - u_y v_x$ — яacobіан відображення. Оскільки $|J|^2 = |dw|^2/|dz|^2 = E > 0$ і наявна властивість консерватизму кутів, то $J > 0$. Далі з (9.2) видно, що принаймні одна з частинних похідних u_y і v_y не дорівнює нулю. Нехай $u_y \neq 0$; тоді з (9.1) $u_x = -v_x v_y / u_y$. Підставляючи це в (9.2), маємо $(v_x^2 - u_y^2)(v_y^2 + u_y^2) = 0$. Вираз у другій дужці дорівнює $G \neq 0$, тому $v_x = u_y$ або $v_x = -u_y$. Розглянемо перший випадок. З (9.1) випливає, що $u_x = -v_y$ і, отже $J = -u_x^2 - u_y^2 < 0$, що неможливо. Залишається можливість $v_x = -u_y$ і внаслідок (10.1) $u_x = v_y$. Отже, функції u і v задовольняють умови Коші-Рімана і функція f аналітична в області D . Зрозуміло, що $f' = u_x + iv_x = u_x - iv_y$. Отже, відображення конформне.

Вправи до розділу 2

Ціла лінійна функція

2.1. Знайти образи круга $\{z : |z - 1| < 2\}$ при відображеннях

$$\text{а) } w = 1 - 2iz; \quad \text{б) } w = i + 3z; \quad \text{в) } w = iz + i + 1; \quad \text{г) } w = (1 + i)z + 1.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $-i = e^{-i\pi/2}$, то відображення $w = 1 - 2iz$ означає розтяг у 2 рази, поворот на кут $-\pi/2$ і зсув вправо на одиницю (див. рис. 10.1).

Отже, образом заданого круга є круг $\{w : |w - 1 + 2i| < 4\}$.

Степенева функція з натуральним показником

2.2. Знайти образи вказаних кривих при відображенні $w = z^2$:

$$\text{а) } \{z : \arg z = \alpha\}, \quad -\pi < \alpha < \pi; \quad \text{б) } \{z : |z| = R, |\arg z| \leq \pi/4\};$$

$$\text{в) } \{z : \operatorname{Re} z = a\}, \quad a > 0; \quad \text{г) } \{z : \operatorname{Im} z = a\}, \quad a > 0;$$

$$\text{д) } \{z = x + iy : x + y = 1\}; \quad \text{е) } \{z = x + iy : x - y = 1\};$$

Розв'язування вправи б). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Криву $\{z : |z| = R, |\arg z| \leq \pi/4\}$ можна записати у вигляді $\{z : r = R, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\}$. За формулами переходу для відображення $w = z^2$ маємо $\rho = r^2$, $\varphi = 2\theta$. Тому образом нашої кривої буде крива $\{w : \rho = R^2, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\} = \{w : |w| = R^2, |\arg w| \leq \pi/2\}$.

Розв'язування вправи д). Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді для функції $w = z^2$ маємо $u + iv = x^2 + 2ixy - y^2$, тобто, крім вказаних вище формул переходу, справедливі також наступні формули переходу $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Криву $\{z = x + iy : x + y = 1\}$ можна записати у вигляді $\{z = x + iy : x = t, y = 1 - t (t \in \mathbb{R})\}$. Тому її образом є парабола $\{w = u + iv : u = 2t - 1, v = 2t(1 - t) (t \in \mathbb{R})\} = \{w = u + iv : v = \frac{1}{2}(1 - u^2)\}$.

2.3. Знайти образи вказаних областей при відображенні $w = z^2$:

- а) $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$; б) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; в) $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$;
- г) $\{z : \operatorname{Im} z < -1\}$; д) $\{z : \pi < \arg_0 z < 3\pi/2\}$;
- е) $\{z : |z| < 1, 5\pi/4 < \arg_0 z < 3\pi/2\}$;
- є) $\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}$; ж) $\{z : |z| > 1/2, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Розв'язування вправи в). Спочатку дослідимо, яким є образ краю $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ нашої області при даному відображенні. Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Пряму $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ можна записати у вигляді $\{z : x = 1\}$. Використовуючи формули переходу $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, бачимо, що образом цієї прямої є парабола $\{w = u + iv : u = 1 - y^2, v = 2y (y \in \mathbb{R})\} = \{w = u + iv : u = 1 - \frac{1}{4}v^2\}$.

Оскільки точка $z = 2$ переходить у точку $w = 4$, то образом області $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ є область $\{w = u + iv : u \geq 1 - \frac{1}{4}v^2\}$.

Розв'язування вправи є). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Тоді область $\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}$ запишеться у вигляді $\{z : r < 2, 0 < \theta < \pi/2\}$. Використовуючи формули переходу $\rho = r^2$, $\varphi = 2\theta$, бачимо, що образом цієї області є $\{w : \rho < 4, 0 < \varphi < \pi\} = \{w : |w| < 4, 0 < \arg w < \pi\}$.

2.4. Знайти образи заданих множин E при вказаних відображеннях:

а) $E = \{z : |z| = 2, \pi/8 < \arg z < \pi/4\}$, $w = z^4$, $w = z^5$;

б) $E = \{z : \arg z = \pi/4\}$, $w = z^3$, $w = z^4$;

в) $E = \{z : |\arg z| < \pi/8, z \notin [0, 1]\}$, $w = z^4$, $w = z^8$.

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Тоді для функції $w = z^4$ формули переходу мають вигляд $\rho = r^4$, $\varphi = 4\theta$, а для функції $w = z^8$ — вигляд $\rho = r^8$, $\varphi = 8\theta$. Тому образом області $\{z : |\arg z| < \pi/8\}$ при першому відображенні є область $\{w : |\arg w| < \pi/2\}$ (див. рис. 10.3), а при другому — область $\{w : |\arg w| < \pi\}$ (див. рис. 10.4). Відрізок $[0, 1]$ в обох випадках переходить у відрізок $[0, 1]$.

Функція Жуковського

2.5. Знайти образи вказаних множин при відображенні функцією Жуковського $J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$:

- а) $\{z : \arg z = \alpha\}$; б) $\left\{z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{6}\right\}$;
- в) $\left\{z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, z \notin [0, i]\right\}$; г) $\{z : |z| < 1, z \notin [0, 1]\}$;
- д) $\{z : |z| > 1, z \notin [-2, -1], z \notin [1, +\infty)\}$;
- е) $\left\{z : \left|\arg z + \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4}\right\}$; є) $\left\{z : |z| > 2, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$;
- ж) $\left\{z : |z| = r, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$;
- з) $\{z : |z| > 1, z \notin [-2, -1], z \notin [1, +\infty)\}$;
- й) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z : |z| = 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$;
- і) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0, z \notin [-i, -i/2]\}$;
- ії) $\{z : |z| < 1, z \notin [0, 1]\}$.

Розв'язування вправи а). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$. Тоді використовуючи формули переходу

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta,$$

при фіксованому $\theta = \alpha$ маємо

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1,$$

і образ належить тій вітці гіперболи, вершина якої знаходиться в точці $(\cos \alpha, 0)$.

Нехай $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тоді $\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} x$ і, оскільки при зміні параметра r в інтервалах $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ величина $(r - 1/r)$ змінюється, відповідно, в інтервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, то образом променя в цьому

випадку є права вітка гіперболи. Узгоджені напрями обходів для $\alpha \in (0, \pi/2)$ зображені на рис. 10.5.

Для $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ напрями обходів протилежні. Аналогічно досліджується випадок, коли $\cos \alpha < 0$.

Розв'язування вправи в). Знайдемо образ краю області. Нехай $w = u + iv$, $z = re^{i\theta}$. Використовуючи формули переходу, як при розв'язуванні вправи а), бачимо, що промінь $\theta = \pi/4$ переходить у вітку гіперболи

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{2}/2)^2} = 1.$$

Оскільки $\cos \pi/4 > 0$ і $\sin \pi/4 > 0$, то $u > 0$ і образом променя $\{z : \arg z = \pi/4\}$ є права вітка гіперболи.

Аналогічно можна показати, що промінь $\{z : \arg z = 3\pi/4\}$ переходить у ліву вітку параболи (див. рис. 10.6). Ясно, що $J(2i) = 3i/4$. Тому за принципом збереження області область $\{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$ переходить в область, яка обмежена вітками гіперболи і містить точку $z = 3i/4$. Подивимось, у що переходить відрізок $[0, i]$. Тут $0 < r < 1$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тому $u = 0$ і $v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$, $0 < r < 1$. Тому відрізок $[0, i]$ переходить у промінь $[-\infty i, 0]$ (див. рис. 10.6).

Показникова функція

2.6. Знайти образ областей D при вказаних відображеннях:

а) $D = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = e^z$; б) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$, $w = e^z$;

в) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $w = e^z$; г) $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$, $w = 2e^{iz}$;

д) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^z$;

е) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^{2z}$;

є) $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = e^{iz}$.

Розв'язування вправи д). Нехай $z = x + iy$ і $w = \varrho e^{i\theta}$. Запишемо формули переходу $\varrho = e^x$, $\theta = y$. Оскільки $D = \{z : x > 0, 0 < y < \pi\}$, то образом D є $D' = \{w : \varrho > 1, 0 < \theta < 2\pi\}$.

Тригонометричні та гіперболічні функції

2.7. Використовуючи означення тригонометричних функцій, довести наступні рівності:

$$\text{а) } \cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \text{б) } \sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z;$$

$$\text{в) } \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w; \quad \text{г) } \sin(z + \pi) = -\sin z;$$

$$\text{д) } \sin(\pi/2 - z) = \cos z; \quad \text{е) } \cos(z + \pi/2) = -\sin z.$$

Розв'язування вправи д).

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - z) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(\pi/2 - z)} - e^{-i(\pi/2 - z)} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\pi/2} e^{-iz} - e^{-i\pi/2} e^{iz} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(ie^{-iz} + ie^{iz} \right) = \cos z. \end{aligned}$$

2.8. Нехай $z = x + iy$. Довести нерівності:

$$\text{а) } \frac{1}{2} \left(e^{|y|} - e^{-|y|} \right) \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2} \left(e^{|y|} + e^{-|y|} \right);$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \left(e^{|y|} - e^{-|y|} \right) \leq |\cos z| \leq \frac{1}{2} \left(e^{|y|} + e^{-|y|} \right).$$

2.9. Знайти всі розв'язки рівнянь:

$$\text{а) } \sin z = 0; \quad \text{б) } \sin z = 4i/3; \quad \text{в) } \sin z = 5/3;$$

$$\text{г) } \cos z = 0; \quad \text{д) } \cos z = 3i/4; \quad \text{е) } \cos z = i\sqrt{3};$$

Розв'язування вправи е). Це рівняння можна записати у вигляді

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2i\sqrt{3}, \text{ або } e^{2iz} - 2i\sqrt{3}e^{iz} = 1, \text{ звідки } e^{iz} = i\sqrt{3} + \sqrt{-4} \text{ і}$$

$$\begin{aligned} z \in -i \operatorname{Ln}(i\sqrt{3} + 2\sqrt{-1}) &= -i \ln |\sqrt{3} \pm 2| + \arg(i(\sqrt{3} \pm 2)) + 2k\pi i = \\ &= -i \ln |\sqrt{3} \pm 2| \pm \pi/2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.10. Вивести формули переходу для тригонометричних та гіперболічних функцій і дослідити образи горизонтальних та вертикальних прямих при відображенні такими функціями.

Розгляд функції $w = \sin z$. Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді

$$u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x,$$

звідки дістаємо формули переходу

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Використовуючи ці формули переходу, бачимо, що образом горизонтальної прямої $\{z = x + iy : y = a = \text{const} \neq 0\}$ є еліпс

$$\frac{u^2}{\text{ch}^2 a} + \frac{v^2}{\text{sh}^2 a} = 1,$$

а образом вертикальної прямої $\{z = x + iy : x = a = \text{const} \neq k\pi/2\}$ є гіпербола

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1.$$

Образом прямої $\{z = x + iy : y = 0\}$ є відрізок $[-1, 1]$ (обходиться двічі), прямої $\{z = x + iy : x = 0\}$ — уявна вісь, прямої $\{z = x + iy : x = \pi/2 + 2k\pi\}$ — додатний промінь, а прямої $\{z = x + iy : x = -\pi/2 + 2k\pi\}$ — від'ємний промінь.

2.11. Знайти образ множини при вказаному відображенні:

$$\text{а) } \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z < 1\}, \quad w = \sin \frac{\pi(2z - 3 - 2i)}{2};$$

$$\text{б) } \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z;$$

$$\text{в) } \{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \sin z;$$

$$\text{г) } \{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z;$$

$$\text{д) } \{z : -\pi < \operatorname{Re} z < 0\}, \quad w = \cos z;$$

$$\text{е) } \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \operatorname{ch} z.$$

Розв'язування вправи е). Оскільки

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = J(e^z),$$

то шуканий образ можна знайти, виконуючи спочатку відображення $\tau = e^z$, а потім $w = J(\tau)$.

Дробово-лінійна функція

2.12. Знайти точку, симетричну відносно кола $\{z : |z| = 1\}$ до заданої точки:

$$\text{а) } z_1 = \frac{1+i}{2}; \quad \text{б) } z_1 = \frac{i}{2}; \quad \text{в) } z_1 = \frac{1}{3} + \frac{i}{4}; \quad \text{г) } z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{4};$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $z_1 = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$, то для шуканої точки маємо $z_2 = |z_2|e^{i\pi/4}$ і $|z_1||z_2| = 1$, тобто $|z_2| = \sqrt{2}$ і $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$.

2.13. Знайти загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

2.14. Знайти загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$.

Розв'язування. Припустимо, що деяка точка $z = \alpha \neq 0$ з круга $\{z : |z| < 1\}$ переходить у точку $w = 0$. Оскільки точка $z = 1/\bar{\alpha}$ є симетричною до точки $z = \alpha$ відносно кола $\{z : |z| = 1\}$, а точка $w = \infty$ є симетричною до точки $w = 0$ відносно кола $\{w : |w| = 1\}$, то точка $z = 1/\bar{\alpha}$ повинна перейти в точку $w = \infty$. Тому шукане дробово-лінійне відображення має вигляд

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - 1/\bar{\alpha}}, \quad k = \text{const},$$

або

$$w = q \frac{z - \alpha}{1 - z\bar{\alpha}}, \quad q = \text{const}.$$

Якщо $|z| = 1$, то $1/z = \bar{z}$ і

$$|1 - z\bar{\alpha}| = |1/z - \bar{\alpha}| = |\bar{z} - \bar{\alpha}| = |z - \alpha|,$$

а оскільки коло $\{z : |z| = 1\}$ переходить у коло $\{w : |w| = 1\}$, то звідси виводимо, що $|q| = 1$, тобто $q = e^{i\psi}$.

Отже, загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$ є

$$w = e^{i\psi} \frac{z - \alpha}{1 - z\bar{\alpha}},$$

де $\psi \in [-\pi, \pi)$ і $|\alpha| < 1$ (при $\alpha = 0$ результат зберігається).

2.15. Знайти образ круга $\{z : |z - 1| < 2\}$ при відображеннях:

$$\text{а) } w = \frac{2iz}{z+3}; \quad \text{б) } w = \frac{z+1}{z-2}; \quad \text{в) } w = \frac{z-1}{2z-6};$$

$$\text{г) } w = \frac{z-3+i}{z+1+i}; \quad \text{д) } w = \frac{z}{z+1}; \quad \text{е) } w = \frac{z+1}{z-3};$$

Розв'язування вправи б). Запишемо

$$w = \frac{z+1}{z-2} = 1 + \frac{3}{z-2}$$

і спочатку здійснимо відображення $w_1 = z - 2$. Дістанемо круг

$$\begin{aligned} \{w_1 : |w_1 + 1| < 2\} &= \{w_1 = x + iy : (x+1)^2 + y^2 < 4\} = \\ &= \{w_1 = x + iy : x^2 + y^2 + 2x - 3 < 0\}. \end{aligned}$$

Образом цього круга при відображенні $w_2 = 1/w_1$ є область

$$\begin{aligned} & \{w_2 = u + iv : -3(u^2 + v^2) + 2u + 1 < 0\} = \\ & = \{w_2 = u + iv : (u - 1/3)^2 + v^2 > 4/9\} = \{w_2 : |w_2 - 1/3| > 2/3\}. \end{aligned}$$

Далі, здійснимо відображення $w_3 = 3w_2$. Отримаємо область $\{w_3 : |w_3 - 1| > 2\}$. і нарешті, при відображенні цієї області функцією $w = w_3 + 1$ дістанемо область $\{w : |w - 2| > 2\}$.

Розв'язування вправи е). Тут ми не будемо використовувати стандартний метод, застосований при розв'язуванні попередньої вправи, а використаємо деякі висновки теорії дробово-лінійних відображень. Оскільки точка $z = 3$ лежить на колі $\{z : |z - 1| = 2\}$ і $w(3) = \infty$, то образом цього кола є пряма, яка проходить через точки $w(-1) = 0$ і $w(1 + 2i) = -i$, тобто уявна вісь. Але $w(0) = -1/3$. Тому за принципом збереження області образом нашого круга є півплощина $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.

2.16. Знайти образ півплощини $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ при відображеннях:

$$\text{а) } w = \frac{z}{z - i + 1}; \quad \text{б) } w = \frac{z}{z - 2}; \quad \text{в) } w = \frac{4z}{z + 1};$$

$$\text{г) } w = \frac{3z - 1}{z - 1}; \quad \text{д) } w = \frac{z}{z + 1}; \quad \text{е) } w = \frac{z + 1}{z - 3};$$

Розв'язування вправи б). Запишемо $w = \frac{z}{z - 2} = 1 + \frac{2}{z - 2}$. При відображенні $w_1 = z - 2$ півплощина $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ переходить у півплощину

$$\{w_1 : \operatorname{Re} w_1 > -1\} = \{w_1 = x + iy : x > -1\},$$

а ця півплощина при відображенні $w_2 = 1/w_1$ переходить в область

$$\{w_2 = u + iv : u^2 + v^2 + u > 0\} = \{w_2 : |w_2 + 1/2| > 1/2\}.$$

Здійснюючи потім відображення $w = 1 + 2w_2$, дістанемо область $\{w : |w| > 1\}$.

2.17. Знайти образи заданих областей при вказаних відображеннях:

а) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1-z}{1+z}$; б) $\{z : |z-i| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1}{z}$;

в) $\{z : 1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{2}{z-1}$; г) $\{z : z \notin [-2, 1]\}$, $w = \frac{z+2}{1-z}$.

Розв'язування вправи г). Оскільки функція $w = \frac{z+2}{1-z}$ є дійсною на дійсній осі, $w(-2) = 0$, $w(0) = 2$ і $w(1) = \infty$, то відрізок $[-2, 1]$ переходить у промінь $[0, +\infty)$, а область $\{z : z \notin [-2, 1]\}$ в область $\{w : w \notin [0, +\infty)\}$.

2.18. Відшукати дробово-лінійну функцію, яка задовольняє умови

а) $w(0) = 4$, $w(2i) = 0$, $w(1+i) = 1+i$;

б) $w(0) = 0$, $w(1+i) = 2+2i$, $w(2i) = 4$;

в) $w(1) = i$, $w(\infty) = 2$, $w(i) = \infty$;

г) $w(i) = 2$, $w(\infty) = 1+i$, $w(-i) = \infty$;

д) $w(i) = 0$, $w(\infty) = 1$, $w(1+i) = 1+i$;

е) $w(i) = -2$, $w(\infty) = 2i$, $w(-i) = 2$.

Розв'язування вправи б). Шукану функцію знаходимо з рівності

$$\frac{w-0}{w-2-2i} \frac{4-2-2i}{4-0} = \frac{z-0}{z-1-i} \frac{2i-1-i}{2i-0}, \text{ звідки } w = \frac{2z}{z-i}.$$

2.19. Відшукати дробово-лінійну функцію $w = w(z)$, яка конформно відображає область G на область D і задовольняє вказані умови:

$$\text{а) } G = \{z : |z| < 1\}, D = \{w : |w| < 1\},$$

$$w(1/2) = 1/2, \arg w'(1/2) = \pi/2;$$

$$\text{б) } G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, D = \{w : \operatorname{Im} w > 0\},$$

$$w(1+i) = i, \arg w'(1+i) = \pi/2;$$

$$\text{в) } G = \{z : |z-2| < 2\}, D = \{w : |w-2i| < 2\},$$

$$w(2) = i, \arg w'(2) = \pi/2.$$

Розв'язування вправи в). За теоремою про дробово-лінійне відображення симетричних точок з умови $w(2) = i$ випливає, що $w(\infty) = -2i$, а оскільки $\arg w'(2) = \pi/2$, то, завдяки консерватизму кутів, промінь $[2, +\infty)$ переходить у промінь $[i, +i\infty)$. Тому точка $z = 4$ перетину променя $[2, +\infty)$ з колом $\{z : |z-2| = 2\}$ переходить у точку $w = 4i$ перетину променя $[i, +i\infty)$ з колом $\{w : |w-2i| < 2\}$. За трьома точками $\{2, 4, \infty\}$ та їх образами $\{i, 4i, -2i\}$ будуємо дробово-лінійну функцію

$$\frac{w-i}{w-4i} \frac{-2i-4i}{-2i-i} = \frac{z-2}{z-4},$$

$$\text{тобто } w = \frac{-2iz}{z-6}.$$

Вправи до розділу 3

Корінь n -го степеня

3.1. Нехай ω — примітивний корінь n -го степеня з 1, тобто $\omega^k \neq 1$ для всіх $k = 1, \dots, n-1$, а ε — будь-який корінь n -го степеня з 1, $\varepsilon \neq 1$. Довести, що:

а) існує таке $k = 1, \dots, n-1$, що $\varepsilon = \omega^k$;

б) $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^m)^k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \text{ не ділиться на } n, \\ n, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n; \end{cases}$ в) $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\varepsilon^k = \frac{n}{\varepsilon-1};$

г) $\sum_{k=0}^{n-1} (k-1)^2 \varepsilon^k = -\frac{n^2(1-\varepsilon) + 2n}{(1-\varepsilon)^2};$

д) $(z - \omega)(z - \omega^2) \dots (z - \omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}.$

Розв'язування вправи в). маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\varepsilon^k = \sum_{m=0}^{n-1} (\varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \dots + \varepsilon^{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^n - \varepsilon^m}{\varepsilon - 1}.$$

Але $\varepsilon^n = 1$. Тому $\sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^m = \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = 0$, і ми отримуємо потрібну рівність.

3.2. знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою

квадратного кореня:

$$\text{а) } G = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, w = \sqrt{z}, w(-1) = -i;$$

$$\text{б) } G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, w = \sqrt{z}, w(1) = 1;$$

$$\text{в) } G = \{z : z \notin [0, +\infty)\}, w = \sqrt{z}, w(-1) = -i;$$

$$\text{г) } G = \{z : z \notin (-\infty, 1]\}, w = \sqrt{z}, w(4) = 2;$$

$$\text{д) } G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \sqrt{z}, w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1+i}{2};$$

$$\text{е) } G = \{z : |z| > 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}, w = \sqrt{z}, w(-1) = i;$$

$$\text{є) } G = \{z = x + iy : y > 0, y^2 > 4x + 4\}, w = \sqrt{z}, w(-1) = i;$$

$$\text{ж) } G = \{z = x + iy : y^2 > 2x + 1\}, w = \sqrt{z}, w(-1) = -i.$$

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $w = \rho e^{i\theta}$. Формули переходу для вітки $w = (\sqrt{z})_k$, $k = 0, 1$, мають наступний вигляд $\rho = \sqrt{r}$, $\theta = (\varphi + 2\pi k)/2$. Вважаючи головним значенням аргументу $\arg_0 z \in [0, 2\pi)$, маємо $\arg_0(-1) = \pi$, $\arg_0(-i) = 3\pi/2$. з умови $w(-1) = -i$ отримуємо $3\pi/2 = (\pi + 2\pi k)/2$, звідки $k = 1$. Тому для даної вітки формули переходу мають вигляд $\rho = \sqrt{r}$, $\theta = (\varphi + 2\pi)/2$, а отже, образом області $G = \{z : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ є область $D = \{w : \rho > 0, \pi < \theta < 2\pi\}$ (див. рис. 11.1).

Розв'язування вправи є) . Як видно з розв'язування вправи в, з умови $w(-1) = i$ тепер впливає, що $k = 0$, тобто $\varrho = \sqrt{r}$, і $\theta = \varphi/2$.

Використовуючи ці формули переходу, легко показати, що промінь $(-\infty, -1]$ переходить у промінь $[i, +i\infty)$.

Рівняння параболи $\{z = x + iy : y > 0, y^2 = 4x + 4\}$ в полярній системі координат має вигляд $r = r(\varphi) = \sin^{-2}(\varphi/2)$, $0 < \varphi \leq \pi$. Тому параметричний запис її образу має вигляд $(w = \sqrt{r(\varphi)}(\cos(\varphi/2) + i \sin(\varphi/2))$, $\varphi \in (0, \pi]$, тобто $(w = \operatorname{ctg}(\varphi/2) + i, \varphi \in (0, \pi])$. А це — промінь $\{w = u + iv : v = i, u \geq 0\}$. Оскільки $w(0) = 0$, то за принципом збереження області образом є область $\{w : \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 1\}$.

Логарифм

3.3. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою многозначної функції $\text{Ln } z$:

$$\text{а) } G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, +\infty]\}, \quad w(-1) = -\pi i;$$

$$\text{б) } G = \{z : \text{Im } z > 0\}, \quad w(i) = \pi i/2;$$

$$\text{в) } G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, 0], z \notin [1, +\infty]\}, \quad w(i) = \pi i/2;$$

$$\text{д) } G = \{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}, \quad w(1 - i0) = -3\pi i/2;$$

$$\text{г) } G = \{z : |z| < 1, z \notin [0, 1)\}, \quad w(i) = i\pi/2.$$

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $w = u + iv$. Формули переходу для вітки $w = (\ln z)_k$ мають вигляд $u = \ln r$, $v = \varphi + 2\pi k$. з умови $w(i) = \pi i/2$ маємо $\pi i/2 = \ln 1 + \pi i/2 + 2\pi ik$, тобто $k = 0$. Отже, наша вітка має вигляд $w = (\ln z)_0 = \ln z$, а формулами переходу є $u = \ln r$, $v = \varphi$. Тому образом області G є область $D = \{w : |\text{Im } w| < \pi, w \notin [0, +\infty]\}$.

Обернена до функції Жуковського. Узагальнена степенева функція

3.4. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою оберненої J^{-1} до функції Жуковського:

а) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1, 1]\}, \quad J^{-1}(0) = -i;$

б) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1, 1]\}, \quad J^{-1}(0) = i;$

в) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, -1], z \notin [1, +\infty]\}, \quad J^{-1}(0) = i;$

д) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, -1], z \notin [1, +\infty]\}, \quad J^{-1}(0) = -i.$

Розв'язування вправи в). Відомо, що функція Жуковського відображає на область G і верхню, і нижню півплощини. Обернена до функції жуковського є двозначною аналітичною функцією. Одна з її віток відображає область G на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, а інша — на нижню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w < 0\}$. за принципом збереження області з умови $J^{-1}(0) = i$ випливає, що шуканим образом є верхня півплощина.

3.5. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою многозначної функції:

а) $G = \{z : |z| < 4, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = z^{-3/2}, \quad w(9) = -1/27;$

б) $G = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = z^{3/2}, \quad w(i/2) = (1 - i)/4.$

Розв'язування вправи а). Потрібну однозначну вітку шукаємо в множині однозначних віток

$$\{\exp\{-3/2(\ln |z| + i\arg z + 2\pi ki)\}\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

з умови $w(9) = -1/27$ маємо $\exp\{-3/2(\ln 9 + 2\pi ki)\} = -1/27$, звідки отримуємо $k = 1$. отже, шуканою віткою є $w = \exp\{-3/2(\ln |z| + i(\arg z + 2\pi))\}$, і якщо $z = re^{i\varphi}$ і $w = \varrho e^{i\theta}$, то формули переходу мають вигляд $\varrho = r^{-3/2}$, $\theta = -3\varphi/2 - 3\pi$.

оскільки область G задається умовами $r > 4$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, то її образ D задається умовами $\varrho < 1/8$, $-2\pi - 7\pi/4 < \theta < -2\pi - \pi/4$, тобто $D = \{w : |w| < 1/8, \pi/4 < \arg_0 w < 7\pi/4\}$.

Вправи на знаходження конформних відображень

3.6. Відшукати функції, які здійснюють конформні відображення вказаних областей на півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

- а) $\{z : \operatorname{Im} z > 0, z \notin [0, ih]\}$, $h > 0$;
- б) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; в) $\{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
- г) $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; д) $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$;
- е) $\mathbb{C} \setminus \{[i + i\infty) \cup (-i\infty, 0]\}$; є) $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;
- ж) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1/2, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [2i/\pi, +i\infty)$;

- з) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [i, +i\infty)$; й) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\} \setminus [0, +\infty)$;
 і) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi, z \notin [-i\infty, 0], z \notin [\pi, +\infty)\}$.

Розв'язування вправи а) . Здійснюючи послідовно відображення

$$w_1 = z^2, w_2 = w_1 + h^2, w_3 = \sqrt{w_2}, \sqrt{-1} = i,$$

приходимо до шуканої функції $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

Розв'язування вправи з) . Нагадаємо, що функція $\sin z$ переводить півсмуку $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхню півплощину. Промінь $\{z = iy : y > \pi/2\}$ при такому відображенні ($\sin iy = i \operatorname{sh} y$) переходить у промінь $\{w = iv : v > \operatorname{sh}(\pi/2)\}$. Отже, здійснюємо спочатку $z_1 = \sin \frac{\pi z}{2} / \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$ А далі здійснюємо відображення у такій послідовності

$$z_2 = z_1^2, \quad z_3 = \frac{1}{z_2}, \quad z_4 = z_3 + 1,$$

$$w = \sqrt{z_4}, \quad \sqrt{-1} = i.$$

Отже, $w = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \pi/2}{\sin^2 \pi z/2} + 1}.$

3.7. Відшукати функції, які здійснюють конформні відображення

вказаних областей на смугу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$:

$$\text{а)} \{z : 0 < \arg z < \pi\alpha\}, \quad 0 < \alpha < 2;$$

$$\text{б)} \{z : |z| > 1, 0 < \arg z < \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 2\pi;$$

$$\text{в)} \{z : 0 < \arg z < 2\alpha\} \setminus \{z = re^{i\alpha} : r \geq 1\};$$

$$\text{г)} \{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < 2\} \setminus \{z = x + i : x \geq 1\}.$$

Розв'язування вправи в). Здійснюючи послідовно відображення $w_1 = z^{\pi/\alpha}$ (вибирається така вітка, що $(e^{i\alpha})^{\pi/\alpha} = -1$), $w_2 = \frac{1}{w_1} + 1$ і

$$w = \frac{1}{2\pi} \ln w_2 \quad (\ln(-1) = i\pi), \text{ приходимо до шуканої функції}$$
$$w = \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{z^{\pi/\alpha}} \right).$$

3.8. Знайти функції, які конформно відображають вказані області на півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

$$\text{а)} \{z : a < \operatorname{Re} z < b, \operatorname{Im} z > c\}; \quad \text{б)} \{z : a < \operatorname{Im} z < b, \operatorname{Im} z < c\};$$

$$\text{в)} \{z : |z + 1| > 1, |z - 2| > 2\}; \quad \text{г)} \{z : |z - 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\};$$

д) $\{z : |z - 1| > 1, |z - 2| < 2\}$; е) $\{z : |z - 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$;

є) $\{z : |z - 1/2| > 1/2, |z - 1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Розв'язування вправи г). Оскільки задана область обмежена колом $\{z : |z - 1| = 1\}$ та прямою $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$, які проходять через початок координат, то доцільно спочатку здійснити відображення $w_1 = 1/z$. Тоді образами цього кола і прямої будуть дві вертикальні прямі, що проходять через точки $w_1 = 0$, $w_1 = 1/2$. Тому, враховуючи консерватизм кутів, легко знаходимо, що образом області $\{z : |z - 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ є смуга $\{w_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < 1/2\}$. А далі застосовуємо відображення $w = \exp\{2\pi i w_1\}$. Отже, шуканою функцією є $w = \exp\{2\pi i/z\}$.

Вправи до розділу 4

Інтегрування функцій дійсної змінної

4.1. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 (1 + it)^2 dt; \quad \text{б) } \int_0^1 (a + (b - a)t)^n dt, (n \in \mathbb{N}); \quad \text{в) } \int_0^\pi e^{-it} dt;$$

$$\Gamma) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt; \quad \Delta) \int_0^1 \frac{dt}{1+it}; \quad \text{е) } \int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt;$$

Розв'язування вправи в).

$$\int_0^{\pi} e^{-it} dt = \int_0^{\pi} \cos t dt - i \int_0^{\pi} \sin t dt = -2i.$$

4.2. Нехай функція φ монотонна і неперервно диференційована на $[a, b]$, а функція $z = z(t)$ неперервна на $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Довести, що

$$\int_a^b z(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} z(t) dt.$$

4.3. Довести нерівності (вважати, що $a < b$):

$$\text{а) } \left| \int_a^b z(t) dt \right| \leq \int_a^b |z(t)| dt; \quad \text{б) } \left| \int_a^b z(t) dt \right| \geq \left| \int_a^b \operatorname{Re} z(t) dt \right|;$$

$$\text{в) } \left| \int_a^b z(t) dt \right| \geq \left| \int_a^b \operatorname{Re} (e^{i\alpha} z(t)) dt \right|.$$

Розв'язування вправи в). Маємо

$$\left| \int_a^b z(t) dt \right| \geq \left| \operatorname{Re} \int_a^b z(t) dt \right| = \left| \int_a^b \operatorname{Re} z(t) dt \right|.$$

Визначений інтеграл. Інтегральні теореми та формули Коші

4.4. Безпосереднім переходом до границі в інтегральній сумі, обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_C dz; \quad \text{б) } \int_C z dz; \quad \text{в) } \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0}, \quad r > 0,$$

де C — довільна гладка крива, що з'єднує точки a і b .

Розв'язування вправи б). Підінтегральна функція є цілою. Тому інтеграл залежить тільки від точок a і b , і ми можемо в ролі C взяти відрізок $[a, b]$. Розіб'ємо його точками $a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ на n рівних частин, а на кожному з відрізків $[z_j, z_{j+1}]$ виберемо точку $\tau_j = (z_j + z_{j+1})/2$. Для

цього розбиття утворимо інтегральну суму

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \sum_{j=0}^n f(\tau_j) \Delta z_j = \sum_{j=0}^n \frac{z_j + z_{j+1}}{2} (z_{j+1} - z_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (z_{j+1}^2 - z_j^2) = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.\end{aligned}$$

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = (b^2 - a^2)/2$, а оскільки інтеграл $\int_C z dz$ існує, то він дорівнює $(b^2 - a^2)/2$.

4.5. Обчислити інтеграли, перейшовши до параметричних рівнянь контурів інтегрування:

а) $\int_C |z| dz$, $(C = [-i, i] \quad \text{і} \quad C = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\})$;

б) $\int_C z \sin z dz$, $(C = [-1, 1] \quad \text{і} \quad C = [0, 2 + 2i])$;

в) $\int_{|z|=1} |z - 1| dz$; г) $\int_C (z + \operatorname{Re} z) dz$, $(C = [1, 1 + i])$.

Розв'язування вправи г). Оскільки $C = (z = 1 + it, 0 \leq t \leq 1)$, то

$$\int_C (z + \operatorname{Re} z) dz = \int_0^1 (1 + it + 1) i dt = i \int_0^1 (2 + it) dt = i(2 + i/2) = 2i - 1/2.$$

4.6. Нехай функція f аналітична в обмеженій опуклій області G та $\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ для всіх $z \in G$. Довести що для будь-яких точок $z_1 \in G$ і $z_2 \in G$

$$\left| \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|.$$

Розв'язування. Перейдемо до параметричного зображення відрізка

$z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$. Тоді, $\int_{[z_1, z_2]} f(z) dz = (z_2 - z_1) \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt$,

а також

$$\begin{aligned} \left| \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz \right| &= |z_2 - z_1| \left| \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt \right| \geq \\ &\geq |z_2 - z_1| \int_0^1 \operatorname{Re} f(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt. \end{aligned}$$

Далі зрозуміло.

4.7. Використовуючи інтегральні теореми та формули Коші, обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_{|z-3|=2} \frac{zdz}{z^4 - 16}; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}; \quad \text{в) } \int_{|z|=4} \frac{\cos zdz}{(z-i)^3}; \quad \text{г) } \int_{|z|=9} \frac{\sin zdz}{z^2 - \pi^2};$$

$$\text{д) } \int_{\partial G} \frac{e^z dz}{(z-2)^2}, \quad (G = \{z : |z| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z| < 4\});$$

$$\text{е) } \int_{\partial G} \frac{dz}{(1+z)(1-z)^2}, \quad (G = \{z : |z-1| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z+1| < 1\});$$

$$\text{є) } \int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)(z+3)^3}, \quad (G = \{z : |z| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z-1| < 7\}).$$

Розв'язування вправи є). В замкненому крузі $\overline{G} = \{z : |z| \leq 1\}$ підінтегральна функція аналітична. Тому за інтегральною теоремою Коші в цьому випадку наш інтеграл дорівнює нулю.

Щоб обчислити наш інтеграл у випадку, коли $G = \{z : |z-1| < 7\}$, запишемо

$$\frac{1}{(z-2)(z+3)^3} = \frac{1}{125} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{z^2 + 11z + 49}{(z+3)^3} \right),$$

звідки, використовуючи інтегральні формули Коші, маємо

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)(z+3)^3} &= \frac{1}{125} \left(\int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)} - \int_{\partial G} \frac{z^2 + 11z + 49}{(z+3)^3} dz \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{125} \left(1 - (z^2 + 11z + 49)''|_{z=-3} \right) = \frac{2\pi i}{125} (1 - 2) = -\frac{2\pi i}{125}.\end{aligned}$$

4.8. Нехай функція f аналітична в $\{z : |z - a| < R\}$ і неперервна в $\{z : |z - a| \leq R\}$. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta = f(a).$$

Вказівка. У інтегральній формулі Коші перейти до параметричного рівняння кола.

4.9. Нехай функція f аналітична в $\{z : |z - a| \leq R\}$. Довести, що для всіх z , $|z| < R$,

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq \frac{MR}{(R - |z|)^{n+1}}, \quad M = \max\{|f(z)| : |z| = R\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вказівка. Використати інтегральну формулу Коші для n -ої похідної.

4.10. Довести, що у вказаних областях не мають (однозначної) первісної такі функції:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \quad (0 < |z| < 1); \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{1+z^2} \quad (1 < |z| < +\infty);$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} \quad (0 < |z| < 1); \quad \text{г) } f(z) = \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

Розв'язування вправи г). Оскільки необхідною і достатньою умовою існування первісної для неперервної в області G функції f є рівність нулю інтеграла від f вздовж будь-якої замкненої кривої з цієї області, а

$$\int_{|z|=r>0} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i \neq 0,$$

то функція $f(z) = 1/z$ не має первісної у вказаній області.

4.11. За вказаними функціями відновити аналітичні функції:

$$\text{а) } \operatorname{Re} f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} f = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 0;$$

$$\text{в) } \operatorname{Im} f = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{г) } \operatorname{Re} f = xy; \text{ д) } \operatorname{Re} f = x^2 - y^2 + xy;$$

$$\text{е) } \operatorname{Re} f = r\theta \cos \theta + r \ln r \sin \theta, \quad z = re^{i\theta};$$

$$\text{є) } |f| = (x^2 + y^2)e^x; \quad \text{ж) } |f| = \exp\{r^2 \cos\} 2\theta, \quad z = re^{i\theta};$$

$$\text{з) } \arg f = xy; \quad \text{и) } \arg f = \theta + r \sin \theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Розв'язування вправи а). Легко перевірити, що функція $u = \operatorname{Re} f$ є гармонійною в $\mathbb{C}$ і, отже, є дійсною частиною аналітичної функції, уявна частина якої шукається у вигляді

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C,$$

де $C = v(0, 0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$. інтегруючи вздовж ламаної з вершинами в точках $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) , знаходимо

$$v(x, y) = - \int_0^x 6x^2 dx + \int_0^y (3x^2 + 12xy - 3y^2) dy = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3.$$

Отже, $f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(-2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3)$.

4.12. Знайти всі гармонійні функції, які мають вигляд:

$$\text{а) } u = \varphi(x^2 + y^2); \text{ б) } u = \varphi(x^2 - y^2); \text{ в) } u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right); \text{ г) } u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

Розв'язування вправи г). Вважаємо, що функція φ двічі неперервно диференційована на $(-\infty, +\infty)$. Оскільки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \frac{y^2}{x^4} + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x^2},$$

то умова гармонійності набуде вигляду

$$\frac{1}{x^4} \left(\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) (x^2 + y^2) + 2xy\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \right) = 0,$$

тобто (при $y = tx$)

$$\varphi''(t)(1 + t^2) + 2t\varphi'(t) = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, послідовно маємо

$$\ln \varphi'(t) = -\ln(1 + t^2) + \ln C_1, \quad C_1 = \text{const},$$

$$\varphi(t) = C_1 \arctg t + C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Отже,

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2 = C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2.$$

4.13. Знайти всі такі аналітичні функції $f = u + iv$, для яких $u^2 + v^2 \equiv \alpha(x)$, тобто залежить тільки від x .

4.14. Чи існують аналітичні функції $f = u + iv$, для яких:

$$\text{а) } u = x^2 - y; \quad \text{б) } u = x^2 - y^2; \quad \text{в) } u = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \text{г) } u = \frac{x}{y^2}.$$

Вказівка. Перевірити, чи вказані функції гармонійні.

4.15. Нехай функція f аналітична в області G і не набуває там нульового значення. Довести, що для всіх $z \in G$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln |f(x + iy)| = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(x + iy)| > 0.$$

Вправи до розділу 5

Рівномірна збіжність

5.1. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ рівномірно збіжний на множині E , а визначені на E функції v_n задовольняють умови $|v_n(z)| \leq |u_n(z)|$. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(z)|$.

5.2. Довести, що наступні ряди є рівномірно збіжними на вказаних множинах:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 z^{2n}}$, $E = \{z : |z| \geq 1\}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n + z^{-n}}$, $E = \{z : |z| \leq \rho < \frac{1}{2}\}$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}$, $E = \{z : \operatorname{Re} z \geq \delta > 0\}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, $E = \{z : \operatorname{Re} z \geq \delta > 1\}$

Розв'язування вправи г). Оскільки

$$|n^{-z}| = n^{-\operatorname{Re} z} \leq n^{-\delta}, \quad \delta > 1,$$

то за ознакою Веєрштраса із очевидної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta}$ випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$.

5.3. Нехай послідовність (s_n) аналітичних в області G функцій збіжна рівномірно на кожному компактi з G до функції f . Довести, що функція f аналітична в області G .

Доведення. Прийmemo $f_1 = s_1$, $f_n = s_n - s_{n-1}$ ($n > 1$). Тоді функції f_n аналітичні в області G , а (s_n) є послідовністю часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Цей ряд рівномірно збіжний на кожному компактi з G до функції f . Тому за теоремою Веєрштраса функція f аналітична в G .

Степеневі ряди

5.4. Знайти множину збіжності степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}, \alpha > 0; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} [\ln(n+2)]^k z^n; \\ \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^2} (z-3)^n. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи д). За формулою Коші-Адамара маємо

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{|1+2i|^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Отже, ряд збіжний у крузі $\{z : |z-3| < 1/\sqrt{5}\}$ і розбіжний в $\{z : |z-3| > 1/\sqrt{5}\}$. На колі $\{z : |z-3| = 1/\sqrt{5}\}$ маємо

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^2} (z-3)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+2i)^n}{n^2 (\sqrt{5})^n} (z-3)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Отже, наш ряд збіжний в замкненому крузі $\{z : |z-3| \leq 1/\sqrt{5}\}$.

5.5. Безпосереднім обчисленням $f^{(n)}(0)$ довести наступні справедливі для всіх z формули:

$$\begin{aligned} \text{а) } e^{az} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n; & \text{б) } \sin az &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \\ \text{в) } \cos az &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}; & \text{г) } \operatorname{sh} az &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \end{aligned}$$

Розв'язування вправи г). Оскільки справедливі рівності $(\operatorname{sh} az)^{(2n)} = a^{2n} \operatorname{sh} az$, $(\operatorname{sh} az)^{(2n+1)} = a^{2n+1} \operatorname{ch} az$, то в точці $z = 0$ маємо

$$(\operatorname{sh} az)^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2n, \\ a^{2n+1}, & \text{якщо } k = 2n+1. \end{cases}$$

Тому за теоремою Тейлора одержуємо

$$\operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty.$$

5.6. Використовуючи рівність $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, справедливу при $|z| < 1$, довести формули:

$$\text{а)} \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\text{б)} \frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\text{в)} \frac{z^2}{z^2 + b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^{-2n} z^{2n}, \quad |z| < |b|;$$

$$\text{г)} \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n, \quad |z| < |b|;$$

$$\text{д)} \frac{1}{z^2 - b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n-1)} z^{2n}, \quad |z| < |b|;$$

$$\text{е)} \frac{1}{(z-b)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{-2} b^{-n-2} z^n, \quad |z| < |b|.$$

Розв'язування вправи б). Зауважимо, що

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Тому, диференціюючи почленно, маємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+z)^3} &= \left(\frac{1}{1+z} \right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n \end{aligned}$$

Розв'язування вправи в). У вказаній області виконується $|z/b| < 1$.

Тому маємо

$$\frac{z^2}{z^2 + b^2} = \frac{z^2}{b^2} \frac{1}{1 + (z/b)^2} = \frac{z^2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z/b)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b^{-2n} z^{2n}.$$

5.7. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ функції:

$$\text{а) } \frac{2}{(z+1)^4}; \quad \text{б) } \frac{z+1}{z^2+a^2} \ (a \neq 0); \quad \text{в) } \frac{z}{(z^2+1)(z^2-1)};$$

$$\text{г) } \frac{1}{1+z+z^2}; \quad \text{д) } \cos^3 z; \quad \text{е) } e^z \sin z; \quad \text{ж) } \cos z \operatorname{ch} z;$$

Розв'язування вправи е).

$$\begin{aligned} e^z \sin z &= \frac{1}{2i} e^z (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z} = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n!} z^n = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \frac{e^{ni\pi/4} - e^{-ni\pi/4}}{n!} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{4} z^n. \end{aligned}$$

Ряди Лорана

5.8. Знайти множини збіжності наступних рядів Лорана:

$$\text{а)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2} z^n; \quad \text{б)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} (z+1)^n; \quad \text{в)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+1};$$

$$\text{г)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n z^n; \quad \text{д)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{4^n+1}; \quad \text{е)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^{4n}}{n^4+1}.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки

$$R_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_{-n}|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^{-n^2}\right)^{1/n} = 0$$

та

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^{n^2}\right)^{1/n} = +\infty,$$

то множиною збіжності нашого ряду є область $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$.

5.9. Розвинути в ряд Лорана функцію f за степенями $(z - a)$ в кільці D (точка a та кільце D вказані в дужках):

$$\text{а)} \frac{1}{(1+z)(z-2)} \quad (a=0, D=\{z: 1 < |z| < 2\});$$

$$\text{б)} \frac{1+z^4}{(z-1)(z+2)} \quad (a=0, D=\{z: 1 < |z| < 2\});$$

$$\text{в)} \frac{1}{z(z-3)^2} \quad (a=1, D=\{z: 1 < |z-1| < 2\});$$

$$\text{г)} \frac{1}{z^2(z^2-9)} \quad (a=1, D=\{z: 1 < |z-1| < 2\});$$

$$\text{д)} z^3 e^{1/z} \quad (a=0, D=\{z: 0 < |z| < \infty\});$$

$$\text{е)} z \sin \frac{1}{1-z} \quad (a=1, D=\{z: 0 < |z-1| < \infty\});$$

$$\text{є)} z^2 \exp \left\{ \frac{1}{1-z} \right\} \quad (a=1, D=\{z: 0 < |z-1| < \infty\}).$$

Розв'язування вправи в). Розкладаючи на прості дробі і використовуючи розвинення в степеневий ряд функції $\frac{1}{1-z}$, маємо

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-3)^2} &= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} - \frac{3}{(z-3)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{z-1+1} + \frac{1}{z-1-2} - \frac{3}{(z-1-2)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{z-1} \frac{1}{1+1/(z-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-(z-1)/2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-(z-1)/2)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(z-1)^n}{2^n} \right) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{9} (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n.
 \end{aligned}$$

Розв'язування вправи д). Використовуючи рівність $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$, маємо

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^3 \frac{z^n}{(3-n)!}.$$

Розв'язування вправи є). Зауважимо, що

$$z^2 = ((z-1) + 1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1. \text{ Тому,}$$

$$\begin{aligned} z^2 \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\} &= (z-1)^2 \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\} + (z-1) \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\} + \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\} = \\ &= (z-1)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n n!} + 2(z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n n!} = \\ &= (z-1)^2 + (z-1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n (n+2)!} + \\ &\quad + 2(z-1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n (n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n n!} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \right) + \frac{5}{2} + 3(z-1) + (z-1)^2. \end{aligned}$$

Вправи до розділу 6

Нулі аналітичних функцій. Теорема єдиності

6.1. Знайти всі нулі вказаних аналітичних функцій та встановити їх порядки:

$$\text{а) } f(z) = \frac{\sin^3 z}{z^2}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{(1+z^2)^2}{1-z^2}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{1}{z^2} \exp\left\{\frac{1}{z+1}\right\};$$

$$\text{г) } f(z) = \cos z \operatorname{ch} z; \quad \text{ä) } f(z) = \sin 3z - 3\sin z; \quad \text{е) } f(z) = z \operatorname{tg}^2 z.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $\sin z$ має в точці $z = 0$ нуль першого порядку, то $\sin z = z \varphi(z)$, $\varphi(0) \neq 0$. Тому

$$f(z) = \frac{\sin^3 z}{z^2} = \frac{z^3 \varphi^3(z)}{z^2} = z \varphi^3(z),$$

тобто f має в $z = 0$ нуль першого порядку.

Решта нулів $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, функції $\sin z$ є нулями функції f першого порядку.

Розв'язування вправи в). Оскільки функція $\exp\{\frac{1}{z+1}\}$ в точці $z = \infty$ набуває значення 1, то функція $f(z) = \frac{1}{z^2} \exp\{\frac{1}{z+1}\}$ має в точці $z = \infty$ нуль другого порядку.

6.2. Чи існує аналітична в крузі $\{z : |z| < 1\}$ функція f , яка задовольняє для всіх $n \in \mathbb{N}$ одну з наступних умов:

$$\text{а) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{n\pi}{2}; \quad \text{б) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos n\pi; \quad \text{в) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos n\pi};$$

$$\text{г) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}; \quad \text{ä) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2};$$

$$\text{е) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $f\left(\frac{1}{2k}\right) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, то $f \equiv 0$. Але $f\left(\frac{1}{2k+1}\right) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тому така функція не існує.

Розв'язування вправи г). Оскільки $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$,
 $n \in \mathbb{N}$, то такою є функція $f(z) = \frac{z}{z+2}$.

6.3. Використовуючи теорему єдиності, довести рівність

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z.$$

6.4. Нехай область G містить точку $z = \infty$, а функція f періодична та аналітична в G . Довести, що $f \equiv \text{const}$ в G .

Ізольовані особливі точки однозначного характеру

6.5. Довести, що точка $z = a$ є усувною особливою точкою для вказаних функцій:

$$\text{а) } \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \quad (a = \infty); \quad \text{б) } \frac{\operatorname{tg} z}{z}, \quad (a = 0); \quad \text{в) } \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z - \pi/2)^2} \quad (a = \frac{\pi}{2});$$

$$\text{г) } \frac{1 - \cos(z - 1)}{(z - 1)^2} \quad (a = 1); \quad \text{д) } \frac{z^3 - 1}{(z - 1)^3}, \quad (a = \infty); \quad \text{е) } \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \quad (a = 0).$$

Розв'язування вправи а). Точка $z = \infty$ є усувною, бо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/z^2}{1 + 1/z^2} = 1.$$

Розв'язування вправи е). Точка $z = 0$ є усувною, бо

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} z - 1/z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(1 - z^2/2 + o(z^2)) - (z - z^3/6 + o(z^3))}{z(z - z^3/6 + o(z^3))} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(-\frac{z}{3} + o(z) \right) = 0. \end{aligned}$$

6.6. Довести, що точка $z = a$ є полюсом для вказаних функцій і встановити його порядок:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \frac{z^2 + 1}{z + 1} \quad (a = \infty); \quad \text{б)} \quad \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \quad (a = i); \quad \text{в)} \quad \frac{z}{(e^z - 1)^2} \quad (a = 0); \\ \text{г)} \quad \frac{z}{e^z + 1} \quad (a = i\pi); \quad \text{д)} \quad \frac{\sin z}{(z - 1)^2} \quad (z = 1); \quad \text{е)} \quad \frac{\sin z}{z^3} \quad (z = 0). \end{aligned}$$

Розв'язування вправи а). Оскільки

$$\frac{z^2 + 1}{z + 1} = z \frac{1 + 1/z^2}{1 + 1/z},$$

то за теоремою про канонічне зображення точка $a = \infty$ є полюсом першого порядку.

Розв'язування вправи б). Оскільки

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^2} = \frac{1}{(z + i)^2} \frac{1}{(z - i)^2},$$

то точка $z = i$ є полюсом другого порядку (за теоремою про канонічне зображення функції в околі її полюса).

6.7 Довести, що точка $z = a$ є істотно особливою точкою для вказаних функцій:

$$\text{а) } e^{z^2} \quad (a = \infty); \quad \text{б) } \sin \frac{\pi}{z^2} \quad (a = 0); \quad \text{в) } \sin(e^z) \quad (a = \infty);$$

$$\text{г) } z^2 \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) \quad (a = 0); \quad \text{д) } \exp\{\operatorname{tg} z\} \quad (a = \pi/2); \quad \text{е) } \cos\left(\frac{z}{z+1}\right) \quad (a = -1).$$

Розв'язування вправи б). Оскільки $e^{z^2} \rightarrow +\infty$ при $z = x \rightarrow +\infty$ та $e^{z^2} \rightarrow 0$ при $z = iy, y \rightarrow +\infty$, то точка $a = \infty$ є істотно особливою.

Розв'язування вправи б). Покладемо $z_n = 1/\sqrt{n}$ і $w_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{z_n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{w_n^2} = 1.$$

Тому точка $z = 0$ є істотно особливою точкою.

6.8. Знайти всі ізольовані особливі точки наступних функцій та вказати їх характер:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{z}{\sin z}; \quad \text{б)} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}; \quad \text{в)} z^2 \sin \frac{z}{z+1}; \quad \text{г)} \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z+1}; \\ \text{д)} z \left(e^{1/z} - 1 \right); \quad \text{е)} \frac{1 - e^z}{1 + e^z}; \quad \text{є)} \frac{z^2}{z^4 + 1}; \quad \text{ж)} \frac{z^3}{z^2 - 1} \cos \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи г). Скінченними особливими точками даної функції є $z = 1$ і $z = -1$. Запишемо функцію у вигляді

$$\frac{1}{z^2 - 1} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{z+1} \right) = -\frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{z^2 - 1} \sin \frac{\pi}{2} \frac{z-1}{z+1}.$$

Але

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z-1} \sin \frac{\pi}{2} \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{8}.$$

Тому точка $z = 1$ є усовною особливою точкою.

Щоб визначити характер точки $z = -1$, розвинемо функцію

$\frac{1}{z+1} \cos \frac{\pi z}{z+1}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{z+1} \cos \frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{z+1} \cos \frac{\pi}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(z+1)^{2n+1} (2n)!}.$$

Звідси випливає, що у головній частині ряду Лорана за степенями $(z+1)$ є нескінченно багато членів, а отже, точка $z = -1$ є істотно особливою для функції $\frac{1}{z+1} \cos \frac{\pi z}{z+1}$. Оскільки $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$, то ця ж точка є істотно особливою і для заданої функції.

Нарешті,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi}{z+1} = 0$$

тобто точка $z = \infty$ є усовною особливою точкою.

Розв'язування вправи д). Особливими є тільки точки $z = 0$ і $z = \infty$.

Розвинемо функцію в кільці $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ в ряд Лорана

$$z \left(e^{1/z} - 1 \right) = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots - 1 \right) = 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots$$

Якщо цей ряд розглядати як ряд Лорана в околі точки $z = \infty$, то в його головній частині нема членів, і тому $z = \infty$ є усувною особливою точкою. А якщо його розглядати як ряд Лорана в околі точки $z = 0$, то в його головній частині є нескінченно багато членів, і тому $z = 0$ є істотно особливою точкою.

Прицип максимуму

6.9. Лема Шварца. Нехай аналітична в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f така, що $f(0) = 0$ і $|f(z)| \leq M < +\infty$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Тоді $|f(z)| \leq M|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Якщо, крім того, $|f(z_0)| = M|z_0|$ для деякого $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, то $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доведення. Прийmemo $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$. Оскільки $f(0) = 0$, то функція φ аналітична в $\mathbb{D}$ і $|\varphi(z)| \leq M/|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Нехай $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$, $0 \leq r < 1$. За принципом максимуму модуля функція $M_\varphi(r)$ є неспадною на $[0, 1)$. З іншого боку, $M_\varphi(r) \leq M/r$ для всіх $r \in [0, 1)$. Звідси випливає, що $M_\varphi(r) \leq M$ для всіх $r \in [0, 1)$, а отже, $|\varphi(z)| \leq M$ для всіх $z \in \mathbb{D}$, тобто $|f(z)| \leq M|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Припустимо, що $|f(z_0)| = M|z_0|$ в точці $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$. Функція φ аналітична в деякому околі точки z_0 і, якщо б вона не була сталою, то існувала б така точка $z \in \mathbb{D}$, що $|\varphi(z)| > M$, що неможливо. Отже, $|\varphi(z)| \equiv M$ і $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

6.10. Нехай функція f аналітична в $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}$ і $|f(z)| > m > 0$ для всіх $z \in \partial\overline{\mathbb{D}}$. Довести, що якщо $|f(0)| < m$, то функція f має в $\mathbb{D}$ принаймні один нуль.

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Тоді функція $\psi(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в $z \in \overline{\mathbb{D}}$, і за принципом максимуму модуля $|\psi|$ досягає свого максимуму на колі $\partial\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| = 1\}$. Тому $|f|$ досягає свого мінімуму на $\partial\overline{\mathbb{D}}$, а за умовою

$$m < \min\{|f(z)| : |z| = 1\} = \min\{|f(z)| : |z| \leq 1\},$$

що суперечить нерівності $|f(0)| < m$.

6.11. Нехай аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f така, що $f(0) = 0$ і $|f(z)| \leq M < +\infty$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Тоді $|f'(0)| \leq M$, причому знак рівності досягається, якщо $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

6.12. Нехай функція f аналітична в $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}$, $|f(z)| \leq M$ для всіх $z \in \partial\overline{\mathbb{D}}$ і $f(a) = 0$, $|a| < 1$. Довести, що $|f(z)| \leq M \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}$ для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

6.13. Довести, що гармонійна в області $G \subset \mathbb{C}$ функція $u \neq \text{const}$ не набуває в G свого максимуму і мінімуму.

6.14. Нехай функція f аналітична в області G і $\inf\{|f(z)| : z \in \partial G\} > m > 0$. Довести, що тоді або $|f(z)| > m$ для всіх $z \in G$, або $f(z) = me^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Вправи до розділу 7

Обчислення лишків. Основна теорема про лишки

7.1. Обчислити

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}; \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=\infty} e^{1/z}; \quad \text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{\pi}{z}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2};$$

$$\text{д) } \operatorname{res}_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1}; \quad \text{е) } \operatorname{res}_{z=1} z \exp \left\{ \frac{1}{z-1} \right\}; \quad \text{є) } \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^4+1}{z^6+1}; \quad \text{ж) } \operatorname{res}_{z=\pi n} \operatorname{tg} z \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Розв'язування вправи б). Розвинемо функцію $f(z) = e^{1/z}$ в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$. Маємо

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

Звідси

$$\operatorname{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -a_{-1} = -1.$$

Розв'язування вправи г). Точка $z = 1$ є полюсом другого порядку заданої

функції. Тому

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} (e^z)' = e.$$

Розв'язування вправи є). Точка $z = \infty$ є нулем другого порядку заданої функції. Тому

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^4 + 1}{z^6 + 1} = 0.$$

7.2. Знайти лишки вказаних функцій в усіх їх скінченних особливих точках:

$$\text{а)} \frac{1}{z + z^3}; \quad \text{б)} \frac{z^2}{1 + z^4}; \quad \text{в)} \frac{z^2}{(1 + z)^3}; \quad \text{г)} \frac{1}{(z^2 + 1)^3};$$

$$\text{д)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}; \quad \text{е)} \frac{z^{2n}}{(z - 1)^n} \ (n \in \mathbb{N}); \quad \text{є)} \frac{\cos z}{z - \pi/4}; \quad \text{ж)} \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}};$$

$$\text{з)} \frac{1}{e^z + 1}; \quad \text{й)} \frac{1}{\sin \pi z}; \quad \text{і)} \frac{\cos^2(\pi/z)}{z + 1}; \quad \text{ї)} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z^2 + 4)}.$$

Розв'язування вправи д). Вказана функція має скінченні особливі точки $z = 1, z = i, z = -i$. Точки $z = i$ та $z = -i$ є полюсами першого порядку.

Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} \Big|_{z=i} = \frac{1}{4}; \\ \operatorname{res}_{z=-i} f(z) &= \frac{1}{(z-i)(z-1)^2} \Big|_{z=-i} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Точка $z = 1$ є полюсом другого порядку, і тому

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)' \Big|_{z=1} = - \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Розв'язування вправи й). Особливими точками є полюси першого порядку $z_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, а

$$\operatorname{res}_{z=n} \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi \cos \pi n} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

Розв'язування вправи ї). Оскільки задана функція є парною, то

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z^2 + 4)} = \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z^2 + 4)} = 0.$$

Далі,

$$\operatorname{res}_{z=2i} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z + 2i)} = -\frac{1023}{256} i,$$

$$\operatorname{res}_{z=-2i} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^{10} + 1}{z^6(z - 2i)} = \frac{1023}{256} i.$$

7.3 Обчислити інтеграли

$$\text{а)} \int_{\partial D} \frac{dz}{1 + z^4} \quad (D = \{z : |z - 1| < 1\});$$

$$\text{б)} \int_{\partial D} \frac{dz}{(z - 1)^2(z^2 + 1)} \quad (D = \{z : |z - 1 - i| < 2\});$$

$$\text{в)} \int_{\partial D} \frac{dz}{z^{10} - 2} \quad (D = \{z : |z| < 2\}); \quad \text{г)} \int_{\partial D} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1} \quad (D = \{z : |z| < 2\});$$

$$\text{е)} \int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2 - 1)(z - 3)^3} \quad (D = \{z : 2 < |z - 1| < 4\});$$

$$\epsilon) \int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)} \quad (D = \{z : |z - 1| < 2\});$$

$$\text{ж) } \int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)} \quad (D = \{z : |z - 1| < 3\});$$

$$\text{з) } \int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz \quad (D = \{z : |z| > 3\}).$$

Розв'язування вправи б). В області D містяться дві особливі точки підінтегральної функції: $z = 1$ (полюс другого порядку) і $z = i$ (полюс першого порядку). За основною теоремою про лишки маємо

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=1} f(z) \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи в). Підінтегральна функція має особливі точки $z = 0$ і $z_k = (\sqrt[10]{z})_k, k = 0, 1, \dots, 9$, і всі вони містяться в області D . Тому наш

інтеграл дорівнює лишкові в точці $z = \infty$, взятому зі знаком мінус. Але в цій точці підінтегральна функція має нуль 13-го порядку, і тому інтеграл дорівнює 0.

Застосування теорії лишків

7.4. Обчислити інтеграли:

$$\text{а)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta}; \quad \text{б)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 12 \sin \theta};$$

$$\text{в)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{7 + 6 \cos \theta}; \quad \text{г)} \int_0^{\pi/2} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \quad (a > 0).$$

Розв'язування вправи а). Приймемо $z = e^{i\theta}$. Тоді $d\theta = \frac{dz}{iz}$,

$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ і ми отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta} &= \frac{2}{3i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 10z/3 + 1} = \\ &= \frac{4\pi}{3} \operatorname{res}_{z=-1/3} \frac{1}{(z+3)(z+1/3)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7.5. Обчислити інтеграли

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; & \text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}; & \text{в)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 + 10x^2 + 9}; \\ \text{г)} \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1}; & \text{д)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}; & \text{е)} \int_0^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}. \end{array}$$

Розв'язування вправи а). Легко бачити, що підінтегральна функція є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точок $z = i$ та $z = 3i$, причому $f(z) = O(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$. Тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=3i} f(z) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{z^2}{(z+i)(z^2+9)} \right|_{z=i} + \left. \frac{z^2}{(z+3i)(z^2+1)} \right|_{z=3i} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи д). Підінтегральна функція є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точки $z = i$, яка є полюсом третього порядку. Тому, враховуючи парність підінтегральної функції, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z + i)^3} \right)'' = \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{12}{(z + i)^5} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

7.6. Обчислити інтеграли

$$\begin{aligned} \text{а)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2ix - 2}; \quad \text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - 1)e^{ix} dx}{x^2 - 2x + 2}; \quad \text{в)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}; \\ \text{г)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - 1) \cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}; \quad \text{д)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 4}; \quad \text{е)} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи а). Функція $\frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$ є аналітичною в замкненій

півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точок $z = -1 + i$ та $z = 1 + i$, і має в ∞ нуль другого порядку. Тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2ix - 2} &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-1+i} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2} + \operatorname{res}_{z=1+i} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{i-1}}{2} - \frac{e^{-i-1}}{2} \right) = -2\pi \frac{\sin 1}{e}. \end{aligned}$$

Розв'язування вправи е). Оскільки підінтегральна функція є парною, $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$, а функція $\frac{1}{z^2 + 1}$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точки $z = i$, і має в ∞ нуль другого порядку, то

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2 + 1} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \pi i \left(\frac{z e^{iz}}{z + i} \right) \Big|_{z=i} \right\} = \frac{\pi}{2e}. \end{aligned}$$

7.7. Обчислити

$$\text{а) } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{2ix} dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 9)}; \quad \text{б) } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 1)(x - 1)};$$

$$\text{в) } v.p. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}; \quad \text{г) } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - 1) \cos x dx}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + x - 2)}.$$

Розв'язування вправи б). За теоремою 7.4 маємо

$$\begin{aligned} & v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \\ & = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z - 1)} + \pi i \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z - 1)} = \\ & = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i(i - 1)} + \pi i \frac{e^i}{2} = \frac{\pi}{2e}(1 + i) + \frac{\pi i}{2}(\cos 1 + i \sin 1) = \\ & = \frac{\pi}{2e}(1 - e \sin 1 + i(1 + e \cos 1)). \end{aligned}$$

7.8. Обчислити інтеграли

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt[3]{x}}; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + i)\sqrt[2]{x}};$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt[4]{x}}; \quad \text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + a)x^\alpha} \quad (a > 0, 0 < \alpha < 1).$$

Розв'язування вправи а). Використовуючи доведену в розділі 7.6 формулу (з $\alpha = 2/3$), маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt[3]{x}} &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3-1} dx}{(x^2 + 4)} = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{4\pi i/3}} \left(\operatorname{res}_{z=2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2 + 4} + \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{4\pi i}{3 + i\sqrt{3}} \left(\frac{2^{-1/3} e^{-\pi i/6}}{4i} - \frac{2^{-1/3} e^{-\pi i/2}}{4i} \right) = \\ &= \frac{\pi 2^{-1/3}}{3 + i\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\pi 2^{-4/3}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Принцип аргументу. Теорема Руше

7.9. Як по квадрантах розміщені корені рівняння $z^6 + z + 3 = 0$?

Розв'язування. Неважко перевірити, що це рівняння не має дійсних та чисто уявних коренів. Щоб визначити, скільки коренів є у першому квадранті, використаємо принцип аргументу.

Розглянемо замкнений контур C_R , який складається з відрізка $\ell_1 = [0, R]$ на додатній дійсній півосі, четвертини кола $\gamma_1 = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi/2]\}$ та відрізка $\gamma_2 = [Ri, 0]$ на додатній уявній півосі. Оскільки $z^6 + z + 3 > 0$ на ℓ_1 , то $\Delta_{\ell_1} \text{Arg}(z^6 + z + 3) = 0$. Далі,

$$\Delta_{\gamma_1} \text{Arg}(z^6 + z + 3) = \Delta_{\gamma_1} \text{Arg} \left(R^6 e^{6i\theta} \left(1 + \frac{e^{5i\theta}}{R^5} + \frac{3e^{6i\theta}}{R^6} \right) \right) = 3\pi$$

для всіх досить великих R .

Нарешті, функція $\pi + \text{arctg} \frac{y}{3 - y^6}$ при зміні y від $+\infty$ до $\sqrt[6]{3}$ змінюється від π до $\pi/2$, а функція $\text{arctg} \frac{y}{3 - y^6}$ при зміні y від $\sqrt[6]{3}$ до 0 змінюється від $\pi/2$ до 0. Звідси випливає, що $\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_{\ell_2} \text{Arg}(z^6 + z + 3) = -\pi$. Отже,

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_{C_R} \text{Arg}(z^6 + z + 3) = 2\pi$. За принципом аргументу наше рівняння має в першому квадранті тільки один корінь. Оскільки рівняння має дійсні коефіцієнти, то воно має попарно спряжені корені. Тому в четвертому квадранті рівняння має один корінь і по два — в другому та третьому квадрантах.

7.10. Довести, що якщо функція f аналітична і однолиста в області G , то $f'(z) \neq 0$ для всіх $z \in G$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує точка $a \in G$, для якої $f'(a) = 0$. Тоді в деякому околі точки a

$$f(z) = c_0 + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots, \quad c_k \neq 0, \quad k \geq 2.$$

Нехай $r > 0$ настільки мале, що $f'(z) \neq 0$ і $c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots \neq 0$ для всіх z , $0 < |z-a| \leq r$. Прийmemo

$$m = \min\{|z-a|^k | c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots | : |z-a| = r\}.$$

Тоді $m > 0$ і, якщо $|\alpha| < m$, то за теоремою Руше функції $c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$ та $-\alpha + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$ мають у крузі $\{z : |z-a| < r\}$ по k нулів кожна. Тому рівняння $f(z) = c_0 + \alpha$ має в цьому ж крузі k коренів, які є простими, завдяки тому, що $f'(z) \neq 0$ при $z \neq a$. А це неможливо з огляду на однолистість.

7.11. Дослідити, скільки коренів має вказане рівняння у відповідній області:

а) $z^4 - 5z + 1 = 0$, $1 < |z| < 2$; б) $z^2 - \frac{1}{3}e^z = 0$, $|z| < 1$;

в) $e^{z-\lambda} - z = 0$ ($\lambda > 1$), $|z| < 1$; г) $z^3 - 12z + 2 = 0$, $|z| < 2$;

д) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $|z| < 1$; е) $z^5 - 2z + 5 = 0$, $1 < |z| < 2$.

Розв'язування вправи е). Приймаємо $g_1(z) = 5$, $g_2(z) = z^5 - 2z$. Оскільки на колі $\{z : |z| = 1\}$ виконується $|g_1(z)| = 5 > 3 \geq |z^5 - 2z| = |g_2(z)|$, а функція g_1 не має нулів у крузі $\{z : |z| < 1\}$, то за теоремою Руше в цьому крузі наше рівняння не має коренів.

Прийmemo тепер $f_1(z) = z^5$, $f_2(z) = 5 - 2z$. На колі $\{z : |z| = 2\}$ виконується $|f_1(z)| = 32 > 9 \geq |5 - 2z| = |f_2(z)|$. Оскільки функція f_1 має в точці $z = 0$ нуль п'ятого порядку, то за теоремою Руше в крузі $\{z : |z| < 2\}$ наше рівняння має 5 коренів. Всі вони знаходяться в кільці $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

7.12. Довести, що рівняння $ze^{\lambda-z} = 1$ при $\lambda > 1$ має в крузі $\{z : |z| < 1\}$ єдиний дійсний додатний корінь.

7.13. Нехай функція f аналітична в обмеженій замкненій області $\overline{G}$, за винятком скінченної кількості полюсів, що лежать у G , і $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$ на ∂G . Довести, що кількість полюсів і кількість нулів функції f в області G рівні.