Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Ярослав Микитюк

Функціональний аналіз та теорія міри

Конспект лекцій та практичних занять

Львів 2023

1. Вступ.

В даному рукописі викладений основний зміст лекцій і практичних занять з курсу функціонального аналізу та теорії міри.

Курс функціонального аналізу та теорії міри є результатом об'єднання двох курсів, які до недавнього часу читалися окремо. Традиційно спочатку студенти слухали курс теорії міри та інтеграла, а після нього курс функціонального аналізу. Але, у зв'язку з відомими змінами в навчальному процесі, ці два курси були об'єднані в один курс. У першій половині курсу ми будемо знайомитися з теорією міри, а друга половина буде присвячена вивченню основних положень функціонального аналізу.

Теорія міри та інтеграла виникла в результаті досліджень цілого ряду математиків. Але у першу чергу її пов'язують з іменем французького математика Анрі Лебега. Його теорія, яку тепер називають теорією інтеграла Лебега, була створена в 1900-1910 роках і є основою сучасних курсів теорії міри та інтеграла.

Потрібно відзначити, що математики Львова дуже швидко оцінили важливість теорії і вже в у 1911/1912 н. році Вацлав Серпінський прочитав у львівському університеті курс "Поняття міри точкових множин", у 1913/14 н. році – "Інтеграл Лебега". Г. Штайнгауз теорію інтеграла Лебега читав у курсі "Вступ до теорії функцій дійсної змінної" у 1917 році, а у 1918 році оголосив окремий курс "Інтеграл Лебега". На скільки у Львові знання теорії інтеграла Лебега було необхідне бачимо з першого речення монографії С. Банаха "Припускаємо, що читач знає теорію міри і теорію інтеграла Лебега". Тому львівські математики були добре обізнані з даним предметом. У 1938 році сенат Львівського університету надав Анрі Лебегу ступінь почесного доктора за його наукові заслуги. У травні 1938 року Лебег приїхав до Львова на вручення диплому почесного доктора і прочитав дві лекції.

Функціональний аналіз як самостійна дисципліна почав свій розвиток на початку 20 століття і пережив період бурхливого розвитку у міжвоєнний період (1920-1939 рр.) Цей розвиток значною мірою є результатом активної діяльності львівської математичної школи, яку очолював Стефан Банах. Його монографія "Теорія лінійних операцій" , яка була видана в 1932 році у Варшаві французькою мовою, стала першим підручником з функціонального аналізу. В 1948 році вийшов її український переклад під назвою "Курс функціонального аналізу". Він є у нашій факультетській бібліотеці. Треба зазначити, що переклад монографії С.Банаха був зроблений Мироном Зарицьким, який також доповнив переклад новими результатами, що були отримані після 1932 року. Ще один період активного розвитку функціонального аналізу припадає на період від 1960 р. до 1980 р. Теперішній час можна характеризувати як період сталого розвитку. Починаючи з 60-тих років минулого століття функціональний аналіз починає входити в навчальні програми радянських університетів.

Функціональний аналіз є частиною математичного аналізу і з'явився в результаті розвитку ідей класичного математичного аналізу Ньютона і Лейбніца. На відміну від класичного аналізу, який був зосереджений на вивченні властивостей окремих функцій, функціональний аналіз вивчає властивості просторів різної природи, зокрема, властивості функціональних просторів. Поняття функціонального аналізу виявилися зручними, а підходи продуктивними. Тому мова функціонального аналізу стала використовуватися і в інших розділах математики. Наприклад, мова функціонального аналізу активно використовується в теорії ймовірностей, в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в теорії функцій.

Література

[1] Березанський Ю., Ус Г., Шефтель З. *Функціональний аналіз.* Підручник. Університетська бібліотека, Львів, 2014.

[2] Лянце В. Кудрик Т, Чуйко Г. *Функціональний аналіз.* Навч. посібник. - Львів, Видавничий центр ЛНУ, 2007.

[3] Кадець В. *Курс функціонального аналізу та теорії міри.* Навч. посібник. - 2012.

[4] Сторож О. *Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу.* Навч. посібник. - Львів, Видавничий центр ЛНУ, 2011.

2. Системи множин.

Операції над множинами. Для множин A і B через $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ і $A \Delta B$ позначаються відповідно об'єднання, перетин, різниця і симетрична різниця цих множин, які вводяться такими рівностями:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \qquad A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}, \qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Основними теоретико-множинними операціями є операції об'єднання, перетину та різниці. Операція симетричної різниці є додатковою операцією. Вона є зручною, оскільки дозволяє скоротити записи і спростити викладки.

Операції $\cup, \cap$ і Δ комутативні і асоціативні. Крім того, виконуються дистрибутивні закони

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Рівність $A \cap B = \emptyset$ означає, що множини A і B не мають спільних елементів або, іншими словами, не перетинаються. Такі множини називають неперетинними або **диз'юнктними**. Об'єднання двох неперетинних множин A і B називається **диз'юнктним** і позначається символом $A \sqcup B$. Таким чином, запис $C = A \sqcup B$ означає, що $C = A \cup B$ і $A \cap B = \emptyset$.

Якщо ми розглядаємо множини A, які є підмножинами деякої фіксованої множини X, то різниця $X \setminus A$ називається доповненням множини A в множині X або просто доповненням множини A. Доповнення $X \setminus A$ ми будемо коротко позначати A'.

Перехід до доповнення можна розглядати як п'яту теоретико-множинну операцію (в доповнення до чотирьох вже згаданих).

Ясно, що $A'' = A$, $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$.

Системи і сім'ї множин. Під системою множин розуміють множину, елементи якої є множинами. Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система множин. Якщо всі її елементи є підмножинами множини X, то кажуть, що $\mathcal{A}$ – це система множин в X. Найбільша з таких систем – це множина 2^X, яка складається з усіх підмножин множини X.

Нехай $\mathcal{A}$ – система множин. Множина

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

називається об'єднанням множин системи $\mathcal{A}$.

Множина

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

називається перетином множин системи $\mathcal{A}$.

Система множин $\mathcal{A}$ називається диз'юнктною, якщо будь-які її різні елементи не перетинаються. Об'єднання множин диз'юнктної системи $\mathcal{A}$ позначається символом

$$\bigsqcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Нехай I – довільна множина індексів. Припустимо, що кожному індексу i множини I поставлено у відповідність деяку множину A_i. Тоді кажуть, що задано сім'ю множин $\{A_i\}_{i\in I}$. У випадку $I = \mathbb{N}$ сім'ю $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин і позначають ще $(A_n)_{n=1}^{\infty}$.

Операції об'єднання і перетину переносяться на довільні сім'ї множин. А саме, множина

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

називається об'єднанням множин сім'ї $\{A_i\}_{i\in I}$, а множина

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

називається перетином множин сім'ї $\{A_i\}_{i\in I}$.

Справедливі закони де Моргана:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'.$$

Для об'єднання і перетину скінченних і нескінченних послідовностей множин вживаються позначення

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Якщо $A_j \cap A_k = \emptyset$ при $i \neq k$, то сім'я $(A_i)_{i\in I}$ називається диз'юнктною, а її об'єднання позначається символом $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

Справедлива наступна проста і корисна формула

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right). \tag{2.1}$$

Доведемо цю рівність. Нехай $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $B_0 := \emptyset$ і $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тоді

$$\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots$$

Очевидно, що $B_n = (B_n \setminus B_{n-1}) \bigsqcup B_{n-1}$ і $B_1 = B_1 \setminus B_0$. Тому, використовуючи математичну індукцію, отримуємо рівність

$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \setminus B_{k-1}).$$

Нехай $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(B_k \setminus B_{k-1})$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \subset B_n \subset B \quad \text{i} \quad B_n \setminus B_{n-1} \subset A_n \subset A,$$

то $A \subset B \subset A$, тобто $A = B$. Враховуючи, що $B_n \setminus B_{n-1} = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, отримуємо потрібну нам рівність.

Якщо $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_{n+1} \supset A_n$) для кожного номера n, то кажуть, що послідовність множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ зростає (спадає) і записують це у вигляді $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$) .

З формули (2.1) негайно випливає, що при $A_n \uparrow$ і $A_0 = \emptyset$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k-1}). \tag{2.2}$$

Якщо $A_n \downarrow$, то, як легко перевірити,

$$A_1 = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k+1})\right) \bigsqcup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{2.3}$$

Верхньою границею $\overline{\lim}$ послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається множина всіх тих точок, які входять в нескінченне число множин A_n. Нижньою границею $\underline{\lim}$ послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається множина всіх тих точок, які входять у кожну множину A_n за винятком скінченного їх числа. З означення негайно випливають формули

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{2.4}$$

Якщо верхня і нижня границі послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівні, то кажуть, що послідовність збіжна і покладають

$$\lim A_n := \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n.$$

Домовимося далі розглядати різні системи підмножин деякої фіксованої множини X.

Кільця і алгебри множин.

Означення 2.1. *Непорожня система множин $\mathcal{A}$ називається кільцем, якщо з $A \in \mathcal{A}$ і $B \in \mathcal{A}$ випливає, що $A \cup B \in \mathcal{A}$ і $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Якщо $\mathcal{A}$ - кільце, то для будь-яких $A, B \in \mathcal{A}$ маємо $A\Delta B \in \mathcal{A}$ і $A \cap B \in \mathcal{A}$. Це випливає з рівностей

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \qquad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B).$$

Крім того, $\emptyset \in \mathcal{A}$, бо $\emptyset = A \setminus A$.

Вправа 2.2. *Нехай система множин $\mathcal{A}$ для будь-яких $A, B \in \mathcal{A}$ задовольняє одну з умов :*

(1) $A\Delta B, A\cap B \in \mathcal{A}$;
(2) $A\Delta B, A\cup B \in \mathcal{A}$;
(3) $A\Delta B, A\setminus B \in \mathcal{A}$.

Доведіть, що $\mathcal{A}$ - кільце.

Означення 2.3. *Кільце $\mathcal{A}$ називається алгеброю, якщо воно містить X. При цьому X називають одиницею алгебри $\mathcal{A}$.*

Зрозуміло, що кільце є замкнене стосовно довільних скінченних об'єднань і перетинів, тобто, якщо $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\cup_{i=1}^n A_i$ і $\cap_{i=1}^n A_i$ теж належать $\mathcal{A}$.

Приклад 2.4. (1) *Сім'я 2^X всіх підмножин множини X є алгеброю множин.*
(2) *Сім'я всіх скінченних множин натуральних чисел є кільцем (але не алгеброю).*
(3) *Сім'я всіх обмежених підмножин дійсної прямої є кільцем (але не алгеброю).*

2.0.1. **σ-кільця і σ-алгебри.** У теорії міри виникає потреба в розгляді не тільки скінченних, але й злічeнних об'єднань та перетинів.

Означення 2.5. *Кільце $\mathcal{A}$ називається σ-кільцем, якщо для довільної послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що належить до цього кільця, їхнє об'єднання $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ також належить до $\mathcal{A}$.*

Означення 2.6. *Алгебра $\mathcal{A}$ називається σ-алгеброю, якщо вона є також σ-кільцем.*

Вправа 2.7. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Доведіть, що :*
(1) *існує едине кільце (σ-кільце), яке містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожному кільці (σ-кільці), що містить $\mathcal{A}$;*
(2) *існує едина алгебра (σ-алгебра), яка містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожній алгебрі (σ-алгебрі), що містить $\mathcal{A}$.*

Означення 2.8. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Кільце (σ-кільце), яке містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожному кільці (σ-кільці), що містить $\mathcal{A}$, називається кільцем (σ-кільцем) породженим системою $\mathcal{A}$. Алгебра (σ-алгебра), яка містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожній алгебрі (σ-алгебрі), що містить $\mathcal{A}$, називається алгеброю (σ-алгеброю) породженою системою $\mathcal{A}$.*

Вправа 2.9. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Доведіть, що $\mathcal{A}$ є алгеброю, якщо виконані умови :*
(1) *$X \in \mathcal{A}$;*
(2) *$A\cup B \in \mathcal{A}$ для довільних $A, B \in \mathcal{A}$;*
(3) *$A' \in \mathcal{A}$ для довільних $A \in \mathcal{A}$.*

Півкільця та їх властивості. При конструюванні мір доводиться спочатку визначати міру на системах множин, які не є кільцями або алгебрами, а є більш загальними структурами.

Означення 2.10. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Система $\mathcal{A}$ називається півкільцем, якщо виконані умови:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(2) $A \cap B \in \mathcal{A}$ *для довільних* $A, B \in \mathcal{A}$;
(3) *для будь-яких* $A \in \mathcal{A}$ *і* $B \in \mathcal{A}$, *існує така диз'юнктна послідовність множин* $(P_j)_{j=1}^n$, *що* $A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^n P_j$.

Означення 2.11. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Система $\mathcal{A}$ називається півкільцем з одиницею, якщо $\mathcal{A}$ є півкільцем і $X \in \mathcal{A}$.*

Приклад 2.12. *Назвемо інтервалами на дійсній прямій множини вигляду*

$$(a,b),\ [a,b),(a,b],\ [a,b],\ (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,\infty),$$

де $a, b \in \mathbb{R}$ і $a \le b$. Прямокутником в $\mathbb{R}^2$ назвемо декартів добуток $\Delta_1 \times \Delta_2$ двох довільних інтервалів Δ_1 і Δ_2 в $\mathbb{R}$. Легко перевірити, що множина всіх інтервалів на прямій утворює півкільце. Також множина всіх прямокутників в $\mathbb{R}^2$ утворює півкільце.

Вправа 2.13. *Нехай $\mathcal{A}_j$ $(j = 1, 2)$ - півкільця. Доведіть, що система*

$$\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1,\ \ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

є півкільцем.

Вправа 2.14. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $P \in \mathcal{P}$. Доведіть, що довільну диз'юнктивну скінченну послідовність $(Q_j)_{j=1}^m$ підмножин в P можна доповнити елементами $Q_{m+1}, \dots, Q_n$ з $\mathcal{P}$ таким чином, що $P = \bigsqcup_{j=1}^n Q_j$.*

Вправа 2.15. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $A_1, \dots, A_n$ – елементи півкільця $\mathcal{P}$. Тоді в $\mathcal{P}$ існує вписана в систему $(A_j)_{j=1}^n$ диз'юнктна система $(P_j)_{j=1}^m$, така, що для кожного $k = 1, \dots, n$ існує така підмножина J_k множини $1, \dots, m$, що $A_k = \bigsqcup_{j \in J_k} P_j$.*

Вправа 2.16. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $\mathcal{R}$ – кільце, що породжене півкільцем $\mathcal{P}$. Тоді $\mathcal{R}$ складається з усіх множин вигляду $\bigsqcup_{j=1}^n P_j$, де $(P_j)_{j=1}^n$ - довільна скінченна диз'юнктивна послідовність в $\mathcal{P}$.*

2.1. **Практичне заняття: Системи множин.**

Задача 2.17. *Довести, що*

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Розв'язок. Нехай x належить лівій частині співвідношення. Тоді, очевидно, що x належить одній з множин A_1, A_2, B_1, B_2. Нехай $x \in A_1$. (Інші три випадки розглядаються аналогічно.) Тоді обов'язково x не належить $B_1 \cup B_2$. Зокрема, $x \notin B_1$. А це означає, що $x \in (A_1 \Delta B_1)$, тобто x належить правій частині співвідношення. Включення доведене.

Нехай $f : X \to Y$ - деяка функція і $A \subset X,\ B \subset Y$. Тоді множина

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

називається образом множини A при відображенні f, а множина

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

називається прообразом множини B при відображенні f.

Задача 2.18. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} = \\ &= \{x \mid f(x) \in B_1\} \cup \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Задача 2.19. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= \{x \mid f(x) \in B_1 \cap B_2\} = \\ &= \{x \mid f(x) \in B_1\} \cap \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Задача 2.20. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = \{x \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2\} =$$
$$= \{x \mid f(x) \in B_1\} \setminus \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.21. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \Delta B_2) = f^{-1}(B_1) \Delta f^{-1}(B_2).$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \Delta B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \cup f^{-1}(B_2 \setminus B_1) =$$
$$= \big(f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)\big) \cup \big(f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)\big) = f^{-1}(B_1) \Delta f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.22. *Якщо* $\operatorname{dom} f = X$, *то*

$$f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'.$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B') = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))'.$$

Задача 2.23. *Довести, що*

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

Розв'язок.

$$f(A_1 \cup A_2) = \{f(x) \mid x \in A_1 \cup A_2\} =$$
$$= \{f(x) \mid x \in A_1\} \cup \{f(x) \mid x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Задача 2.24. *Довести, що рівність*

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

справедлива для довільних $A_1, A_2 \subset X$ *лише , коли* f *- ін'єкція.*

Розв'язок. Очевидно, що завжди виконується співвідношення

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Обернене включення може не виконуватися, якщо f не є ін'єкція. Дійсно, припустимо, що f не є ін'єкція. Тоді існують $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = y = f(x_2)$ і $x_1 \neq x_2$. Розглянемо множини $A_j = \{x_j\}$. Тоді $f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\}$, а $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Якщо f - ін'єкція і $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, то $f^{-1}(y) \in A_1$ і $f^{-1}(y) \in A_2$, тобто $f^{-1}(y) \in A_1 \cap A_2$. А, отже, $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Таким чином

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

Задача 2.25. *Довести, що*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Розв'язок. З означення випливає, що

$$A \setminus (B \cup C) = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C))\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\} = \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \notin C)\} = (A \setminus B) \setminus C.$$

Задача 2.26. *Довести, що*

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup (A_2 \setminus (B_1 \cup B_2))$$

і

$$(A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \subset A_1 \setminus B_1$$
$$(A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset A_2 \setminus B_2.$$

Отже,

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$

Отримане співвідношення є вірним для довільних A_1, A_2, B_1, B_2. Тому вірно і співвідношення

$$(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2).$$

З останніх двох співвідношень отримуємо

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) = [(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)] \cup [(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)] \subset \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) = (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Задача 2.27. *Довести, що*

$$(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Розв'язок. Припустимо, що $x \in A_1 \cap A_2$ і $x \notin B_1 \cap B_2$. Тоді, або $x \notin B_1$, або $x \notin B_2$. Тому або $x \in A_1 \setminus B_1$ або $x \in A_2 \setminus B_2$. Зі сказаного випливає, що

$$(A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$

Отримане співвідношення є вірним для довільних A_1, A_2, B_1, B_2. Тому вірним є також співвідношення

$$(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2).$$

З останніх двох співвідношень отримуємо

$$(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) = [(A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2)] \cup [(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2)] \subset \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) = (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Зліченні і незліченні множини.

Множини A і B називаються рівнопотужними, якщо існує бієкція $f : A \to B$. Множини, які рівнопотужні множині натуральних чисел називаються зліченними. Нескінченні множини, які не є рівнопотужні множині натуральних чисел називаються незліченними. Множини цілих чисел, раціональних чисел є зліченними. Множини дійсних чисел, ірраціональних чисел є незліченними. Множина $(0, 1)$ має потужність континууму. Потужність континууму мають множини $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Задача 2.28. *Довести, що нескінченна підмножина зліченої множини A є злічення.*

Розв'язок. Нам досить довести, що нескінченна підмножина $B \subset \mathbb{N}$ є злічення. Задамо відображення f рекурентною формулою

$$f(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \in B\}, \qquad f(n+1) = \min\{k \in B \mid k > f(n)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Легко бачити, що відображення f строго зростає, а тому є ін'єктивним. Очевидно, що його образ рівний B. Отже, f - бієкція $\mathbb{N}$ на B.

Задача 2.29. *Довести, що множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел є злічення.*

Розв'язок. Легко перевірити, що відображення f, яке діє за формулою

$$f(n) := \begin{cases} k, & \text{якщо } n = 2k - 1; \\ -k + 1, & \text{якщо } n = 2k. \end{cases}$$

є бієкцією множини $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$. Отже, множина $\mathbb{Z}$ є злічення.

Множина A називається не більш як зліченною, якщо вона є злічення або скінченна.

Задача 2.30. *Довести, що зліченне об'єднання не більш як злічених множин є множина не більш як злічена.*

Розв'язок. Можна вважати, що множини A_n попарно не перетинаються і є непорожні. Дійсно, якщо це не так, то розглянемо множини

$$B_1 = A_1, \qquad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} A_j\right).$$

Вони вже не перетинаються і кожна з них є не більш як злічення. Порожні множини можна видалити і зробити перенумерацію.

Нехай $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $A_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty(N_k)}$. Нехай $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовність простих чисел. Побудуємо відображення $f : A \to \mathbb{N}$ за формулою

$$f(x_{n,k}) = p_n^k, \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що f - ін'єкція $A \to \mathbb{N}$. Отже, множина A має потужність нескінченної підмножини в $\mathbb{N}$. Остання згідно з вже доведеним є зліченою. Тому зліченою є і множина A.

Задача 2.31. *Декартів добуток двох зліченних множин є зліченною множиною.*

Розв'язок. Нехай $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $Y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

де

$$B_n := \{(x_n, x_k)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Кожна з множин B_n є зліченною. Отже, зліченною буде і множина $X \times Y$.

(Переглянути всі задачі з розділу 1 задачника О. Сторожа. Написати детальні розв'язки задач 1.7 - 1.14.)

3. Загальне означення міри.

Означення 3.1. *Нехай $\mathcal{A}$ - система підмножин множини X. Числову функцію*

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C})$$

назвемо дійснозначною (комплекснозначною) мірою, якщо вона є зліченно адитивною, тобто:

(1) *для довільної диз'юнктивної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$, для якої $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, виконується рівність*

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{3.1}$$

Зауваження 3.2. *Якщо виконана умова (1), то ряд в правій частині (3.1) збігається абсолютно. Дійсно, з умови (1) випливає, що від перестановки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ його сума не змінюється. З огляду на відому теорему Рімана про умовно збіжні ряди це можливо лише у випадку, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ є абсолютно збіжним.*

1. Невід'ємні міри. Невід'ємними мірами ми назвемо міри, які приймають тільки невід'ємні значення. Виявляється (це буде показано згодом), що вивчення дійснозначних (комплекснозначних) мір можна звести до вивченні невід'мних мір. Зрозуміло, що вивчати невід'мні міри простіше, оскільки наш практичний життєвий досвід в основному базується на використанні таких мір (довжина, площа, об'єм, вага, маса). Тому ми зосередимо свою в перше чергу на вивченні невід'ємних мір.

В загальному означенні міри ми не висуваємо якихось вимог до області визначення міри, однак, щоб отримати більш змістовну теорію, нам доведеться домовитися, що область визначення міри є щонайменше півкільцем. Виявляється, що це дуже слабке обмеження, яке на практиці завжди виконується.

І так, нехай $\mathcal{P}$ півкільце підмножин непорожньої множини X. Зауважимо, що півкільце $\mathcal{P}$ містить порожню множину $\emptyset$. Розглянемо довільну невід'ємну міру

$$\mu : \mathcal{P} \to [0, \infty).$$

Насамперед відзначимо, що обов'язково

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{3.2}$$

Це випливає з формули (3.1). Дійсно, якщо у формулі (3.1) покласти $A_n = \emptyset$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, то з огляду на невід'ємність міри

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2\mu(\emptyset),$$

тобто $\mu(\emptyset) \leq 0$, що можливо лише при $\mu(\emptyset) = 0$.

1. Скінченна адитивність. Для довільної скінченної диз'юнктивної послідовності $(A_j)_{j=1}^n$ в $\mathcal{P}$, для якої $\bigsqcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$, виконується рівність

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{3.3}$$

Доведення. Доповнимо диз'юнктивну послідовність $(A_j)_{j=1}^n$ до диз'юнктивної послідовності $(A_j)_{j=1}^{\infty}$, покладаючи $A_j = \emptyset$ при $j > n$. Оскільки при $j > n$ $\mu(A_j) = \mu(\emptyset) = 0$, то з формули (3.1) отримуємо, що

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

□

2. Монотонність. Якщо $A, B \in \mathcal{P}$ і $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Доведення. Нехай $A, B \in \mathcal{P}$. З властивостей півкільця випливає, що в $\mathcal{P}$ існує диз'юнктна система $(P_j)_{j=1}^n$, така, що $B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^n P_j$. Покладемо $P_0 := A$. Тоді

$$B = \bigsqcup_{j=0}^{m} P_j.$$

Тому з огляду на скінченну адитивність міри μ і її невід'ємність

$$\mu(B) = \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{m} P_j\right) = \sum_{j=0}^{m} \mu(P_j) \geq \mu(P_0) = \mu(A).$$

□

Вправа 3.3. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $B \in \mathcal{P}$ і $(P_j)_{j=1}^n$ послідовність в $\mathcal{P}$. Тоді існує диз'юнктивна послідовність $(Q_k)_{k=1}^m$ така, що*

$$B \setminus \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} P_j\right) = \bigsqcup_{k=1}^{m} Q_j.$$

Вправа 3.4. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^\infty$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Тоді існує диз'юнктивна послідовність $(B_j)_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{P}$, для якої $B_j \subset A_j$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^\infty B_j$.*

3. Зліченна напівадитивність.

Теорема 3.5. *Нехай $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^\infty$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Тоді*

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \tag{3.4}$$

Доведення. З вправи 3.4 випливає, що існує диз'юнктивна послідовність $(B_j)_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{P}$, для якої $B_j \subset A_j$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^\infty B_j$. Зі зліченної адитивності міри μ маємо, що

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

Оскільки $B_j \subset A_j$, то $\mu(B_j) \leq \mu(A_j)$ $(j \in \mathbb{N})$. Тому

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

□

4. Скінченна напівадитивність. Нехай $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^n$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$. Тоді

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{3.5}$$

Доведення. Доповнимо послідовність $(A_j)_{j=1}^n$ до послідовності $(A_j)_{j=1}^\infty$, покладаючи $A_j = \emptyset$ при $j > n$. Оскільки при $j > n$ $\mu(A_j) = \mu(\emptyset) = 0$, то з формули (3.4) отримуємо, що

$$\mu(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

□

Вправа 3.6. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $B \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^n$ - диз'юнктивна послідовність в $\mathcal{P}$ і μ - невід'ємна міра на $\mathcal{P}$. Довести, що справедлива імплікація*

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \subset B \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \le \mu(B). \tag{3.6}$$

Зовнішна міра. Дуже важливим моментом в теорії мір є процес побудови міри. Вся справа в тому, що початково міру ми задаємо на досить вузькій системі елементарних множин (півкільці елементарних множин). А вже після цього переходимо до продовження міри на множини більш складної природи. Наприклад, знаходження площі прямокутника проблем не викликає. Натомість обгрунтування формули площі плоскої фігури, що обмежена гладкою кривою, потребує значних зусиль. А що вже казати про знаходження площі більш складних множин в $\mathbb{R}^2$. А як бути з n-вимірним об'ємом складних множин в $\mathbb{R}^n$? Добре би було мати загальний підхід до процедури побудови мір, точніше до процедури продовження міри з півкільця елементарних множин на якомога щирше σ-кільце або ширшу σ-алгебру множин. На початку 20 століття такий підхід був розроблений. Значний вклад в його розробку вніс французький математик Анрі Лебег. Запропоновану ним процедуру продовження міри стали називати лебеговим продоженням міри. Центральним пунктом в лебеговому продовженні є поняття зовнішної (верхньої) міри.

Означення 3.7. *Нехай невід'ємна міра μ задана на півкільці $\mathcal{P}$ з одиницею X і $A \subset X$. Послідовність $(P_j)_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{P}$ називається зліченним покриттям множини A, якщо $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty P_j$. Для довільної $A \subset X$ покладемо*

$$\mu^*(A) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j), \tag{3.7}$$

де точна нижня грань береться по всеможливих зліченних покриттях $(P_j)_{j=1}^\infty$ множини A. Функція μ^* називається зовнішною мірою побудованою за мірою μ; вона задана на алгебрі 2^X всіх підмножин множини X:

$$X \supset A \mapsto \mu^*(A) \in [0, \infty).$$

Властивості зовнішної міри.

Теорема 3.8. *Зовнішна міра володіє наступними властивостями:*

(1) $\forall A \in 2^X \quad 0 \le \mu^*(A) \le \mu(X)$;
(2) $\forall A, B \in 2^X \quad A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$;
(3) $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu^*(A) = \mu(A)$;
(4) *зовнішна міра є зліченно напівадитивна, тобто для довільних множин* $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *в* X *справедлива імплікація*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Longrightarrow \mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \tag{3.8}$$

Доведення. (1) Нехай $A \subset X$. Оскільки для довільного покриття $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ множини A

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \ge 0,$$

то з означення точної нижньої грані випливає, що $\mu^*(A) \ge 0$. Розглянемо послідовність $(P_j)_{j=1}^{\infty}$, що задана наступним чином

$$P_1 := X, \qquad P_j := \emptyset, \qquad j \ge 2.$$

Вона є зліченним покриттям множини A. Оскільки $\mu(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) = \mu(P_1) = \mu(X).$$

(2) Нехай $A \subset B \subset X$. Оскільки кожне покриття множини B є також покриттям множини A, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(3). Нехай $A \in \mathcal{P}$. Розглянемо послідовність $(P_j)_{j=1}^{\infty}$, що задана наступним чином

$$P_1 := A, \qquad P_j := \emptyset, \qquad j \ge 2.$$

Вона є зліченним покриттям множини A. Оскільки $\mu(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) = \mu(P_1) = \mu(A).$$

Припустимо, що $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ є довільним зліченним покриттям множини A. Тоді з теореми 3.5 випливає, що

$$\mu(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j).$$

Отже, $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Зі сказаного отримуємо, що $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(4) Нехай множин $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ множини в X і $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ Якщо ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ розбіжний, то нерівність, очевидно, виконується. Припустимо, що вказаний ряд збіжний. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням зовнішної міри для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(P_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}$ така, що $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{j,k}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_{j,k}) \le \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Оскільки

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{j,k},$$

то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_{j,k}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Таким чином для довільних $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(A) \le \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Звідки випливає, що $\mu^*(A) \le \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$. □

Зауваження 3.9. *З теореми 3.8 випливає , що зовнішна міра є також скінченно напівадитивна, тобто для довільних множин $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ в X справедлива імплікація*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \Longrightarrow \mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j). \tag{3.9}$$

Лебегове продовження міри. На початку 20 століття французський математик Анрі Лебег запропонував спосіб продовження міри з півкільця на σ-алгебру. Пізніше отриману в результаті продовження міру стали називати лебеговим продовженням міри. Опишемо суть ідеї Лебега.

Зафіксуємо деяку міру μ на півкільці $\mathcal{P}$ з одиницею X. Нехай μ^* - зовнішна міра побудована за мірою μ.

Означення 3.10. *Позначимо через $\mathcal{U}_\mu$ множину всіх підмножин в X для яких виконуеться рівність*

$$\mu^*(A) + \mu^*(A') = \mu(X). \tag{3.10}$$

Теорема Лебега про продовження міри.

Теорема 3.11. *$\mathcal{U}_\mu$ є σ-алгеброю з одиницею X, а звуження $\widetilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{U}_\mu}$ зовнішної міри μ^* на $\mathcal{U}_\mu$ є мірою.*

Міра $\widetilde{\mu}$ називається лебеговим продовженням міри μ, а елементи алгебри $\mathcal{U}_\mu$ називаються вимірними за Лебегом множинами.

Доведення сформульованої вище теореми є довгим і доволі складним. За браком часу ми його розглядати не будемо.

Треба відзначити, що Лебег сформулював свою теорему в менш загальному вигляді. А власне, він розглядав випадок, коли $X = [a, b]$, $\mathcal{P}$ - півкільце всіх інтервалів проміжку $[a, b]$, а міра μ - довжина інтервала, тобто для довільного інтервала $\Delta \subset [a, b]$ з кінцями α, β

$$\mu(\Delta) = |\beta - \alpha|.$$

(Виявляється, що остання формула задає міру, тобто μ є зліченно адитивною.) Отриману в результаті міру стали називати мірою Лебега на відрізку $[a, b]$, а множини з $\mathcal{U}_L$ вимірними за Лебегом. Домовимося позначати міру Лебега на відрізку через через μ_1.

Оскільки для довільних вимірних множин $A \subset [a, b]$

$$\mu_1(A) = \mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_{j=1}^{\infty} P_j} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j),$$

то, як легко бачити, міра $\mu_1(A)$ не залежить від вибору проміжка $[a, b]$, тобто міру Лебега можна розглядати на всіх обмежених вимірних за Лебегом множинах. Більше того, її можна поширити на σ-алгебру

$$\mathcal{U}(\mu_1) := \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad A \cap [-n, n] \quad \text{вимірна за Лебегом}\},$$

покладаючи

$$\mu_1(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A \cap [-n, n]).$$

Зауважимо, що в $\mathcal{U}(\mu_1)$ є множини нескінченної міри. При цьому μ_1 є σ-адитивною, тобто

$$\mu_1\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n). \tag{3.11}$$

Тільки тепер рівність (3.11) потрібно розуміти в більш загальному сенсі. А власне, обидві частини можуть одночасно бути рівними ∞.

Аналогічно можна побудувати міру Лебега в $\mathbb{R}^n$. А власне, нехай $X = [a, b]^n$ - n-вимірний куб в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}$ - півкільце всіх n-вимірних паралепіпедів в X, а міра μ - об'єм (в $\mathbb{R}^n$) паралепіпеда P, тобто

$$\mu(P) = \prod_{j=1}^{n} |P_j|, \qquad P = P_1 \times \cdots P_n,$$

$|P_j|$ - довжина інтервала P_j. (Остання формула дійсно задає міру, тобто μ є зліченно адитивною.)

Застосовуючи теорему про лебегове продовження міри отримуємо міру Лебега μ_n на довільному кубі в $\mathbb{R}^n$, а потім поширюємо її на σ-алгебру

$$\mathcal{U}(\mu_n) := \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall j \in \mathbb{N} \quad A \cap [-j,j]^n \quad \text{вимірна за Лебегом}\},$$

покладаючи

$$\mu_n(A) := \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(A \cap [-j,j]^n).$$

Зрозуміло, що в $\mathcal{U}(\mu_n)$ є множини нескінченної міри, але μ_n є σ-адитивною, тобто

$$\mu_n\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n). \tag{3.12}$$

Аналогічно можна побудувати міру Лебега на колі, на кривих, на n-вимірній сфері, на торі, на досить гладких поверхнях. Відповідні міри називаються мірами Лебега.

4. Практичне заняття: Елементарні властивості міри.

Означення 4.1. *Нехай міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Міра μ називається повною, якщо*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (\mu(A) = 0) \Longrightarrow (\forall B \subset A \quad (B \in \mathcal{A}) \wedge (\mu(B) = 0)).$$

Вправа 4.2. *Довести, що міра Лебега μ_n в $\mathbb{R}^n$ є повною.*

Задача 4.3. *Довести, що міра μ_n довільної скінченної або зліченної множини в $\mathbb{R}^n$ рівна нулеві.*

Розв'язок. Досить розглянути випадок зліченної множини. Нехай A зліченна множина. Тоді її можна занумерувати, тобто $A = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Тоді A є зліченним диз'юнктивним об'єднанням одноточкових множин:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}.$$

Оскільки одноточкова множина $\{x_j\}$ є n-вимірних паралепіпедом нульової міри, то з зліченної адитивності випливає, що

$$\mu_n(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(\{x_j\}) = 0.$$

Задача 4.4. *Знайдіть міру Лебега μ_1 множини*

$$A := \{x \in (0,1) \mid x - \textit{раціональне число}\}.$$

Розв'язок. Множина A є зліченна. А тому вона вимірна за мірою μ_1 і

$$\mu_1(A) = 0.$$

Задача 4.5. *Знайдіть міру Лебега μ_2 множини*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розв'язок. Множина A є зліченна. Дійсно, вона є декартовим добутком двох зліченних множин. Тому A є μ_2 - вимірна і

$$\mu_2(A) = 0.$$

Задача 4.6. *Знайдіть міру μ_2 Лебега множини*

$$A := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \quad y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розв'язок. Множину A можна подати у вигляді зліченного диз'юнктивного об'єднання

$$A = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}}^{\infty} A_r,$$

де $A_r = [0,1] \times [r,r]$. Кожна множина A_r є прямокутником нульової площі, тобто $\mu_2(A_r) = 0$. Зі зліченної адитивності міри μ_2 випливає, що

$$\mu_2(A) = \sum_{r \in \mathbb{Q}}^{\infty} \mu_2(A_r) = 0.$$

Задача 4.7. *Знайдіть міру Лебега μ_1 множини*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1 + 1/n].$$

Розв'язок. Намалювавши декілька відрізків $[1/n, 1 + 1/n]$ неважко помітити, що $A = (0,2]$. Тому $\mu_1(A) = 2$.

Задача 4.8. *Доведіть, що множина*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 2^{-n}]$$

є борелівською і знайдіть її міру Лебега μ_1.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною. А зліченне об'єднання борелівських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Намалювавши декілька відрізків $[n, n+2^{-n}]$ ми бачимо, що вони попарно не перетинаються. Тому

$$\mu_1(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1([n, n+2^{-n}]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1.$$

Задача 4.9. *Доведіть, що множина*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+2^{-n+2})$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 міру Лебега.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною. А зліченне об'єднання борелівських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Намалювавши декілька відрізків $(n, n+2^{-n+2})$ ми бачимо:

$$\Delta_1 = (1,3), \quad \Delta_2 = (2,3), \quad \Delta_3 = (3, 3+1/2), \quad \Delta_3 = (4, 4+1/4), ...$$

Отже,

$$A = (1,3) \bigcup \left(\bigcup_{j=3}^{\infty} \Delta_j \right).$$

Видно, що це об'єднання є диз'юнктивним. Тому

$$\mu_1(A) = 2 + \sum_{j=3}^{\infty} \mu_1(\Delta_j) = 2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 3.$$

Задача 4.10. *Доведіть, що множина*

$$A := (-2, 5] \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left((n, n+2^{-n}) \setminus \mathbb{Q} \right) \right)$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 міру Лебега.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною і кожна зліченна множина є борелівською (як зліченне об'єднання замкнених множин). Отже, кожна множина

$$A_0 := (-2, 5], \quad A_n = (n, n+2^{-n}) \setminus \mathbb{Q}$$

є борелівською. А зліченне об'єднання бореліських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Легко бачити, що множини A_n при $n \geq 1$ попарно не перетинаються. Але, деякі з них перетинаються з A_0. Більше того,

$$A_j \subset A_0 \qquad \text{при} \quad j \leq 4$$

і

$$A_0 \cap A_j = \emptyset \qquad \text{при} \quad j \geq 5.$$

Тому

$$A = (-2, 5] \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=5}^{\infty} A_j \right).$$

Оскільки $\mu_1(\mathbb{Q}) = 0$, то

$$\mu_1(A_n) = \mu_1((n, n + 2^{-n})) = 2^{-n}.$$

Тому

$$\mu_1(A) = 7 + \sum_{j=5}^{\infty} 2^{-j} = 7 + 2^{-4}.$$

Задача 4.11. *Доведіть, що множина*

$$A := (-3, 0) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n) \right)$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 міру Лебега.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною Крім того, зліченне об'єднання бореліських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Легко бачити, що

$$A = ((-3, 0) \cup (0, 1)) \setminus \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Оскільки μ_1-міра зліченної множини рівна нулеві, то

$$\mu_1(A) = 4.$$

Задача 4.12. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Покажемо, що її μ_2-міра рівна нулеві. Розглянемо множини

$$A_n := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n, n+1)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що

$$A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n.$$

Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\mu_2(A_n) = 0$, то

$$\mu_2(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_2(A_n) = 0.$$

Покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\mu_2(A_n) = 0$. Зафіксуємо довільні $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. очевидно, що набір квадратів

$$P_{n,j} := [n + (j-1)/m, n + j/m]^2, \qquad j = 1, \ldots, m.,$$

покриває множину A_n. Тому

$$\mu_2(A_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_2(P_{n,j}) = m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m}.$$

З довільності числа $m \in \mathbb{N}$ випливає, що

$$\mu_2(A_n) = 0.$$

Таким чином ми довели, що $\mu_2(A) = 0$.

Задача 4.13. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множини

$$A_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx\}, \qquad k \in \mathbb{N} \in,$$

є замкнені, а, отже, борелівські. А злічене об'єднання борелівських множин є множина борелівська. Тому A є борелівською. Покажемо, що її μ_2-міра рівна нулеві. Подібно як і в попередній задачі, можна переконатися, що для кожної A_k μ_2-міра рівна нулеві. Використовуючи зліченну напівадитивність міри μ_n, маємо

$$\mu_2(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_2(A_k) = 0,$$

тобто $\mu_2(A) = 0$.

Міри Лебега і Жордана. Міра Лебега є продовженням міри Жордана. Кожна множина A, яка вимірна за Жорданом є вимірна за Лебегом і міра Лебега множини A збігається з мірою Жордана множини A.

Задача 4.14. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], \quad 0 \le |y| \le x^2\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Вона вимірна за Жорданом. Тому для знаходження міри $\mu_2(A)$ можна використати інтеграл Рімана.

$$\mu_2(A) = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = 2/3.$$

Задача 4.15. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi], \quad 0 \le y \le \sin x\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Вона вимірна за Жорданом. Тому для знаходження міри $\mu_2(A)$ можна використати інтеграл Рімана.

$$\mu_2(A) = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2.$$

Задача 4.16. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 4\pi], \quad 0 \le |y| \le |\cos x|\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою. Дійсно, нехай $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ збіжна послідовність в множині A і $x_n \to x$ і $y_n \to y$. Для доведення замкненості потрібно переконатися, що точка (x, y) належить множині A. Оскільки

$$0 \le |y_n| \le |\cos x_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то, враховуючи неперервність модуля і функції $\cos$ і здійснюючи граничний перехід в нерівності, отримуємо, що

$$0 \le |y| \le |\cos x|,$$

тобто $(x, y) \in A$. Замкненість множини A доведена.

Множина A є криволінійною трапецією, що обмежена неперервними кривими. Тому вона вимірна за Жорданом і її міру Жордана ($= \mu_2(A)$) можна знайти з допомогою інтеграла Рімана. Зробивши малюнок, з врахуванням симетрії множини A стосовно осі Ox і періодичності функції $\cos$, отримуємо, що

$$\mu_2(A) = 2 \int_0^{4\pi} |\cos x| \, dx = 16 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 16.$$

Задача 4.17. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2, \quad |x| + |y| \leq 2\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою. Доведення є аналогічне до доведення в попередній задачі. Множина A квадратом, в якому вирізано круг. Знайти площу легко (знайдіть самостійно).

Конструювання послідовностей множин.

Задача 4.18. *Побудуйте послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ борелівських множин в $\mathbb{R}$ таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = 1, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0, \infty).$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n-1, n], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Задача 4.19. *Побудуйте послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ борелівських множин в $\mathbb{R}$ таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = 1, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_{2n-1} := [n-1, n], \quad A_{2n} = [-n, -n+1], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Задача 4.20. *Побудуйте послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ борелівських множин в $\mathbb{R}$ таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = +\infty, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n, \infty), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 4.21. *Побудуйте послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ борелівських множин в R таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = +\infty, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n, \infty) \cup \mathbb{N}, \qquad \in \mathbb{N}.$$

5. Лекція. Вимірні функції та їх властивості.

Означення 5.1. *Нехай X - метричний простір. Домовимося через $B(X)$ позначати найменшу σ-алгебру в X, що містить всі відкриті і замкнені множини. Множини алгебри $B(X)$ називаються борелівськими множинами в X.*

Зауважимо, що всі злічені або скінченні множини в метричному просторі є борелівськими. Зліченні або скінченні об'єднання інтервалів (паралепіпедів в $\mathbb{R}^n$) є борелівськими множинами в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$).

Структура множин алгебри $\mathcal{U}(\mu_n)$.

Теорема 5.2. *Кожна борелівська множина $A \in B(\mathbb{R}^n)$ належить алгебрі $\mathcal{U}(\mu_n)$, тобто $B(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{U}(\mu_n)$. Якщо $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$, то:*

(1) *існує борелівська множина $B \subset A$ така, що $\mu_n(A \setminus B) = 0$.*
(2) *у випадку $\mu_n(A) < \infty$ для довільного $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{R}^n$ існують компакт F і відкрита множина $\mathcal{O}$ такі, що $F \subset A \subset \mathcal{O}$ і $\mu_n(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$.*

Таким чином, кожна множина $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$ об'єднанням борелівської множини і множини нульової міри.

Означення 5.3. *Простором з мірою називається трійка $(X,\mathcal{U},\mu)$, де X - непорожня множина, $\mathcal{U}$ - клас підмножин множини X, μ - невід'ємна міра, що задана на $\mathcal{U}$. Міра μ називається повною, якщо*

$$\forall A \in \mathcal{U} \quad \forall B \subset A \qquad (\mu(A) = 0) \Rightarrow (B \in \mathcal{U} \wedge \mu(B) = 0)$$

Якщо не сказане протилежне, то під простором з мірою ми будемо вважати трійка $(X,\mathcal{U},\mu)$, в якій $\mathcal{U}$ - σ-алгебра, а μ - повна міра.

Вправа 5.4. *Кожна множина $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$ нульової міри міститься в борелівській множині нульової μ_n-міри.*

Неперервність міри.

Теорема 5.5. *Нехай заданий простір з мірою $(X,\mathcal{U},\mu)$ і $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонна послідовність множин в $\mathcal{U}$. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n).$$

Зокрема, для монотонно спадної послідовності

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n),$$

а для монотонно зростаючої послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n).$$

Доведення. Розглянемо випадок монотонно спадної послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покладемо за означенням

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,\qquad B_n=A_n\setminus A_{n+1},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$A_n=\left(\bigsqcup_{k=n}^{\infty}B_k\right)\bigsqcup B.$$

Зі зліченної адитивності міри μ випливає, що

$$\mu(A_n)=\mu(B)+\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k).$$

Зі збіжності ряду випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k)=0.$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\mu(\lim_{n\to\infty}A_n).$$

Випадок монотонно зростаючої послідовності розглядається аналогічно. □

Означення 5.6. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$, $f:X\to\mathbb{R}$. *Функція* f *називається* μ- *вимірною, якщо прообраз кожної борелівської множини* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *є множина вимірна, тобто* $f^{-1}(A)\in\mathcal{U}$. *Множину всіх* μ-*вимірних функцій ми будемо позначати через* $\mathcal{V}(X,\mu)$.

Означення 5.7. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$, $f:X\to\mathbb{R}$ *і* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Позначимо через* $\{f<\lambda\}$ *прообраз множини* $(-\infty,\lambda)$ *при відображенні* f, *тобто*

$$\{f<\lambda\}=\{x\in X\mid f(x)<\lambda\}.$$

Аналогічно означуємо множини $\{f\le\lambda\}$, $\{f>\lambda\}$ *і* $\{f\ge\lambda\}$. *Всі такі множини називають лебеговими множинами.*

Теорема 5.8. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$ *і* $f:X\to\mathbb{R}$. *Щоб функція* f *була* μ-*вимірна необхідно і досить, що виконувалася умова*

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad\{f<\lambda\}\in\mathcal{U}.$$

Доведення. Розглянемо сімейство $\mathcal{A}$ всіх підмножин $A \subset \mathbb{R}$ таких, що $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Оскільки операція взяття прообразу комутує з усіма теоретико-множинними операціями, то $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю (бо такою є $\mathcal{U}$). З умови теореми випливає, що $\mathcal{A}$ містить всі множини вигляду $(-\infty, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю, то вона містить також множини вигляду

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a + 1/n), \qquad a \in \mathbb{R},$$

а, отже, і множини

$$(a, b) = (-\infty, b) \setminus \{-\infty, a],$$

а, отже, всі відкриті множини, а, отже, і всі борелівські множини. Таким чином, $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Звідки (див. означення) випливає, що $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$. □

Теорема 5.9. *Нехай* $(X, \mathcal{U}, \mu)$ *- простір з мірою. Тоді* $\mathcal{V}(X, \mu)$ *є лінійним простором над* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$ і $a \in \mathbb{R}$. Тоді $(f + a) \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Дійсно, для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{f + a < \lambda\} = \{f < \lambda - a\} \in \mathcal{U}.$$

Якщо $a = 0$, то $af \equiv 0$, а, отже, $af \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Якщо $a > 0$, то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{af < \lambda\} = \{f < \lambda/a\} \in \mathcal{U}.$$

Якщо $a < 0$ то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{af < \lambda\} = \{f > \lambda/a\} \in \mathcal{U}.$$

Таким чином

$$\forall f \in \mathcal{V}(X, \mu) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad af \in \mathcal{V}(X, \mu).$$

Нехай $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Оскільки, як легко переконатися,

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{U},$$

то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{f + g < \lambda\} = \{f < -g + \lambda\} \in \mathcal{U}$$

(бо $(-g + \lambda) \in \mathcal{V}(X, \mu)$ з огляду на вже доведене), тобто $f + g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Теорема доведена. □

Означення 5.10. *Функція* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *називається борелівською, якщо прообраз кожної борелівської множини є множина борелівська.*

Вправа 5.11. *Доведіть, що:*

(1) *всі неперервні на* $\mathbb{R}$ *функції є борелівськими;*
(2) *всі монотонні функції на* $\mathbb{R}$ *функції є борелівськими;*
(3) *функція* $x \mapsto 1/x$ *(що задана на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*) є борелівською.*

Теорема 5.12. *Нехай* $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$*, а функція* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є борелівська. Якщо* $\operatorname{ran} f \subset \operatorname{dom} \varphi$*, то композиція* $g(x) := \varphi(f(x))$ *є* μ*-вимірною.*

Доведення. Нехай $A \in B(\mathbb{R})$. Оскільки

$$g^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(f(x)) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \varphi^{-1}(A)\} = f^{-1}(\varphi^{-1}(A))$$

і функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є борелівська, то $f^{-1}(\varphi^{-1}(A)) \in \mathcal{U}$. Отже, g є μ-вимірною. □

Наслідок 5.13. *Якщо* $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$*, то* $f^2, |f|, \operatorname{sign} f$ *є* μ*-вимірними. А якщо* g *не обертається в нуль, то* $1/g$ *є* μ*-вимірною функцією.*

Теорема 5.14. *Якщо* $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$ *то* $fg \in \mathcal{V}(X, \mu)$*. А якщо* g *не обертається в нуль, то і частка* f/g *є* μ*-вимірною функцією.*

Доведення. Нехай $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. З наслідку і рівності

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2))$$

випливає, що $fg \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Якщо g не обертається в нуль, то згідно наслідку $1/g$ є μ-вимірною функцією . Тому частка f/g є добутком μ-вимірних функцій, а, отже, вона теж є μ-вимірною функцією. □

Виявляється, поточкова границя вимірних функцій є вимірною функцією.

Теорема 5.15. *Якщо послідовність* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *в* $\mathcal{V}(X, \mu)$ *поточково збігається до функції* f*, то* $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$*.*

Доведення. Нехай виконана умова теореми. Зафіксуємо довільне λ і покажемо, що лебегова множина $\{f < \lambda\}$ належить $\mathcal{U}$. Все доведення зводиться до встановлення рівності

$$\{f < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m > n} \{f_m < \lambda - 1/k\}.$$

Припустимо, що x належить лівій частині. Тоді $f(x) < \lambda$. При деякому $\delta > 0$ ми маємо, що

$$f(x) < \lambda - 2\delta,$$

З означення границі випливає, що при деяких $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$

$$f_m(x) < f(x) + \delta, \qquad 1/k < \delta, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$

Тому
$$f_m(x) < f(x) + \delta < \lambda - \delta < \lambda - 1/k, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$
Отже, при $k > k_0$ x належить множині
$$\bigcap_{m>m_0} \{f_m < \lambda - 1/k\},$$
тобто x належить правій частині.

Припустимо, що x належить правій частині. Тоді при деяких $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$
$$f_m(x) < \lambda - 1/k, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$
Переходячи до границі при $m \to \infty$ отримуємо, що
$$f(x) \leq \lambda - 1/k < \lambda,$$
тобто x належить лівій частині. Рівність доведена. Оскільки всі множини $\{f_m < \lambda - 1/k\}$ є вимірні, то вимірною є і множина $\{f < \lambda\}$ (бо $\mathcal{U}$ є σ-алгеброю).

$\square$

μ-еквівалентність.

Означення 5.16. *Функції $f, g : X \to \mathbb{R}$ (які задані на всьому X) називаються μ-еквівалентними (скорочено $f \sim g$), якщо множина $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ має міру 0.*

Теорема 5.17. *Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ - простір з мірою і міра μ є повна. Нехай функції $f, g : X \to \mathbb{R}$ (які задані на всьому X) є μ-еквівалентними. Якщо $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$, то $g \in \mathcal{V}(X, \mu)$.*

Доведення. Нехай виконана умова теореми. Зафіксуємо довільне λ. Нехай
$$A := \{f < \lambda\}, \qquad B := \{g < \lambda\}.$$
Легко бачити, що
$$A \setminus B, B \setminus A \subset \{x \mid f(x) \neq g(x)\}.$$
Отже, $A \setminus B$ і $B \setminus A$ є вимірними множинами нульової міри. Звідси випливає, що якщо $A \in \mathcal{U}$, то і $B \in \mathcal{U}$. Теорема доведена. $\square$

Вправа 5.18. *Покажіть, що на просторі $\mathcal{V}(X, \mu)$ відношення $f \sim g$ є відношенням еквівалентності.*

Збіжність майже скрізь.

Означення 5.19. *Ми скажемо, що послідовність $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X, \mu)$ збігається майже скрізь до функції $f : X \to \mathbb{R}$, якщо*
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
для всіх $x \in X$ за винятком, можливо, множини нульової μ-міри.

Вправа 5.20. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається майже скрізь до функції $f : X \to \mathbb{R}$, то $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$.*

Теорема Єгорова.

Означення 5.21. *Ми скажемо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції f майже рівномірно, якщо для довільного $\delta > 0$ існує вимірна множина X_δ така, що:*

(1) *$\mu(X_\delta) < \delta$;*

(2) *на множині $X \setminus X_\delta$ послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно.*

Єгоров встановив (понад сто років тому), що справедлива

Теорема 5.22. *Нехай $(X,\mathcal{U},\mu)$ - простір з мірою і $\mu(X) < \infty$. Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається майже скрізь до деякої $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$, то вона збігається до f майже рівномірно.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається всюди на X. Дійсно, якщо це не так, то цього можна добитися шляхом вилучення з X множини нульової міри.

Розглянемо множини

$$E_n^m = \bigcap_{k>n} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| < 1/m\}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Всі вони є μ-вимірні (чому?) Тому μ-вимірними є множини

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

З означення множин E_n^m випливає, що при фіксованому m

$$E_1^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \dots$$

З неперервності міри μ випливає, що

$$\mu(E^m) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^m).$$

Тому для довільного $\delta > 0$ і довільного $m \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $n_0(m)$, що

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \delta/2^m.$$

Покажемо, що множина

$$X_\delta := \bigcup_{m=1}^{\infty} (E^m \setminus E_{n_0(m)}^m)$$

володіє властивостями:

(1) $\mu(X_\delta) < \delta$;

(2) на множині $X \setminus X_\delta$ послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно.

Перша властивість випливає зі зліченної напівадитивності міри μ, тобто

$$\mu(X_\delta) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta/2^m = \delta.$$

Покажемо, що на множині $X \setminus X_\delta$ послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно.

Спочатку зауважимо, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ виконується рівність $E^m = X$. Дійсно, якщо $x \in X \setminus E^m$, то нерівність

$$|f_k(x) - f(x)| \geq 1/m$$

повинна виконуватися для нескінченної кількості номерів k. А це означає, що

$$f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_k(x)$$

і це суперечить збіжності всюди. Тому $E^m = X$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Враховуючи це, за правилами де-Моргана маємо

$$X \setminus X_\delta = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E^m \setminus E^m_{n_0(m)})\right)' = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus E^m_{n_0(m)})\right)' = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}.$$

Нехай $x \in X \setminus X_\delta$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$|f_k(x) - f(x)| < 1/m, \qquad k > n_0(m).$$

А це означає, що послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до f на множині $X \setminus X_\delta$. Теорема доведена. □

Збіжність за мірою. Введемо ще один вид збіжності послідовністі функцій. Він називається збіжністю за мірою і відіграє важливу роль в теорії ймовірностей (там цей вид збіжності називають збіжністю за ймовірністю).

Означення 5.23. *Ми скажемо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції f за мірою, якщо для довільного $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0.$$

Теорема 5.24. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції f майже скрізь, то вона збігається до f і за мірою.*

Доведення. Зауважимо, що функція f є вимірна (див. вправу). Зафіксуємо довільне $\delta > 0$ і розглянемо множини

$$E_k(\delta) = \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Покладемо за означенням

$$R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta), \qquad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta)$$

Оскільки всі функції f, f_k є вимірні, то вимірними є всі множини $E_k(\delta), R_n(\delta)$ і M. Очевидно, що

$$R_1(\delta) \supset \ldots R_n(\delta) \supset \ldots.$$

Тому з огляду на неперервність міри μ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = \mu(M).$$

Переконаємося, що $\mu(M) = 0$. Дійсно, якщо $x \in M$, то нерівність

$$|f_k(x) - f(x)| \geq \delta$$

виконується для нескінченного числа номерів k, а, отже, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x)$. Таким чином

$$M \subset \{x \mid f(x) \neq \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$$

А оскільки послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь, то $\mu(M) = 0$ (поясніть чому). Зі сказаного отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = 0.$$

Оскільки $E_k(\delta) \subset R_k(\delta)$, то $\mu(E_k(\delta)) \leq \mu(R_k(\delta))$. А, отже,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k(\delta)) = 0.$$

А це означає, що послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до f за мірою. $\square$

Зі збіжності за мірою не випливає збіжність майже скрізь.

Вправа 5.25. *Придумайте приклад послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$, яка збігається за мірою до функції $f : X \to \mathbb{R}$, то $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$, але не збігається до неї майже скрізь.*

Однак, справедлива наступна

Теорема 5.26. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$ за мірою, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається до функції f майже скрізь.*

Таким чином у просторі $\mathcal{V}(X,\mu)$ ми маємо цілий набір видів збіжності:
(A_1) - рівномірна збіжність;
(A_2) - поточкова збіжність;
(A_3) - збіжність майже скрізь;
(A_4) - майже рівномірна збіжність;
(A_5) - збіжність за мірою.
Справедливі імплікації

$$(A_1) \Rightarrow (A_2) \Rightarrow (A_3) \Rightarrow (A_4) \Rightarrow (A_5).$$

6. Практичне заняття: Загальне поняття міри. Вимірні Функції. Еквівалентні функції.

Задача 6.1. *Доведіть скінченну напівадитивність зовнішної міри:*

$$\forall A \subset X \quad \forall A_1,\ldots,A_n \subset X \quad \left(A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \Longrightarrow \left(\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)\right).$$

Розв'язок. Нехай $A \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$. Додамо до послідовності $(A_j)_{j=1}^n$ порожні множини $A_j; = \emptyset,\ j > n$. З зліченної напівадитивності зовнішної міри випливає, що

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

А оскільки при $j > n$ $\mu^*(A_j) = \mu^*(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j).$$

Задача 6.2. *Нехай $A, B \subset X$. Доведіть нерівність*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A\Delta B).$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$A \subset B \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A\Delta B)\,.$$

З скінченної напівадитивності зовнішної міри випливає, що

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B).$$

А, отже,

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \le \mu^*(A\Delta B).$$

Оскільки множини A і B є довільними, то, переставляючи їх місцями, отримуємо
$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(B\Delta A) = \mu^*(A\Delta B).$$
Отже,
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B).$$

Задача 6.3. *Нехай $A, B, C \subset X$. Доведіть нерівність*
$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B).$$

Розв'язок. Досить довести включення
$$A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B).$$
і скористатися скінченною напівадитивністю зовнішної міри. Щоб довести це включення нам досить довести, що
$$A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$$
і
$$B \setminus A \subset (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$$
Очевидно, що досить довести тільки перше включення. Довести самостійно.

Далі $(X, \mathcal{U}, \mu)$ - простір з мірою.

Задача 6.4. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A = (A \setminus B) \sqcup A \cap B$, то
$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B).$$
Звідки випливає рівність
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Задача 6.5. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*
$$\mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A\Delta B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$, то
$$\mu(A\Delta B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A).$$
Враховуючи, що
$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \cap A)), \qquad \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B),$$

отримуємо рівність

$$\mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B)) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 6.6. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).$$

Враховуючи, що

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \cap A)), \qquad \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B),$$

отримуємо рівність

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)) - \mu(A \cap B).$$

Означення 6.7. *Нехай Y - метричний простір. Функція $f : Y \to \mathbb{R}$ називається борелівською, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ кожної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$ є борелівською множиною (належить $B(Y)$).*

Зокрема,

Означення 6.8. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається борелівською, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ кожної множини $A \in B(\mathbb{R})$ належить $B(\mathbb{R})$.*

Задача 6.9. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$. Щоб функція f була борелівською необхідно і досить, що для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ борелівською була множина $\{f < \lambda\}$.*

Розв'язок. Розглянемо сімейство $\mathcal{A}$ всіх підмножин $A \subset \mathbb{R}$ таких, що $f^{-1}(A) \in B(X)$. Оскільки операція взяття прообразу комутує з усіма теоретико-множинними операціями, то $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю (бо такою є $B(\mathbb{R})$). З умови задачі випливає, що $\mathcal{A}$ містить всі множини вигляду $(-\infty, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю, то вона містить також множини вигляду

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a + 1/n), \qquad a \in \mathbb{R},$$

а, отже, і множини

$$(a, b) = (-\infty, b) \setminus \{-\infty, a],$$

а, отже, всі відкриті множини, а, отже, і всі борелівські множини. Таким чином, $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Звідки (див. означення) випливає, що f - борелівська функція.

Задача 6.10. *1) Нехай A - відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Кожна неперервна функція функція $f : A \to \mathbb{R}$ є борелівською. 2) Кожна борелівська функція $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є μ_1-вимірною. 3) Композиція борелівських функцій є борелівською.*

Розв'язок. 1) Якщо функція f неперервна, то прообраз $f^{-1}(B)$ відкритої множини B є множина відкрита. Тому множина $\{f < \lambda\}$ відкрита, а, отже, борелівська при довільному $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Нехай f, g є борелівськими функціями. Зауважимо, що кожна борелівська множина є μ_1-вимірною. Оскільки f є борелівською функцією, то для довільної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$ прообраз $f^{-1}(A)$ є борелівською множиною, а отже, μ_1-вимірною. Тому f є μ_1-вимірною.

Розглянемо композицію $h(x) = f(g(x))$. Для довільної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$

$$h^{-1}(A) = \{x \mid f(g(x)) \in A\} = \{x \mid g(x) \in f^{-1}(A)\} = g^{-1}(f^{-1}(A)).$$

Оскільки f і g борелівські, то $f^{-1}(A)$ є борелівська множина, а, отже, і $g^{-1}(f^{-1}(A))$ є борелівська множина. Звідси випливає, що h є борелівська функція.

Задача 6.11. *1) Чи є функція $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x]$ борелівською. 2) Чи є функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ борелівською.*

Розв'язок. 1) Функція $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x]$ є борелівською. Для цього досить показати, що для довільного $c \in \mathbb{R}$ множина

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] < c\}$$

є борелівська. Легко бачити, A є піввіссю. Отже, A борелівська. Тому функція $x \mapsto [x]$ є борелівською.

2) Функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ є борелівською. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$ розглянемо множину

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x] < c\}.$$

Легко переконатися, що ця множина є відкрита, а, отже, боролівська. Тому функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ є борелівською.

Задача 6.12. *Чи є μ_1-вимірною функція $f(x) = \sin[x]$ (тут $[x]$ - ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$).*

Розв'язок. Ми вже знаємо, що функція $[x]$ є борелівська. Функція sin є неперервна, а отже вона теж борелівська. Композиція борелівських функцій є борелівською. Отже, функція f є борелівська. Але, борелівська функція є μ_1-вимірною.

Задача 6.13. *Чи є μ_2-вимірною функція $f(x, y))) = ([x] + [y])e^{x+y}$ (тут $[x]$ - ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$).*

Розв'язок. Ця функція є борелівською функцією, що діє з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Але кожна множина з $B(\mathbb{R}^2)$ є вимірна за мірою μ_2. Тому f є μ_2-вимірна.

Задача 6.14. *Нехай $f_1, \dots, f_n$ вимірні функції, що діють з X в $\mathbb{R}$. Чи є μ-вимірною функція*

$$f(x) = \max_{1 \le j \le n} f_j(x).$$

Розв'язок. Ця функція є вимірною. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{f_j < c\}.$$

Оскільки функції f_j є вимірні, то $\{f_j < c\} \in \mathcal{U}$. А, отже, $\{f < c\} \in \mathcal{U}$, тобто f є μ-вимірна.

Задача 6.15. *Нехай $f_1, \dots, f_n$ вимірні функції, що діють з X в $\mathbb{R}$. Чи є μ-вимірною функція*

$$f(x) = \min_{1 \le j \le n} f_j(x).$$

Розв'язок. Ця функція є вимірною. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{f_j < c\}.$$

Оскільки функції f_j є вимірні, то $\{f_j < c\} \in \mathcal{U}$. А, отже, $\{f < c\} \in \mathcal{U}$, тобто f є μ-вимірна.

Задача 6.16. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{|x| + n}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

збігається (за ознакою Лейбніца). Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.17. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} = O(n^{-2}), \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.18. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$f_n(x) = \frac{\sin xn}{x^2 + n^4} = O(n^{-4}), \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.19. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}$$

є кусково неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$f_n(x) = \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}} \leq \frac{e}{n^{3/2}} = O(n^{-3/2}) \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.20. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right).$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно, оскільки

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad x \to 0,$$

то

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right) \sim \frac{1}{|x|^3 + n^4} = O(n^{-4}), \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.21. *Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R})$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = x^2 + \sin^n x.$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0,$$

якщо $|\sin x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є зліченна, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2 + \lim_{n\to\infty} \sin^n x = x^2.$$

Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = x^2$.

Задача 6.22. *Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R})$ до якої збігається майже скрізь за мірою μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^x(1 + \sin^n x + \cos^n x).$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0,$$

якщо $|\sin x| < 1$ і $|\cos x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi n/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є зліченна, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x.$$

Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = e^x$.

Задача 6.23. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{\sin^n x} + \frac{nx + 1}{x + n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0,$$

якщо $|\sin x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є злічення, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + x.$$

Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = 1 + x$.

Задача 6.24. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Потрібно розглянути декілька випадків. Якщо $|x| > 1$, то

$$\left| \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}} \right| \leq \frac{1}{|x|^{2n-1}} + \frac{1}{|x|^n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отже, при $|x| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}} = 0.$$

Якщо $|x| < 1$, то

$$x^n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Тому при $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}} = x.$$

Залишається випадок точок множини $\{x \mid |x| = 1\}$. Але, це скінченна множина, а, отже, має міру нуль. Тому наша послідовність збігається до кусково неперервної функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

Задача 6.25. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{-x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}}.$$

Потрібно розглянути декілька випадків. Якщо $|x| > 1$, то

$$-x^{2n} \to -\infty, \qquad n \to \infty.$$

Отже, при $|x| > 1$
$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = 0.$$
Якщо $|x| < 1$, то
$$-x^{2n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$
Тому при $|x| < 1$
$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = e^0 = 1.$$
Залишається випадок точок множини $\{x \mid |x| = 1\}$. Але, це скінченна множина, а, отже, має міру нуль. Тому наша послідовність збігається до кусково неперервної функції
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \le 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

7. Інтеграл Лебега та його властивості.

Сьогодні ми дамо означення і вивчимо властивості інтеграла Лебега.

Означення 7.1. *Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ простір з мірою (X - непорожня множина, $\mathcal{U}$ - σ-алгебра, μ - невід'ємна повна міра на $\mathcal{U}$). Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ ми назвемо простою, якщо вона приймає не більш ніж зліченну кількість значень. Через $\Pi(X, \mu)$ позначимо множину всіх простих функцій в $\mathcal{V}(X, \mu)$, тобто*
$$\Pi(X, \mu) := \{f \in \mathcal{V}(X, \mu) \mid f - \text{проста функція}\}.$$

Вправа 7.2. $\Pi(X, \mu)$ *є лінійним простором. Крім того добуток функцій з $f, g \in \Pi(X, \mu)$ теж належить $\Pi(X, \mu)$.*

Вправа 7.3. *Щоб проста функція $f : X \to \mathbb{R}$ належала до $\Pi(X, \mu)$ необхідно і досить, щоб прообраз $f^{-1}(\{y\})$ кожного значення y функції f був вимірною множиною, тобто щоб*
$$\forall y \in \operatorname{ran} f \quad f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{U}.$$

Теорема 7.4. *Кожна функція $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$ є границею рівномірно збіжної до f послідовності функцій з $\Pi(X, \mu)$.*

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Позначимо через $f_m (m \in \mathbb{N})$ функцію, що задана формулою
$$f_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad f(x) \in [n/m, (n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки множини

$$\{x \in X \mid f(x) \in [n/m, (n+1)/m)\} = f^{-1}([n/m, (n+1)/m)),$$

є вимірними (належать $\mathcal{U}$), то кожна функція f_m є простою вимірною, тобто $f_m \in \Pi(X, \mu)$. З означення функцій f_m випливає, що

$$0 \leq f(x) - f_m(x) \leq 1/m, \qquad x \in X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Звідки очевидним чином випливає, що послідовність $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ при $m \to \infty$ рівномірно збігається до f. □

Інтеграл Лебега простої функції.

Означення 7.5. *Нехай $f \in \Pi(X, \mu)$ і $\{y_n\}_{n=1}^N$ множина значень функції f (тут $N \in \mathbb{N}$ або $N = \infty$). Ми скажемо, що функція f є інтегровною за Лебегом, якщо ряд*

$$\sum_n y_n \mu(f^{-1}(y_n))$$

є абсолютно збіжним (це стосується випадку, коли $N = \infty$). Якщо f є інтегровною, то її інтеграл по множині X ми задаємо формулою

$$\int_X f\, d\mu := \sum_n y_n \mu(f^{-1}(y_n)).$$

Множину всіх інтегровних за Лебегом функцій $f \in \Pi(X, \mu)$ ми позначимо через $L\Pi(X, \mu)$

Теорема 7.6. *Нехай $f \in \Pi(X, \mu), X = \bigsqcup_n A_n, A_n \in \mathcal{U}$, і функція f на кожній множині A_n є постійна і приймає значення a_n. Щоб f була інтегровна необхідно і досить, що був абсолютно збіжним ряд*

$$\sum_n a_n \mu(A_n).$$

При цьому

$$\int_X f\, d\mu = \sum_n a_n \mu(A_n).$$

Доведення. Зауважимо, що для кожного значення y_k функції f маємо

$$f^{-1}(\{y_k\}) = \bigsqcup_{a_n = y_k} A_n.$$

А, отже,

$$\mu(f^{-1}(\{y_k\})) = \sum_{a_n = y_k} \mu(A_n).$$

Тому
$$\sum_k |y_k|\mu(f^{-1}(y_k)) = \sum_n |a_n|\mu(A_n).$$
Звідки випливає, що ряди
$$\sum_k y_k\mu(f^{-1}(y_k)), \qquad \sum_n a_n\mu(A_n)$$
одночасно абсолютно збіжні або розбіжні. $\square$

Теорема 7.7. $L\Pi(X,\mu)$ *лінійним простором. При цьому для довільних* $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ *і довільного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *маємо:*

(1) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;
(2) $\int_X \lambda f\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu$;
(3) *якщо* $f \in L\Pi(X,\mu)$ *є обмежена, то* $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le (\sup_{x\in X}|f(x)|)\,\mu(X)$.

Доведення. Доведемо лише, що для довільних $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ сума $f+g$ є інтегровною функцією і
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$
Решта тверджень теореми є майже очевидними. Нехай $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ і нехай
$$\{a_j\}_j = \operatorname{ran} f, \quad \{b_k\}_k = \operatorname{ran} g.$$
Покладемо
$$A_j := f^{-1}(a_j), \qquad B_k := g^{-1}(b_k), \qquad C_{jk} = A_j \cap B_k.$$
Очевидно, що
$$X = \bigsqcup_j A_j, \quad X = \bigsqcup_k B_k.$$
А, отже,
$$X = \bigsqcup_{j,k} C_{jk}, \quad A_j = \bigsqcup_k C_{jk}, \quad B_k = \bigsqcup_j C_{jk}.$$
Звідси, зокрема, маємо, що
$$\sum_k \mu(C_{jk}) = \mu(A_j), \qquad \sum_j \mu(C_{jk}) = \mu(B_k)$$
Зауважимо, що на множині C_{jk} функція $f+g$ є постійна і приймає значення $a_j + b_k$. Оскільки
$$\sum_{j,k} |a_j + b_k|\mu(C_{jk}) \le \sum_{j,k} |a_j|\mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} |b_k|\mu(C_{jk}) =$$
$$= \sum_j |a_j|\mu(A_j) + \sum_k |b_k|\mu(B_k) < \infty,$$

то з теореми 7.6 випливає, що $f+g$ є інтегровна. Зі сказаного вище також випливає, що

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \sum_{j,k}(a_j+b_k)\mu(C_{jk}) = \sum_{j,k} a_j\mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} b_k\mu(C_{jk}) =$$
$$= \sum_j a_j\mu(A_j) + \sum_k b_k\mu(B_k) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

□

Загальне означення інтеграла Лебега.

Означення 7.8. *Позначимо через $L(X,\mu)$ множину всіх функцій, які є границями рівномірно збіжних послідовностей простору $L\Pi(X,\mu)$, тобто функція $f : X \to \mathbb{R}$ належить $L(X,\mu)$ тоді і тільки тоді, коли в $L\Pi(X,\mu)$ існує послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка рівномірно на X збігається до f.*

Домовимося для довільної множини $A \subset X$ через χ_A позначати характеристичну функцію множини A, тобто функцію, що задана формулою

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Вправа 7.9. *1) Доведіть, що $L(X,\mu)$ є лінійним простором.*
2) Якщо $f \in L(X,\mu)$ і $A \in \mathcal{U}$, то $\chi_A f \in L(X,\mu)$.

Означення 7.10. *Нехай $f \in L(X,\mu)$ і є рівномірною границею послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функцій з $L\Pi(X,\mu)$. За означенням ми покладаємо*

$$\int_X f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu. \tag{7.1}$$

Якщо $A \in \mathcal{U}$, то

$$\int_A f\,d\mu := \int_X \chi_A f\,d\mu.$$

Коректність означення.

Переконаємося, що означення 7.10 є коректним. Для цього потрібно показати, що:

(1) границя в (7.1) існує;

(2) при фіксованій функції $f \in L(X,\mu)$ границя в (7.1) не залежить від вибору послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(3) для функцій $f \in L\Pi(X,\mu)$ означення 7.10 є рівносильне означенню 7.5.

1. З властивостей інтеграла Лебега від простої функції випливає, що

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f_m\,d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f_m)\,d\mu\right| \le (\sup|f_n - f_m|)\mu(X), \qquad n,m\in\mathbb{N}.$$

Оскільки послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно збіжною, то

$$\sup|f_n - f_m| \to 0 \qquad \text{при} \quad n,m\to\infty.$$

Тому послідовність інтегралів $\int_X f_n\,d\mu$ є фундаментальною, а, отже, збіжною.

2. Нехай послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L\Pi(X,\mu)$ рівномірно збігаються до f. Розглянемо послідовність $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що задана формулою

$$h_{2n-1} = f_n, \qquad h_{2n} = g_n.$$

Очевидно, що послідовність $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ належить $L\Pi(X,\mu)$ і рівномірно збігається до f. Тому існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_n\,d\mu.$$

Оскільки всі підпослідовності послідовності $\left(\int_X f_n\,d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ мають однакові границі, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_{2n-1}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_{2n}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\,d\mu.$$

3. Якщо $f \in L\Pi(X,\mu)$, то послідовність $f_n \equiv f$ рівномірно збігається до f. Звідси, враховуючи доведене вище, випливає, що для функцій $f \in L\Pi(X,\mu)$ означення 7.10 і 7.5 є рівносильними.

Властивості інтеграла Лебега.

Ми вже говорили про властивості інтеграла Лебега від простої функції. Властивості інтеграла Лебега у загальному випадку ми обсудимо більш детально.

Теорема 7.11. *Нехай $f,g \in L(X,\mu)$ і $A,B \in \mathcal{U}$. Тоді:*

(1) $\chi_A \in L(X,\mu)$, $\qquad \int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A)$;

Лінійність інтеграла.

(2) $\int_A \lambda f\,d\mu = \lambda \int_A f\,d\mu$ *для довільних* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(3) $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$*;*

Адитивність по області інтегрування.

(4) *якщо* $A \cap B = \emptyset$*, то* $\int_{A \sqcup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$*;*

Інтеграл невід'ємної функції невід'ємний.

(5) *якщо* $f(x) \geq 0$ *при* $x \in A$ *, то* $\int_A f\,d\mu \geq 0$*;*

Монотонність інтеграла.

(6) *якщо* $f(x) \leq g(x)$*при* $x \in A$*, то* $\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$*;*

Оцінка інтеграла.

(7) *якщо* $m \leq f(x) \leq M$ *при* $x \in A$*, то*

$$m\mu(A) \leq \int_A f\,d\mu \leq M\mu(A);$$

(8) *якщо* $\mu(A) = 0$*, то* $\int_A f\,d\mu = 0$;

Інтеграли еквівалентних функцій.

(9) *якщо* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ *і* $h \sim f$*, то* $h \in L(X,\mu)$ *і* $\int_X h\,d\mu = \int_X f\,d\mu$;

Достатня ознака інтегровності вимірної функції.

(10) *якщо* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$*,* $f \geq 0$ *і* $|h| \leq f$*, то* $h \in L(X,\mu)$*;*

(11) *для довільних* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$*, то* $(h \in L(X,\mu)) \Leftrightarrow (|h| \in L(X,\mu))$ *;*

Оцінка модуля інтеграла.

(12) $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu \leq (\operatorname{supp}|f|)\mu(A)$.

Доведення. Більшість перерахованих властивостей очевидним чином випливають з означень. Тому ми обмежимося доведенням тільки властивостей $(3), (9), (10)$.

(3) Нехай послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L\Pi(X,\mu)$ рівномірно збігаються до f і g. З властивостей інтеграла для простих функцій маємо, що

$$\int_A (f_n + g_n)\,d\mu = \int_A f_n\,d\mu + \int_A g_n\,d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.$$

(9) Нехай $f \in L(X,\mu), h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ і $h \sim f$. Розглянемо функцію $\varphi := f - h$. Вона вимірна і майже скрізь дорівнює нулеві. Нам досить переконатися, що вона належить $L(X,\mu)$ і $\int_X \varphi\,d\mu = 0$. Розглянемо послідовність функцій

$$\varphi_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad \varphi(x) \in [n/m, (n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ проста функція φ_m рівна нулеві майже скрізь. Це означає, що всі члени ряду

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n}{m}\mu(\varphi^{-1}(\tfrac{n}{m}))$$

рівні нулеві. А, отже, $\varphi_m \in L\Pi(X,\mu)$ і $\int_X \varphi_m \, d\mu = 0$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Оскільки послідовність $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до φ, то $\varphi \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X \varphi \, d\mu = 0.$$

(10) Нехай $f \in L(X,\mu)$, $f \geq 0$, $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ і $|h| \leq f$. Переконаємося, що функція h інтегровна.

Покладемо за означенням

$$h_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad h(x) \in [n/m, (n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що

$$|h_m(x)| \leq f(x) + 1, \qquad x \in X, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що кожна функція h_m є інтегровна. Зафіксуємо m і нехай

$$A_{n,m} = \{x \in X \mid h(x) \in [n/m, (n+1)/m)\}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки для довільних $n \in \mathbb{Z}$

$$|h_m(x)| = \frac{|n|}{m} \leq f(x) + 1, \qquad x \in A_{n,m},$$

то

$$\frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m}) \leq \int_{A_{n,m}} (f+1)\, d\mu.$$

Отже, для довільних $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|n|\leq N} \frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m}) \leq \sum_{|n|\leq N} \int_{A_{n,m}} (f+1)\, d\mu = \int\limits_{\bigsqcup_{|n|\leq N} A_{n,m}} (f+1)\, d\mu \leq \int\limits_X (f+1)\, d\mu < \infty.$$

А це означає, що ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m})$ є збіжний, тобто $h_m \in L(X,\mu)$. Оскільки h є рівномірною границею послідовності $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$, то $h \in L(X,\mu)$.

Теорема доведена. $\square$

Абсолютна неперервність інтеграла.

Теорема 7.12. *Нехай $f \in L(X,\mu)$. Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{U} \quad (\mu(A) < \delta) \Rightarrow \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що справедливе наступне допоміжне твердження:

$$\forall f \in L(X,\mu)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g, h \in L(X,\mu)\ (f = g+h) \wedge (g - \text{обмежена}) \wedge \left(\int_X |h|\, d\mu < \varepsilon \right).$$

Нехай $f \in L(X,\mu)$. Оскільки f є рівномірною границею послідовності простих інтегровних, то існує проста інтегровна функція φ така, що $f - \varphi$ є обмежена. Тому без обмеження загальності можна вважати, що f є проста інтегровна функція.

Нехай $X = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_n$ і f приймає значення a_n на множині A_n. Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \infty$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Покладемо

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \bigsqcup_{j=1}^{N} A_n; \\ 0, & \text{якщо } x \in \bigsqcup_{j=N+1}^{\infty} A_n, \end{cases} \qquad h = f - g.$$

Очевидно, що g є обмежена і

$$\left| \int_X h\, d\mu \right| \le \int_X |h|\, d\mu = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Тим самим допоміжне твердження доведене.

Доведемо тепер теорему. Нехай $f \in L(X,\mu)$ і $\varepsilon > 0$. Згідно допоміжного твердження існують $g, h \in L(X,\mu)$ такі, що $f = g + h$ і

$$\sup |g| + 1 = M < \infty, \qquad \int_X |h|\, d\mu < \varepsilon/2$$

Покладемо
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}.$$
Нехай $A \in \mathcal{U}$ і $\mu(A) < \delta$. Тоді
$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \le \int_A |f|\, d\mu = \int_A |g+h|\, d\mu \le \int_A |g|\, d\mu + \int_A |h|\, d\mu \le \int_A |g|\, d\mu + \int_X (|h|\, d\mu.$$
Оскільки
$$\int_X (|h|\, d\mu < \varepsilon/2, \qquad \int_A |g|\, d\mu \le M\mu(A) < M\delta = \varepsilon/2,$$
то
$$\left| \int_A f\, d\mu \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
Теорема доведена. □

σ-адитивність інтеграла.

Теорема 7.13. *Нехай $f \in L(X,\mu)$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$, де $A, A_j \in \mathcal{U} (j \in \mathbb{N})$. Тоді*

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu, \tag{7.2}$$

причому ряд в (7.2) є абсолютно збіжний.

Доведення. Спочатку доведемо рівність (7.2). Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З абсолютної неперервності інтеграла випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що якщо $C \in \mathcal{U}$ і $\mu(C) < \delta$, то
$$\left| \int_C f\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Зі зліченної адитивності міри μ випливає, що
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) < \infty.$$
Тому існує $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що
$$\sum_{j=N_0+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta.$$

Нехай $N > N_0$ і

$$B = \bigsqcup_{j=1}^{N} A_j, \qquad C = \bigsqcup_{j=N+1}^{\infty} A_j.$$

Оскільки $A = B \sqcup C$, то з адитивності інтеграла випливає, що

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_C f\,d\mu$$

і

$$\int_B f\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu.$$

Тому

$$\left| \int_A f\,d\mu - \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu \right| = \left| \int_C f\,d\mu \right|.$$

Враховуючи, що

$$\mu(C) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(A_n) \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta$$

отримуємо

$$\left| \int_C f\,d\mu \right| < \varepsilon.$$

Таким чином

$$\left| \int_A f\,d\mu - \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu \right| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad N > N_0.$$

Звідки випливає, що

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Заміняючи f на $|f|$ маємо, що

$$\int_A |f|\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu.$$

Оскільки

$$\left| \int_{A_n} f\,d\mu \right| \le \int_{A_n} |f|\,d\mu, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f\,d\mu \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu < \infty.$$

Отже, ряд у рівності (7.2) збігається абсолютно. Теорема доведена.

□

Нерівність Чебишева.

Теорема 7.14. *Нехай $f \in L(X,\mu)$, $f \geq 0$ і $c > 0$. Тоді*

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X f \, d\mu.$$

Доведення. Нехай $A := \{f \geq c\}$. Тоді

$$c\chi_A \leq f, \qquad x \in X.$$

А, отже,

$$c\mu(A) = \int_X c\chi_A \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu,$$

тобто

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X f \, d\mu.$$

□

Наслідок 7.15. *Якщо $f \in L(X,\mu)$ і $\int_X |f| \, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на X.*

Доведення. З нерівності Чебишева випливає, що

$$\mu(\{|f| \geq 1/n\}) \leq n \int_X |f| \, d\mu = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \geq 1/n\},$$

то

$$\mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq 1/n\}) = 0.$$

Отже, $f(x) = 0$ майже скрізь. □

8. Практичне заняття. Обчислення інтеграла Лебега.

Задача 8.1. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x) = 2 \operatorname{sign} x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{-1}^{2} f\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$f(x) = -2, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := [-1, 0);$$

$$f(x) = 0, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{0\};$$

$$f(x) = 2, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := (0, 2].$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int\limits_{-1}^{2} f, d\mu_1 = (-2) \cdot \mu_1(A_1) + 0 \cdot \mu_1(A_2) + 2 \cdot \mu_1(A_3) = -2 + 4 = 2.$$

Задача 8.2. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x) = \operatorname{sign}(1 - x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{-3}^{5} f\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$f(x) = -1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := [-3, -1) \cup (1, 5];$$

$$f(x) = 0, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{-1, 1\};$$

$$f(x) = 1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := (-1, 1).$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int\limits_{-1}^{2} f, d\mu_1 = (-1) \cdot \mu_1(A_1) + 0 \cdot \mu_1(A_2) + 1 \cdot \mu_1(A_3) = -6 + 2 = -4.$$

Задача 8.3. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x,y) = \operatorname{sign}(x-y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

і $A := [-1,1] \times [0,1]$. Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_A f\, d\mu_2.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$\begin{aligned} f(x) = -1, &\qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := \{(x,y) \in A \mid x < y\}; \\ f(x) = 0, &\qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{(x,y) \in A \mid x = y\}; \\ f(x) = 1, &\qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := \{(x,y) \in A \mid x > y\}. \end{aligned}$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int\limits_{-1}^{2} f d\mu_1 = (-1) \cdot \mu_1(A_1) + 0 \cdot \mu_1(A_2) + 1 \cdot \mu_1(A_3) = -\mu_1(A_1) + \mu_1(A_3).$$

Роблячи нескладний малюнок, бачимо, що

$$\mu_1(A_3) = 1/2, \qquad \mu_1(A_1) = 2 - \mu_1(A_3) = 3/2.$$

Тому

$$\int\limits_{-1}^{2} f, d\mu_1 = -1.$$

Задача 8.4. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X |\chi_A - \chi_B|\, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Функції χ_A, χ_B приймають значення 0 і 1. Тому функція

$$f(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$$

може приймати лише два значення. А власне:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A\Delta B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A\Delta B. \end{cases}$$

Тому

$$\int_X |\chi_A - \chi_B| \, d\mu = \mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.5. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X |4\chi_A - \chi_B| \, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$f(x) = |4\chi_A(x) - \chi_B(x)| = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 3, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X |4\chi_A - \chi_B| \, d\mu = 4\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 3\mu(A \cap B) =$$
$$= 4(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + (\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 3\mu(A \cap B) = 4\mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.6. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|3\chi_A - \chi_B| - 2\chi_B) \, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Нехай

$$f = |3\chi_A - \chi_B| - 2\chi_B.$$

Зауважимо, що

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ -1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 0, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X f\,d\mu = 3\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) =$$
$$= 3(\mu(A) - \mu(A \cap B)) - (\mu(B) - \mu(A \cap B)) = 3\mu(A) - \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.7. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B)\,d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Нехай

$$f = |2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B$$

Зауважимо, що

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 3, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X f\,d\mu = 2\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 3\mu(A \cap B) =$$
$$= 2(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + (\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 3\mu(A \cap B) = 2\mu(A) + \mu(B).$$

Задача 8.8. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B + 2\chi_X)\,d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B), \mu(X)$.

Розв'язок. Нехай
$$f = |2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B + 2\chi_X$$
Зауважимо, що
$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 3, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 5, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 2, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$
Отже,
$$\int_X f\,d\mu = 4\mu(A \setminus B) + 3\mu(B \setminus A) + 5\mu(A \cap B) + 2\mu(X \setminus (A \cup B)) =$$
$$= 4(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + 3(\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 5\mu(A \cap B) + 2(\mu(X) - \mu(A \cup B)) =$$
$$= 2\mu(A) + \mu(B) + 2\mu(X).$$
Оскільки
$$\mu(X) - \mu(A \cup B) = \mu(X) - \mu(A) - \mu(B) + \mu(A \cup B).$$

Задача 8.9. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = [2\sin x], \qquad x \in [-\pi, \pi].$$
Знайдіть інтеграл
$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що $|f(x) \leq 2$. Тому фунція f може приймати лише п'ять значень $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Очевидно, що значення 2 приймається на одноточковій множині
$$A_1 := \{\pi/2\};$$
значення 1 приймається на множині
$$A_2 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid 1 \leq 2\sin x < 2\} = [\pi/6, \pi/2) \cup (\pi/2, 5\pi/6];$$
значення 0 приймається на множині
$$A_3 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid 0 \leq 2\sin x < 1\} = [0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi];$$

значення -1 приймається на множині

$$A_4 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid -1 \leq 2\sin x < 0\} = [-\pi/6, 0) \cup (-\pi, -5\pi/6];$$

значення -2 приймається на множині

$$A_5 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid -2 \leq 2\sin x < -1\} = (-5\pi/6, -\pi/6).$$

Оскільки

$$\mu_1(A_1) = 0, \quad \mu_1(A_2) = \frac{2}{3}\pi, \quad \mu_1(A_3) = \pi/3, \quad \mu_1(A_4) = \pi/3, \quad \mu_1(A_5) = \frac{2}{3}\pi,$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\mu_1 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (2\pi/3) + 0(\pi/3) - 1 \cdot (\pi/3) - 2 \cdot (2\pi/3) = -\pi.$$

Задача 8.10. *Нехай проста функція f задана формуло*

$$f(x) = [2/x], \qquad x \in [1/2, 2].$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{[1/2,2]} f \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f є монотонна і її область значень є проміжок $[1, 4]$. Тому фунція f може приймати лише чотири значення $(1, 2, 3, 4)$. Очевидно, що значення 4 приймається на одноточковій множині

$$A_1 := \{1/2\};$$

значення 3 приймається на множині

$$A_2 := \{x \in [1/2, 2] \mid 3 \leq 2/x < 4\} = (1/2, 2/3];$$

значення 2 приймається на множині

$$A_3 := \{x \in [1/2, 2] \mid 2 \leq 2/x < 3\} = (2/3, 1];$$

значення 1 приймається на множині

$$A_4 := \{x \in [1/2, 2] \mid 1 \leq 2/x < 2\} = (1, 2];$$

Тому

$$\int\limits_{[1/2,2]} f \, d\mu_1 = 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Задача 8.11. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x,y) = (-1)^{(1+[x^2+y^2])}, \qquad (x,y) \in A := \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_A f\,d\mu_2.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f є постійна на множинах

$$A_n := \{(x,y) \mid n \le x^2+y^2 < n+1\}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Легко бачити, що $\mu_2(A_n) = \pi$ і

$$f(x) = (-1)^{1+n}, \qquad x \in A_n.$$

Тому

$$\int\limits_A f\,d\mu_1 = -1\cdot\pi + 1\cdot\pi - 1\cdot\pi + 1\cdot\pi = 0.$$

Задача 8.12. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x) = \frac{1}{(1+[x])(2+[x])}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах

$$A_n := [n, n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

приймає значення

$$a_n = \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Оскільки $\mu_1(A_n) = 1$ при довільних n і

$$[0,\infty) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

то

$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Оскільки
$$\frac{1}{(1+n)(2+n)} = \frac{1}{(1+n)} - \frac{1}{(2+n)},$$
то
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+n)(2+n)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+n)} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2+n)} = 1 - \frac{1}{(2+N)} \to 1 \quad \text{при } N \to \infty.$$
Тому
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)} = 1.$$

Задача 8.13. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = 2^{-[2x]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Знайдіть інтеграл
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах
$$A_n := \{x \mid 2x \in [n, n+1)\} = [n/2, (n+1)/2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
приймає значення
$$a_n = 2^{-n}.$$
Оскільки $\mu_1(A_n) = 1/2$ при довільних n і
$$[0,\infty) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$
то
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_1(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Задача 8.14. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = [x^2], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл
$$\int\limits_{[0,2]} f\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах
$$A_n := \{x \geq 0 \mid x^2 \in [n, n+1)\} = [\sqrt{n}, \sqrt{n+1}) \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$
приймає значення
$$a_n = n.$$
Оскільки
$$A_0 = [0,1), \quad A_1 = [1, \sqrt{2}), \quad A_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad A_3 = [\sqrt{3}, 2), \quad A_4 = [2, 2]$$
і
$$[0,2] = \bigsqcup_{n=0}^{4} A_n,$$
то
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\, d\mu_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3}) + 0.$$

9. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.

Багато розділів математики, зокрема, математичний аналіз, не можуть обійтися без граничного переходу. Тому теореми, що описують умови, при яких можна здійснювати граничний перехід, є важливими.

Сьогодні ми розглянемо теореми, які дозволяють коректно здійснювати перехід під знаком інтеграла Лебега. Зазначимо, що для інтеграла Рімана теж є подібні теореми, але вони вимагають виконання сильної умови - рівномірної збіжності. У теоремах, про які піде мова, умови більш слабкі.

Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

Теорема 9.1. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L(X,\mu)$ майже скрізь збігається до функції $f : X \to \mathbb{R}$ і існує $\varphi \in L(X,\mu)$ така, що при всіх $n \in \mathbb{N}$*
$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in X,$$
то $f \in L(X,\mu)$ і
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції f поточково і нерівність $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Тоді f є вимірна як поточкова границя вимірних і

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \varphi(x), \qquad x \in X,$$

тобто f має інтегровну мажоранту. З достатньої умови інтегровності випливає, що $f \in L(X, \mu)$.

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$.

З абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що

$$\exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{U} \quad (\mu(A) < \delta) \Rightarrow \int_A \varphi \, d\mu < \varepsilon/4.$$

А з теореми Єгорова випливає, що існує множина $A \in \mathcal{U}$ така, що $\mu(A) < \delta$ і послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до f на множині $X \setminus A$. Зі сказаного робимо висновок, що існує n_0 таке, що

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}, \qquad x \in X \setminus A, \quad n \geq n_0.$$

Тоді, враховуючи, що

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2\varphi,$$

отримуємо, що для всіх $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\left|\int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu\right| &\leq \int_X |f_n - f| \, d\mu = \\ &= \int_{X\setminus A} |f_n - f| \, d\mu + \int_A |f_n - f| \, d\mu \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \mu(X \setminus A) + \int_A 2\varphi \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

Теорема Леві про монотонну збіжність.

Теорема 9.2. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L(X,\mu)$ така, що при всіх $n\in\mathbb{N}$*

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \qquad \textit{майже для всіх} \quad x \in X,$$

і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu = M < \infty,$$

то майже для всіх $x \in X$ існує скінченна границя

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому $f \in L(X,\mu)$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що $f_1 \ge 0$. Дійсно, загальний випадок зводиться до цього, якщо перейти до послідовності $g_n := f_n - f_1$.

З монотонності послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що всіх $x \in X$ або існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$.

Розглянемо лебегові множини

$$\Omega_n^r := \{f_n > r\}, \qquad n, r \in \mathbb{N},$$

і множину

$$\Omega := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}.$$

Зауважимо (перевірити самостійно), що

$$\Omega = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r.$$

Звідки, зокрема, робимо висновок, що $\Omega \in \mathcal{U}$. З огляду на нерівність Чебишева

$$\mu(\Omega_n^r) \le \frac{1}{r} \int_X f_n\, d\mu \le \frac{M}{r}.$$

Оскільки $f_n \le f_{n+1}$, то

$$\Omega_n^r \subset \Omega_{n+1}^r, \qquad n, r \in \mathbb{N}.$$

Тому з врахуванням неперервності міри μ маємо, що

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^r\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(\Omega_n^r) \le \frac{M}{r}.$$

Беручи до уваги, що

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^r, \qquad r \in \mathbb{N},$$

отримуємо нерівність

$$\mu(\Omega) \le \frac{M}{r}, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

З довільності r випливає, що $\mu(\Omega) = 0$.

Покладемо

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{якщо} \;\; x \in X \setminus \Omega; \\ 0, & \text{якщо } x \in \Omega. \end{cases}$$

З означення функції f випливає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до f. А, отже, f є вимірна.

Розглянемо просту вимірну функцію $g(x) := [f(x)] + 1$ і множини

$$A_r := \{f \le r\}, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

Тут $[y]$ - ціла частина числа y. Оскільки функції f і g є вимірні і обмежені на A_r, то вони є інтегровні на A_r.

Використовуючи теорему про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_{A_r} g\,d\mu \le \int_{A_r}(f+1)\,d\mu = \mu(A_r) + \int_{A_r} f\,d\mu = \mu(A_r) + \lim_{n\to\infty}\int_{A_r} f_n\,d\mu \le \mu(X) + M.$$

Оскільки $f \ge 0$, то значеннями функції g можуть бути тільки натуральні числа. Легко бачити, що

$$\sum_{j=1}^{r+1} j g^{-1}(\{j\}) = \int_{A_r} g\,d\mu \le \mu(X) + M.$$

А, отже, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j g^{-1}(\{j\})$ є збіжний, тобто $g \in L(X,\mu)$. Очевидно, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in X.$$

Тоді твердження теореми випливає з теореми про мажоровану збіжність. $\square$

Інтегрування рядів.

Наслідок 9.3. *Нехай послідовність невід'ємних функцій $f_n \in L(X,\mu)$ така, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається майже для всіх $x \in X$, а його сума є інтегровною функцією і

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Теорема Фату.

Теорема 9.4. *Якщо послідовність невід'ємних функцій $f_n \in L(X,\mu)$ збігається майже скрізь до функції f і*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = M < \infty,$$

то $f \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X f \, d\mu \le M.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну послідовність функцій

$$\varphi_n(x) := \inf_{j\ge n} f_j(x), \qquad x \in X.$$

Функції φ_n є вимірними. Дійсно, неважко бачити, що для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{\varphi_n < c)\} = \bigcup_{j=n}^{\infty} \{f_j < c\}.$$

Оскільки $0 \le \varphi_n \le f_n$ і $f_n \in L(X,\mu)$, то $\varphi_n \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X \varphi_n \, d\mu \le \int_X f_n \, d\mu \le M.$$

Очевидно, що

$$\varphi_n \le \varphi_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і послідовність $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до функції f.

Тому з теореми Леві випливає, що $f \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu \le M.$$

□

Вправа 9.5. *Нехай* $(X,\mathcal{U},\mu)$ *простір з мірою,* $f \in L(X,\mu)$ *і* $f \geq 0$.

1) Доведіть, що формула

$$\nu(A) := \int\limits_A f\,d\mu$$

задає зліченно адитивну міру на σ*-алгебрі* $\mathcal{U}$.

2) Доведіть, що для довільної зростаючої послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *множин алгебри* $\mathcal{U}$ *справедлива рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\,d\mu =: \int_A f\,d\mu,$$

де $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

10. Зв'язок між інтегралом Лебега і Рімана. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. Прямий добуток мір. Теорема Фубіні.

Зв'язок між інтегралом Лебега і Рімана.

Нехай множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є обмежена і вимірна за Жорданом, а функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ інтегровна на Ω за Ріманом. Виявляється, що тоді функція f інтегровна на Ω за Лебегом і при цьому інтеграл Лебега $\int_\Omega f\,d\mu_n$ є рівний інтегралу Рімана $\int_\Omega f(x)\,dx$.

Ми переконаємося в цьому лише у випадку функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Теорема 10.1. *Якщо функція* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *інтегровна на проміжку* $[a,b]$ *за Ріманом, то вона інтегровна на проміжку* $[a,b]$ *за Лебегом і інтеграли Лебега і Рімана рівні:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_1.$$

Доведення. Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна на проміжку $[a,b]$ за Ріманом. Позначимо через τ_n $(n \in \mathbb{N})$ розбиття проміжка $[a,b]$ на 2^n рівних частин точками

$$x_{n,k} = a + \frac{k}{2^n}(b-a).$$

Цьому розбиттю відповідають верхня та нижня суми Дарбу:

$$S_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}, \qquad s_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k}.$$

Тут

$$M_{n,k} := \sup_{x \in \Delta_k} f(x), \qquad m_{n,k} := \inf_{x \in \Delta_k} f(x),$$

де $\Delta_{n,k} = [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$. Згідно означення інтеграла Рімана

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Розглянемо функції

$$F_n(x) = M_{n,k}, \quad \text{якщо} \quad x \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}),$$

$$f_n(x) = m_{n,k}, \quad \text{якщо} \quad x \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}).$$

В точці $x = b$ функції F_n і f_n покладаємо рівними $f(b)$. Функції F_n і f_n є простими інтегровними за Лебегом функціями, причому

$$\int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = S_n, \qquad \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 = s_n.$$

Звідси, зокрема випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1. \tag{10.1}$$

З побудови функцій F_n і f_n випливає, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \qquad F_{n+1}(x) \le F_n(x)$$

і

$$f_n(x) \le f(x) \le F_n(x).$$

Тому для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{[a,b]} f_1\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} F_1\,d\mu_1.$$

Отже, для послідовностей $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ виконані умови теореми Леві. З теореми Леві про монотонну збіжність випливає, що майже для всіх $x \in [a,b]$ (стосовно міри μ_1) існують границі

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому функції G і g є μ_1-інтегровними на $[a,b]$ і:

$$g(x) \le f(x) \le G(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b], \tag{10.2}$$

$$\int\limits_{[a,b]} G\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 = \int_a^b g(x)\,d\mu_1.$$

Зі сказаного отримуємо, що $G(x) - g(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in [a,b]$ і

$$\int\limits_{[a,b]} (G-g)\,d\mu_1 = 0.$$

З наслідку 7.15, що випливає з нерівності Чебишева, отримуємо, що функція $G-g$ рівна нулю майже для всіх $x \in [a,b]$. Отже, (див. нерівність 40.1)

$$G(x) = f(x) = g(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b],$$

тобто f є еквівалентна μ_1-інтегровній функції. Тому з властивостей інтеграла Лебега випливає, що f є μ_1-інтегровна, причому

$$\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_1 = \int\limits_{[a,b]} G\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. Обмежені міри є дуже зручним інструментом, проте, часто доводиться працювати з мірами, що можуть приймати нескінченні значення. Наприклад, такою є міра Лебега μ_n в $\mathbb{R}^n$.

Означення 10.2. *Нехай $(X,\mathcal{U},\mu)$ - простір з мірою, де $\mathcal{U}$ є σ-алгеброю, а μ невід'ємна σ-адитивна міра, яка може приймати значення $+\infty$. Міру μ ми назвемо σ-скінченною, якщо X можна подати у вигляді зліченного об'єднання $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ вимірних множин скінченної міри ($\mu(X_j) < \infty$).*

Нехай $(X,\mathcal{U},\mu)$ - простір з σ-скінченною мірою. Послідовність (X_n) в $\mathcal{U}$ ми назвемо вичерпною, якщо $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ і

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (X_n \subset X_{n+1}) \wedge (\mu(X_n) < \infty).$$

Позначимо через $L(X,\mu)$ множину всіх $f : X \to \mathbb{R}$ таких, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція f інтегровна на X_n і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} |f|\,d\mu < \infty.$$

Вправа 10.3. *1) Множина* $L(X,\mu)$ *не залежить від вибору вичерпної послідовності* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Для кожної функції $f \in L(X,\mu)$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f\,d\mu =: \int_X f\,d\mu,$$

яка теж не залежить від вибору вичерпної послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Прямий добуток мір. Теорема Фубіні.

Нехай $(X_1,\mathcal{U}_1,\nu_1)$ і $(X_2,\mathcal{U}_2,\nu_2)$ простори з мірою ($\mathcal{U}_j$ - σ-алгебри). Розглянемо систему підмножин

$$\Pi_2 := \{A = A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{U}_1, \quad A_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

множини $X \times Y$. Елементи системи Π_2 можна сприймати як абстрактні прямокутники.

Система Π_2 утворює півкільце з одиницею. Дійсно, одиницею в Π_2 є множина $X_1 \times X_2$ і, як легко бачити, справедливі рівності

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = (A_1 \setminus B_1) \times A_2 \sqcup (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2).$$

Теорема 10.4. *Для довільного* $A = A_1 \times A_2$ *з півкільця* Π_2 *покладемо за означенням*

$$\mu(A) := \nu_1(A_1)\cdot\nu_2(A_2). \tag{10.3}$$

Формула (10.3) *задає на* Π_2 *міру на півкільці* Π_2.

Доведення. Нехай $C, C_n \in \Pi_2$, причому

$$C = A \times B, \qquad C_n = A_n \times B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

і

$$C = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n. \tag{10.4}$$

Покажемо, що виконується рівність

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n).$$

Розглянемо функції

$$f(x,y) := \chi_A(x)\chi_B(y), \qquad f_n(x,y) := \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y), \qquad x \in X_1, \quad y \in X_2.$$

З формули (10.4) випливає, що

$$f_n(x,y) \le f_{n+1}(x,y) \le f(x,y)$$

і

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y).$$

Зауважимо, що функції f і f_n приймають скінченну кількість значень і є інтегровні за кожною змінною. Зокрема,

$$\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x) \le \int_A f(x,y)\,d\nu_1(x), \qquad y \in B,$$

$$\int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) \le \int_B \left(\int_A f(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \left(\int_B \chi_B\,d\nu_2\right)\left(\int_A \chi_A\,d\nu_1\right) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Бачимо, що виконані умови теореми Леві про монотонну збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \int_B \left(\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Оскільки

$$\int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_B \left(\int_A \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \sum_{j=1}^{n} \nu_1(A_j)\nu_2(B_j),$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_1(A_j)\nu_2(B_j) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Отже, μ - міра. $\square$

Означення 10.5. *Лебегове продовження міри μ, що задана формулою* (10.3), *ми назвемо прямим добутком мір ν_1 та ν_2 і позначимо через $\nu_1 \otimes \nu_2$.*

Нехай $(X_j, \mathcal{U}_j, \nu_j)$ - простори з мірою ($j = 1, \ldots, n$). Розглянемо систему підмножин

$$\Pi_n := \{A = A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, \quad A_n \in \mathcal{U}_n\}$$

множини $X \times Y$. Елементи системи Π_n можна сприймати як абстрактні паралепіпеди. Для довільного $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ з півкільця Π_n покладемо за означенням

$$\mu(A) := \prod_{j=1}^{n} \nu_j(A_j). \tag{10.5}$$

Формула (10.5) задає на Π_n міру. Лебегове продовження міри μ ми назвемо прямим добутком мір $\nu_j, j = 1, \ldots, n.$, і позначимо через

$$\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n.$$

Наприклад, n-та степінь міри Лебега μ_1 дає міру Лебега μ_n:

$$\mu_n := \underbrace{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_1}_{n}.$$

Теорема Фубіні. Теорема Фубіні це теорема про зведення подвійного інтеграла до повторного. Ми сформулюємо цю теорему в дещо спрощеній формі.

Теорема 10.6. *Нехай* $(X, \mathcal{U}_x, \nu_x)$ *і* $(Y, \mathcal{U}_y, \nu_y)$ *- простори з мірами і* $\nu := \nu_x \otimes \nu_y$. *Нехай функція*

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

інтегровна на $X \times Y$ *за мірою* ν. *Тоді*

$$\int\limits_{X \times Y} f \, d\nu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \, d\nu_y \right) d\nu_x = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) \, d\nu_x \right) d\nu_y. \tag{10.6}$$

При цьому твердження теореми включає в себе існування внутрішніх інтегралів при майже всіх значеннях змінної, за якою беруться зовнішні інтеграли.

11. Практичне заняття. Інтеграл Лебега. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Граничний перехід під знаком інтеграла.

Задача 11.1. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 1]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до нульової функції всюди, крім точки

$$x = 1,$$

тобто збігається до нуля майже скрізь на X. Крім того,

$$|f_n(x)| = |x^n| \le 1, \qquad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 0 \, d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.2. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 4]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (1, 4]); \\ 1/2, & \text{якщо } x = 1; \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Крім того,

$$|f_n(x)| = |x^n| \le 1, \qquad x \in [0, 4], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_1 = \int_1^4 1 \, d\mu_1 = 3.$$

Задача 11.3. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 2]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Вияснимо до якої функції збігається послідовність f_n. При $x \in [0,1)$ ми маємо

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1;$$

при $x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1/2;$$

при $x \in (1,2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 0.$$

Отже, майже скрізь (за мірою μ_1) наша послідовність збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ 0, & \text{якщо } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Крім того, видно, що

$$|f_n(x)| \le 1, \qquad x \in [0,2], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu_1 = \int_{[0,1)} 1\,d\mu_1 = 1.$$

Задача 11.4. *Розглянемо на проміжку $X = [0, 2\pi]$ послідовність функцій*

$$f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до нульової функції всюди, крім точок

$$\pi k/2, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

тобто збігається до нуля майже скрізь на X. Оскільки

$$|f_n(x)| \le 2, \qquad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

то функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu_1 = \int_X 0\,d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.5. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,2]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ 1/2, & \text{якщо } x = 1; \\ 0, & \text{якщо } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Крім того,

$$f_n(x) \le 2, \qquad x \in [0,2], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1 = \int_X f\,d\mu_1 = \int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

Задача 11.6. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,\infty]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ 1/3, & \text{якщо } x = 1; \\ 0, & \text{якщо } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Крім того,

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}} \le 1/2, \qquad x \in [0,1],$$

і

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}} \le \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [1,\infty).$$

Оскільки
$$\frac{1}{1+x^2} \geq 1/2, \qquad x \in [0,1],$$
то
$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [0,\infty).$$
Отже, послідовність (f_n) має спільну інтегровну мажоранту.

Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність φ. Отже,
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 1/2 \, d\mu_1 = 1/2.$$

Задача 11.7. *Розглянемо на проміжку $X = [0,\infty]$ послідовність функцій*
$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+\sin^{2n} x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Знайдіть границю
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Оскільки
$$\lim_{n\to\infty} \sin^{2n} x = 0$$
для всіх x, крім точок множини
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$
Множина A є зліченна, а, отже, $\mu_1(A) = 0$. Тому послідовність f_n збігається майже скрізь до функції
$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$
Крім того,
$$|f_n(x)| \leq e^{-x}, \qquad x \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Отже, послідовність (f_n) має спільну інтегровну мажоранту $\varphi(x) = e^{-x}$.

Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність φ. Отже,
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty e^{-x} \, d\mu_1 = 1.$$

Задача 11.8. *Розглянемо на проміжку $X = [0,\infty)$ послідовність функцій*
$$f_n(x) = e^{-nx} \operatorname{arctg} x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Знайдіть границю
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до нульової функції. Дійсно,
$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx} \operatorname{arctg} x = 0.$$
Тут окремо потрібно розглянути випадки $x > 0$ і $x = 0$. Крім того, оскільки
$$e^{-nx} \le e^{-x}, \qquad \operatorname{arctg} x \le \pi/2 \le 2, \qquad x \ge 0,$$
то
$$|f_n(x)| \le 2e^{-x}, \qquad x \ge 0.$$
Функція $2e^{-x}$ є інтегровною на $[0,\infty)$. Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\, d\mu_1 = \int_0^\infty 0\, d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.9. *Розглянемо на проміжку $X = \mathbb{R}$ послідовність функцій*
$$f_n(x) = \frac{e^{-|x|}}{1+x^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Знайдіть границю
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Знайдемо границю
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-|x|}}{1+x^{2n}}.$$
Оскільки при $|x| < 1$
$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0,$$
а при $|x| > 1$
$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty,$$
то
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & \text{якщо } |x| < 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1; \\ 1/2e, & \text{якщо } x = 1 \text{ або } x = -1. \end{cases}$$

Крім того,
$$|f_n(x)| \le e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
і функція $e^{-|x|}$ є інтегровна.

Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu_1 = \int_{-1}^1 e^{-|x|}\, dx = 2\int_0^1 e^{-x}\, dx = 2(1-e^{-1}).$$

Задача 11.10. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, \infty)$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Крім того, оскільки

$$e^{-x/n} \leq 1, \qquad x \geq 0,$$

то

$$f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

Зауважимо, що функція f є інтегровна і

$$\int_0^\infty f \, d\mu_1 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2.$$

Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty f \, d\mu_1 = \pi/2.$$

Задача 11.11. *Розглянемо на проміжку* $X = \mathbb{R}$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{-|x|} \cos^n x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до нульової функції. Крім того, оскільки

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) := e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що функція φ. Отже, наша послідовність має спільну інтегровну мажоранту. Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty 0 \, d\mu_1 = 0.$$

12. Функції обмеженої варіації. Міри Лебега-Стільтьєса.

Функції обмеженої варіації.

Означення 12.1. *Функція $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$, якщо існує стала $C > 0$ така, що для довільного розбиття $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ проміжка $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) виконується нерівність*

$$\sigma(f, \tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq C. \tag{12.1}$$

Означення 12.2. *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ є функцією обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$. Тоді величина*

$$\sup_{\tau} \sigma(f, \tau)$$

називається варіацією функції f на проміжку $[a, b]$ і позначається через $V_a^b[f]$, тобто

$$V_a^b[f] = \sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \tag{12.2}$$

де точна верхня грань береться по множині всіх розбиттів τ відрізка $[a, b]$.

Очевидно, що кожна монотонна функція f на проміжку $[a, b]$ є функцією обмеженої варіації, причому для неї виконується рівність

$$V_a^b[f] = |f(b) - f(a)|.$$

Множину всіх функцій обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$ позначимо через $V[a, b]$.

Теорема 12.3. *$V[a, b]$ є лінійним простором над полем комлексних чисел, причому для довільних $f, g \in V[a, b]$ і довільних $\lambda \in \mathbb{C}$ маємо*

$$V_a^b[f + g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g], \qquad V_a^b[\lambda f] = |\lambda| V_a^b[f].$$

Якщо для деякої $f \in V[a, b]$ маємо $V_a^b[f] = 0$, то функція f є сталою.

Доведення. Нехай $f, g \in V[a,b]$ і $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ - довільне розбиття проміжка $[a,b]$. Оскільки

$$|(f+g)(x_j) - (f+g)(x_{j-1})| \le |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |g(x_j) - g(x_{j-1})|,$$

то

$$\sigma(f+g, \tau) \le \sigma(f, \tau) + \sigma(g, \tau).$$

Звідки випливає, що

$$\sigma(f+g, \tau) \le \sup_\tau \sigma(f, \tau) + \sup_\tau \sigma(g, \tau) = V_a^b[f] + V_a^b[g].$$

А, отже,

$$V_a^b[f+g] \le V_a^b[f] + V_a^b[g].$$

Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки

$$\sigma(\lambda f, \tau) = |\lambda| \sigma(f, \tau),$$

то

$$V_a^b[\lambda f] = \sup_\tau \sigma(\lambda f, \tau) = |\lambda| \sup_\tau \sigma(f, \tau) = |\lambda| V_a^b[f].$$

Якщо f не є постійна, то, як легко бачити, $V_a^b[f] > 0$. Тому з умови $V_a^b[f] = 0$ випливає, що f є постійна. $\square$

Теорема 12.4. *Нехай $f \in V[a,b]$ і $c \in (a,b)$. Тоді*

$$V_a^b[f] = V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

Доведення. Нехай $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ - довільне розбиття проміжка $[a,b]$. Позначимо через $\widetilde{\tau}$ розбиття τ з доданою точкою c, тобто $\widetilde{\tau} = \tau \cup \{c\}$. Нехай точка c потрапляє між точками x_{j-1} і x_j. Оскільки

$$|f(x_{j-1}) - f(x_j)| \le |f(x_{j-1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|,$$

то

$$\sigma(f, \tau) \le \sigma(f, \widetilde{\tau}).$$

Розбиття $\widetilde{\tau}$ є об'єднанням розбиття $\tau' = \{x_k\}_{k=0}^{j-1} \cup \{c\}$ проміжка $[a,c]$ і розбиття $\tau'' = \{x_k\}_{k=j}^n \cup \{c\}$ проміжка $[c,b]$. Оскільки

$$\sigma(f, \widetilde{\tau}) = \sigma(f, \tau', [a,c]) + \sigma(f, \tau'', [c,b]) \le V_a^c[f] + V_c^b[f],$$

то

$$\sigma(f, \tau) \le \sigma(f, \widetilde{\tau}) \le V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

А, отже,

$$V_a^b[f] \le V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

Оскільки
$$\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b])=\sigma(f,\widetilde{\tau})\le V_a^b[f],$$
то
$$\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b])\le V_a^b[f],$$
для довільних розбиттів τ' і τ'' проміжків $[a,c]$ і $[c,b]$ відповідно. Тому
$$V_a^b[f]\ge\sup_{\tau'}\sup_{\tau''}(\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b]))=V_a^c[f]+V_c^b[f].$$
Тим самим теорема доведена. □

Теорема 12.5. *Кожну дійснозначну функцію $f\in V[a,b]$ можна подати як різницю двох монотонно неспадних функцій на проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Нехай $f\in V[a,b]$. Розглянемо функцію
$$g(x):=V_a^x[f],\qquad x\in[a,b].$$
Нехай $a\le x_1<x_2\le b$. З попередньої теореми випливає, що
$$g(x_2)-g(x_1)=V_{x_1}^{x_2}[f]\ge 0.$$
Тому g є монотонно неспадна. Покажемо, що функція
$$h(x)=g(x)-f(x),\qquad x\in[a,b]$$
теж є монотонно неспадна. Якщо $a\le x_1<x_2\le b$, то
$$h(x_2)-h(x_1)=g(x_2)-g(x_1)-(f(x_2)-f(x_1))=V_{x_1}^{x_2}[f]-(f(x_2)-f(x_1)).$$
Оскільки
$$V_{x_1}^{x_2}[f]\ge|f(x_2)-f(x_1)|,$$
то
$$h(x_2)-h(x_1)=V_{x_1}^{x_2}[f]-(f(x_2)-f(x_1))\ge 0,$$
тобто h є монотонно неспадною. Враховуючи, що
$$g-h=g-(g-f)=f$$
отримуємо твердження теореми. □

Теорема 12.6. *Кожна функція $f\in V[a,b]$ має тільки точки розриву першого роду і їх є не більше ніж зліченна кількість.*

Доведення. Нехай $f \in V[a,b]$. Очевидно, що функції

$$u(x) := \operatorname{Re} f(x), \quad v(x) := \operatorname{Im} f(x)$$

є дійснозначними функціями обмеженої варіації. Кожну з них можна подати у вигляді різниці монотонно неспадних:

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x), \qquad v(x) = v_1(x) - v_2(x), \qquad x \in [a,b].$$

Отже, f є лінійною комбінацією монотонних функцій:

$$f(x) = u_1(x) - u_2(x) + iv_1(x) - iv_2(x).$$

Тому теорему досить довести для монотонно неспадної функції. Нехай f монотонно неспадна функція. Тоді існування границь

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(x+\varepsilon), \qquad f(x-0) := \lim_{\varepsilon\to+0} f(x-\varepsilon)$$

випливає з теореми Вейєрштраса про існування границі монотонної послідовності. Нехай

$$h(x) = f(x+0) - f(x-0)$$

стрибок функції f в точці x. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ множина

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 1/m\}$$

скінченна, причому число її елементів не перевищує число

$$(f(b) - f(a))m.$$

Зі сказаного випливає, що множина точок розриву

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 0\}$$

є не більш як зліченна. Дійсно:

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in (a,b) \mid h(x) > 1/m\}.$$

Тим самим теорема доведена. $\square$

Означення 12.7. *Ми скажемо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ має обмежену варіацію на $\mathbb{R}$, якщо вона має обмежену варіацію на кожному скінченному проміжку і існує стала $C > 0$ така, що для всіх $n \in \mathbb{N}$*

$$V_{-n}^{n}[f] \le C.$$

Ми покладаємо за означенням

$$V_{-\infty}^{\infty}[f] := \lim_{n\to\infty} V_{-n}^{n}[f].$$

Множину всіх функцій обмеженої варіації на $\mathbb{R}$ ми позначаємо через $V(\mathbb{R})$.

Вправа 12.8. *Довести, що для функції $f \in V(\mathbb{R})$, існують границі*

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

13. Практичне заняття: Задачі на знаходження варіації функції.

Нидче ми розглянемо ряд нескладних задач на обчислення варіації функції на проміжку $[a, b]$.

Ми використаємо просте спостереження: Варіація монотонної функції на проміжку $[a, b]$ є рівна модулю її приросту на цьому проміжку.

А що робити, якщо функція f не є монотонна на проміжку $[a, b]$. У цьому випадку потрібно спробувати розбити $[a, b]$ на проміжки монотонності і обчислити варіацію на кожному з цих проміжків, а потім знайти суму.

Задача 13.1. *Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0, \pi]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є монотонна на проміжках $[0, \pi/2]$ і $[\pi/2, \pi]$. Варіація f на кожному з цих проміжків дорівнює одиниці (модуль приросту). Тому варіація на всьому проміжку є рівна 2.

Задача 13.2. *Розглянемо функцію $f(x) = |\sin x|$ на проміжку $[0, 6\pi]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є неперервна і періодична з періодом π. Тому досить обчислити варіацію на проміжку $[0, \pi]$ і помножити на 6. Отже, варіація рівна 12.

Задача 13.3. *Розглянемо функцію $f(x) = x^2$ на проміжку $[-2, 3]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є монотонна на проміжках $[-2, 0]$ і $[0, 3]$. Варіація f на першому рівна 4, а на другому 9. Тому варіація на всьому проміжку рівна 13.

Задача 13.4. *Розглянемо функцію $f(x) = |x - 2|$ на проміжку $[-2, 4]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є два. А власне, $[-2, 2], [2, 4]$. Варіація на проміжку $[-2, 2]$ рівна 4, а варіація на проміжку $[2, 4]$ рівна 2. Тому варіація на проміжку $[-2, 4]$ рівна сумі $4 + 2 = 6$.

Задача 13.5. *Розглянемо функцію $f(x) = |x^2 - 1|$ на проміжку $[-2, 3]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є чотири. А власне, $[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 3]$. Тому варіація на проміжку $[-2, 3]$. рівна сумі $3 + 1 + 1 + 8 = 13$.

Задача 13.6. *Розглянемо функцію $f(x) = |x^2 - 4|$ на проміжку $[-4, 5]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є чотири. А власне, $[-4, -2], [-2, 0], [0, 2], [2, 5]$. Тому варіація на проміжку $[-4, 5]$ рівна сумі $12 + 4 + 4 + 21 = 41$.

Задача 13.7. *Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 3x$ на проміжку $[-3, 2]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є три. А власне, $[-3, -1], [-1, 1], [1, 2]$. Тому варіація на проміжку $[-3, 2]$ рівна сумі

$$|f(-3) - f(-1)| + |f(-1) - f(1)| + |f(1) - f(2)| = 20 + 4 + 4 = 28.$$

Задача 13.8. *Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ на проміжку $[-2, 2]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Задача 13.9. *Розглянемо функцію $f(x) = x[x]$ на проміжку $[-1, 4]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Задача 13.10. *Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 12x$ на проміжку $[-3,3]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Вправа 13.11. *Нехай $f \in V([a,b])$. Тоді $|f| \in V([a,b])$ і*
$$V_a^b[|f|] \le V_a^b[f].$$
А коли справедлива рівність?

14. Дійснозначні та комплекснозначні міри.

Означення 14.1. *Комплекснозначну міру на $\mathbb{R}^n$ назвемо борелівською, якщо вона задана на всіх борелівських множинах $\mathbb{R}^n$ і приймає скінченні значення. Множину всіх борелівських мір на $\mathbb{R}^n$ позначимо через $\boldsymbol{M}(\mathbb{R}^n)$.*

Сьогодні ми перейдемо до розгляду дійснозначних мір і скажемо декілька слів про комплекснозначні міри. Ми вже давали загальне означення міри на системі множин. Для зручності наведемо його ще раз.

Означення 14.2. *Нехай $\mathcal{A}$ - система підмножин множини X. Числову функцію*
$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C})$$
назвемо дійснозначною (комплекснозначною) мірою, якщо вона є зліченно адитивною, тобто:

(1) *для довільної диз'юнктивної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$, для якої $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, виконується рівність*

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14.1}$$

Дійснозначні міри часто називають зарядами. Така термінологія прийшла з фізики (електричні заряди). Однак, ми будемо вживати термін "міра"і стосовно невід'ємних мір, і стосовно дійснозначних або комплекснозначних мір.

В даній лекції ми будемо розглядати міри, що задані виключно на σ-алгебрах множин і приймають скінченні значення. Це значною мірою спростить формулювання і доведення наших тверджень. Випадок, коли міра може приймати нескінченнні значення теж можна розглядати (дивись рекомендований підручник).

Нагадаємо, що для невід'мних мір виконується властивість, яку ми називаємо неперервністю міри. Виявляється, що вона виконується і для дійснозначних (комплекснозначних) мір.

Теорема 14.3. *Нехай дійснозначна (комплекснозначна) міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Тоді для довільної монотонно зростаючої послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$ маємо, що*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{14.2}$$

А для довільної монотонно спадної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$ маємо, що

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{14.3}$$

Доведення. Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ є монотонно зростаючою. Розглянемо допоміжну послідовність

$$B_n := A_n \setminus A_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \quad (A_0 := \emptyset).$$

Очевидно, що послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ є диз'юнктивною і

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j = A_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Оскільки з (14.1) випливає скінченна адитивність, то

$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тому з врахуванням (14.1) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Нехай тепер $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ є монотонно спадною. Покладемо

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

і розглянемо допоміжну послідовність

$$B_n := A_n \setminus A_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ є диз'юнктивною і справедливі рівності (подумайте чому?)

$$\bigsqcup_{j=n}^{\infty} B_j = A_n \setminus A, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З огляду на (14.1)

$$\mu(A_n \setminus A) = \sum_{j=n}^{\infty} \mu(B_j) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Враховуючи, що $A_n = (A_n \setminus A) \sqcup A$, маємо

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus A) + \mu(A).$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A) = \mu(A).$$

□

Нехай у нас є дві невід'ємні міри μ_1 і μ_2, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Розглянемо їх різницю

$$\mu := \mu_1 - \mu_2.$$

Очевидно, що μ є дійснозначною мірою. Виникає закономірне питання: "Чи кожна дійснозначна міра є різницею двох невід'ємних мір?"Виявляється, що так. Але, доведення цього факту є нетривіальним і потребує значних зусиль.

Означення 14.4. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Множину $A \in \mathcal{A}$ назвемо позитивною (стосовно міри μ), якщо*

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad B \subset A \Longrightarrow \mu(B) \geq 0.$$

Аналогічно множину $A \in \mathcal{A}$ назвемо негативною (стосовно міри μ), якщо

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad B \subset A \Longrightarrow \mu(B) \leq 0.$$

Лема 14.5. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Якщо $E \in \mathcal{A}$ і $\mu(E) > 0$, то в E міститься позитивна множина A така, що $\mu(A) > 0$.*

Доведення. Нехай $E \in \mathcal{A}$ і $\mu(E) > 0$. Якщо E є позитивною, то доведення завершене. Нехай E не є позитивною множиною. Тоді в E є підмножини, що мають від'ємну міру. Позначимо через n_1 найменше натуральне число, для якого існує $B_1 \subset E$ таке, що

$$\mu(B_1) \leq -\frac{1}{n_1}.$$

Розглянемо множину $E_1 = E \setminus B_1$. Очевидно, що $\mu(E_1) > \mu(E) > 0$. Якщо E_1 є позитивною, то доведення завершене. Якщо ні, то позначимо через n_2 найменше натуральне число, для якого існує $B_2 \subset E_1$ таке, що

$$\mu(B_2) \leq -\frac{1}{n_2}.$$

Покладемо $E_2 = E_1 \setminus B_2$. Повторюючи вказану процедуру за індукцією будуємо послідовність (E_j). Вона може обірватися на якомусь кроці. Це означає, що останнє E_n є позитивною множиною і на цьому доведення завершується. Якщо послідовність не обривається, то ми отримуємо послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що

$$E_{n+1} \subset E_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і

$$\mu(E_{n+1}) > \mu(E_n) > \mu(E) > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14.4}$$

а також диз'юнктивну послідовність $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\mu(B_k) \leq -\frac{1}{n_k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Зі зліченної адитивності випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. Оскільки

$$\frac{1}{n_k} \leq -\mu(B_k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

то збігається також і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$. А зі збіжності цього ряду випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0. \tag{14.5}$$

Розглянемо множину $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. З неперервності міри з врахуванням (14.4) випливає, що

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \geq \mu(E) > 0.$$

Припустимо, що множина A не є позитивна. Тоді в ній є підмножина B така, що

$$\mu(B) < 0.$$

Тоді існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\mu(B) \leq -\frac{1}{m}.$$

Зауважимо, що B належить кожному E_n. Тому з означень чисел n_k випливає, що

$$n_k \leq m, \qquad k \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{m}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

А це суперечить (14.5). Лема доведена. □

Вправа 14.6. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і $A \in \mathcal{A}$. Якщо A є підмножиною позитивної множини, то A є позитивною. Якщо A є скінченним або зліченним об'єднанням позитивних множин, то A є позитивною.*

Розклад Гана.

Теорема 14.7. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і X - одиниця в $\mathcal{A}$. Тоді в $\mathcal{A}$ існують позитивна множина X_+ і негативна X_- такі, що*

$$X = X_+ \bigsqcup X_-. \tag{14.6}$$

Такий розклад множини X називають розкладом Гана.

Доведення. Позначимо через Σ_+ сімейство всіх позитивних стосовно міри μ множин. Покладемо

$$\alpha := \sup_{A \in \Sigma_+} \mu(A).$$

Припустимо, що $\alpha = +\infty$. Тоді з означення супремуму випливає, що існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ позитивних множин, для якої

$$\mu(A_n) \geq n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно вправи 14.6 множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ є позитивною. Але, оскільки $A_n \subset A$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\mu(A) \geq \mu(A_n) \geq n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

А це неможливо, бо $\mu(A) \in \mathbb{R}$. Суперечність. Тому $\alpha < \infty$. З означення супремума випливає, що існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ позитивних множин, для яких

$$\mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

Згідно вправи 14.6 множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ є позитивною. Але, оскільки $A_n \subset A$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\mu(A) \geq \mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

А, отже, $\mu(A) \geq \alpha$. Тому з огляду на означення числа α маємо, що $\mu(A) = \alpha$.

Покажемо тепер, що множина $A' = X \setminus A$ є негативною. Припустимо, що це не так. Тоді в A' існує підмножина $D \in \mathcal{A}$ така, що $\mu(D) > 0$. Тоді згідно леми 14.5 в D є позитивна множина B з $\mu(B) > 0$. Розглянемо множину $\widetilde{A} = A \cup B$ вона є позитивна (див. вправу 14.6). Оскільки $A \cap B = \emptyset$, то

$$\mu(\widetilde{A}) = \mu(A) + \mu(B) \geq \alpha + \mu(B) > \alpha.$$

Але, згідно означення числа α маємо, що $\mu(\widetilde{A}) \leq \alpha$. Суперечність. Отже множина A' є негативною. Залишається покласти за означенням

$$X_+ := A, \qquad X_- := A'.$$

$\square$

Зауваження 14.8. *Розклад Гана не є єдиним. Подумайте, чому.*

Розклад Жордана.

Означення 14.9. *Нехай μ_1 і μ_2 невід'ємні міри, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ з одиницею X. Ми скажемо, що вони є взаємно сингулярними (скорочений запис $\mu_1 \perp \mu_2$), якщо X можна подати у вигляді $X = X_1 \bigsqcup X_2$, де $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ і*

$$\mu_1(X_2) = 0, \qquad \mu_2(X_1) = 0.$$

Теорема 14.10. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і X - одиниця в $\mathcal{A}$. Тоді існує єдина пара взаємно сингулярних невід'ємних мір μ_+, μ_- на $\mathcal{A}$ таких, що*

$$\mu = \mu_+ - \mu_-.$$

Такий розклад дійснозначної міри μ називають розкладом Жордана.

Доведення. Нехай $X = X_+ \bigsqcup X_-$ – розклад Гана для міри μ. Покладемо за означенням

$$\mu_+(A) := \mu(A \cap X_+), \qquad \mu_-(A) := -\mu(A \cap X_-), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Очевидно, що μ_+ і μ_- є невід'ємними мірами на $\mathcal{A}$, причому

$$(\mu_+ - \mu_-)(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A) = \mu(A \cap X_+) + \mu(A \cap X_-) = \mu(A),$$

тобто $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Крім того, з означень випливає, що $\mu_+ \perp \mu_-$. Тим самим існування розкладу Жордана доведено. Доведемо єдиність. Припустимо, що є друга пара мір $\widetilde{\mu}_+$ і $\widetilde{\mu}_-$ така, що $\mu = \widetilde{\mu}_+ - \widetilde{\mu}_-$ і $\widetilde{\mu}_+ \perp \widetilde{\mu}_-$. Нехай другій парі відповідає розклад $X = \widetilde{X}_+ \bigsqcup \widetilde{X}_-$, тобто

$$\widetilde{\mu}_+(\widetilde{X}_-) = 0, \qquad \widetilde{\mu}_-(\widetilde{X}_+) = 0.$$

Зауважимо, що розклад $X = \widetilde{X}_+ \bigsqcup \widetilde{X}_-$ є розкладом Гана. Припустимо, що $A \in \mathcal{A}$ і

$$A \subset X_+ \setminus \widetilde{X}_+.$$

Тоді

$$\mu_+(A) = \mu(A) = -\widetilde{\mu}_-(A),$$

а, отже, $\mu(A) = 0$. Аналогічно показуємо, що якщо $A \subset \widetilde{X}_+ \setminus X_+$, то $\mu(A) = 0$. Тому для довільних $B \in \mathcal{A}$ таких, що $B \subset X_+ \cup \widetilde{X}_+$ маємо

$$\mu(B) = \mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+) + \mu(A \setminus X_+) + \mu(A \setminus \widetilde{X}_+) =$$

$$\mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+) + 0 + 0 = \mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+).$$

Звідки отримуємо, що

$$\mu_+(B) = \widetilde{\mu}_+(B).$$

Звідки випливає, що $\mu_+ = \widetilde{\mu}_+$. А це означає, що $\mu_- = \widetilde{\mu}_-$. Єдиність доведена. $\square$

Декілька слів скажемо за комплексні міри. Нехай μ – комплексна міра. Покладемо

$$\mu_R(A) := \operatorname{Re}\mu(A), \qquad \mu_I(A) := \operatorname{Im}\mu(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Легко переконатися, що μ_R і μ_I є дійснозначними міра і

$$\mu = \mu_R + i\mu_I.$$

таким чином перехід від дійснозначних мір до комплексних є дуже простим.

Борелівські міри. Нехай X - метричний простір. Нагадаємо, що через $B(X)$ ми позначаємо σ- алгебру всіх борелівських множин, тобто σ- алгебру, що породжена всіма відкритими і замкненими множинами.

Міру, яка задана на σ- алгебрі $B(X)$ ми назвемо борелівською мірою.

Позначимо через $\boldsymbol{M}(X)$ множину всіх обмежених комплекснозначних борелівських мір, тобто
$$\boldsymbol{M}(X) := \boldsymbol{M}(B(X), X).$$
Як ми вже знаємо $\boldsymbol{M}(X)$ є лінійним простором над полем комплексних чисел.

15. Неозначений інтеграл Лебега. Теорія диференціювання.

У даній лекції ми розглянемо основні факти теорії диференціювання.
В курсі математичного аналізу були доведені наступні важливі факти:

(1) для довільної функції $f \in C[a,b]$ виконується рівність

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

(2) для довільної функції $f \in C^1[a,b]$ виконується рівність

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \qquad x \in [a,b].$$

Ми покажемо, що в теорії інтеграла Лебега є природні аналоги цих результатів.

Почнемо ми з формулювання важливої теореми Лебега про похідну монотонної функції.

Теорема 15.1. *Нехай f монотонна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді вона має скінченну похідну майже у всіх точках проміжку $[a,b]$.*

Доведення цієї теореми є складним і довгим. Тому за браком часу ми його не розглядаємо. З ним можна ознайомитися у підручнику.

З сформульованої вище теореми Лебега випливає простий

Наслідок 15.2. *Нехай f - функція обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$. Тоді вона має скінченну похідну майже у всіх точках проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Кожна комплекснозначна функція f обмеженої варіації є лінійною комбінацією чотирьох монотонних функцій. А власне,

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4,$$

де f_j монотонно неспадні функції на $[a,b]$. Звідси, враховуючи теорему Лебега, очевидним чином отримуємо твердження наслідку. □

Теорема 15.3. *Нехай f - неспадна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді її похідна f' є інтегровна за Лебегом і*

$$\int_a^b f'\,d\mu_1 \leq f(b)-f(a).$$

Доведення. Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x)=\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}, \qquad x\in[a,b].$$

Тут ми вважаємо, що $f(x)=f(b)$ при $x>b$.

Монотонна функція є вимірна. Крім того, вона обмежена. Тому всі функції f_n є інтегровними за Лебегом. Зауважимо, що монотонна функція є інтегровна за Ріманом. Тому всі функції f_n є інтегровними і за Ріманом. З теореми про зв'язок між інтегралами Рімана і Лебега випливає, що

$$\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_1=\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Оцінимо інтеграл

$$\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Маємо

$$\int_a^b f_n\,dx = n\int_a^b f(x+1/n)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx =$$
$$= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx.$$

Оскільки

$$n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(b)\,dx = f(b)$$

і

$$n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx \geq nf(a)\frac{1}{n} = f(a),$$

то

$$\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 \leq f(b)-f(a).$$

Згідно з теоремою Лебега про похідну монотонної функції послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до функції f'. Крім того, оскільки f неспадна, то

$$f_n \geq 0, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Тому, враховуючи теорему Фату, ми отримуємо, що $f' \in L([a,b],\mu_1)$ і

$$\int_{[a,b]} f'\, d\mu_1 \leq f(b) - f(a).$$

$\square$

Розглянемо кусково постійну функцію f на $[a,b]$. Очевидно, що її похідна рівна нулеві у всіх точках на $[a,b]$, крім скінченного числа їх числа. Зрозуміло, що відновити таку функцію за її похідною неможливо. Можна подумати, що причина в тому, що функція f є розривна. Однак, можна побудувати монотонну функцію, яка є неперервна, але її похідна дорівнює нулеві майже скрізь.

Драбина Кантора. Георг Кантор перший побудував приклад неперервної монотонної функції, похідна якої рівна нулеві майже скрізь. В процесі побудови він використав множину, яку пізніше назвали множиною Кантора.

Процес побудови є наступним. Розіб'ємо проміжок $J^0 = [0,1]$ на три рівні частини і покладемо $f(x) = 1/2$ при $x \in [1/3, 2/3]$. Відрізок $J_1^1 = [0, 1/3]$ розіб'ємо на три частини і на середній покладемо $f(x) = 1/4$. Відрізок $J_2^1 = [2/3, 1]$ теж розіб'ємо на три частини і на середній покладемо $f(x) = 3/4$. На відрізках, які залишилися, тобто на відрізках 2-го рангу:

$$J_1^2 = [0, 1/9], \quad J_2^2 = [2/9, 1/3], \quad J_3^2 = [2/3, 7/9], \quad J_1^2 = [8/9, 1]$$

повторимо ту саму процедуру. Розб'ємо їх на три рівні частини і на середній покладемо функцію рівною послідовно $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$. Продовжуючи цей процес ми задамо функцію f на проміжку $[0,1]$. Всюди по множиною Кантора похідна нашої функції є рівна нулю. Множина Кантора є ніде не щільна і замкнена. Крім того, її міра Лебега (як неважко зрозуміти) є рівна нулеві. Отримана функція є неперервна і монотонна на $[0,1]$. А на доповненні до множини K похідна функції f є рівна нулеві.

Абсолютно неперервні функції.

Означення 15.4. *Функцію $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ми назвемо абсолютно неперервною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільної скінченної* *системи* $((a_j, b_j))_{j=1}^n$ *попарно неперетинних інтервалів таких, що*

$$\sum_{j=1}^n |b_j - a_j| < \delta,$$

виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Очевидно, що кожна абсолютно неперервна функція є неперервною. Проте, не кожна неперервна функція є абсолютно неперервною. Легко бачити, що драбина Кантора не є абсолютно неперервною функцією.

Позначимо через $AC[a, b]$ множину всіх абсолютно неперервних функцій на проміжку $[a, b]$.

Вправа 15.5. *Доведіть, що* $AC[a, b]$ *є лінійним простором.*

Вправа 15.6. *Доведіть, що кожна функція* $f \in AC[a, b]$ *є функцією обмеженої варіації, тобто*

$$AC[a, b] \subset V[a, b].$$

Вправа 15.7. *Кожна неперервно диференційовна функція* $f \in C^1[a, b]$ *є абсолютно неперервною функцією на* $[a, b]$.

Вправа 15.8. *Доведіть, що добуток* fg *функцій* $f, g \in AC[a, b]$ *є абсолютно неперервною функцією.*

Для абсолютно неперервних функцій справедлива наступна важлива і нетривіальна

Теорема 15.9. *Нехай* $f \in AC[a, b]$ *і* $f'(x) = 0$ *майже для всіх* $x \in [a, b]$. *Тоді функція* f *є постійною на* $[a, b]$ *(*$f \equiv \mathrm{const}$*).*

Доведення даної теореми красиве, але складне і довге. Ми його розглянемо дещо пізніше, якщо у нас буде час.

Натомість, ми доведемо іншу важливу теорему.

Домовимося через $L(a,b)$ позначати простір $L((a,b),\mu_1)$, а замість $d\mu_1$ писати dx.

Теорема 15.10. *Нехай $f \in L(a,b)$ і*
$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$
Тоді функція F є абсолютно неперервна на $[a,b]$ і майже для всіх $x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$, тобто
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f\,dx = f(x) \qquad \text{майже для всіх } x \in [a,b].$$

Доведення теореми розіб'ємо на частини, які оформимо у вигляді лем.

Лема 15.11. *Нехай $f \in L(a,b)$ і*
$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$
Тоді функція F є абсолютно неперервна на $[a,b]$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що існує таке $\delta > 0$, що для кожної вимірної множини $A \subset [a,b]$ з мірою $\mu_1(A) < \delta$, виконується нарівність
$$\int_A |f|\,dx < \varepsilon.$$
Нехай $A = \bigsqcup_{j=1}^n (a_j,b_j)$ і $\mu_1(A) < \delta$. Тоді
$$\int_A |f|\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx < \varepsilon.$$
Оскільки
$$|F(b_j) - F(a_j)| = \left|\int_{a_j}^{b_j} f\,dx\right| \le \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx,$$
то
$$\sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| \le \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Тим самим лема доведена. $\square$

Вправа 15.12. *Нехай* $f \in L(a,b)$ *і*

$$\int_a^x f\,dx = 0$$

для всіх $x \in [a,b]$. *Тоді* $f(x) = 0$ *майже для всіх* $x \in [a,b]$.

Лема 15.13. *Нехай* $f \in L(a,b)$ *і*

$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Якщо f *є обмежена* ($|f| \le K$), *то* $F'(x) = f(x)$ *майже для всіх* $x \in [a,b]$.

Доведення. З попередньої леми випливає, що функція F є абсолютно неперервна. А кожна абсолютно неперервна функція є функцією обмеженої варіації. Тому похідна F' існує майже скрізь на $[a,b]$ і є інтегровна на $[a,b]$.

Покладемо

$$f_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}, \qquad x \in [a,b].$$

Тоді

$$f_n(x) = n\left(\int_x^{x+1/n} f\,dx\right).$$

Тому

$$|f_n(x)| \le n\left|\int_x^{x+1/n} f\,dx\right| \le n(\sup|f|)\frac{1}{n} \le K, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a,b].$$

З означення функцій f_n випливає, що вони збігаються до F' майже скрізь на $[a,b]$. З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що для довільного $c \in (a,b]$

$$\int_a^c F'\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c f_n\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_a^c (F(x+1/n)-F(x))\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^c F(x+1/n)\,dx - \int_a^c F(x)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} F(x)\,dx\right).$$

Оскільки функція F є неперервна, то

$$\lim_{n\to\infty} n\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx = F(c)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+1/n} F(x)\,dx = F(a) = 0.$$

Тому

$$\int_a^c F'\,dx = F(c) - F(a) = F(c) = \int_a^c f(x)\,dx,$$

тобто

$$\int_a^c (F'-f)(x)\,dx = 0, \qquad c \in [a,b].$$

Звідси, враховуючи вправу 15.12, отримаємо, що функція $F'-f$ дорівнює нулю майже скрізь, тобто $F'(x) = f(x)$ майже для всіх $x \in [a,b]$. □

Доведення теореми 15.10. Кожну дійснозначну інтегровну функцію можна подати у вигляді $f = f_+ - f_-$, де

$$f_+(x) := \max\{f(x),0\}, \qquad f_-(x) := \max\{-f(x),0\}, \qquad x \in (a,b).$$

Функції f_+, f_- є невід'ємні. Легко переконатися, що вони також є вимірні. Оскільки функція $|f|$ є інтегровною мажорантою для функцій f_+ і f_-, то

$f_+, f_- \in L(a,b)$. Зі сказаного випливає, що кожну комплекснозначну інтегровну функцію можна подати у вигляді

$$f = h_+ - h_- + i(g_+ - g_-),$$

де h_+, h_-, g_+, g_- - невід'ємні інтегровні функції. Звідси, враховуючи лінійність інтеграла Лебега, бачимо, що теорему досить довести у припущенні, що $f \geq 0$.

Тому без втрати загальності можна вважати, що $f \geq 0$.

Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x) := \min\{f(x), n\}, \qquad x \in (a,b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кожна з функцій f_n інтегровною та обмеженою. Крім того, послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ поточково збігається до функції f. Розглянемо допоміжні функції

$$F_n(x) := \int\limits_a^x f_n(t)\,dt, \qquad G_n(x) = \int\limits_a^x (f - f_n)(t)\,dt, \qquad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функції G_n, F_n є неспадними, а, отже, мають похідну майже скрізь. З попередньої леми випливає, що для всіх n

$$F_n'(x) = f_n(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

Оскільки $F = G_n + F_n$, і $G_n' \geq 0$, то

$$F'(x) = G_n'(x) + F_n'(x) \geq F_n'(x) = f_n(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

Переходячи в нерівності $F'(x) \geq f_n(x)$ до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$F'(x) \geq f(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

З теореми 15.3 випливає, що

$$\int\limits_a^b F'\,dx \leq F(b) - F(a) = F(b) = \int\limits_a^b f\,dx.$$

Отже,

$$\int\limits_a^b (F' - f)\,dx \leq 0.$$

Але $F'(x) - f(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. Це означає, що

$$\int_a^b (F' - f)\, dx \geq 0,$$

а, отже,

$$\int_a^b (F' - f)\, dx = 0.$$

Оскільки $F'(x) - f(x) \geq 0$ майже скрізь, то з наслідку з нерівності Чебишева випливає, що

$$F'(x) - f(x) = 0, \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Теорема доведена. □

Рівність Ньютона-Лейбніца.

Теорема 15.14. *Нехай $f \in AC[a, b]$. Тоді справедлива рівність*

$$\int_a^b f'\, dx = f(b) - f(a).$$

Доведення. Розглянемо функції

$$g(x) := \int_a^x f'\, dx, \qquad \varphi(x) := f(x) - g(x), \qquad x \in [a, b].$$

Згідно з лемою 15.11 функція g є абсолютно неперервна на $[a, b]$. Тому функція φ є абсолютно неперервна як різниця абсолютно неперервних функцій f і g. З огляду на теорему 15.10

$$g'(x) = f'(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Тому

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x) = 0, \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Оскільки $\varphi \in AC[a, b]$, то з теореми 15.9 випливає, що $\varphi \equiv \mathrm{const}$. Враховуючи, що

$$\varphi(a) = f(a) - g(a) = f(a),$$

отримуємо рівність

$$f(x) = f(a) + g(x), \qquad x \in [a, b],$$

з якої випливає, що

$$\int_a^b f'\,dx = g(b) = f(b) - f(a).$$

Теорема доведена. $\square$

Абсолютно неперервні міри. Теорема Радона-Нікодима.

Означення 15.15. *Нехай $\boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$ простір комплекснозначних обмежених мір, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{U}$ підмножин множини X. Нехай $\mu, \nu \in \boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$, причому міра ν є невід'ємна.*

1) Ми скажемо, що міра μ є зосереджена на множині $A \in \mathcal{U}$, якщо

$$\forall B \in \mathcal{U} \quad (B \subset X \setminus A) \Rightarrow (\mu(B) = 0).$$

2) Ми скажемо, що міра μ є абсолютно неперервна стосовно невід'ємної міри ν, якщо

$$\forall A \in \mathcal{U} \quad (\nu(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0).$$

Теорема Радона-Нікодима.

Теорема 15.16. *Нехай $\mu, \nu \in \boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$, причому міра ν є невід'ємна. Якщо міра μ є абсолютно неперервна стосовно невід'ємної міри ν, то існує інтегровна стосовно міри ν функція f така, що*

$$\mu(A) = \int_A f\,d\nu, \qquad A \in \mathcal{U}.$$

Функція f, яка визначається однозначно з точністю до ν-еквівалентоності, називається похідною Радона-Нікодима міри μ по невід'ємній мірі ν і позначається через

$$\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Доведення теореми досить складне і за браком часу ми його не наводимо.

З теореми Радона-Нікодима випливає наступний

Наслідок 15.17. *Нехай $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$, тобто μ - обмежена борелівська міра на $\mathbb{R}$. Міра μ є абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1 тоді і тільки тоді, коли її функція розподілу*

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

є абсолютно неперервною на кожному скінченному проміжку.

Довести самостійно.

Означення 15.18. *Дельта-мірою Дірака, що зосереджена в точці $\xi \in \mathbb{R}$ називаеться міра δ_ξ (стандартне позначення), яка задана формулою*

$$\delta_\xi(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi \in A; \\ 0, & \text{якщо } \xi \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

на всіх множинах $A \subset \mathbb{R}$.

Зауважимо, що $\delta_\xi \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$, тобто міра δ_ξ є борелівською і вона зосереджена в одноточковій множині $\{\xi\}$.

Означення 15.19. *Борелівська міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ називається:*

(1) *неперервною, якщо $\mu(\{\xi\}) = 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$;*
(2) *дискретною (або атомарною), якщо вона зосереджена на зліченній або скінченній множині.*

Вправа 15.20. *Кожна ненульова дискретна міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ однозначно зображається у вигляді*

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} h_j \delta_{\xi_j},$$

де $(h_j)_{j=1}^N$ - послідовність в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(\xi_j)_{j=1}^N$ - послідовність попарно різних чисел в $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ або $N = \infty$ і

$$\sum_{j=1}^{N} |h_j| < \infty \qquad (\text{якщо } N = \infty).$$

Вправа 15.21. *Кожну міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ можна однозначно подати у вигляді суми $\mu = \mu_a + \mu_s$, де μ_a - абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1, а μ_s*

- сингулярна стосовно міри μ_1. В свою чергу μ_s можна однозначно подати у вигляді суми $\mu_s = \mu_d + \mu_{sc}$, де μ_d - дискретна міра, а μ_{sc} - неперервна міра та сингулярна стосовно μ_1.

З вправи 15.21 випливає, кожну міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ можна однозначно подати у вигляді

$$\mu = \mu_a + \mu_{sc} + \mu_d,$$

де μ_a - абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1, μ_d - дискретна міра, а μ_{sc} - неперервна сингулярна стосовно μ_1.

16. Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція обмеженої варіації на $\mathbb{R}$, тобто $F \in V(\mathbb{R})$. Як ми вже говорили функція F породжує борелівську міру на прямій. Позначимо її через μ_F. На всіх інтервалах прямої (і необмежених теж) вона задана формулами:

$$\begin{aligned}
\mu_F((a,b)) =& F(b-0) - F(a+0), \\
\mu_F([a,b)) =& F(b-0) - F(a-0), \\
\mu_F((a,b]) =& F(b+0) - F(a+0), \\
\mu_F([a,b]) =& F(b+0) - F(a-0).
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Формули (16.1) однозначно визначають міру μ_F. Міра μ_F є обмеженою борелівською мірою. Цю міру ми будемо називати мірою Лебега-Стільтьєса. Міру μ_F можна однозначно продовжити до повної міри $\bar{\mu}_F$, що задана на σ-алгебрі, яка містить алгебру $B(\mathbb{R})$. Міру $\bar{\mu}_F$ можна також отримати, якщо взяти лебегове продовження міри μ_F, заданої на півкільці інтервалів. Часто якраз повну міру $\bar{\mu}_F$ і називають мірою Лебега-Стільтьєса. Однак, оскільки процедура поповнення довільної міри є зовсім проста, то ми не будемо робити різниці між мірами μ_F та $\bar{\mu}_F$. Будемо вважати, що борелівська міра μ_F є повна, тобто автоматично поповнена.

Означення 16.1. *Ми скажемо, що борелівська міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ зосереджена на множині $C \in B(\mathbb{R})$, якщо $\mu(A) = 0$ для всіх $A \in B(\mathbb{R})$, що не перетинаються з C ($A \cap C = \emptyset$).*

Зрозуміло, що міру μ_F можна також розглядати на відрізку $[a, b]$. Для цього досить знати функцію F тільки на відрізку $[a, b]$.

Означення 16.2. *Нехай числова функція f задана на проміжку $[a, b]$. Ми назвемо її:*

(1) *неперервною зліва (справа) на проміжку $[a, b]$, якщо для всіх $\xi \in [a, b]$*

$$\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = f(\xi) \qquad (\lim_{x \to \xi + 0} f(x) = f(\xi));$$

(2) *кусково неперервною на $[a, b]$, якщо вона має лише скінченну кількість точок розриву, причому всі вони є точками розриву першого роду;*

(3) *кусково постійною на $[a, b]$, якщо вона є кусково неперервною на $[a, b]$ і приймає лише скінченну кількість значень.*

Теорема 16.3. *Якщо функція F є неспадною кусково постійною на $[a, b]$, то*

$$\mu_F = \sum_{j=1}^{n} h_j \delta_{\xi_j},$$

де $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ множина точок розриву функції F, а h_j - стрибок функції F в точці $x = \xi_j$, тобто

$$h_j := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Доведення. Нехай функція F постійна на інтервалі $[a, b]$. Тоді вона рівна нулю на всіх інтервалах, що містяться в $[a, b]$. Тому $\mu_F = 0$ (лебегове продовження нульової міри приводить нас, очевидно, до нульової міри). Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай $G = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ множина точок розриву функції F. Якщо функція F постійна на деякому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, тобто

$$(\alpha, \beta) \cap \{\xi_j\}_{j=1}^n = \emptyset,$$

то зі сказаного вище випливає, що $\mu_F(A) = 0$ для кожної множини $A \subset (\alpha, \beta)$. Це означає, що якщо множина A не перетинається з G, то $\mu_F(A) = 0$, тобто міра μ_F зосереджена на G. З іншого боку, за означенням

$$\mu_F(\{\xi_j\}) := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0) = h_j.$$

Довільну множину $A \subset [a, b]$ можна подати у вигляді

$$A = \left(\bigsqcup_{\xi_j \in A} \{\xi_j\} \right) \bigsqcup B,$$

де $B \cap G = \emptyset$. Тому

$$\mu_F(A) = \mu_F(B) + \sum_{\xi_j \in A} \mu_F(\{\xi_j\}) = \sum_{\xi_j \in A} h_j = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \delta_{\xi_j} \right)(A).$$

□

Зауважимо, що якщо функція F є неспадною, то міра μ_F є невід'ємною. Нехай функція F є неспадною. Інтеграл Лебега

$$\int\limits_{[a,b]} f \, d\mu_F,$$

взятий по мірі μ_F, що побудована за функцією F, називають інтегралом Лебега-Стільтьєса і позначають символом

$$\int\limits_a^b f \, dF$$

або символом

$$\int\limits_a^b f(x) \, dF(x).$$

Таким чином, інтеграл Лебега-Стільтьєса це інтеграл Лебега, який записаний з допомогою функції розподілу міри. У цьому є сенс, оскільки такий запис часто дозволяє спростити і прискорити обчислення.

Клас функцій f, які інтегровні за мірою μ_F залежить від функції F, проте, він завжди містить всі обмежені борелівські функції. Зокрема, інтегровними за мірою μ_F є всі $f \in C[a,b]$.

Інтеграл Лебега-Стільтьєса можна означити і у випадку дійснозначної функції F обмеженої варіації. Нехай $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ - функція обмеженої варіації на $[a,b]$. Тоді, як відомо, її можна подати у вигляді - різниці неспадних функцій F_1 і F_2. Покладемо

$$\int\limits_a^b f \, dF = \int\limits_a^b f \, dF_1 - \int\limits_a^b f \, dF_2 \tag{16.2}$$

в припущенні, що існують інтеграли у правій частині. Виявляється, що якщо f - обмежена борелівська функція, то права частина в (16.2) не залежить від вибору функцій F_1 і F_2 в зображенні $F = F_1 - F_2$.

Інтеграл Лебега-Стільтьєса можна означити і у випадку комплекснозначної функції F обмеженої варіації. Нехай $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ - функція обмеженої варіації на $[a,b]$. Тоді, як відомо, її можна подати у вигляді $F = F_1 + iF_2$, де F_1 і F_2 дійснозначні функції обмеженої варіації. Покладемо

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,dF_1 + i\int_a^b f\,dF_2. \tag{16.3}$$

Розглянемо декілька окремих випадків, коли інтеграл Лебега-Стільтьєса обчислюється доволі просто.

Вправа 16.4. *Якщо функція F є кусково неперервною на $[a,b]$, то її можна подати у вигляді рівномірної границі кусково постійних функцій.*

Теорема 16.5. *Нехай $F \in AC[a,b]$ і неспадна, а f - кусково неперервна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді*

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx. \tag{16.4}$$

Доведення. 1. Нехай функція f є кусково постійною на $[a,b]$. Тоді проміжок $[a,b]$ можна розбити на інтервали Δ_j, на яких f є постійною, тобто і подати у вигляді

$$[a,b] = \bigsqcup_{j=1}^n \Delta_j, \qquad f(x) = p_k, \quad x \in \Delta_k.$$

Тому

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f\,d\mu_F = \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} f\,d\mu_F =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} p_j\,d\mu_F = \sum_{j=1}^n p_j \mu_F(\Delta_j).$$

Оскільки F є абсолютно неперервна, то

$$\mu_F(\Delta_j) = F(\beta_j) - F(\alpha_j) = \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} F'(x)\,dx, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Тут α_j і β_j кінці інтервала Δ_j. Тому

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mu_F(\Delta_j) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Delta_j} p_j F'(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Delta_j} f(x)F'(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)F'(x)\,dx.$$

2. Нехай f кусково неперервна на $[a,b]$. Тоді (див. вправу 16.4) її можна подати у вигляді рівномірної границі послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кусково постійних функцій. З огляду на вже доведене, маємо, що

$$\int\limits_{a}^{b} f_n(x)\,dF(x) = \int\limits_{a}^{b} f_n(x)F'(x)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16.5}$$

З рівномірної збіжності послідовності (f_n) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f_n(x)\,dF(x) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dF(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f_n(x)F'(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)F'(x)\,dx,$$

а, отже,

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dF(x) = \int\limits_{a}^{b} f(x)F'(x)\,dx.$$

□

Теорема 16.6. *Нехай функція $f \in C[a,b]$ є кусково неперервна, а F є кусково постійна на проміжку $[a,b]$ і має розриви у точках $\xi_j \in (a,b)$, $j = 1, \ldots, n$. Якщо функція f неперервна у всіх точках ξ_j, то*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dF(x) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)h_j, \qquad h_j := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0). \tag{16.6}$$

Доведення. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на інтервали $\Delta_k\,(k=1,\ldots,m)$, на яких f є неперервна. Очевидно, що можна зробити так, що в кожному інтервалі Δ_k буде міститися не більше однієї точки розриву функції F.

Оскільки

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)=\sum_{k=1}^m\int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dF(x)=\sum_{k=1}^n\int\limits_{\Delta_k} f\,d\mu_F,$$

то досить переконатися, що

$$\int\limits_{\Delta_k} f\,d\mu_F=\begin{cases}0, & \text{якщо } \Delta_k\cap\{\xi_j\}_{j=1}^n=\emptyset;\\ f(\xi_j)h_j, & \text{якщо } \xi_j\in\Delta_k.\end{cases}$$

Якщо $\Delta_k\cap\{\xi_j\}_{j=1}^n=\emptyset$, то функція F постійна в Δ_k, а, отже, $\mu_F(A)=0$, якщо $A\subset\Delta_k$. Тому

$$\int\limits_{\Delta_k} f\,d\mu_F=0.$$

Якщо $\xi_j\in\Delta_k$, інтервал Δ_k можна подати у вигляді

$$\Delta_k=\Delta_k'\bigsqcup\Delta_k''\bigsqcup\{\xi_j\},$$

де Δ_k' і Δ_k'' інтервали, що не містять точок розриву функції F. Тоді, враховуючи сказане, маємо, що

$$\int\limits_{\Delta_k} f\,d\mu_F=\int\limits_{\Delta_k'} f\,d\mu_F+\int\limits_{\Delta_k''} f\,d\mu_F+\int\limits_{\{\xi_j\}} f\,d\mu_F=0+0+f(\xi_j)\mu_F(\{\xi_j\})=f(\xi_j)h_j.$$

□

Теорема 16.7. *Нехай функція $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ є кусково неперервна, а F неспадна і її можна подати у вигляді суми $F=F_1+F_2$, де F_1 кусково постійна на проміжку $[a,b]$ і має розриви у точках $\xi_j\in(a,b)$, $j=1,\ldots,n$, а F_2 є абсолютно неперервна. Тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)=\int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx+\sum_{j=1}^n f(\xi_j)h_j, \tag{16.7}$$

де

$$h_j:=F(\xi_j+0)-F(\xi_j-0).$$

Доведення. Оскільки $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f\,\mu_F = \int\limits_a^b f\,\mu_{F_1} + \int\limits_a^b f\,\mu_{F_2}.$$

Тому з огляду на попередні дві теореми маємо, що

$$\int\limits_a^b f\,\mu_{F_1} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_1(\xi_j+0) - F_1(\xi_j-0))$$

і

$$\int\limits_a^b f\,\mu_{F_2} = \int\limits_a^b f(x)F_2'(x)\,dx.$$

Залишається зауважити, що F_2 є неперервна і для всіх $x \in [a,b] \setminus \{\xi_j\}_{j=1}^n$ $F_1'(x) = 0$.

Тому

$$F_1(\xi_j+0) - F_1(\xi_j-0) = F(\xi_j+0) - F(\xi_j-0) = h_j$$

і $F'(x) = F_2'(x)$ для всіх $x \in [a,b] \setminus \{\xi_j\}_{j=1}^n$. А, отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx + \sum_{j=1}^n f(\xi_j)h_j. \tag{16.8}$$

□

Зауваження 16.8. *Щоб функція F задовольняла умови попередньої теореми досить, що функція F була кусково неперервною і її похідна була обмежена поза скінченною або зліченною множиною. Наприклад, такими є функції:*

$$F(x) = [x]x, \qquad F(x) = [2\sin x]\cos x, \qquad F(x) = x^2\,\mathrm{sign}(\sin x).$$

Теорема 16.9. *Нехай $F \in V[a,b]$ і $f \in C[a,b]$. Тоді*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le \left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) V_a^b[F]. \tag{16.9}$$

Доведення. Нехай f є кусково постійна і її точки розриву є точками неперервності функції F. Функцію f можна подати у вигляді суми

$$f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{\Delta_k},$$

де Δ_j - інтервали, $[a,b] = \bigsqcup_{k=1}^m \Delta_k$. З лінійності інтеграла випливає, що

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_{[a,b]} f\,d\mu_F = \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{[a,b]} \chi_{\Delta_k}\,d\mu_F = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_F(\Delta_k).$$

А, отже,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le \sum_{k=1}^m |\alpha_k||\mu_F(\Delta_k)| \le \max_k |\alpha_k| \sum_{k=1}^m |\mu_F(\Delta_k)|.$$

Нехай інтервал Δ_k має кінці γ_k, β_k. Оскільки вони є точками неперервності для F, то $|\mu_F(\Delta_k)| = |F(\gamma_k) - F(\beta_k)|$. Оскільки $[a,b] = \bigsqcup_{k=1}^m \Delta_k$, то

$$\sum_{k=1}^m |\mu_F(\Delta_k)| \le V_a^b[F].$$

Отже, оцінка (16.9) виконується для функції f.

Якщо $f \in C[a,b]$, то існує послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кусково постійних функцій, яка рівномірно збігається до f на $[a,b]$. Очевидно, що можна вважати, що точки розриву функцій f_n є точками неперервності функції F. З вже доведеного маємо, що

$$\left|\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_F\right| \le (\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)|)\, V_a^b[F].$$

Здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$\left|\int_{[a,b]} f\,d\mu_F\right| \le (\max_{x\in[a,b]} |f(x)|)\, V_a^b[F],$$

тобто оцінка (16.9) виконується для функції $f \in C[a,b]$. □

Зауваження 16.10. *Попередню теорему можна посилити. А власне, якщо $F \in V[a,b]$ і функція $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ є обмеженою борелівською, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le (\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|)\, V_a^b[F]. \tag{16.10}$$

Зауваження 16.11. *Інтеграл Лебега-Стільтьєса* $\int_a^b f\,dF$ *є лінійним і за змінною* f *і за змінною* F*, тобто*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dF(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dF(x) + \beta \int_a^b g(x)\,dF(x), \tag{16.11}$$

$$\int_a^b f(x)\,d(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dF(x) + \beta \int_a^b f(x)\,dG(x). \tag{16.12}$$

17. Практичне заняття: Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Задача 17.1. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{0,5}^{10,5} x\,d[x].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x]$ на проміжку $[0; 10,5]$ є кусково постійна і має точки розриву

$$\xi_j = j, \qquad j = 1, \ldots, 10.$$

Стрибок функції F у точці ξ_j дорівнює 1. Тому

$$\int_{0,5}^{10,5} x\,d[x] = \sum_{j=1}^{10} f(j)h_j = \sum_{j=1}^{10} j = 55.$$

Задача 17.2. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{0}^{2-0} 2x\,d[x^2].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x^2]$ на інтервалі $[0, 2)$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_j = \sqrt{j}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Стрибок функції F у точці ξ_j дорівнює 1. Тому

$$\int\limits_{0}^{2-0} 2x\, d[x^2] = 2 \cdot 1 + 2\sqrt{2} \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot 1 = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Задача 17.3. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьеса:*

$$\int\limits_{(0,\pi)} x\, d[2\sin x].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [2\sin x]$ на інтервалі $[0, \pi]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = \pi/6, \qquad \xi_2 = \pi/2, \qquad \xi_3 = 5\pi/6.$$

Стрибок функції F у точці ξ_1 дорівнює 1, стрибок функції F у точці ξ_2 дорівнює 0, стрибок функції F у точці ξ_3 дорівнює -1 Тому

$$\int\limits_{(0,\pi)} x\, d[2\sin x] = \frac{\pi}{6} \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{5\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 17.4. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьеса:*

$$\int\limits_{0}^{3} x^2\, d[x + 1/2].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x + 1/2]$ на інтервалі $[0, 3]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_j = 1/2 + j, \qquad j = 0, 1, 2.$$

Стрибок у всіх точках розриву дорівнює 1. Тому

$$\int\limits_{0}^{3} x^2\, d[x + 1/2] = (1/2)^2 + (3/2)^2 + (5/2)^2 = 35/4.$$

Задача 17.5. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьеса:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\, d\,\mathrm{sign}\,(\cos x).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = -\pi/2, \qquad \xi_2 = \pi/2.$$

При цьому стрибок у точці ξ_1 дорівнює 2, а стрибок у точці ξ_2 дорівнює -2 . Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\, d\operatorname{sign}(\cos x) = ((-\pi/2)^2 - \pi/2)2 - ((\pi/2)^2 + \pi/2)2 = -2\pi.$$

Задача 17.6. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{-2}^{2} (x + 2)\, d\operatorname{sign}(x^2 - 1).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$ на інтервалі $[-2, 2]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = -1, \qquad \xi_2 = 1.$$

При цьому стрибок у точці ξ_1 дорівнює -2, а стрибок у точці ξ_2 дорівнює 2 . Тому

$$\int_{-2}^{2} (x + 2)\, d\operatorname{sign}(x^2 - 1) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4.$$

Задача 17.7. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{-2}^{2} (x + 1)\, d(x^2 + \operatorname{sign} x).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = x^2 + \operatorname{sign} x$ є сумою функцій $F_1(x) = x^2$ і $F_2(x) = \operatorname{sign} x$. При цьому $F_1 \in C^1[-2, 2]$, а F_2 є кусково постійна і має точку розриву

$$\xi = 0.$$

При цьому стрибок у точці ξ дорівнює 2. Тому

$$\int_{-2}^{2} (x+1)\, d(x^2 + \operatorname{sign} x) = \int_{-2}^{2} (x+1)\, dx^2 + \int_{-2}^{2} (x+1)\, d(\operatorname{sign} x) =$$

$$= \int_{-2}^{2} 2x(x+1)\, dx + 1 \cdot 2 = 38/3.$$

Задача 17.8. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{0}^{2\pi} x\, d(3x^2 + \operatorname{sign} \cos x).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = 3x^2 + \operatorname{sign} \cos x$ є сумою функцій $F_1(x) = 3x^2$ і $F_2(x) = \operatorname{sign} \cos x$. Тому

$$\int_{0}^{2\pi} xd(3x^2 + \operatorname{sign} \cos(\pi x)) = \int_{0}^{2\pi} x\, d3x^2 + \int_{0}^{2\pi} x\, d\operatorname{sign} \cos(\pi x).$$

Перший інтеграл обчислюється легко.

$$\int_{0}^{2\pi} x\, d3x^2 = 6 \int_{0}^{2\pi} x^2\, dx = 2(2\pi)^3.$$

Перейдемо до другого інтеграла. Оскільки функція $F(x) = \operatorname{sign} \cos x$ є кусково постійна і має на проміжку $[0, 2\pi]$ розриви лише у точках $\xi_1 = \pi/2$ і $\xi_2 = 3\pi/2$, причому стрибок в точці ξ_1 рівний -2, а в ξ_2 рівний 2, то

$$\int_{0}^{2\pi} x\, d\operatorname{sign} \cos x = \frac{\pi}{2} \cdot (-2) + \frac{3\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi.$$

Отже,

$$\int_{0}^{2\pi} xd(3x^2 + \operatorname{sign} \cos(\pi x)) = 2(2\pi)^3 + 2\pi.$$

Задача 17.9. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{5/2}^{7/2} x\,d(x[x]).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = x[x]$ є кусково гладкою функцією з єдиною точкою розриву в точці $x = 3$. При цьому

$$F(3+0) = \lim_{x\to 3+0} = 3\cdot 3 = 9, \quad F(3-0) = \lim_{x\to 3-0} = 3\cdot 2 = 6$$

і

$$F'(x) = [x], \qquad x \in [5/2, 7/2], \quad x \neq 3.$$

Тому

$$\int_{5/2}^{7/2} x\,d(x[x]) = 3(F(3+0) - F(3-0)) + \int_{5/2}^{7/2} x[x]\,dx =$$

$$= 9 + \int_{5/2}^{3} 2x\,dx + \int_{3}^{7/2} 3x\,dx = 6 + (3^2 - (7/2)^2) + \frac{3}{2}((7/2)^2 - 3^2).$$

18. Інтеграл Лебега-Стільтьєса і інтеграл Рімана-Стільтьєса.

Інтеграл Рімана-Стільтьєса. Поряд з інтегралом Лебега-Стільтьєса ми розглянемо також інтеграл Рімана-Стільтьєса, який будується подібно до інтеграла Рімана.

Нехай функція $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ має обмежену варіацію на проміжку $[a, b]$ і є неперервна зліва (тобто $F(x) = F(x-0)$ для всіх $x \in (a, b]$). Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ і $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ розбиття проміжку $[a, b]$, тобто

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Виберемо у кожному проміжку $[x_{j-1}, x_j]$ точку ξ_j. Тепер розбиттю τ з послідовністю $\xi = (\xi_j)_{j=1}^n$ вибраних точок поставимо у відповідність інтегральну суму

$$S(\tau, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})).$$

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S(\tau, \xi)$$

($d(\tau)$ - діаметр розбиття τ), яка не залежить від вибору послідовності ξ, то ми кажемо, що існує інтеграл Рімана-Стільтьєса

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x) := \lim_{d(\tau)\to 0} S(\tau,\xi).$$

Теорема 18.1. *Нехай $F \in V[a,b]$ і $f \in C[a,b]$. Тоді інтеграл Рімана-Стільтьєса*

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

існує і збігається з відповідним інтегралом Лебега-Стільтьєса, тобто

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f\,dF.$$

Доведення. Виберемо послідовність $(\tau_n, \xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ розбиттів τ_n з з фіксованим послідовностями $\xi^{(n)}$ вибраних точок і таку, що $d(\tau_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Кожній парі $(\tau_n, \xi^{(n)})$ поставимо у відповідність східчасту функцію

$$f_n(x) = f(\xi_j), \qquad x\in\Delta_j := [x_{j-1}, x_j).$$

Тоді інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int_a^b f_n\,dF$ неважко обчислити :

$$\int\limits_a^b f_n\,dF = \sum_{j=1}^n \int\limits_{\Delta_j} f_n\,dF = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\int\limits_{\Delta_j} dF = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j)-F(x_{j-1})),$$

тобто

$$\int\limits_a^b f_n\,dF = S(\tau_n, \xi^{(n)}).$$

Оскільки функція f є неперервна на $[a,b]$, то за теоремою Кантора вона є рівномірно неперервною на $[a,b]$. Звідси, враховуючи, що $d(\tau_n)\to 0$ при $n\to\infty$, отримуємо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції f. Отже, інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int_a^b f\,dF$ існує і

$$\int\limits_a^b f\,dF = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n\,dF = \lim_{n\to\infty} S(\tau_n, \xi^{(n)}.$$

тобто

$$\int\limits_a^b f\,dF = (RS)\int_a^b f(x)\,dF(x).$$

□

Щоб не ускладнювати позначення, далі ми будемо позначати інтеграл Рімана-Стільтьєса символом

$$\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

Відзначимо деякі елементарні властивості властивості інтеграла Рімана-Стільтьєса.

1. Аналогічно як і у випадку інтеграла Лебега-Стільтьєса справедлива оцінка (теорема про середнє)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$

Для інтеграла Лебега-Стільтьєса ми її не доводили. У випадку інтеграла Рімана-Стільтьєса її доведення є нескладним і ми його подамо.

Очевидно, що нам достатньо оцінити суму $S(\tau,\xi)$. Маємо

$$|S(\tau,\xi)| = \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1}))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)||F(x_j) - F(x_{j-1})| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \le$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$

Отже, для довільних розбиттів маємо, що

$$|S(\tau,\xi)| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$

Здійснюючи тепер граничний перехід при $d(\tau) \to 0$ отримуємо потрібну нам оцінку.

2. Якщо $F = F_1 + F_2$, то

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,dF_1(x) + \int_a^b f(x)\,dF_2(x).$$

Дійсно, досить лише помітити, що справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_1(x_j) - F_1(x_{j-1})) + \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_2(x_j) - F_2(x_{j-1})).$$

Здійснюючи в цій рівності граничний перехід при $d(\tau) \to 0$ отримуємо потрібну рівність.

Зауваження 18.2. *Ми дали означення інтеграла Рімана-Стільтьєса для функції F, яка є неперервна зліва. Насправді це обмеження не є суттєвим і від нього можна відмовитися.*

Теореми Хеллі. Австрійський математик Едуард Хеллі довів ряд важливих теорем. Дві з них стосуються теорії міри і інтеграла.

Перша теорема Хеллі. Під першою теоремою Хеллі розуміють його теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега-Стільтьєса.

Теорема 18.3. *Нехай $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в $V[a,b]$, тобто послідовність функцій обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$. Нехай послідовність $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ поточково збігається до деякої функції $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ і*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b[F_n] < \infty.$$

Тоді $F\in V[a,b]$ і для довільної функції $f\in C[a,b]$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dF_n(x) = \int_a^b f(x)\,dF(x). \tag{18.1}$$

Доведення. Нехай

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b[F_n].$$

Тоді для довільного $n\in\mathbb{N}$ і довільного розбиття $\tau=\{x_j\}_{j=0}^n$ (розбиття проміжку $[a,b]$) маємо, що

$$\sum_{j=1}^m |F_n(x_j)-F_n(x_{j-1})| \le C. \tag{18.2}$$

Переходячи в (18.2) до границі при $n\to\infty$, отримуємо, що

$$\sum_{j=1}^m |F(x_j)-F(x_{j-1})| \le C \tag{18.3}$$

для довільного розбиття τ. А, отже, $F\in V[a,b]$ і $V_a^b[f]\le C$.

Доведемо тепер рівність (18.1). Спочатку покажемо, що вона виконується для кусково постійних функцій f. Нехай f приймає значення α_k на інтервалі $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \ldots, m.$, і точки x_k є точками неперервності функцій F і F_n. Тоді

$$\int_a^b f(x)\, dF_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(x)\, dF_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})),$$

$$\int_a^b f(x)\, dF(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(x)\, dF(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

З поточкової збіжності послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dF_n(x) = \int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Нехай тепер $f \in C[a,b]$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує кусково постійна функція φ така, що її точки розриву на потрапляють на точки розриву функцій F та F_n і

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3C}, \qquad x \in [a,b].$$

З оцінки інтеграла Лебега-Стільтьєса випливає, що

$$\left| \int_a^b f(x)\, dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\, dF_n(x) \right| = \left| \int_a^b (f-\varphi)(x)\, dF_n(x) \right| \le$$
$$\le \sup|f-\varphi|\, V_a^b[F_n] \le \frac{\varepsilon}{3C} C = \frac{\varepsilon}{3}$$

і аналогічно

$$\left| \int_a^b f(x)\, dF(x) - \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) \right| = \left| \int_a^b (f-\varphi)(x)\, dF(x) \right| \le$$
$$\le \sup|f-\varphi|\, V_a^b[F] \le \frac{\varepsilon}{3C} C = \frac{\varepsilon}{3}.$$

З доведеного раніше випливає, що існує n_0 таке, що

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n > n_0.$$

Тому при всіх $n > n_0$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF_n(x) - \int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le$$
$$\le \left|\int_a^b f(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)\right| +$$
$$+\left|\int_a^b f(x)\,dF(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| < \varepsilon.$$

Тим самим теорема доведена. □

Друга теорема Хеллі.

Теорема 18.4. *Нехай $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в $V[a,b]$ і виконані умови:*
(1) $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad V_a^b[F_n] \le C$;
(2) $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b] \quad |F_n(x)| \le M$.

Тоді з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що поточково збігається до функції $F \in V[a,b]$.

Доведення. Без обмеження загальності теорему досить довести для монотонних функцій. Дійсно, як ми вже знаємо кожну функцію F_n можна подати у вигляді різниці двох неспадних функцій:

$$F_n = G_n - H_n,$$

де $G_n(x) = V_a^x[F_n], \quad H_n := V_a^x[F_n] - F_n$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$|G_n(x)| \le V_a^b[F_n] \le C, \qquad |H_n(x)| \le |G_n(x)| + |F_n(x)| \le C + M$$

і

$$V_a^b[G_n] = V_a^b[F_n] \le C, \qquad V_a^b[H_n] \le V_a^b[G_n] + V_a^b[F_n] \le 2C,$$

то для послідовностей $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ виконані умови теореми. Якщо теорема вірна для неспадних функцій, то з послідовності $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовность $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, яка поточково збігається, а з послідовності $(H_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(H_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, яка поточково збігається. Тоді підпослідовність

$$F_{m_k} = G_{m_k} + H_{m_k}$$

поточково збігається при $k \to \infty$.

Таким чином будемо вважати, що послідовність $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю неспадних функцій.

Перший крок.

Покажемо, що з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається у всіх раціональних точках. Для цього ми використаємо діагональний метод Кантора. Занумеруємо всі раціональні числа відрізка $[a,b]$ (це можна зробити оскільки їх множина є зліченною), тобто нехай $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}\cap[a,b]$.

Оскільки числова послідовність $(F_n(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ є обмежена (згідно умов теореми), то можна вибрати таку підпослідовність $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$, що послідовність $(F_n^{(1)}(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. Повторюючи ті ж самі міркування, отримуємо, що з послідовності $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(F_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, що послідовність $(F_n^{(2)}(r_2))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. Продовжуючи цей процес, отримуємо послідовність підпослідовностей $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}, k\in\mathbb{N}$, таких, що:

a) кожна послідовність $(F_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ є підпослідовність послідовності $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$;

b) для кожного $k\in\mathbb{N}$ збігається послідовність $(F_n^{(k)}(r_k))_{n\in\mathbb{N}}$.

Розглянемо тепер діагональну послідовність $(F_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Вона є підпослідовністю кожної підпослідовності $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, а, отже, поточково збігається на множині всіх раціональних чисел проміжка $[a,b]$.

Для зручності введемо позначення

$$\Phi_n = F_n^{(n)}$$

Крок другий.

Покажемо, що послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається всюди, за винятком зліченної множини точок.

Покладемо за означенням для всіх раціональних $r\in[a,b]$

$$\Phi(r) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(r).$$

Зауважимо, що оскільки функції Φ_n є неспадні, то грінична функція теж є неспадною на множині раціональних $r\in[a,b]$. Продовжимо функцію Φ на весь інтервал (a,b) покладаючи

$$\Phi(x) := \sup\{\Phi(r) \mid r\in\mathbb{Q}\cap[a,b], \quad r<x\}.$$

Очевидно, що так означена функція Φ є монотонно неспадною. Покажемо, що якщо $x^*\in(a,b)$ є точкою неперервності функції Φ, то послідовність $(\Phi_n(x^*))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. З неперервності випливає, що для довільного заданого ε існує $\delta>0$ таке, що

$$|\Phi(x^*)-\Phi(x)| < \varepsilon/6, \qquad \text{якщо} \quad |x^*-x|<\delta.$$

Виберемо тепер довільні раціональні точки r' і r'' такі, що

$$x^*-\delta < r' < x^* < r'' < x^*-\delta.$$

Оскільки послідовності $(\Phi_n(r'))_{n\in\mathbb{N}}$ і $(\Phi_n(r''))_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються, то існує $n_0 \in \mathbb{N}$ тке, що для всіх $n > n_0$

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \varepsilon/6, \qquad |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \varepsilon/6.$$

Зауважимо, що

$$|\Phi(r') - \Phi(r'')| = |\Phi(r') - \Phi(x^*) + \Phi(x^*) - \Phi(r'')| \le$$

$$\le |\Phi(r') - \Phi(x^*)| + |\Phi(x^*) - \Phi(r'')| < \frac{2}{6}\varepsilon.$$

Оскільки

$$\Phi_n(r') - \Phi_n(r'') =$$

$$= (\Phi_n(r') - \Phi(r')) + (\Phi(r') - \Phi(r'')) + (\Phi(r'') - \Phi_n(r'')),$$

то

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| \le \varepsilon/6 + 2\varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

З монотонності функцій F_n випливає, що

$$\Phi_n(r') \le \Phi_n(x^*) \le \Phi_n(r'').$$

Тому

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \le \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Враховуючи, що

$$\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*) = (\Phi(x^*) - \Phi(r')) + (\Phi(r') - \Phi_n(r')) + (\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)),$$

отримуємо

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \le$$

$$\le |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Звідки випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*).$$

Ми показали, що послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у всіх точках неперервності функції Φ. Оскільки функція Φ монотонна, то множина її точок розриву не більш як зліченна. Отже, послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у всіх точках інтервалу (a, b) за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Крок третій.

Ми довели, що з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігається у всіх точках проміжка $[a, b]$ за винятком, можливо, зліченної множини точок. Використовуючи тепер перший крок, вибираємо з послідовності $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ підпослідовність, яка збігається у всіх точках проміжка $[a, b]$. Теорема доведена. $\square$

19. Лебегові простори.

В даній лекції ми розглянемо простори $L_p(X)$, які також називають лебеговими просторами. Для цього нам спочатку потрібно дати означення нормованого простору.

Нормовані простори Нормований простір отримується в результаті поєднання двох різних структур. А власне, поєднання структури лінійного простору і структури метричного простору.

Означення 19.1. *Нормованим простором X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) називаєтьcя лінійний простір X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) з введеною на ньому нормою, тобто функцією $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$, для якої виконуються наступні три властивості:*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$;
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Нормований простір є також метричним простором. Метрика в нормованому просторі вводиться за формулою:

$$d(x,y) := \|x-y\|, \qquad x,y \in X.$$

Легко перевірити, що з аксіом норми легко випливають потрібні властивості метрики.

Тепер ми можемо перейти до означення лебегових просторів.

Простір $L_1(X,\mu)$. Нехай (X,Σ,μ) простір з мірою. При цьому ми будемо вважати, що міра є повною (тобто кожна підмножина множини нульової міри є вимірна і має нульову міру.) Розглянемо лінійний простір $L(X,\mu)$ всіх μ-інтегровних за Лебегом функцій. Покладемо за означенням

$$\|f\| := \int_X |f|\,d\mu, \qquad f \in L(X,\mu).$$

З властивостей інтеграла випливає, що для довільних $f,g \in L(X,\mu)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda f\| := \int_X |\lambda f|\,d\mu = |\lambda| \int_X |f|\,d\mu$$

і
$$\|f+g\| := \int_X |f+g|\,d\mu \le \int_X (|f|+|g|)\,d\mu = \|f\|+\|g\|.$$
Таким чином введена нами функція $L(X,\mu) \ni f \mapsto \|f\|$ буде нормою, якщо з рівності
$$\|f\| = 0$$
випливає, що $f = 0$. Але, це не так. Якщо $\|f\| = 0$, то $\int_X |f|\,d\mu = 0$. Звідки випливає, що $f(x) = 0$ майже скрізь. Отже, введена нами функція не є нормою. З цієї ситуації є природній вихід. Можна домовитися не розрізняти функції, які є μ-еквівалентними, тобто відрізняються між собою на множині міри нуль.

Позначимо через $L_1(X,\mu)$ множину класів, що складаються з μ-еквівалентних функцій простору $L(X,\mu)$, тобто фактор-простір $L(X,\mu)/\sim$. Зауважимо, що $L_1(X,\mu)$ є лінійними простором. Норму задамо формулою
$$\|\hat{f}\| := \int_X |f|\,d\mu, \qquad f \in \hat{f} \in L_1(X,\mu),$$
де f - представник класу $\hat{f}$. Зазначимо, що інтеграли у правій частині не залежать в представника класу. Щоб не ускладнювати міркування можна вважати, що в кожному класі ми вибрали певного представника і всі процедури виконуємо з цим представником. Але, при потребі можемо міняти представників. Це дозволяє нам дивитися на $L_1(X,\mu)$ як на простір функцій.

Зрозуміло, що простір $L_1(X,\mu)$ є вже нормованим. Виявляється, що він є повним. Це є важливою перевагою простору $L_1(X,\mu)$. Повнота простору $L_1(X,\mu)$ означає його повноту як метричного простору з метрикою
$$d(f,g) = \|f-g\| = \int_X |f-g|\,d\mu, \qquad f,g \in L_1(X,\mu).$$

Теорема 19.2. *Простір $L_1(X,\mu)$ є повний.*

Доведення. Щоб довести повноту простору $L_1(X,\mu)$ потрібно довести, що кожна фундаментальна послідовність у цьому просторі є збіжна. Нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна послідовність у просторі $L_1(X,\mu)$. Це означає, що
$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n,m \to \infty.$$
Щоб довести збіжність фундаментальної послідовності досить довести, що вона містить збіжну підпослідовність. Покажемо як можна отримати таку підпослідовність.

З фундаментальності випливає, що існує натуральне число n_1 таке, що
$$\|f_n - f_m\| \le \frac{1}{2}, \qquad n,m \ge n_1.$$

Далі, існує натуральне число $n_2 > n_1$ таке, що

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{2^2}, \qquad n, m \geq n_2.$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо строго зростаючу послідовність $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ натуральних чисел, для якої

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{2^k}, \qquad n, m \geq n_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо послідовність

$$g_k := f_{n_k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Вона є підпослідовністю послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, причому

$$\|g_{k+1} - g_k\| \leq \frac{1}{2^k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що послідовність $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є збіжною.

Розглянемо ряд

$$|g_1(x)| + |g_2(x) - g_1(x)| + \cdots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| + \ldots.$$

За теоремою Леві він збігається майже скрізь на X. Дійсно, послідовність функцій

$$F_n(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

монотонна, тобто $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$ і

$$\int_X F_n \, d\mu = \|g_1\| + \|g_2 - g_1\| + \cdots + \|g_{n+1} - g_n\| \leq \|g_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|g_1\| + 1,$$

тобто

$$\int_X F_n \, d\mu \leq \|g_1\| + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Бачимо, що виконані всі умови теореми Леві. Зі збіжності майже скрізь ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

випливає збіжність майже скрізь ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

А оскільки

$$g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)),$$

тобто послідовність $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до деякої функції g. Ця функція є вимірна за теоремою про поточкову границю вимірних функцій.

Зауважимо, що

$$\int_X |g_n - g_m|\, d\mu = \|g_n - g_m\| \leq 2^{-m}, \qquad n > m.$$

Згідно з теоремою Фату в нерівності

$$\int_X |g_n - g_m|\, d\mu \leq 2^{-m}, \qquad n > m,$$

можна перейти до границі при $n \to \infty$, тобто функція $(g - g_m)$ є інтегровна і

$$\int_X |g - g_m|\, d\mu \leq 2^{-m}, \qquad n > m.$$

Але, якщо функція $(g - g_m)$ є інтегровна, то інтегровною є і функція

$$g_m + (g - g_m) = g.$$

Отже, $g \in L_1(X, \mu)$ і

$$d(g, g_m) = \|g - g_m\| \leq 2^{-m} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

А це означає, що послідовність $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною у просторі $L_1(X, \mu)$.

Залишається довести, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до g. Використаємо нерівність трикутника:

$$d(f_n, g) = \|f_n - g\| \leq \|f_n - g_m\| + \|g_m - g\| \leq \|f_n - g_m\| + 2^{-m}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З фундаментальності послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що існує n_0 таке, що

$$\|f_n - g_m\| \leq \varepsilon/2, \qquad n, m > n_0.$$

Можна також вважати, що $2^{-n_0} < \varepsilon/2$. Тоді

$$d(f_n, g) \leq \|f_n - g_m\| + 2^{-m} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad n, m > n_0.$$

А це означає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до g. $\square$

20. Теорія метричних просторів. Метричний простір. Означення та приклади.

Метричний простір є, можливо, найбільш простою і зрозумілою математичною структурою. З означенням метричного простору студентів, як правило, знайомлять на першому курсі. Тому, ви скоріш за все, з поняттям метричного простору знайомі. Правда, коли попросити студента старших курсів подати приклад метричного простору, то не завжди можна отримати відповідь. А метричний простір отримується дуже просто.

Потрібно взяти довільну непорожну множину, позначимо її, наприклад, через X, а потім ввести на ній метрику (відстань). Метрика це функція, позначимо її, наприклад, через d, яка парі точок x, y множини X ставить у відповідність невід'ємне число $d(x, y)$. Скорочено цей факт можна записати у вигляді

$$d : X \times X \to [0, \infty).$$

Але цього мало, потрібно, щоб метрика мала деякі додаткові властивості. Ці властивості є простими і інтуїтивно зрозумілими.

По-перше, метрика має розрізняти точки, тобто, якщо $x \neq y$, то $d(x, y) > 0$, а якщо $x = y$, то $d(x, y) = 0$. Скорочено це можна записати у вигляді

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \qquad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

По-друге, відстань від x до y і відстань від y до x мають бути однаковими, тобто

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x).$$

І, нарешті, нерівність трикутника. Відстань від x до y не може перевищувати суми відстаней від x до z і від z до y, тобто

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \ \forall z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Підсумовуючи, можемо сказане коротко викласти як

Означення 20.1. *Метричним простором ми називаємо пару (X, d), у якій X - непорожня множина, а d - функція $X \times X \to [0, \infty)$, яка володіє властивостями:*

(1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
(2) $d(x,y) = d(y,x)$;
(3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Перейдемо до прикладів метричних просторів. Всіх метричних просторів є дуже багато (нескінченна кількість). Але, реально в математиці активно використовується декілька десятків (точніше декілька десятків класів метричних просторів). А що стосується нас, то ми будемо використовувати дуже невеликий набір метричних просторів. Але, їх означення доведеться запам'ятати.

Простір $\mathbb{R}$. Під метричним простором $\mathbb{R}$, як правило розуміють множину дійсних чисел з метрикою $d(x,y) = |x-y|$. Хоча, метрику на множині $\mathbb{R}$ можна ввести і іншими способами. Але, якщо нічого не сказано, то це метрика $d(x,y) = |x-y|$. Перевірка аксіом метричного простору є зовсім проста і випливає з властивостей функції $x \mapsto |x|$.

Простір $\mathbb{R}^n$. Нагадаю, що елементами множини $\mathbb{R}^n$ є всі послідовності $(x_j)_{j=1}^n$ дійсних чисел $x_j, j = 1, \ldots, n$. Таким чином точкою (елементом) в $\mathbb{R}^n$ є послідовність. Як правило, на $\mathbb{R}^n$ розглядають евклідову відстань, тобто

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Перевірка перших двох аксіом метрики в даному випадку є елементарною. Але, що стосується нерівності трикутника, то тут виникає проблема. Потрібно знати класичну нерівність, яку називають по-різному. Варіанти: 1) нерівність Коші; 2) нерівність Шварца; 3) нерівність Коші-Шварца; 4) нерівність Буняковського; 5) нерівність Коші-Буняковського. Я буду називати її нерівністю Буняковського. Вона записується наступним чином:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Є багато доведень цієї нерівності знайдіть хоча би одне.

Простір $\mathbb{C}^n$. Простір $\mathbb{C}^n$ є комплекним аналогом простору $\mathbb{R}^n$. Елементами множини $\mathbb{C}^n$ є всі послідовності $(x_j)_{j=1}^n$ комплексних чисел $x_j, j = 1, \dots, n$. Як правило, на $\mathbb{C}^n$ розглядають евклідову відстань:

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Простір $C[a, b]$. В просторі $C[a, b]$ неперервних функцій метрику, як правило, вводять за формулою:

$$d(f, g) := \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|, \qquad f, g \in C[a, b].$$

Ця метрика називається рівномірною, оскільки вона породжує рівномірну збіжність.

Перевіримо аксіоми метрики.

1) Нехай $f, g \in C[a, b]$. З рівності $d(f, g) = 0$ випливає, що $|f(x) - g(x)| \le 0$ для всіх $x \in [a, b]$. А це означає, що $f = g$. З іншого боку, якщо $f = g$, то $d(f, g) = 0$.

2) З властивостей модуля випливає, що $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$. Тому

$$d(f, g) := \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| = \max_{a \le x \le b} |g(x) - f(x)| = d(g, f).$$

3) Нехай $f, g, h \in C[a, b]$. Тоді

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \qquad x \in [a, b].$$

З означення відстані випливає, що для довільних $x \in [a, b]$

$$|f(x) - h(x)| \le d(f, h), \qquad |h(x) - g(x)| \le d(h, g).$$

Тому

$$|f(x) - g(x)| \le d(f, h) + d(h, g), \qquad x \in [a, b].$$

Звідки випливає, що

$$d(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \le d(f, h) + d(h, g),$$

тобто $d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g)$.

Простір ℓ_∞. Через ℓ_∞ позначають простір всіх обмежених комплекснозначних послідовностей, тобто

$$\ell_\infty := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_∞ ми задаємо формулою:

$$d(x,y) := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Перевірка аксіом така сама, як у випадку простору $C[a,b]$.

Подамо доведення лише нерівності трикутника. Воно повторює доведення нерівності трикутника у випадку простору $C[a,b]$. Нехай

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Маємо

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \le d(x,z) + d(z,y), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Тому число $d(x,z) + d(z,y)$ є верхньою гранню для множини $\{|x_j - y_j|\}_{j\in\mathbb{N}}$, а, отже,

$$d(x,y) := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - y_j| \le d(x,z) + d(z,y).$$

Простір ℓ_1. Через ℓ_1 позначають простір сумовних послідовностей:

$$\ell_1 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_1 ми задаємо формулою:

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

Перевіримо лише аксіому трикутника. Перевірка двох перших аксіом є очевидною. Нехай

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Оскільки

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - z_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |z_j - y_j|,$$

тобто $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Нерівність Гельдера і Мінковського. Числа $p, q \in (1, \infty)$, які пов'язані співвідношенням

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ми назвемо взаємно спряженими показниками. Якщо $p = 1$, то спряженим до нього показником вважають $q = \infty$. Нехай p і q пара взаємно спряжених показників і $(x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n$ - довільні числові послідовності. Гельдер довів, що справедлива наступна нерівність

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{1/q}. \tag{20.1}$$

Використовуючи нерівність Гельдера можна довести нерівність

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}, \tag{20.2}$$

яка називається нерівністю Мінковського.

Вправа 20.2. *Самостійно опрацювати доведення нерівностей Гельдера і Мінковського для скінченних послідовностей (Колмогоров ЕТФФА, 2 розділ, параграф 1).*

З нерівностей (20.1) і (20.2) можна отримати нерівності Гельдера і Мінковського для нескінченних послідовностей.

Нехай p і q пара взаємно спряжених показників і $(x_j)_{j=1}^\infty, y = (y_j)_{j=1}^\infty$ - довільні числові послідовності. Припустимо, що

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty, \qquad \sum_{j=1}^\infty |x_j|^q < \infty.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty x_j y_j$ абсолютно збіжний і

$$\left| \sum_{j=1}^\infty x_j y_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^q \right)^{1/q}. \tag{20.3}$$

Ця нерівність називається нерівністю Гельдера для послідовностей.

А якщо

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p$ збігається і справедлива нерівність

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p}, \tag{20.4}$$

яка називається нерівністю Мінковського для послідовностей.

Доведемо, наприклад, нерівність (20.3).

З нерівності Гельдера для скінченних послідовностей випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^q\right)^{1/q}.$$

Звідки, очевидно, отримуємо

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q\right)^{1/q}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності випливає, що ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ абсолютно збіжний і

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q\right)^{1/q}.$$

Простори ℓ_p. Для довільного $p \in (1, \infty)$ через ℓ_p позначають простір

$$\ell_p := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_p ми задаємо формулою:

$$d(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Перевірка перших двох аксіом є очевидною. А нерівність трикутника випливає з нерівності Мінковського для послідовностей.

Відкриті і закнені множини. Нехай (X,d) - метричний простір. Множину

$$B(x,r) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$$

називають відкритою кулею у метричному просторі X з центром $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$. Відповідно множину

$$\bar{B}(x,r) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\}.$$

називають замкнутою кулею у метричному просторі X з центром $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$.

Околом точки x_0 називається довільна множина U, що містить деяку кулю $B(x_0,r)$.

Нехай тепер A довільна множина метричного простору X і $x_0 \in X$. Точка x_0 називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує такий окіл цієї точки, який міститься в A. Іншими словами, x_0 називається є внутрішньою точкою множини A, якщо існує $r > 0$ таке, що $B(x_0,r) \subset A$.

Точка x_0 називається ізольованою точкою множини A, якщо існує такий окіл цієї точки, в якому немає інших точок множини A, крім точки x_0. Зрозуміло, що як ізольована, так і внутрішня точка множини належать цій множині.

Точка x_0 називається точкою дотику множини A, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини A. Усі точки множини A є її точками дотику, але можуть існувати точки дотику, які не належать до цієї множини.

Множина усіх точок дотику множини A називається її замиканням і позначається через $\bar{A}$. Наприклад, замиканням множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел у просторі $\mathbb{R}$ є $\mathbb{R}$.

Точка x_0 називається граничною точкою множини A, якщо у кожному околі цієї точки є нескінченна кількість елементів множини A, хоч сама точка x_0 не обов'язково повинна належати до A.

Очевидно, що кожна гранична точка множини A є її точкою дотику, але не кожна точка дотику є граничною.

Точка $a \in X$ називається границею послідовності $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ метричного простору X (скорочений запис $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$), якщо у кожному околі точки x_0 містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, тобто

$$\left(a = \lim_{n \to \infty} x_n\right) \quad \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad d(x_n, a) < \varepsilon)\,.$$

Для того, щоб точка x_0 була точкою дотику множини A, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність точок множини A, яка збігається до x_0. А для того, щоб вона була граничною точкою множини A, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ різних точок множини A, яка збігається до x_0.

Сепарабельні метричні простори. Множина A називається щільною у множині B, якщо $\bar{A} \supset B$, і всюди щільною у метричному просторі X, якщо $\bar{A} = X$.

Наприклад, множина раціональних чисел є всюди щільна у просторі $\mathbb{R}$.

Метричні простори, в яких існує зліченна всюди щільна множина, називаються сепарабельними метричними просторами.

Зокрема, зі зліченності множини раціональних чисел випливає сепарабельність простору $\mathbb{R}$.

У просторах $\mathbb{R}^n$ зліченні скрізь щільні множини утворюють елементи $x = (x_j)_{j=1}^n$ з координатами $x_j \in \mathbb{Q}$. У просторах $C[a, b]$ такі множини складаються з многочленів із раціональними коефіцієнтами. Тому кожен з цих просторів є сепарабельним.

Але, наприклад, простір ℓ_∞ всіх обмежених дійснозначних (або комплекснозначних) послідовностей з відстанню

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j-y_j|, \qquad x=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y=(y_j)_{j\in\mathbb{N}},$$

не є сепарабельним. Справді, розглянемо у цьому просторі лише послідовності, що складаються з нулів та одиниць. Вони утворюють незліченну множину, рівну за потужністю множині дійсних чисел відрізка $[0,1]$. Відстань між довільними двома такими послідовностями дорівнює 1. Оточимо кожну точку цієї множини відкритою кулею радіуса $r<1/2$. Оскільки такі кулі не перетинаються, то у кожній з них має бути принаймні по одному елементу скрізь щільної в ℓ_∞ множини. Отже, жодна всюди щільна множина у цьому просторі не є зліченною.

Відкриті і замкнені множини та їх властивості. Множина A, яка співпадає зі своїм замиканням, називається замкненою. Зокрема, замикання будь-якої множини є замкнена множина (довести самостійно).

У довільному метричному просторі X множини $\emptyset$ та X замкнені. Замкненими у ньому будуть і всі множини зі скінченною кількістю елементів та замкнені кулі цього простору.

У просторі $\mathbb{R}$ замкненими множинами є, зокрема, будь-які відрізки та об'єднання скінченної кількості відрізків.

Перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.

Зауважимо, що об'єднання нескінченної кількості замкнених множин не обов'язково замкнена множина.

Множина A, всі точки якої є внутрішніми, називається відкритою. У довільному метричному просторі $\emptyset$ та X є відкритими.

Відкритими множинами є і всі відкриті кулі метричного простору. А у просторі $\mathbb{R}$ кожна непорожня відкрита множина є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.

Звідси, зокрема, випливає, що кожна непорожня відкрита множина на числовій прямій має потужність континууму.

Для того, щоб множина A була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення $A' := X \setminus A$ було замкненою множиною (довести самостійно).

Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина (**довести самостійно**).

21. Повні метричні простори.

В даній лекції ми перейдемо до розгляду такого важливого поняття, як поняття повноти метричного простору.

Означення 21.1. *Послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) називається фундаментальною або послідовністю Коші, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall m > n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Іншими словами, послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) називається фундаментальною, якщо

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Вправа 21.2. *Кожна збіжна послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) є фундаментальна.*

Вправа 21.3. *Якщо послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) фундаментальна і містить збіжну підпослідовність, то вона сама є збіжною.*

Означення 21.4. *Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжна, називається повним.*

Наведемо приклади доведення неповноти метричного простору.

Приклад 21.5. *Задамо на множині* $\mathbb{Q}$ *раціональних чисел метрику формулою* $d(x, y) = |x - y|$. *Тоді простір* $(\mathbb{Q}, d)$ *є неповним. Дійсно, нехай* r_n *раціональне число, для якого*

$$|\sqrt{2} - r_n| < 10^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що послідовність $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *є фундаментальна. Але, вона не є збіжна, оскільки число* $\sqrt{2}$ *не є раціональним.*

Приклад 21.6. *Задамо на* $C[-1, 1]$ *(множині неперервних функцій на відрізку* $[-1, 1]$*) інтегральну метрику*

$$d(f, g) := \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx, \qquad f, g \in C[a, b].$$

Тоді такий метричний простір є неповний.

Щоб довести неповноту досить знайти фундаментальну послідовність яка не є збіжна.

Розглянемо послідовність

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1].$$

Вона фундаментальна. Дійсно, нехай $n, m \in \mathbb{N}$ *і* $m \leq n$. *Оскільки функція* f_n *та* f_m *є непарні, то функція* $|f_n - f_m|$ *є парна. Тому*

$$d(f_n, f_m) := \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = 2\int_{0}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

Функція arctg *монотонно зростає на* $[0, \infty)$, *тому* $f_n \geq f_m$, *а, отже,*

$$d(f_n, f_m) = 2\int_{0}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = 2\int_{0}^{1} f_n(x)\, dx - 2\int_{0}^{1} f_m(x)\, dx = J_n - J_m,$$

де

$$J_k = 2\int_{0}^{1} f_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $|\operatorname{arctg} x| \leq \pi/2$, *то*

$$J_k = 2\int_{0}^{1} f_k(x)\, dx \leq \pi \int_{0}^{1} dx = \pi.$$

Крім того, послідовність $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно зростає, бо $f_{k+1} \geq f_k$. Тому згідно теореми Вейєрштраса послідовність $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається. А, отже,

$$\lim_{n,m\to\infty} d(f_n, f_m) = \lim_{n,m\to\infty}(J_n - J_m) = \lim_{n\to\infty} J_n - \lim_{m\to\infty} J_m = 0.$$

Припустимо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна в нашому просторі. Тоді існує така функція $f \in C[-1,1]$, що

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0$$

На кожному проміжку $[\alpha, 1]$ ($\alpha \in (0,1)$) послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції $g \equiv \pi/2$. Тому

$$\int_{\alpha}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx = 0,$$

а, отже, $f(x) = g(x)$ при $x \in [\alpha, 1]$. На кожному проміжку $[-1, -\alpha]$ ($\alpha \in (0,1)$) послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції $g \equiv -\pi/2$. Тому

$$\int_{-1}^{-\alpha} |f(x) - g(x)|\,dx = 0,$$

а, отже, $f(x) = g(x)$ при $x \in [-1, -\alpha]$. З довільності α випливає, що

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{якщо } x \in (0,1]; \\ -\pi/2, & \text{якщо } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Але, така фунція f має розрив в точці $x = 0$. Суперечність.

Наведемо приклад доведення повноти метричного простору.

Приклад 21.7. *Задамо на $C[a,b]$ (множині неперервних функцій на відрізку $[a,b]$) рівномірну метрику*

$$d(f,g) := \max_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|, \qquad f, g \in C[a,b].$$

Такий метричний простір є повним.

Дійсно, нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ довільна фундаментальна послідовність в $C[a,b]$. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \quad d(f_n, f_m) \leq \varepsilon. \tag{21.1}$$

Звідки випливає, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{21.2}$$

Отже, для кожного $x \in [a,b]$ послідовність $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна в $\mathbb{R}$. Тому вона збіжна (бо простір $\mathbb{R}$ є повний). Покладемо за означенням

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in [a,b].$$

Покажемо, що $f \in C[a,b]$. Перейдемо в (21.2) до границі при $m \to \infty$. Отримаємо, що

$$(21.3) \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Але, цей запис означає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно на $[a,b]$ збігається до функції f. Оскільки рівномірна збіжна послідовність неперервних функцій збігається до неперервної, то $f \in C[a,b]$. Крім того, запис

$$\forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

еквівалентний тому, що $d(f_n, f) \le \varepsilon$. Тому (21.3) можна переписати у вигляді

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad d(f_n, f) \le \varepsilon.$$

тобто послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції f в $C[a,b]$.

Критерій повноти.

Теорема 21.8. *Для того щоб метричний простір (X,d) був повний, необхідно і досить, щоб кожна послідовність $(\bar{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ замкнених вкладених куль ($\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$), радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність. Нехай (X,d) - повний метричний простір. Позначимо через x_n центр, а через r_n радіус кулі $\bar{B}_n$. Оскільки кулі вкладені, то для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких, що $m < n$ маємо

$$d(x_n, x_m) \le r_m.$$

Оскільки $r_m \to 0$ при $m \to \infty$, то послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна. Нехай $x = \lim\limits_{n\infty} x_n$. Очевидно, що точка x є точкою дотику для всіх замкнених куль $\bar{B}_n$. А, отже, $x \in \bar{B}_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто перетин $\cap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}_n$ є непорожній.

Достатність. Нехай послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна. Покажемо, що вона є збіжною. З огляду на вправу 21.3 досить переконатися, що вона (послідовність) містить збіжну підпослідовність. Побудуємо її конструктивно.

Оскільки послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, то існує натуральне число k_1 таке, що

$$d(x_{k_1}, x_n) < 2^{-1}, \qquad n > k_1.$$

Далі, існує натуральне $k_2 > k_1$ таке, що

$$d(x_{k_2}, x_n) < 2^{-2}, \qquad n > k_2.$$

За індукцією будуємо зростаючу послідовність $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ таку, що

$$d(x_{k_j}, x_n) < 2^{-j}, \qquad n > k_j.$$

Розглянемо послідовність $y_j = x_{k_j},\ j \in \mathbb{N}$. За побудовою

$$d(y_j, y_{j+1}) \le 2^{-j}$$

Покажемо, що послідовність $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є збіжна.

Для цього розглянемо кулі

$$\bar{B}_j := \bar{B}(y_j, 2^{-j+1}), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Вони замкнені і їх радіуси прямують до нуля. Покажемо, що вони є вкладені.

Якщо $x \in \bar{B}_{n+1}$, то

$$d(x, y_n) \le d(x, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_n) \le 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1},$$

тобто $x \in \bar{B}_n$. Отже, $B_{n+1} \subset B_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто ми маємо послідовність замкнених вкладених одна в другу куль, радіуси яких прямують до нуля.

Отже, існує точка $y \in X$, що належить усім цим кулям. Це означає, що

$$d(y, y_n) \le 2^{-n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ збігається до y. Теорема доведена. □

Поповнення метричного простору. Повнота є хорошою властивістю метричного простору. Наш практичний досвід підказує, що об'єкти з хорошими властивостями є в меншості.

Тому постає питання: "Чи можна неповний метричний простір зробити повним шляхом доповнення його новими елементами"

Проілюструємо сказане двома прикладами.

1) Розглянемо метричний простір $X = (0, 1]$ з метрикою $d_X(x, y) = |x - y|$. Цей простір неповний, бо послідовність $x_n := 1/n,\ n \in \mathbb{N}$, є фундаментальною, але не є збіжною. Однак, якщо ми додамо до простору точку $x_0 = 0$, то простір $Y = [0, 1]$ з метрикою $d_Y(x, y) = |x - y|$ є повним.

2) Метричний простір $X = \mathbb{Q}$ з метрикою $d_X(x, y) = |x - y|$ є неповним. Але, його можна помістити в повний метричний простір $Y = \mathbb{R}$ з метрикою $d_Y(x, y) = |x - y|$.

Зауважимо, що метрика d_Y в обох прикладах є продовженням метрики d_X (формула та сама, але області визначення різні). Таким чином, метрика на вихідному просторі не змінюється. Крім того, в обох прикладах замикання $\bar{X}$ у просторі Y співпадає з Y.

Наведені приклади підказують, яким може бути означення поповнення метричного простору.

Означення 21.9. *Повний метричний простір (Y, d_Y) називається поповненням метричного простору (X, d_X), якщо:*

(1) *$X \subset Y$ і $\bar{X} = Y$ ($\bar{X}$ - замикання X у просторі Y);*
(2) *для всіх $x, y \in X \quad d_Y(x, y) = d_X(x, y)$.*

Проте, означення 21.9 залишає мало свободи. Умова $X \subset Y$ є обтяжлива. Перші серйозні приклади побудови поповнень метричних просторів показали, що, як правило, природа елементів в поповненні відрізняється від природи елементів вихідного простору.

Означення 21.10. *Нехай (X, d_X) і (Y, d_Y) метричні простори. Відображення $J : X \to Y$ називається ізометричним вкладенням X в Y, якщо*

$$\forall x, y \in X \quad d_Y(Jx, Jy) = d_X(x, y).$$

При цьому ізометричне вкладенням J називається ізометрією простору X на Y, якщо $JX = Y$, тобто коли J є сюр'єкцією.

Зауважимо, що ізометричне вкладення є ін'єкцією, а ізометрія є біекцією. Дійсно, якщо для деяких $x, y \in X \quad Jx = Jy$, то

$$d_X(x, y) = d_Y(Jx, Jy) = 0,$$

тобто $x = y$.

Означення 21.11. *Нехай (X, d_X) і (Y, d_Y) метричні простори. Простори X і Y називається ізометричними, якщо існує ізометрія $J : X \to Y$.*

Ізометричні простори з точки зору теорії метричних просторів є тотожними. Ми просто тим самим елементам дали інші назви.

Враховуючи сказане, ми можемо придати означенню 21.9 наступну більш загальну форму.

Означення 21.12. *Повний метричний простір (Y, d_Y) називається поповненням метричного простору (X, d_X), якщо простір X можна ізометрично і всюди щільно вкласти в Y.*

Теорема 21.13. *Кожний метричний простір можна поповнити, тобто ізометрично і всюди щільно вкласти в повний метричний простір. Поповнення є єдиним з точністю до ізометрії.*

Оскільки доведення теореми є досить довгим і технічно складним, ми обмежимося його ескізом. Ідея доведення належить Георгу Кантору. Власне, він використав цю ідею для обгрунтування теорії дійсного числа. А потім ця ж ідея була використана Хаусдорфом для доведення теореми про поповнення.

В одному з епізодів доведення використовується нерівність, яка називається нерівністю чотирикутника.

Твердження 21.14. *Нехай (X, d) - метричний простір. Для довільних чотирьох точок x, y, x', y' цього простору виконується нерівність*

$$|d(x, y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y').$$

Доведення. **Довести самостійно.** $\square$

Ескіз доведення теореми про поповнення. Нехай (X, d_X) - метричний простір. Центральне місце у доведенні відіграє конструкція простору (Y, d_Y), який є поповненням простору X.

Позначимо через $\widetilde{X}$ множину всіх фундаментальних послідовностей простору X. Таким чином елемент $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ це є деяка фундаментальна в X послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Введемо на $\widetilde{X}$ псевдометрику $\widetilde{d}$ формулою

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Псевдометрикою ми називаємо функцію, що має всі властивості метрики, за винятком, першої. (**Доведіть самостійно, що для $\widetilde{d}$ виконуються друга і третя аксіоми метрики.**)

Зауважимо, що існування границі в означенні псевдометрики випливає з нерівності чотирикутника для четвірки x_n, y_n, x_m, y_m :

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Подумайте чому це так.

Введемо на $\widetilde{X}$ бінарне відношення:

$$\widetilde{x} \sim \widetilde{y} \Leftrightarrow \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0.$$

Неважко переконатися, що це відношення є відношенням еквавалентності, тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним. Воно (відношення) розбиває $\widetilde{X}$ на класи, які попарно не перетинаються. Множину цих класів позначимо через $\widehat{X}$.

Використовуючи нерівність трикутника для псевдометрики $\widetilde{d}$, легко переконатися, що для довільних $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ виконується наступне:

$$\forall \widehat{x} \in \widehat{X} \quad \forall \widehat{y} \in \widehat{Y} \quad \exists! c \ge 0 \quad \forall \widetilde{x} \in \widehat{x} \quad \forall \widetilde{y} \in \widehat{y} \qquad \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = c.$$

З огляду на сказане вище можемо на $\widehat{X}$ ввести відстань $\widehat{d}$ за формулою:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \qquad \widetilde{x} \in \widehat{x}, \quad \widetilde{y} \in \widehat{y}.$$

Виявляється, що $\widehat{d}$ є метрикою.

Побудуємо ізометричне вкладення простору X в простір $\widehat{X}$. Для довільного $x \in X$ через Jx позначимо той клас в $\widehat{X}$, який містить фундаментальну послідовність

$$x_n \equiv x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $x, y \in X$, то

$$\widehat{d}(Jx, Jy) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y).$$

Отже, відображення J є ізометричним вкладенням.

Доведемо, що $\overline{JX} = Y$. Зафіксуємо довільне $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Візьмемо довільну фундаментальну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з класу $\widehat{x}$. Переконаємося, що послідовність $(Jx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$.

Дійсно,

$$\widehat{d}(\widehat{x}, Jx_k) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{d}(\widehat{x}, Jx_k) = \lim_{n,k\to\infty} d(x_n, x_k) = 0,$$

тобто послідовність $(Jx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$. Звідси випливає, що кожна точка $\widehat{x} \in \widehat{X}$ є точкою дотику для множини JX.

Доведемо повноту простору $\widehat{X}$. Нехай $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна послідовність в $\widehat{X}$. Оскільки JX всюди щільне в $\widehat{X}$, то для кожного $\widehat{x}_n$ існує $x_n \in X$ таке, що $\widehat{d}(\widehat{x}_n, Jx_n) < 1/n$. Покажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в X. Дійсно,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \widehat{d}(Jx_n, Jx_m) &\le \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, Jx_m) \le \\ &\le \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) + 1/n + 1/m \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty, \end{aligned}$$

тобто послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в X. Позначимо через $\widehat{x}$ клас, що містить фундаментальну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. З доведеного вище випливає, що послідовність $(Jx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до елемента $\widehat{x}$. Оскільки

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) \le \widehat{d}(\widehat{x}_n, Jx_n) + \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}) \le 1/n + \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то послідовність $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$.

Залишається довести, що якщо ми маємо два різні поповнення простору X, то вони є ізометричними. $\square$

Вправа 21.15. *Довести, що два різні поповнення метричного простору X є ізометричними.*

22. Практичне заняття. Аксіоми метрики. Замкнені і відкриті множини.

Задачі на перевірку аксіом метрики.

Задача 22.1. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = |x^2 - y^2|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо не виконується перша аксіома: для точок $x = 1$ і $y = -1$ маємо, що $d(x,y) = |1 - 1| = 0$.

Задача 22.2. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = |x^3 - y^3|.$$

Розв'язок. Функція d є метрикою. Дійсно:

1a) якщо $x = y$, то $d(x,y) = |x^3 - y^3| = 0$;
1b) якщо $d(x,y) = 0$, то $|x^3 - y^3| = 0$, а, отже, $x^3 = y^3$, що означає рівність $x = y$;
2) очевидно, що

$$d(x,y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = d(y,x);$$

3) для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x^3 - y^3| = |x^3 - z^3 + z^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3| = d(x,z) + d(z,y).$$

Задача 22.3. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = |\sin x - \sin y|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо не виконується перша аксіома: для точок $x = 0$ і $y = \pi$ маємо, що $d(x,y) = |\sin x - \sin y| = 0$.

Задача 22.4. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = |x - y|^2.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо не виконується нерівність трикутника:

для точок $x = 1$, $y = -1, z = 0$ маємо, що

$$d(x, y) = |1 + 1|^2 = 4, \qquad d(x, z) = |1 - 0|^2 = 1, \qquad d(z, y) = |1 - 0|^2 = 1,$$

а, отже,

$$d(x, y) > d(x, z) + d(z, y).$$

Задача 22.5. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = |x - y|^{1/2}.$$

Розв'язок. Функція d є метрикою. Дійсно:

1a) якщо $x = y$, то $d(x, y) = |x - y|^{1/2} = 0$;

1b) якщо $d(x, y) = 0$, то $|x - y|^{1/2} = 0$, а, отже, $x = y$;

2) очевидно, що

$$d(x, y) = |x - y|^{1/2} = |y - x|^{1/2} = d(y, x);$$

3) для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|^{1/2} = |x - z + z - y|^{1/2} \le$$

$$\le (|x - z| + |z - y|)^{1/2} \le |x - z|^{1/2} + |z - y|^{1/2} = d(x, z) + d(z, y).$$

Тут ми використали нерівність

$$a + b \le (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, \qquad a, b \ge 0.$$

Задача 22.6. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = |x + y|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо не виконується перша аксіома: для точок $x = 1$ і $y = 1$ маємо, що $d(x, y) = |1 + 1| > 0$.

Задача 22.7. Чи є метрикою на дійсній прямій $\mathbb{R}$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = |2x - y|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо не виконується перша аксіома: для точок $x = 1$ і $y = 1$ маємо, що $d(x, y) = |2 - 1| > 0$.

Задача 22.8. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d є метрикою. Дійсно,

1a) якщо $x = y$, то $d(x, y) = 0$;

1b) рівність $d(x, y) = 0$ виконується лише тоді, коли $|x_j - y_j| = 0$ для всіх j, а це означає, що $x_j = y_j$ для всіх j, тобто $x = y$;

2) очевидно, що $d(x, y) = d(y, x)$;

3) для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ маємо, що

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \qquad j = 1, \ldots, n.,$$

звідки отримуємо, що

$$|x_j - y_j| \le \max_{1 \le j \le n} |x_j - z_j| + \max_{1 \le j \le n} |z_j - y_j| = d(x, z) + d(z, y),$$

тобто

$$|x_j - y_j| \le d(x, z) + d(z, y), \qquad j = 1, \ldots, n.,$$

а, отже,

$$d(x, y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j| \le d(x, z) + d(z, y).$$

Задача 22.9. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d є метрикою. Дійсно,

1a) якщо $x = y$, то $d(x, y) = 0$;

1b) рівність $d(x, y) = 0$ виконується лише тоді, коли $|x_j - y_j| = 0$ для всіх j, а це означає, що $x_j = y_j$ для всіх j, тобто $x = y$;

2) очевидно, що $d(x, y) = d(y, x)$.

3) для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ маємо, що

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \qquad j = 1, \ldots, n.,$$

додаючи ці нерівності, отримуємо, що

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j| + \sum_{j=1}^{n} |z_j - y_j| = d(x, z) + d(z, y),$$

тобто

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y).$$

Задача 22.10. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = |x_1 - y_1|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома: для $x = (0,\dots,0)$, $y = (0,1,\dots,1)$ маємо, що $d(x,y) = 0$.

Задача 22.11. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується нерівність трикутника:
для $x = (1,0,\dots,0)$, $y = (-1,0,\dots,0)$, $z = (0,\dots,0)$ маємо, що

$$d(x,y) = 4, \qquad d(x,z) = 1, \qquad d(z,y) = 1,$$

тобто

$$d(x,y) > d(x,z) + d(z,y).$$

Задача 22.12. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = \min_{1\le j\le n} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома: для $x = (1,\dots,1)$, $y = (1,0,\dots,0)$ маємо, що $d(x,y) = 0$.

Задача 22.13. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j^2 - y_j^2|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома: для $x = (1,\dots,1)$, $y = (-1,\dots,-1)$ маємо, що $d(x,y) = 0$.

Задача 22.14. Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:

$$d(x,y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j + y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома: для $x = (1, \ldots, 1)$, $y = (1, \ldots, 1)$ маємо, що $d(x,y) = 2$.

Задача 22.15. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = |f(0) - g(0)|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома. Дійсно, функції

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2, \qquad x \in [0,1],$$

належать $C[0,1]$ і є різними, однак, $d(f,g) = 0$.

Задача 22.16. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = |f(0) - g(1)|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома. Дійсно, функції

$$f(x) = x, \qquad g(x) = 1 - x, \qquad x \in [0,1],$$

належать $C[0,1]$ і є різними, однак, $d(f,g) = 0$.:

Задача 22.17. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = \max_{0 \le x \le 1/2} |f(x) - g(x)|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома. Дійсно, функції

$$f(x) \equiv 0, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x \le 1/2; \\ x - 1/2, & \text{якщо } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

належать $C[0,1]$ і є різними, однак, $d(f,g) = 0$.

Задача 22.18. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = \min_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується перша аксіома. Дійсно, функції

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2, \qquad x \in [0,1],$$

належать $C[0,1]$ і є різними, однак, $d(f,g) = 0$.:

Задача 22.19. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = \max_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|^2.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою. Не виконується нерівність трикутника:

для функцій

$$f(x) \equiv 1, \qquad g(x) \equiv -1, \qquad h(x) \equiv 0$$

маємо, що

$$d(f,g) = 4, \qquad d(f,h) = 1, \qquad d(h,g) = 1,$$

тобто

$$d(f,g) > d(f,h) + d(h,g).$$

Задача 22.20. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Розв'язок. Функція d є метрикою. Функція d є метрикою. Перевіримо лише нерівність трикутника. Для довільних функцій f, g, h ми маємо, що

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$

тобто

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \qquad x \in [0,1].$$

Нерівності можна інтегрувати. Тому

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \le \int_0^1 |f(x) - h(x)|\, dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)|\, dx,$$

тобто

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g).$$

Задача 22.21. Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:

$$d(f,g) = |f(0) - g(0)| - \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Розв'язок. Функція d не є метрикою, бо може приймати від'ємні значення. Дійсно, функції

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2, \qquad x \in [0,1],$$

належать $C[0,1]$ і

$$d(f,g) = -\int_0^1 |x - x^2|\, dx = -\int_0^1 x\, dx + \int_0^1 x^2\, dx = -1/2 + 1/3 < 0.$$

Задачі на відкритість і замкненість множини.

Задача 22.22. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}.$$

Розв'язок.

(1) Множина A є відкритою. Дійсно, її доповнення

$$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$$

є множина замкнена. Доведемо це. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в A' і вона збігається до точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Це рівносильно тому, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Оскільки $(x_n, y_n) \in A'$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$x_n \geq y_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ отримуємо, що

$$x \geq y,$$

тобто $(x,y) \in A'$. Отже множина A' є замкнена. Тому A є відкрита.

Задача 22.23. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x < y\}.$$

Розв'язок.

Множина A є відкритою. Дійсно, її доповнення

$$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \geq y\}$$

є множина замкнена. Доведемо це. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в A' і вона збігається до точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Це рівносильно тому, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Оскільки $(x_n, y_n) \in A'$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\sin x_n \geq y_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ з врахування неперервності синуса, отримуємо, що

$$\sin x \geq y,$$

тобто $(x,y) \in A'$. Отже множина A' є замкнена. Тому A є відкрита.

Задача 22.24. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y\}.$$

Розв'язок.

Множина A не є відкритою і не є замкненою.

Спочатку покажемо, що A не є замкненою. Для цього розглянемо послідовність

$$(1/n, 1/n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$0 < 1/n \leq 1/n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то вона належить множині A. З іншого боку, ця послідовність збігається до точки $(0,0)$, яка не належить множині A. Отже, A не містить всіх своїх граничних точок, тобто не є замкнена.

Покажемо, що A не є відкрита. Для цього досить показати, що її доповнення

$$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}.$$

не є замкнена множина.

Розглянемо послідовність

$$(1 + 2/n, 1 + 1/n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$1 + 2/n > 1 + 1/n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то вона належить множині A'. З іншого боку, ця послідовність збігається до точки $(1,1)$, яка не належить множині A'. Отже, A' не містить всіх своїх граничних точок, тобто не є замкнена.

Задача 22.25. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Розв'язок. Множина A є відкритою. Дійсно, її доповнення
$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$
є множина замкнена. Доведемо це. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в A' і вона збігається до точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Це рівносильно тому, що
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$
Оскільки $(x_n, y_n) \in A'$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то
$$x_n^2 + y_n^2 \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що
$$x^2 + y^2 \geq 1,$$
тобто $(x, y) \in A'$. Отже множина A' є замкнена. Тому A є відкрита.

Задача 22.26. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > 1\}.$$

Розв'язок. Множина A є відкритою. Дійсно, її доповнення
$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$$
є множина замкнена. Доведемо це. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в A' і вона збігається до точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Це рівносильно тому, що
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$
Оскільки $(x_n, y_n) \in A'$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то
$$|x_n + y_n| \leq 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що
$$|x + y| \leq 1,$$
тобто $(x, y) \in A'$. Отже множина A' є замкнена. Тому A є відкрита.

Задача 22.27. Чи є відкритою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x + y < 1\}.$$

Розв'язок.

Множина A є відкритою. Дійсно, її доповнення

$$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \le 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \ge 1\}$$

є множина замкнена. Доведемо це.

Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в A' і вона збігається до точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Це рівносильно тому, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Оскільки $(x_n, y_n) \in A'$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то починаючи з деякого n_0

$$x_n + y_n \le 0, \qquad n \ge n_0,$$

або

$$x_n + y_n \ge 1, \qquad n \ge n_0.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ отримуємо, що

$$x + y \le 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

або

$$x + y \ge 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

тобто $(x,y) \in A'$. Отже множина A' є замкнена. Тому A є відкрита.

Самостійно розглянути наступні задачі.

Задача 22.28. Чи є замкненою в $\mathbb{R}^2$ множина, що задана формулою:

(1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{arctg} x \le y\}$;

(2) $A = \{(n,n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(3) $A = \{(1/n, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = nx,\ n \in \mathbb{N}\}$;

(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x+y < 1\}$;

(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \ge 0\}$;

(7) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| > 0\}$.

Задача 22.29. Чи є замкненою в $C[0,1]$ множина, що задана формулою:

(1) $A = \{f \in C[0,1] \mid |f(0)| > 1\}$;

(2) $A = \{f \in C[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$;

(3) $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$;

(4) $A = \{f \in C[0,1] \mid \forall x \in [0,1] \quad f(x) \le x\}$;

(5) $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) \le f(1)\}$;

(6) $A = \{f \in C[0,1] \mid \sin f(x) > 0\}$;

(7) $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = \int_0^1 f(x)\,dx\}$.

23. Теорема Бера про категорії. Принцип продовження за неперервністю. Принцип стискуючих відображень.

Перше питання, яке ми розглянемо в цій лекції, це теорема Бера про категорії.

Історична довідка: Французький математик Рене-Луї Бер (1874-1932) один з творців сучасної теорії функцій. Зокрема, він ввів поняття множин першої і другої категорії, яке використовується як метод доведення теорем існування. Стефан Банах високо цінував роботи Бера.

Означення 23.1. *Множина A в топологічному просторі X називається ніде не щільною, якщо її замикання не має внутрішніх точок, тобто* $\operatorname{Int} \bar{A} = \emptyset$.

Наступне означення належить Беру.

Означення 23.2. *Множина A в топологічному просторі X називається множиною першої категорії, якщо її можна подати як скінченне або злічене об'єднання ніде не щільних множин. Множина A в топологічному просторі X називається множиною другої категорії, якщо вона не є множиною першої категорії.*

Таким чином, Бер розбив всі підмножини топологічного простору на два класи: на клас малих множин (множини першої категорії) і на клас великих множин (множини другої категорії). Дивно, що така, здавалося проста процедура, стала ефективним методом доведення теорем існування.

Теорема Бера про категорії формулюється наступним чином.

Теорема 23.3. *Повний метричний простір є множиною другої категорії.*

Доведення. Припустимо, що повний метричний простір (X, d) не є множиною другої категорії. Тоді його можна подати як об'єднання $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ зліченного числа ніде на щільних множин X_n, тобто $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Візьмемо довільну замкнену кулю B_0. Оскільки X_1 не є щільна в B_0, то в B_0 існує замкнена куля B_1 з радіусом < 1 така, що $B_1 \cap X_1 = \emptyset$. Оскільки X_2 не є щільна в B_1, то в B_1 існує замкнена куля B_2 з радіусом $< 1/2$ така, що $B_2 \cap X_2 = \emptyset$. Продовжуючи цей процес, ми отримуємо послідовність $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ замкнених вкладених куль, причому

$$B_n \cap X_n = \emptyset, \qquad r_n < 1/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно з критерієм повноти перетин $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ є непорожний, тобто містить деяку точку $x \in X$. Але, згідно з побудовою точка x не належить жодній множині X_n, а, отже, $x \notin X$. Суперечність. Теорема доведена. $\square$

Перейдемо на другого питання нашої лекції. Ним є принцип продовження за неперервністю. Перед тим як перейти до його формулювання, нагадаємо деякі означення.

Означення 23.4. *Нехай X, Y - непорожні множини і функція $f : X \to Y$ і має область визначення $\operatorname{dom} f$. Функція $g : X \to Y$ називається продовженням функції f (скорочений запис $f \subset g$), якщо $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$ і $g(x) = f(x)$ для всіх $x \in \operatorname{dom} f$. При цьому функцію f називають звуженням функції g.*

Означення 23.5. *Нехай (X, d_X) і (Y, d_Y) - метричні простори. Функція $f : X \to Y$ називається рівномірно неперервною на множині $A \subset \operatorname{dom} f \subset X$,* *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad [d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

Ми будемо просто говорити, що f є рівномірно неперервна, якщо $A = \operatorname{dom} f$.

Вправа 23.6. *Довести, що для метрики справедлива нерівність чотирикутника:*

$$|d(x, y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y'), \qquad x, y, x', y' \in X.$$

З нерівності чотирикутника випливає наступний важливий факт. Він називається теоремою про неперервність метрики.

Теорема 23.7. *Нехай (X, d) - метричний простір, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дві збіжні послідовності в X, які збігаються до x і y відповідно. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Доведення. З нерівності чотирикутника маємо, що

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

А це означає, що

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

□

Принципом продовження за неперервністю називається наступна

Теорема 23.8. *Нехай (X, d) і (Y, ρ) - повні метричні простори, а функція $f : X \to Y$ рівномірно неперервна і щільно задана ($\overline{\operatorname{dom} f} = X$). Тоді існує єдина неперервна всюди задана функція $\bar{f} : X \to Y$, яка є продовження функції f. Більше того, $\bar{f}$ є рівномірно неперервна.*

Доведення. Нехай $x \in X$. Оскільки $\overline{\operatorname{dom} f} = X$, то в $\operatorname{dom} f$ існує послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається до x. Покажемо, що послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна в Y. Дійсно, оскільки f є рівномірно неперервна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad [d(x, x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і нехай $\delta = \delta_\varepsilon$. Оскільки послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна, то вона є фундаментальна, а отже, існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $d(x_n, x_m) < \delta$ для всіх $n, m > n_0$. Звідки випливає, що

$$\forall n, m > n_0 \quad \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Отже, послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна в Y. З повноти простору Y випливає, що послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна в Y, тобто існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Покажемо, що ця границя не залежить від вибору в $\operatorname{dom} f$ послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається до x. Візьмемо в $\operatorname{dom} f$ дві довільні послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігаються до x. З вже доведеного випливає, що існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$. Переконаємося, що вони рівні. Для цього застосуємо наступну процедуру. Утворимо послідовність

$$a_n := \begin{cases} x_k, & \text{якщо } n = 2k; \\ x'_k, & \text{якщо } n = 2k-1. \end{cases}$$

Оскільки послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються до x, то послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ теж збігається до x.

З вже доведеного випливає, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ існує. Але, послідовності $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ і $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є підпослідовностями послідовності $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, а, отже,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Покладемо за означенням

$$\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

де $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - довільна послідовність в $\operatorname{dom} f$, що збігається до x. Функція $\bar{f}$ є продовженням функції f. Дійсно, якщо $x \in \operatorname{dom} f$, то послідовність

$$x_n \equiv x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

збігається до x, а, отже,

$$\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

Покажемо, що функція $\bar{f}$ є рівномірно неперервна. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall x, x' \in \operatorname{dom} f \quad [d(x, x') < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

Нехай $x, x' \in X$ і $d(x, x') < \delta$. В $\operatorname{dom} f$ існують послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігаються до x і x' відповідно. З неперервності метрики випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = d(x, x').$$

Оскільки $d(x, x') < \delta$, то існує номер n_0 такий, що

$$d(x_n, x'_n) < \delta, \qquad n > n_0.$$

Тоді

$$\rho(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon, \qquad n > n_0.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) \le \varepsilon.$$

Тим самим рівномірна неперервність функції $\bar{f}$ доведена.

Залишається довести єдиність неперервного продовження функції f. Припустимо, що є дві неперервні всюди задані функції $g, h : X \to Y$, які є продовженнями функції f. Нехай $x \in X$ і послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з $\operatorname{dom} f$ збігається до x. Тоді

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x),$$

тобто $g = h$. □

Перейдемо до нашого третього питання, до теореми про нерухому точку.

Означення 23.9. *Нехай (X, d) - метричний простір. Відображення $A : X \to X$ називається стиском, якщо*

$$\exists \alpha \in (0, 1) \quad \forall x, y \in X \quad d(Ax, Ay) \le \alpha d(x, y).$$

Означення 23.10. *Нехай (X, d) - метричний простір. Точка $x \in X$ називається нерухомою точкою відображення $A : X \to X$, якщо $Ax = x$.*

Принцип стискуючих відображень формулюється наступним чином.

Теорема 23.11. *Кожен стиск у повному метричному просторі має єдину нерухому точку.*

Доведення. Нехай A - стиск у повному метричному просторі (X,d) і для деякого $\alpha \in (0,1)$
$$\forall x, y \in X \quad d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x,y).$$
Зафіксуємо довільну точку x_0 і розглянемо в X послідовність, що задана рекурентною формулою:
$$x_1 := Ax_0, \qquad x_{n+1} = Ax_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Покажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною.

Нехай $n, k \in \mathbb{N}$. Оцінимо величину $d(x_n, x_{n+k})$. Маємо, що
$$d(x_n, x_{n+k}) = d(Ax_{n-1}, Ax_{n-1+k}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_{n-1+k}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, x_k)$$
і
$$d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots d(x_{k-1}, x_k) \leq$$
$$\leq (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{k-1}) d(x_0, x_1) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \right) d(x_0, x_1) = \frac{d(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$
Отже,
$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\alpha^n d(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$
Звідси випливає, що $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m)$, тобто послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною. Оскільки простір X повний, то послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. Нехай
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$
Покажемо, що x є нерухомою точкою стиску A.

Дійсно, стиск є неперервною функцією, а тому
$$Ax = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Доведемо єдиність. Припустимо, що точки $x, y \in X$ є нерухомими точками для стиску A. Тоді
$$d(x,y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x,y),$$
а, отже, $(1-\alpha)d(x,y) \leq 0$, тобто $d(x,y) \leq 0$. Це означає, що $x = y$. Єдиність нерухомої точки доведена. □

24. Практичне заняття. Повнота м.п. Збіжність в м.п. Рівномірна неперервність.

Повнота метричного простору.

Задача 24.1. Чи є повним метричний простір $X = [0, \infty)$ з метрикою $d(x,y) = |x-y|$.

Розв'язок. Так. Згідно з відомою теоремою математичного аналізу кожна фундаментальна послідовність дійсних чисел є збіжною.

Задача 24.2. Чи є повним метричний простір $X = \mathbb{Z}$ з метрикою $d(x,y) = |x-y|$?

Розв'язок. Так. Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність в $\mathbb{Z}$ і вона є фундаментальна. Але, це можливо, лише якщо починаючи з деякого номера послідовність стає постійною. Така послідовність, очевидно, збігається в $\mathbb{Z}$.

Задача 24.3. Чи є повним метричний простір $X = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ з метрикою $d(x,y) = |x-y|$?

Розв'язок. Ні. Цей метричний простір є неповний. Дійсно, послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, але вона не є збіжною.

Задача 24.4. Чи є повним метричний простір $X = [0,1)$ з метрикою
$$d(x,y) = |x-y|?$$

Розв'язок. Ні. Цей метричний простір є неповний. Дійсно, послідовність
$$x_n = 1 - 1/n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
є фундаментальною у цьому просторі, але не є збіжною. Дійсно, якщо б вона збігалася в X, то вона би збігалася і в $\mathbb{R}$ до тієї самої точки, а, власне, до точки $x = 1$. Проте, ця точка не належить простору X. Суперечність. Отже, простір X є неповний.

Задача 24.5. Чи є повним метричний простір $X = (0,1] \times [0,1]$ з метрикою
$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2))?$$

Розв'язок. Ні. Цей метричний простір є неповний. Дійсно, послідовність
$$\bar{x}_n = (1/n, 0), \qquad n \in \mathbb{N}$$
є фундаментальна, але вона не є збіжною. Дійсно, якщо би вона збігалася, то вона би збігалася також і в просторі $\mathbb{R}^2$ до тої самої точки $\bar{x} = (0,0)$. Але, ця точка не належить X. Суперечність. Отже, простір X є неповний.

Задача 24.6. Нехай X повний метричний простір з метрикою d. Нехай множина A є незамкнена в X. Чи буде A з метрикою d (звуженою на $A \times A$) повним метричним простором?

Розв'язок. Цей метричний простір є неповний. Дійсно, якщо множина A є незамкнена в X, то в A існує послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається в X до елемента $x \in X \setminus A$. Така послідовність є фундаментальна метричному просторі (A, d), але не є збіжною, бо x не належить до A. Отже, простір X є неповний.

Задача 24.7. Нехай X повний метричний простір з метрикою d. Нехай множина A є замкнена в X. Чи буде A з метрикою d (звуженою на $A \times A$) повним метричним простором?

Розв'язок. Цей метричний простір є повний. Дійсно, якщо послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна в (A,d), то вона фундаментальна і в (X,d). Оскільки метричний простір (X,d) є повний, то послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна в X до деякого елемента x. Множина A є замкнена в X, тому $x\in A$ і

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

тобто послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна в A.

Рівномірна неперервність.

Означення 24.8. *Нехай (X,d_X) і (Y,d_Y) метричні простори. Ми скажемо, що функція $f:X\to Y$ задовольняє умову Ліпшиця, якщо існує стала $C>0$ така, що для довільних $x,y\in X$*

$$d_Y(f(x),f(y))\le Cd_X(x,y).$$

Задача 24.9. Нехай (X,d_X) і (Y,d_Y) метричні простори і функція $f:X\to Y$ задовольняє умову Ліпшиця. Доведіть, що вона є рівномірно неперервна.

Розв'язок. Нехай $C>0$ і

$$d_Y(f(x),f(y))\le Cd_X(x,y),\qquad x,y\in X.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$ і нехай $\delta>0$ і $\delta<\varepsilon/C$. Тоді, якщо $x,y\in X$ і $d_X(x,y)<\delta$, то

$$d_Y(f(x),f(y))\le Cd_X(x,y)<C\delta<\varepsilon.$$

Задача 24.10. Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[a,b]$ за формулою

$$(Af)(x)=\sin f(x),\qquad x\in[a,b].$$

Розв'язок. Досить показати, що відображення A задовольняє умову Ліпшиця. З теореми Лагранжа про скінченні прирости випливає, що для довільних різних $\xi,\eta\in\mathbb{R}$

$$\sin\xi-\sin\eta=(\sin'\theta)(\xi-\eta),$$

де θ - деяка точка між ξ та η. Тому

$$|\sin\xi-\sin\eta|=|\cos\theta||\xi-\eta|\le|\xi-\eta|,$$

а, отже, для довільних $f, g \in C[a, b]$

$$|(Af)(x) - (Ag)(x)| = |\sin f(x) - \sin g(x)| \leq |f(x) - g(x)| \leq$$
$$\leq \max_x |f(x) - g(x)| = d(f, g).$$

Звідки отримуємо, що

$$d(Af, Ag) = \max_x |(Af)(x) - (Ag)(x)| \leq d(f, g).$$

Таким чином відображення A задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $C = 1$.

Задача 24.11. Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[-1, 1]$ за формулою

$$(Af)(x) = f(-x), \qquad x \in [-1, 1].$$

Розв'язок. Досить показати, що відображення A задовольняє умову Ліпшиця.

$$|(Af)(x) - (Ag)(x)| = |f(-x) - g(-x)| \leq \max_x |f(-x) - g(-x)| = d(f, g).$$

А, отже,

$$d(Af, Ag) = \max_x |(Af)(x) - (Ag)(x)| \leq d(f, g).$$

Таким чином відображення A задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $C = 1$.

Задача 24.12. Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[-1, 1]$ за формулою

$$(Af)(x) = 2f(x^2), \qquad x \in [-1, 1].$$

Розв'язок. Досить показати, що відображення A задовольняє умову Ліпшиця.

$$|(Af)(x) - (Ag)(x)| = 2|f(x^2) - g(x^2)| \leq 2 \max_x |f(x) - g(x)| = 2d(f, g).$$

Звідки отримуємо, що

$$d(Af, Ag) = \max_x |(Af)(x) - (Ag)(x)| \leq 2d(f, g).$$

Таким чином відображення A задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $C = 2$.

Задача 24.13. Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою

$$(Af)(x) = \int\limits_0^1 3\sin(x+y)f(y)\,dy, \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок. Досить показати, що відображення A задовольняє умову Ліпшиця.

$$|(Af)(x) - (Ag)(x)| = \left| \int\limits_0^1 3\sin(x+y)f(y)\,dy - \int\limits_0^1 3\sin(x+y)g(y)\,dy \right| =$$

$$= 3\left| \int\limits_0^1 \sin(x+y)(f(y)-g(y))\,dy \right| \le 3\int\limits_0^1 |f(y)-g(y)|\,dy \le 3\max_y |f(y)-g(y)| = 3d(f,g).$$

Звідки отримуємо, що

$$d(Af, Ag) = \max_x |(Af)(x) - (Ag)(x)| \le 3d(f,g).$$

Таким чином відображення A задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $C = 3$.

Збіжність в метричних просторах.

Задача 24.14. Чи є збіжною в просторі $C[-1,1]$ з рівномірною метрикою послідовність

$$f_n(x) = x^{2n}, \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок. Послідовність не є збіжною у вказаному просторі. Дійсно, припустимо, що вона є збіжна. Тоді існує $f \in C[-1,1]$ така, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до f. Зокрема, послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f поточково. Тоді

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| < 1; \\ 1, & \text{якщо } |x| = 1. \end{cases}$$

Але, така функція не належить $C[-1,1]$. Суперечність.

Збіжність в метричних просторах.

Задача 24.15. Чи є збіжною в просторі $C[-1,1]$ з рівномірною метрикою послідовність

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n + x^{2n}}, \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок. Послідовність є збіжною у вказаному просторі і збігається до нуля. Дійсно,

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x^n}{n + x^{2n}}\right| \le 1/n, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$d(f_n, 0) \le 1/n \to 0, \qquad n \in \infty.$$

Задача 24.16. Чи є збіжною в просторі ℓ_2 послідовність

$$x_n = \left(\frac{1}{n+k}\right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. Припустимо, що послідовність збігається до деякого елемента

$$x = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Оскільки

$$\left|\alpha_k - \frac{1}{n+k}\right| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j - \tfrac{1}{n+j}|^2\right)^{1/2} = d(x, x_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

то

$$\alpha_j = \lim_{n \to \infty} \tfrac{1}{n+j} = 0, \qquad j \in \mathbb{N},$$

тобто $x = 0$. Переконаємося, що наша послідовність збігається до нуля.

$$d(0, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tfrac{1}{n+j}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\tfrac{1}{j}|^2\right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, послідовність є збіжною і збігається до нуля.

До теореми Бера.

Задача 24.17. Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Чи є множина $A = \mathbb{Z}$ ніде не щільною в X?

Розв'язок. Так. Множина A є замкнена і не містить внутрішних точок (оскільки складається виключно з ізольованих точок).

Задача 24.18. Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Чи є множина $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільною в X?

Розв'язок. Так. Її замиканням є множина $A \cup \{0\}$, яка є зліченна, а, отже, не може містити внутрішних точок.

Задача 24.19. Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Чи є множина $A = (0, 1)$ ніде не щільною в X?

Розв'язок. Ні. Множина A має внутрішні точки, а, отже, і її замикання має внутрішні точки. Тому A не є ніде нещцльною множиною.

Задача 24.20. Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Чи є множина $A = (0, 1)$ всюди щільною в X?

Розв'язок. Ні. Її замиканням є множина $[0, 1]$ і $[0, 1] \neq X$.

Задача 24.21. Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Чи є множина $A = \{2^r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ всюди щільною в $(0, \infty)$?

Розв'язок. Так. Нехай $x \in (0, \infty)$ і $y = \log_2 x$. Оскільки множина $\mathbb{Q}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$, то існує послідовність $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ натуральних чисел, що збігається до y. Тоді послідовність $(2^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ належить множині A і

$$2^{r_n} \to 2^y = x, \qquad n \to \infty.$$

До принципу стискуючих відображень.

1) Перевірити, чи буде відображення $f(x) = \sin(x/2)$ стиском на проміжку $[0, \pi]$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

2) Перевірити, чи буде відображення $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ стиском на інтервалі $[0, \infty)$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

3) Чи є стиском у просторі $C[0, 1]$ з рівномірною метрикою відображення:

$$(Af)(x) = \int\limits_0^{1/2} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dy, \qquad x \in [0, 1].$$

25. Компактність в метричних просторах.

Компактність дуже важливе топологічне поняття. Історія його виникнення є наступною. Перша теорема в якій фігурує компактність належить чеському математику Бернарду Больцано (1781 - 1848) і була доведена ним в 1817 році.

В курсі математичного аналізу цю теорему називають теоремою Больцано-Вейєрштраса (теорема про те, що з обмеженої множини дійсних чисел можна вибрати збіжну підпослідовність).

Больцано довів багато важливих результатів математичного аналізу, однак, з незалежних від нього причин ці результати не були опубліковані за його життя. Частина його результатів була незалежно отримана Вейєрштрасом. Зокрема, Вейєрштрас довів теорему Больцано для випадку обмеженої множини в $\mathbb{R}^n$. Цю теорему спочатку назвали теоремою Вейєрштраса, але, після вивчення рукописів Больцано назву змінили на теорему Больцано-Вейєрштраса.

Больцано і Вейєрштрас відкрили явище компактності, але сам термін "компактність"з'явився значно пізніше. В 1906 році французький математик Моріс Рене Фреше (1878 - 1973) ввів поняття метричного простору і назвав компактністю наступну властивість множини метричного простору:

множина A в метричному просторі X називається компактною, якщо з довільної послідовності її точок можна вибрати збіжну підпослідовність, границя якої належить множині A.

Тепер цю властивість називають секвенціальною компактністю.

В середині 19-го століття Гейне, Вейєрштрас, Діріхле та ін. математики стали використовувати лему про покриття, яка тепер носить назву леми (теореми) Гейне-Бореля про покриття. Борель дав сучасне формулювання і доведення цього результату.

Стало зрозуміло, що між теоремою Больцано-Вейєштраса і лемою Гейне-Бореля є зв'язок. Суть цього зв'язку стала зрозуміла, коли було встановлено, що властивість, яку Моріс Фреше назвав компактністю, є еквівалентна наступній властивості:

множина A в метричному просторі X називається зліченно компактною, якщо з її довільного відкритого зліченного покриття можна вибрати скінченне підпокриття.

Отже, секвенціальна компактність і зліченна компактність є еквівалентними поняттями. Перше формулюється на мові послідовностей, а друге на мові покриттів.

І накінець, П.С. Александров (1896 - 1982) ввів поняття бікомпактності, яке тепер називають компактністю, яке формулюється наступним чином:

множина A в метричному просторі X називається компактною, якщо з її довільного відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття.

На щастя тих, хто починає вивчати математичний аналіз, у метричних просторах всі три поняття (секвенціальна компактність, зліченна компактність і компактність) є еквівалентними. Це є суттєвим полегшенням.

На цьому історичний екскурс завершимо.

Критерій компактності у просторах $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Теорема 25.1. *Для того, що множина A в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) була компактною необхідно і досить, щоб вона була обмеженою і закненою.*

Сформульована вище теорема вам добре відома з курсу математичного аналізу. Як вже відзначалося її доведення належить Больцано і Вейєрштрасу.

Мета нашої лекції полягає в тому, щоб довести аналог цієї теореми для довільного повного метричного простору.

Почнемо з означень, які ми дамо в загальному випадку топологічних просторів.

Означення 25.2. *Топологічним простором називають пару* (X, τ), *у якій* X *- непорожня множина, а* τ *- топологія, тобто сімейство підмножин множини* X, *що володіє властивостями:*

(1) $X, \emptyset \in \tau$;
(2) *довільне об'єднання множин з* τ *належить* τ;
(3) *довільний скінченний перетин множин з* τ *належить* τ.

Множини сімейства τ *називають відкритими множинами (в топології* τ*). Множину* $A \subset X$ *називають замкненою множиною (в топології* τ*). якщо її доповнення є відкритою множиною, тобто* $(X \setminus A) \in \tau$.

Означення 25.3. *Ми скажемо, що сімейство множин* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ *є покриттям множини* B, *якщо*

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Коли B *є підмножиною топологічного простору* (X, τ), *а множини* A_α *є відкритими (тобто* $A_\alpha \in \tau$*) ми називаємо сімейство* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ *відкритим покриттям множини* B.

Означення 25.4. *Нехай* (X, τ) *- топологічний простір і* $A \subset X$. *Тоді:*

(1) *множина* A *називається секвенціально компактною в* X, *якщо з довільної послідовності її точок можна вибрати збіжну підпослідовність, границя якої належить* A;
(2) A *називається зліченно компактною в* X, *якщо з її довільного відкритого зліченного покриття можна вибрати скінченне підпокриття;*
(3) A *називається компактною в* X, *якщо з її довільного відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття.*

Означення 25.5. *Нехай* (X, d) *- метричний простір і* $A \subset X$. *Тоді*

(1) *множина* A *називається обмеженою в* X, *якщо вона міститься в деякій кулі;*
(2) A *називається цілком обмеженою в* X, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *її можна покрити скінченною кількістю куль радіуса* ε.

Вправа 25.6. *Довести, що кожна обмежена множина в* $\mathbb{R}^n$ *є цілком обмеженою.*

Вправа 25.7. *Довести, що множина в* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *де*

$$f_n(x) = \sin nx, \qquad x \in [0, \pi],$$

не є цілком обмеженою у просторі $C[0,\pi]$ *з рівномірною метрикою.*

Критерій компактності у повному метричному просторі.

Лема 25.8. *Нехай* (X, d) *- повний метричний простір і* $A \subset X$. *Якщо множина* A *є компактна в* X, *то вона є цілком обмежена і замкнена.*

Доведення. Нехай множина A є компактна в X. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді сімейство відкритих куль $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in A}$ є відкритим покриттям множини A. Тому з нього можна вибрати скінченне підпокриття. Отже, множину A можна покрити скінченною кількістю куль радіуса ε, тобто множина A є цілком обмежена.

Тепер доведемо, що множина A є замкнена. Для цього досить переконатися, що множина $A' := X \setminus A$ є відкрита, тобто, що кожна точка множини A' є її внутрішною точкою. Візьмемо довільну точку $x' \in A'$. Нехай $x \in A$. Тоді $d(x, x') > 0$. Позначимо через $B_{x'}(x)$ і $B_x(x')$ відкриті кулі радіуса $\frac{1}{2}d(x, x')$ з центрами в точках x і x' відповідно. З нерівності трикутника випливає, що

$$B_{x'}(x) \cap B_x(x') = \emptyset.$$

Оскільки сімейство відкритих куль $\{B_{x'}(x)\}_{x\in A}$ є відкритим покриттям множини A, то з нього можна вибрати скінченне підпокриття $\{B_{x'}(x_j)\}_{j=1}^n$. Зауважимо, що

$$B_{x'}(x_j) = B(x_j, r_j), \quad B_x(x') = B(x', r_j), \qquad r_j = \frac{1}{2}d(x_j, x').$$

Нехай $r = \min\{r_j \mid 1 \le j \le n\}$. Тоді $r > 0$ і куля $B(x', r)$ не перетинається з кулями $B(x_j, r_j),\ 1 \le j \le n$. А оскільки

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, r_j),$$

то куля $B(x', r)$ не перетинається з множиною A, тобто x' є внутрішною точкою множини A'. Лема доведена. $\square$

Лема 25.9. *Нехай (X, d) - повний метричний простір і $A \subset X$. Якщо множина A є цілком обмежена і замкнена, то вона є секвенціально компактною.*

Доведення. Нехай множина A є цілком обмежена і замкнена. Тоді для довільної послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в A і довільного $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, яка міститься в деякій кулі радіуса ε. Дійсно, оскільки множину можна покрити скінченною кількістю куль радіуса ε, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ міститься в A, то в одній з куль міститься нескінченна кількість членів послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Тому існує підпослідовність, що лежить в кулі радіуса ε.

Зафіксуємо довільну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точок множини A. З неї можна вибрати підпослідовність $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$, що лежить в деякій кулі радіусу 1. А з послідовності $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, що лежить в деякій кулі радіусу 1/2. Продовжуючи цей процес ми дістанемо послідовність підпослідовностей $(x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}},\ m \in \mathbb{N}$, що володіє властивостями:

(1) для довільного $m \in \mathbb{N}$ $(x_n^{(m+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ є підпослідовністю послідовності $(x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$;
(2) підпослідовність $(x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ міститься в кулі радіуса 2^{-m}.

Сформуємо тепер так звану діагональну послідовність $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. З її побудови випливає, що починаючи з номера m вона лежить в кулі радіуса 2^{-m}. А, отже вона є фундаментальна. Оскільки простір X повний, то вона є збіжна. А оскільки множина A є замкнена, то границя послідовності $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ лежить в A. Тим самим секвенціальна компактність множини A є доведена. $\square$

Лема 25.10. *Нехай (X, d) - повний метричний простір і $A \subset X$. Якщо множина A є секвенціально компактною, то вона є цілком обмежена і замкнена.*

Доведення. Нехай множина A є секвенціально компактною. Покажемо, що вона є замкнена. Дійсно, візьмемо довільну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що лежить в A і збігається до деякого $a \in X$. З секвенціальної компактності множини A випливає, що деяка підпослідовність послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до точки множини A. Отже, $a \in A$. Тому множина A є замкнена.

Покажемо, що A є цілком обмежена. Припустимо, що це не так. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що A не можна покрити скінченною кількістю куль радіуса ε. Це означає, що в A є послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для якої виконується умова:

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon, \qquad n \neq m.$$

Але, жодна підпослідовність такої послідовності не є фундаментальною, а, отже, збіжною. А це суперечить тому, що A є секвенціально компактна. $\square$

Лема 25.11. *Нехай (X, d) - повний метричний простір і $A \subset X$. Якщо множина A є секвенціально компактною, то вона є компактною.*

За браком часу дведення цієї теореми ми розглядати не будемо.

Подам лише короткий план такого доведення.

Нехай множина A є секвенціально компактною.

1) За лемою 25.10 множина A є цілком обмежена.

2) Якщо A є цілком обмежена, то вона містить зліченну підмножину $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка щільна в A.

3) Показуємо, що з довільного відкритого покриття множини A можна вибрати зліченне підпокриття.

З чотирьох сформульованих вище лем випливає наступний критерій компактності.

Теорема 25.12. *Нехай (X, d) - повний метричний простір і $A \subset X$. Множина A є компактною тоді і тільки тоді, коли вона є цілком обмежена і замкнена.*

Вправа 25.13. *Нехай (X, d) - метричний простір і X є компактною множиною. Тоді довільна послідовність непорожніх замкнених вкладених множин має непорожній перетин.*

Вправа 25.14. *Доведіть, що якщо A є цілком обмежена множина в метричному просторі, то вона містить злічену підмножину $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка щільна в A.*

Вправа 25.15. *Нехай (X, d) - метричний простір, $A \subset X$ і в множині A є злічена підмножина $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка щільна в A. Доведіть, що з довільного відкритого покриття множини A можна вибрати злічене підпокриття.*

Означення 25.16. *Нехай (X, τ) - топологічний простір. Множина $A \subset X$ називається передкомпактною, якщо її замикання є компактна множина.*

Вправа 25.17. *Нехай (X, d) - повний метричний простір. Доведіть, що кожна цілком обмежена множина в X є передкомпактною.*

Критерій компактності у просторі $C[a, b]$.

Вправа 25.18. *Нехай простір $C[a, b]$ наділений рівномірною метрикою. Доведіть, що множина $A \subset C[a, b]$ є обмежена тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists C > 0 \quad \forall f \in A \quad \forall x \in [a, b] \quad [|f(x)| \leq C].$$

Означення 25.19. *Множина A в просторі $C[a, b]$ називається одностайно неперервною, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in A \quad \forall x, x' \in [a, b] \quad [|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon].$$

Наступна теорема називається теоремою Арцела і дає критерій цілком обмеженості (передкомпактності) множини у просторі $C[a, b]$.

Теорема 25.20. *Для того, щоб множина A у просторі $C[a,b]$ була цілком обмежена необхідно і досить, щоб вона була обмежена і одностайно неперервна.*

26. Теорія нормованих просторів.

Ми переходимо до нової теми. Нормований простір є більш складною структурою, ніж метричний простріp. Нормований простір отримується в результаті поєднання двох різних структур. А власне, поєднання структури лінійного простору і структури метричного простору. Більше того, ці дві структури є узгоджені між собою.

Почнемо з того, що нагадаємо собі означення лінійного простору і деякі прості факти, які стосуються лінійних просторів.

Означення 26.1. *Непорожня множина L називається лінійним (векторним) простором над полем скалярів K ($K = \mathbb{C}$ або $K = \mathbb{R}$), якщо на L задана внутрішна операція $L \times L \ni (x, y) \mapsto (x + y) \in L$, що називається додаванням, і зовнішна $K \times L \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in L$– множення на скаляр. При цьому мають виконуватися наступні вісім аксіом:*

(1) $x + y = y + x$ *(комутативність додавання);*
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(асоціативність додавання);*
(3) $\exists 0 \in L \quad \forall x \in L \quad x + 0 = x$ *(існування нуля);*
(4) $\forall x \in L \quad \exists (-x) \in L \quad x + (-x) = 0$ *(існування протилежного);*
(5) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ *(асоціативність множення на скаляр);*
(6) $1 \cdot x = x$ *(умова нормування);*
(7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(дистрибутивність стосовно векторного множника);*
(8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(дистрибутивність стосовно скалярного множника).*

Лінійна залежність. Нехай $\{x_j\}_{j=1}^n$ - набір (система) елементів лінійного простору L і $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ - набір скалярів. Тоді сума

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

називається лінійною комбінацією елементів $x_1, \ldots, x_n$. Ми кажемо, що елементи $x_1, \ldots, x_n$ є лінійно залежними, якщо один з них є лінійною комбінацією решти елементів. Іншими словами, для деякого набору $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ скалярів, серед яких є ненульові,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0.$$

Якщо система $\{x_j\}_{j=1}^n$ не є лінійно залежною, то її називають лінійно незалежною.

Іншими словами, система $\{x_j\}_{j=1}^n$ є лінійно незалежною, якщо рівність

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$$

можлива лише у випадку, коли $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Нескінченна система $\{x_j\}_{j\in I}$ називається лінійно незалежною, якщо кожна її скінченна підсистема є лінійно незалежною.

Лінійною оболонкою множини $A \subset L$ (позначення $\operatorname{lin} A$) називається множина всіх лінійних комбінацій елементів множини A.

Базою лінійного простору L називається довільна лінійно незалежна система $\{x_j\}_{j\in I}$, для якої

$$\operatorname{lin}\{x_j\}_{j\in I} = L.$$

Всі бази лінійного простору мають одну і ту ж потужність. Якщо база є скінченною, то простір називається скінченновимірним, а число векторів в базі називається вимірністю лінійного простору.

Лінійні підпростори. Непорожня підмножина лінійного простору називається його підпростором, якщо вона сама є лінійним простором стосовно визначених в L операцій. Іншими словами, підмножина $F \subset L$ є підпростором лінійного простору L, якщо

$$\forall x, y \in L \quad \forall \alpha, \beta \in K \qquad (\alpha x + \beta y) \in F.$$

Тепер ми можемо перейти до означення нормованого простору.

Почну з історії. Для цього є вагома причина. Поняття нормованого простору тісно пов'язане зі Львовом.

До винайдення поняття нормованого простору є причетними троє математиків.

Норберт Вінер, Ганс Ган і Стефан Банах. Але, перші двоє математиків не сформулювали задовільне означення. Вони підійшли близько, проте, це не їх винахід. Натомість, Стефан Банах не тільки дав чітке означення нормованого простору (яким ми користуємося донині), але також у своїй дисертації (1922 рік) вивчив основні властивості нормованих просторів. Дисертацію Банах захищав у Львові у львівському університеті. Тому, нормовані простори можна вважати львівським винаходом.

Означення 26.2. *Нормованим простором X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) називається лінійний простір X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) з введеною на ньому нормою, тобто функцією $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, для якої виконуються наступні три властивості:*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Зауважимо, що позначення $\|\cdot\|$ виявилося дуже вдалим. Воно подібне на позначення модуля і має властивості подібні на властивостей модуля, але, водночас, позначення норми достатньо відрізняється від позначення модуля. Якщо ми працюємо з різними нормованими просторами, то для розрізнення норм можемо вживати позначення $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ і т.д.

На початку лекції було сказано, що нормований простір є результатом поєднання двох різних структури лінійного простору і структури метричного простору. Структуру лінійного простору ми бачимо. А де структура метричного простору?

Метрика в нормованому просторі вводить дуже просто і природньо:

$$d(x,y) := \|x-y\|, \qquad x,y \in X.$$

Легко перевірити, що з аксіом норми легко випливають потрібні властивості метрики.

Зауважимо, що метрика в нормованому просторі має чудові властивості. Вона є інваріантна стосовно паралельних переносів і при множенні на скаляр змінюється пропорційно модулю скаляра.

Означення збіжної послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в нормованому просторі X приймає форму:

$$\exists x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

Відповідно означення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ прийме вигляд:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

А в чому ще виявляється взаємна узгодженість лінійної і метричної структур?

Ми вже відзначали узгодженість метрики з лінійною структурою (інваріантність стосовно паралельних переносів і пропорційна зміна при множенні на скаляр). Це є певний компроміс з боку метрики.

А яким є компроміс з боку лінійного простору?

Іншими словами, як операції лінійного простору узгоджуються з метрикою.

Ця узгодженість полягає в тому, що лінійні операції

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto (x+y) \in X, \qquad \mathbb{C} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

є неперервним за сукупністю змінних.

Це означає, що якщо ми маємо послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X, які збігаються до x та y відповідно, а числова послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до λ, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x.$$

Приклади нормованих просторів.

Зараз ми побачимо, що наші приклади метричних просторів, які були на першій лекції, насправді є прикладами нормованих просторів.

Простір $\mathbb{R}$. Задамо на лінійному просторі $\mathbb{R}$ норму

$$\|x\| := |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

З властивостей модуля випливає, що ми маємо нормований простір над полем дійсних чисел. При цьому вказана норма породжує стандартну метрику в $\mathbb{R}$.

Простір $\mathbb{R}^n$. Нагадаю, що $\mathbb{R}^n$ є лінійним простором над полем дійсних чисел. Евклідова норма в $\mathbb{R}^n$ задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{n}.$$

Очевидно, що вона породжує евклідову відстань в $\mathbb{R}^n$.

Перевірка перших двох аксіом норми є елементарною. Що стосується нерівності трикутника, то потрібно використати нерівність Буняковського. Нехай $x = (x_j)_{j=1}^{n}$ і $y = (y_j)_{j=1}^{n}$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Згідно нерівності Буняковського

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Звідки отримуємо, що $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Простір $\mathbb{C}^n$. Лінійний простір $\mathbb{C}^n$ є комплекним аналогом простору $\mathbb{R}^n$. Евклідова норма задається аналогічною формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{n}.$$

Перевірка аксіом така сама.

Простір $C[a, b]$. В лінійному просторі $C[a, b]$ неперервних функцій рівномірна норма задається формулою:

$$\|f\| := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \qquad f \in C[a, b].$$

Перевірка перших двох аксіом є очевидною. Доведення нерівності трикутника повторює відповідні міркування, що були у першій лекції.

Нехай $f, g \in C[a,b]$. Тоді

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|, \qquad x \in [a,b].$$

А, отже,

$$\|f+g\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)+g(x)| \le \|f\| + \|g\|.$$

Простір ℓ_∞. Нагадаю, що через $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ прийнято позначати простір всіх обмежених комплекснозначних послідовностей, тобто

$$\ell_\infty := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty\}.$$

Легко перевірити, що ℓ_∞ є лінійним простором над полем комплексних чисел. За додавання елементів ми беремо звичайне додавання послідовностей.

Норму у просторі ℓ_∞ ми задаємо формулою:

$$\|x\| := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Подамо доведення лише нерівності трикутника. Нехай $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Оскільки

$$|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j| \le \|x\| + \|y\|, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

то

$$\|x+y\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j + y_j| \le \|x\| + \|y\|.$$

Простір ℓ_1. Через ℓ_1 ми позначаємо лінійний простір сумовних послідовностей:

$$\ell_1 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}.$$

Норму у просторі ℓ_1 ми задаємо формулою:

$$\|x\| := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Перевіримо лише аксіому трикутника. Перевірка двох перших аксіом є очевидною. Нехай

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Оскільки

$$|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

то
$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty}(|x_j|+|y_j|) \le \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty}|y_j| = \|x\|+\|y\|.$$
тобто $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

Простори ℓ_p. Для довільного $p \in (1,\infty)$ через ℓ_p позначають простір
$$\ell_p := \{x=(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p < \infty\}.$$
ℓ_p утворює лінійний простір над полем комплекних чисел (перевірити самостійно).

Норму у просторі ℓ_p ми задаємо формулою:
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad x=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$
Перевірка перших двох аксіом є очевидною. А нерівність трикутника випливає з нерівності Мінковського для послідовностей.

Неперервність норми. Нехай $(X,\|\cdot\|)$ - нормований простір. З нерівності трикутника випливає нерівність
$$|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|, \qquad x,y\in X.$$
Дійсно, з нерівності трикутника маємо, що
$$\|x\| = \|y+(x-y)\| \le \|y\|+\|x-y\|, \qquad \|y\| = \|x+(y-x)\| \le \|x\|+\|x-y\|,$$
тобто
$$|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|.$$
З нерівності
$$|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|, \qquad x,y\in X.$$
випливає, що функція $X \ni x \mapsto \|x\|$ є рівномірно неперервна, бо задавольняє умову Ліпшиця зі сталою $C=1$.

Зі сказаного випливає, що справедлива

Теорема 26.3. *Нехай $(X,\|\cdot\|)$ - нормований простір. Якщо послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається у просторі X до x, то*
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|.$$

Означення 26.4. *Нехай* $(X, \|\cdot\|_X)$ *і* $(Y, \|\cdot\|_Y$ *два нормовані простори. Ми скажемо, що відображення* J *є ізометричним вкладенням* X *в* Y*, якщо виконані умови:*

(1) $\forall x, y \in X \quad d_Y(Jx, Jy) = d_X(x, y)$;
(2) $\forall x, y \in X \quad J(x + y) = Jx + Jy$;
(3) $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad J(\lambda x) = \lambda Jx$.

Якщо ізометричне вкладення J *є бієкцією (тобто* $JX = Y$*), то* J *називаєтьcя ізометрією простору* X *на* Y*.*

Якщо існує ізометрія нормованого простору X *на нормований простір* Y*, то ми говоримо, що простір* X *є ізометричний простору* Y *(скорочений запис* $X \sim Y$*).*

Вправа 26.5. *Доведіть, що відношення* $X \sim Y$*, що фігурує в означенні 26.4 є відношенням еквівалентності.*

Означення 26.6. *Повний нормований простір називають банаховим простором.*

Для нормованих просторів справедлива теорема про поповнення. Вона формулюється наступним чином.

Теорема 26.7. *Кожний нормований простір можна поповнити, тобто ізометрично і всюди щільно вкласти в повний нормований простір. Поповнення є єдиним з точністю до ізометрії.*

Зауважимо, що теорема 26.7 не є наслідком теореми про поповнення для метричних просторів, бо у випадку нормованих просторів ізометричне вкладення повинно зберігати операції (повинно бути лінійним). Тому для банахових просторів потрібно передоводити теорему про поповнення. Але, це є неважко. Потрібно на поповненні метричного простору ввести лінійну структуру і узгодити її з нормою.

27. Практичне заняття. Компактність, відносна компактність у метричних просторах. Норма. Перевірка аксіом норми.

Копактність. Відносна компактність.

Задача 27.1. Чи є компактною у просторі $C[0,2]$ множина

$$A := \{f \in C[0,2] \mid f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Розв'язок. Множина A не компактною, бо вона навіть не є обмежена. Дійсно, якщо б вона була обмежена, то вона би містилася у якійсь кулі з центром в нулі. Для функції $f_n = x^n$ маємо

$$d(f_n, 0) = \max_{0 \le x \le 2} |f_n(x)| = \max_{0 \le x \le 2} |x^n| = 2^n,$$

тобто

$$\sup_n d(f_n, 0) = +\infty.$$

А це суперечить обмеженості.

Задача 27.2. Чи є компактною у просторі $C[0,1]$ множина

$$A := \{f \in C[0,1] \mid 0 < |f(x)| < 1\}.$$

Розв'язок. Множина A не компактною, бо вона не є замкненою. Дійсно, послідовність функцій

$$f_n(x) = 1/n, \qquad x \in [0,1],$$

належить множині A і збігається до функції

$$g(x) = 0, \qquad x \in [0,1],$$

яка не належить множині A.

Задача 27.3. Нехай множина A в метричному просторі X є цілком обмежена. Доведіть, що її замикання теж є цілком обмежена множина.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді множину A покрити скінченною кількістю куль $B_1, \dots, B_n$ радіусу $\varepsilon > 0$, тобто

$$A \subset \cup_{j=1}^n B_j.$$

Очевидно, що кулі можна взяти замкненими. Оскільки тоді множина

$$\cup_{j=1}^n B_j$$

є замкнена, то

$$\bar{A} \subset \cup_{j=1}^n B_j,$$

тобто замикання $\bar{A}$ можна покрити кулями $B_1, \ldots, B_n$ радіусу $\varepsilon > 0$. А це означає, що множина $\bar{A}$ є цілком обмежена.

Задача 27.4. Нехай множина A у повному метричному просторі X є цілком обмежена. Доведіть, що вона є відносно компактною.

Розв'язок. Згідно означення відносної компактності нам потрібно довести, що множина $\bar{A}$ є компактною. З огляду на попередню задачу множина $\bar{A}$ є цілком обмеженою. Крім того, вона є замкненою. Оскільки простір X є повний, то згідно з критерієм компактності множина $\bar{A}$ є компактною.

Задача 27.5. Чи є цілком обмеженою (обмеженою) у просторі $C[0,1]$ множина

$$A := \{f \in C[0,1] \mid f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Розв'язок. Множина A є обмеженою, але не є цілком обмеженою. Дійсно, для функції $f_n(x) = x^n$ маємо

$$d(f_n, 0) = \max_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |x^n| = 1,$$

тобто множина A є обмежена.

Припустимо, що вона є цілком обмежена. Оскільки простір $C[0,1]$ є повний, то множина $\bar{A}$ є компактною. Це означає, що з послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати збіжно підпослідовність, тобто підпослідовність, яка збігається рівномірно до деякої неперервної функції. Але, ми маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = g(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ 1, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

Функція g не є неперервною, а, це суперечить тому, що підпослідовність послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається рівномірно до деякої неперервної функції.

Задача 27.6. Чи є цілком обмеженою (обмеженою) у просторі $C[0,\pi]$ множина

$$A := \{f \in C[0,\pi] \mid f(x) = \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Розв'язок. Множина A не є цілком обмеженою у просторі $C[0,\pi]$. Дійсно, розглянемо в A підмножину

$$B := \{g_n \in C[0,\pi] \mid g_n(x) = \sin 2^n x, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко бачити, що для двох різних функцій g_n і g_m

$$d(g_n, g_m) = \max_{0 \le x \le 1} |g_n(x) - g_m(x)| \ge 1.$$

Дійсно, якщо $m < n$, то знайдеться проміжок $[a,b] \subset [0,1]$, на якому функція g_n приймає значення -1, а функція g_m є невід'ємна.

Оскільки
$$d(g_n, g_m) \geq 1, \qquad n, m \in \mathbb{N},$$
то множину A не можна покрити скінченною кількістю куль радіусу $1/3$, бо в кожній кулі радіусу $1/3$ може міститися тільки один елемент множини B.

Задача 27.7. Доведіть, що множина
$$A := \{f \in C^1[0,\pi] \mid \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \leq 1, \quad \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \leq 1\}$$
є цілком обмеженою у просторі $C[0,\pi]$.

Розв'язок. Очевидно, що множина A є обмеженою у просторі $C[0,\pi]$. Тому згідно з теоремою Арцела нам досить переконатися, що A є одностайно неперервною, тобто, що
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall f \in A \quad \forall x, x' \in [0,\pi] \quad [|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon].$$
Для довільних $f \in A$ і $x, x' \in [0,\pi], x \neq x'$, згідно з теоремою Лагранжа, маємо, що
$$f(x) - f(x') = f'(\xi)(x - x'),$$
де ξ лежить між x та x'. Тому для довільних $f \in A$ і $x, x' \in [0,\pi], x \neq x'$, маємо, що
$$|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)||x - x'| \leq |x - x'|,$$
тобто
$$|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|.$$
Отже, в нашому випадку можна взяти $\delta = \varepsilon$. Одностайна неперервність множини A доведена.

Задачі на перевірку аксіом норми.

Задача 27.8. Чи задає норму на $\mathbb{R}$ формула
$$\|x\| = |x|^2.$$

Розв'язок. Функція не є нормою, бо не виконується друга аксіома:
$$\|2x\| = |(2x)^2| = 4|x|^2 = 4\|x\| \neq 2\|x\|, \qquad x \neq 0.$$

Задача 27.9. Чи задає норму на $\mathbb{R}^2$ формула
$$\|x\| = |x_1| - |x_2|, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Функція не є нормою. Дійсно, для вектора $y = (0, 1)$ ми маємо, що

$$\|y\| = 0 - 1 = -1 < 0,$$

тобто наша функція не є невід'ємна.

Задача 27.10. Чи задає норму на $\mathbb{R}^2$ формула

$$\|x\| = 3|x_1| + 2|x_2|, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Функція є нормою.

1a) якщо $x = (x_1, x_2)$ і $x = 0$, то $\|x\| = 0$;

1b) якщо $x = (x_1, x_2)$ і $\|x\| = 0$, то $3|x_1| + 2|x_2| = 0$, а, отже, $x_1 = x_2 = 0$, тобто $x = 0$;

2) очевидно, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ і $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|\lambda x\| = 3|\lambda x_1| + 2|\lambda x_2| = |\lambda|(3|x_1| + 2|x_2|) = |\lambda|\|x\|;$$

3) для довільних $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\|x + y\| = 3|x_1 + y_1| + 2|x_2 + y_2| \leq 3|x_1| + 2|x_2| + 3|y_1| + 2|y_2| = \|x\| + \|y\|.$$

Задача 27.11. Чи задає норму на $\mathbb{R}^2$ формула

$$\|x\| = \sqrt{|x_1| + |x_2|}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Функція не є нормою. Дійсно,

Задача 27.12. Чи задає норму на $C^1[0, 1]$ формула

$$\|f\| = \int_0^1 |f'(x)|\, dx, \qquad f \in C^1[0, 1].$$

Розв'язок. Функція не є нормою, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, функція $g(x) \equiv 1$ є ненульова, але

$$\|g\| = \int_0^1 |g'(x)|\, dx = 0.$$

Задача 27.13. Чи задає норму на $C^1[0, 1]$ формула

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|, \qquad f \in C^1[0, 1].$$

Розв'язок. Функція не є нормою, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, функція $g(x) \equiv 1$ є ненульова, але

$$\|g\| = \max_{0 \le x \le 1} |g'(x)|\, dx = 0.$$

Задача 27.14. Чи задає норму на $C^1[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(1) - f(0)| + \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|, \qquad f \in C^1[0,1].$$

Розв'язок.

Функція не є нормою, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, функція $g(x) \equiv 1$ є ненульова, але

$$\|g\| = |f(1) - f(0)| + \max_{0 \le x \le 1} |g'(x)|\, dx = 0.$$

Задача 27.15. Чи задає норму на $C^1[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(1) + f(0)| + \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|, \qquad f \in C^1[0,1].$$

Розв'язок.

Задача 27.16. Чи задає норму на $C^1[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(1)| + \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|, \qquad f \in C^1[0,1].$$

Розв'язок.

Задача 27.17. Чи задає норму на $C[0,1]$ формула

$$\|f\| = \int_0^{1/2} |f(x)|\, dx, \qquad f \in C[0,1].$$

Розв'язок. Функція не є нормою, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, розглянемо функцію

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0, 1/2]; \\ x - 1/2, & \text{якщо } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Функція g є ненульова, але

$$\|g\| = \int_0^{1/2} |g(x)|\,dx = 0.$$

Задача 27.18. Чи задає норму на $C[0,1]$ формула

$$\|f\| = \max_{0\le x\le 1/2} |f(x)|, \qquad f\in C[0,1].$$

Розв'язок. Функція не є нормою, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, розглянемо функцію

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } x\in[0,1/2];\\ x-1/2, & \text{якщо } x\in(1/2,1]. \end{cases}$$

Функція g є ненульова, але

$$\|g\| = \max_{0\le x\le 1/2} |g(x)|\,dx = 0.$$

Задача 27.19. Чи задає норму на $C^1[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx, \qquad f\in C^1[0,1].$$

Розв'язок. Функція є нормою. Дійсно,

1a) якщо $f=0$, то $\|f\|=0$;

1b) якщо $\|f\|=0$, то

$$|f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx = 0,$$

а, отже,

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = 0,$$

і

$$|f(0)| = 0.$$

З першої рівності випливає, що $f'\equiv 0$, тобто функція f є сталою. А з другої рівності випливає, що ця стала рівна нулеві, тобто $f=0$.

2) очевидно, що для довільного $\lambda\in\mathbb{C}$ і $f\in C^1[0,1]$

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(x)|\,dx = |\lambda|\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx\right) = |\lambda|\|f\|.$$

3) для довільних $f, g \in C^1[0,1]$

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)|+\int_0^1 |f'(x)+g'(x)|\,dx \le |f(0)|+|g(0)|+\int_0^1 (|f'(x)|+|g'(x)|)\,dx =$$

$$= |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^1 |g'(x)|\,dx = \|f\| + \|g\|,$$

тобто

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

Задача 27.20. Чи задає норму на $C^2[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\,dx, \qquad f \in C^1[0,1].$$

Розв'язок. Формула не задає норму, бо не виконується перша аксіома. Дійсно, функція $g(x) = x$ є ненульова, але

$$|g(0)| + \int_0^1 |g''(x)|\,dx = 0.$$

Задача 27.21. Чи задає норму на $C^2[0,1]$ формула

$$\|f\| = |f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f''(x)|\,dx, \qquad f \in C^2[0,1].$$

Розв'язок. Формула задає норму. Дійсно,

1a) якщо $f = 0$, то $\|f\| = 0$;

1b) якщо $\|f\| = 0$, то

$$|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx = 0,$$

а, отже,

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx = 0,$$

і

$$|f(0)| = 0, \qquad |f(1)| = 0.$$

З першої рівності випливає, що $f'' \equiv 0$, тобто функція f має вигляд

$$f(x) = ax + b.$$

А з другої і третьої рівності випливає, що $a = 0 = b$, тобто $f = 0$.

2) очевидно, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ і $f \in C^2[0,1]$

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + |\lambda f(1)| + \int_0^1 |\lambda f'(x)|\,dx = |\lambda| \left(|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx \right) = |\lambda| \|f\|.$$

3) для довільних $f, g \in C^2[0,1]$

$$\|f + g\| = |f(0) + g(0)| + |f(1) + g(1)| + \int_0^1 |f''(x) + g''(x)|\,dx \leq$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + |f(1)| + |g(1)| + \int_0^1 (|f''(x)| + |g''(x)|)\,dx =$$

$$= |f(0)| + |g(0)| + |f(1)| + |g(1)| + \int_0^1 |f''(x)|\,dx + \int_0^1 |g''(x)|)\,dx =$$

$$= \|f\| + \|g\|,$$

тобто

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Задача 27.22. Чи задає норму на ℓ_1 формула

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{2j}|, \qquad x = (x_j)j \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок. Формула не задає норму. Дійсно, розглянемо вектор

$$y = (1, 0, \dots, 0, \dots).$$

Він є ненульовий, але $\|y\| = 0$.

Задача 27.23. Чи задає норму на ℓ_1 формула

$$\|x\| = \sum_{j=2}^{\infty} |x_j|, \qquad x = (x_j)j \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок. Формула не задає норму. Дійсно, розглянемо вектор

$$y = (1, 0, \dots, 0, \dots).$$

Він є ненульовий, але $\|y\| = 0$.

Задача 27.24. Чи задає норму на $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ формула

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n-1} |x_j - x_{j+1}|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n.$$

Розв'язок. Формула не задає норму. Дійсно, вектор

$$y = (1, \ldots, 1)$$

є ненульовий, але $\|y\| = 0$.

Задача 27.25. Чи задає норму на ℓ_1 формула

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j+1}|, \qquad x = (x_j) j \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок. Формула задає норму. Дійсно,
1a) якщо $x = 0$, то $\|x\| = 0$;
1b) якщо $\|x\| = 0$, то

$$|x_j - x_{j+1}| = 0, \qquad j \in \mathbb{N},$$

а, отже, послідовність (x_j) є постійною. Оскільки вона належить ℓ_1, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty,$$

а це можливо лише у випадку, коли $x_j = 0$ для всіх j, тобто $x = 0$.
2) Очевидно, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ і $x \in \ell_1$

$$\|\lambda x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j - \lambda x_{j+1}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j+1}| = |\lambda| \|x\|.$$

3) Для довільних $x, y \in \ell_1$

$$|(x_j + y_j) - (x_{j+1} + y_{j+1}| \leq |x_j - x_{j+1}| + |y_j - y_{j+1}|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

а, отже,

$$\|x + y\| = \sum_{j=1}^{\infty} |(x_j + y_j) - (x_{j+1} + y_{j+1}| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j - x_{j+1}| + |y_j - y_{j+1}|) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j+1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j - y_{j+1}| = \|x\| + \|y\|.$$

тобто
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

28. Еквівалентні норми. Обмежені оператори у нормованих просторах.

Сьогодні лекція буде складатися з двох частин. У першій частині ми розглянемо поняття еквівалентності норм і доведемо теорему про норми в скінченновимірному просторі. А в другій частині ми перейдемо до вивчення базових понять теорії лінійних операторів.

Означення 28.1. *Нехай L - лінійний простір, а $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ дві норми на L.*

1) Норма $\|\cdot\|_1$ називається слабшою за норму $\|\cdot\|_2$, а норма $\|\cdot\|_2$ сильнішою за норму $\|\cdot\|_1$, якщо

$$\exists C>0 \quad \forall x \in L \qquad \|x\|_1 \le C\|x\|_2. \tag{28.1}$$

2) Ми скажемо, що норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ є еквівалентними, якщо існують додатні сталі C_1 і C_2 такі, що для всіх $x \in L$ виконуються нерівності:

$$\|x\|_1 \le C_1\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1. \tag{28.2}$$

Вправа 28.2. *Довести, що еквівалентність норм є відношенням еквівалентності, тобто є симетричним рефлексивним і транзитивним відношенням.*

Еквівалентні норми породжують на лінійному просторі одну і ту ж топологію. Тому, з точки зору топології, заміна норми на їй еквівалентну суттєво нічого не змінює. Наприклад, ця заміна не впливає на повноту простору чи на неперервність функцій, що діють у цьому просторі.

Теорема 28.3. *Всі норми в скінченновимірному лінійному просторі є еквівалентними.*

Доведення. Нехай L - лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ і $\dim L = n$. Зафіксуємо довільну базу $\{x_j\}_{j=1}^n$ в просторі L. Кожній нормі $\|\cdot\|$ у просторі L відповідає норма в лінійному просторі $\mathbb{C}^n$, яка задана формулою:

$$\mathbb{C}^n \ni c = (c_1, \dots, c_n) \mapsto \left\| \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\|.$$

Перевірка аксіом норми є очевидною.

Тому нам досить переконатися, що у просторі $\mathbb{C}^n$ всі норми є еквівалентні евклідовій нормі. Візьмемо довільну норму $\|\cdot\|$ в $\mathbb{C}^n$ і позначимо через $\|\cdot\|_e$ евклідову норму в $\mathbb{C}^n$, тобто

$$\|c\|_e = \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{1/2}, \qquad c = (c_j)_{j=1}^{n}.$$

Позначимо через $(e_j)_{j=1}^{n}$ стандартну базу у просторі $\mathbb{C}^n$, тобто

$$(e_j)_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = j; \\ 0, & \text{якщо } k \neq j. \end{cases}$$

Розглянемо на одиничній сфері $S_n := \{c \in \mathbb{C}^n \mid \|c\|_e = 1\}$ функцію

$$f(c) := \|c\|, \qquad c \in S_n.$$

Ця функція є додатною. Покажемо, що вона неперервна. Дійсно,

$$|f(c) - f(c')| = |\|c\| - \|c'\|| \leq \|c - c'\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j e_j - \sum_{j=1}^{n} c'_j e_j\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |(c_j - c'_j)| \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j - c'_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2} = \alpha \|c - c'\|_e,$$

де

$$\alpha := \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2}.$$

Тому функція f задовольняє умову Ліпшиця зі сталою α, а, отже, є неперервною.

Оскільки сфера S_n є компактом, то згідно з теоремою Вейєрштраса f досягає на S_n свого найбільшого ($M = \max f$) і найменшого ($m = \min f$) значення. Тому для всіх $c \in S_n$

$$0 < m \leq f(c) \leq M.$$

Для довільного ненульового $c \in \mathbb{C}^n$ вектор $\frac{c}{\|c\|_e}$ належить сфері S_n. Тому

$$m \leq \left\|\frac{c}{\|c\|_e}\right\| \leq M,$$

тобто

$$m\|c\|_e \leq \|c\| \leq M\|c\|_e, \qquad c \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Звідки випливає еквівалентність норм $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_e$. Теорема доведена. □

Лінійні неперервні оператори.

Нехай X та Y лінійні простори. Функція $A : X \to Y$ називається лінійним оператором, якщо:

(1) $\operatorname{dom} A$ є лінійним підпростором в X;
(2) для всіх $x, y \in \operatorname{dom} A \quad A(x + y) = Ax + Ay$ (адитивність);
(3) для всіх $x \in \operatorname{dom} A$ і $\alpha \in \mathbb{C} \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$ (однорідність).

Нехай X та Y нормовані простори і $A : X \to Y$ лінійний оператор. Лінійний оператор A називається обмеженим, якщо:

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} A \qquad \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X. \tag{28.3}$$

З однорідності оператора A випливає, що (28.3) еквівалентно тому, що

$$\sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in \operatorname{dom} A, \quad \|x\|_X = 1\} < \infty. \tag{28.4}$$

Якщо лінійний оператор $A : X \to Y$ є обмеженим, то з (28.3) і лінійності випливає, що

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} A \quad \|Ax - Ay\|_Y \leq C\|x - y\|_X,$$

тобто для оператора A виконується умова Ліпшиця зі сталою C, а, отже, оператор A є рівномірно неперервним відображенням.

З принципу продовження за неперервністю випливає, що якщо простори X та Y банахові , то оператор A можна єдиним чином продовжити до неперервного відображення $\bar{A}$ на $\overline{\operatorname{dom} A}$. Це продовження буде лінійним оператором, оскільки операції додавання і множення на скаляр є неперервними.

Пояснимо це більш детально. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ і $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовності в $\operatorname{dom} A$, які збігається до x і y відповідно. Тоді $x_n + y_n \to x + y$ і $\lambda x_n \to \lambda x$. Тому

$$\bar{A}(x + y) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lim_{n\to\infty} Ay_n = \bar{A}x + \bar{A}y,$$
$$\bar{A}(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda Ax_n = \lambda\bar{A}x.$$

Як правило лінійні оператори є щільно заданими. Тому, якщо вони на додаток є обмеженими, то ми можемо вважати, що вони задані на всьому просторі.

Надалі, якщо не сказане протилежне, ми вважаємо, що лінійний оператор є всюди заданим.

Теорема 28.4. *Нехай X та Y нормовані простори і $A : X \to Y$ лінійний оператор, причому $\operatorname{dom} A = X$. Для того, щоб A був неперервним необхідно і досить, щоб він був обмеженим.*

Доведення. Якщо оператор A є обмеженим, то зі сказаного вище випливає, що він неперервний (навіть рівномірно неперервний).

Нехай оператор A є неперервний. Припустимо, що він не є обмежений. Це означає (див. (28.4)), що

$$\sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X, \quad \|x\|_X = 1\} = \infty.$$

Тому в X існує послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ така, що

$$\|x_n\|_X = 1, \qquad \|Ax_n\|_Y > n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо послідовність

$$y_n := \frac{x_n}{\|Ax_n\|_Y}$$

Ця послідовність збігається до нуля. Дійсно,

$$\|y_n\|_X = \frac{\|x_n\|_X}{\|Ax_n\|_Y} = \frac{1}{\|Ax_n\|_Y} \le \frac{1}{n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Оскільки A є неперервним, то $Ay_n \to A0 = 0$. Враховуючи неперервність норми, маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|Ay_n\|_Y = 0.$$

З іншого боку,

$$\|Ay_n\|_Y = \left\| A\frac{x_n}{\|Ax_n\|_Y} \right\|_Y = \frac{\|Ax_n\|_Y}{\|Ax_n\|_Y} = 1,$$

а, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ay_n\|_Y = 1.$$

Суперечність. Теорема доведена. □

Множину всіх лінійних обмежених (неперервних) всюди заданих операторів, що діють з нормованого простору X в нормований простір Y ми будемо позначати через $\mathcal{B}(X,Y)$.

Множина $\mathcal{B}(X,Y)$ стає лінійним простором над полем $\mathbb{C}$, якщо ми введемо операції додавання операторів і множення оператора на число за формулами:

$$(A+B)x := Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x = \lambda(Ax), \qquad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Самостійно перевірити, що виконуються всі аксіоми лінійного простору.

Введемо на лінійному просторі $\mathcal{B}(X,Y)$ норму за формулою:

$$\|A\| = \|A\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \min\{C \ge 0 \mid \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \le C\|x\|_X\}. \tag{28.5}$$

Вправа 28.5. *Довести, що мінімум у правій частині* (28.5) *існує.*

З формули (28.5) неважко вивести, що

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \tag{28.6}$$

тобто ми маємо чотири різні еквівалентні означення норми.

З формули (28.5) очевидним чином випливає, що

$$\|Ax\|_Y \le \|A\|\|x\|_X, \qquad x \in X. \tag{28.7}$$

Цю властивість норми ми будемо часто використовувати.

Перевіримо виконання аксіом норми для норми оператора. Перевірка перших двох аксіом є очевидною. Перевіримо виконання нерівності трикутника. Нехай $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$. Для довільного $x \in X$

$$\|(A+B)x\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X + \|B\|\|x\|_X = (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X.$$

Отже, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Таким чином лінійний простір $\mathcal{B}(X, Y)$ з операторною нормою перетворюється в нормований простір. А чи є цей простір повним?

Теорема 28.6. *Нехай X та Y нормовані простори. Якщо простір Y є повний, то нормований простір $\mathcal{B}(X, Y)$ теж є повним.*

Доведення. Розглянемо фундаментальну послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі $\mathcal{B}(X, Y)$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m > n_0 \quad \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon.$$

Оскільки

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|\|x\|_X,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n, m > n_0 \quad \|A_n x - A_m x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X. \tag{28.8}$$

А це означає, що векторна послідовність $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна у просторі Y. Оскільки Y повний, то послідовність $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в Y. Покладемо за означенням

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Покажемо, що A є лінійним оператором. Дійсно, маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x + A_n y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda Ax.$$

Покажемо, що A є обмеженим. Перейдемо в (28.8) до границі при $m \to \infty$. Враховуючи неперервність норми, отримуємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad \|A_n x - Ax\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X.$$

Звідси, випливає, що при $n > n_0$ оператор $(A_n - A)$ є обмежений і

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon.$$

Оскільки

$$A = A_n - (A_n - A)$$

і оператори A_n та $(A_n - A)$ є обмежені, тобто належать $\mathcal{B}(X, Y)$, то оператор A теж належить $\mathcal{B}(X, Y)$. Зі сказаного вище також випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|A_n - A\| \leq \varepsilon,$$

а, отже, $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доведена. □

Введемо операцію множення операторів. Нехай X, Y, Z нормовані простори і $A \in \mathcal{B}(X, Y), B \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Добутком BA операторів A і B називається функція

$$(BA)x = B(Ax), \qquad x \in X,$$

тобто добутком операторів є їх композиція. Добуток BA є лінійним і неперервним оператором. Дійсно композиція лінійних відображень є лінійним відображенням, а композиція неперервних є неперервним відображенням. Більше того,

$$\|(BA)x\|_Z = \|B(A)x\|_Z \le \|B\|\|Ax\|_Y \le \|A\|\|B\|\|x\|_X, \qquad x \in X,$$

тобто

$$\|BA\| \le \|B\|\|A\|.$$

Добуток операторів є неперервною функцією за сукупністю змінних. Дійсно, нехай $A, A_0 \in \mathcal{B}(X, Y),\ B, B_0 \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Тоді

$$\|BA - B_0A_0\| = \|B(A - A_0) + (B - B_0)A_0\| \le \|B\|\|A - A_0\| + \|B - B_0\|\|A_0\|.$$

Звідси випливає, що на множині

$$\{(A, B) \in \mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{B}(Y, Z) \mid \|A\|, \|B\| \le C\},$$

де $C > 0$, добуток операторів задовольняє умову

$$\|BA - B_0A_0\| \le C(\|A - A_0\| + \|B - B_0\|),$$

тобто є неперервним.

Домовимося нормований простір $\mathcal{B}(X, X)$ позначати скорочено через $\mathcal{B}(X)$. Якщо X - банахів простір, то, як ми вже довели, $\mathcal{B}(X)$ є банаховим простором. Однак, в $\mathcal{B}(X)$ ми маємо ще операцію множення операторів. В результаті $\mathcal{B}(X)$ утворює структуру, яку називають нормованою (банаховою, якщо X банахів простір) алгеброю. Це означає, що ми маємо структуру комплексної алгебри і накладену на неї структуру нормованого простору. До аксіом нормованого простору потрібно додати наступні аксіоми:

(1) $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність множення)
(2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
(3) $(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB$ (дистрибутивність);
(4) $IA = AI = A$ (I - одиничний оператор);
(5) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ (мультиплікативна нерівність)
(6) $\|I\| = 1.$

Лінійні функціонали.

Важливим окремим випадком лінійних операторів є лінійні функціонали.

Нехай X - лінійний простір над $\mathbb{C}$ (над $\mathbb{R}$). Лінійним функціоналом на X називається функція, що діє з L в $\mathbb{C}$ (в $\mathbb{R}$) і :

(1) $\forall x, y \in L \quad f(x+y) = f(x) + f(y);$
(2) $\forall x \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Множина всіх лінійних функціоналів на X утворює лінійний простір зі звичайними операціями додавання функціоналів і множення функціонала на число. Цей лінійний простір називається алгебраїчним спряженим до простору X і позначається через X^*.

Якщо простір X є нормованим, то підпростір в X', що складається з усіх неперервних функціоналів на X, називається топологічним спряженим до нормованого простору X і позначається через X'. Простір X' ми наділяємо нормою

$$\|f\| := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|,$$

тобто нормою простору $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Отже, ми маємо, що $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Оскільки $\mathbb{C}$ є банаховим простором, то з теореми про повноту нормованого простору $\mathcal{B}(X, Y)$ випливає, що X' завжди є банаховим простором (навіть коли X є неповним нормованим простором.)

Спряжений простір X' відіграє важливу роль в теорії банахових просторів. Його властивості тісно пов'язані з властивостями вихідного банахового простору. Для класичних банахових просторів знайдені спряжені простори. Під задачею знаходження топологічного спряженого розуміють задачу про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу на X. Іншими словами, це означає знайти опис простору ізоморфного до X'. Наприклад, відомо, що топологічний спряжений до простору ℓ_p $(1 \leq p < \infty$ є ізоморфний простору ℓ_q, де q - спряжений показник до p (тобто $1/p + 1/q = 1$.)

Означення 28.7. *Банахів простір X називається рефлексивним, якщо його другий спряжений $X'' := (X')'$ ізоморфний простору X.*

Рефлексивні банахові простори мають кращі властивості в порівнянні з нерефлексивними просторами. З рефлексивними банаховими просторами працювати простіше. Простори ℓ_p з $p \in (1, \infty)$ є рефлексивними, натомість простори ℓ_1, ℓ_∞, $C[0, 1]$ не є рефлексивними.

29. Принципи функціонального аналізу.

Принципами функціонального аналізу називають наступні три фундаментальні теореми:

1) Принцип рівномірної обмеженості (теорема Банаха-Штейнгауза).

2) Принцип відкритості відображення (теорема Банаха про обернений оператор).

3) Принцип продовження лінійного функціонала (теорема Гана-Банаха).

Як ви бачите з кожною з цих теорем є пов'язане ім'я Стефана Банаха.

Почнемо з теореми Банаха-Штейнгауза. Вона має декілька різних форм. Ми сформулюємо її в найбільш вживаному вигляді.

Означення 29.1. *Нехай X, Y - банахові простори і $\mathscr{A}$ множина у просторі $\mathcal{B}(X,Y)$. Множина $\mathscr{A}$ називається рівномірно обмеженою, якщо*

$$\sup_{A\in\mathscr{A}} \|A\| < \infty,$$

і множина $\mathscr{A}$ називається поточково (сильно) обмеженою, якщо

$$\forall x \in X \quad \sup_{A\in\mathscr{A}} \|Ax\|_Y < \infty.$$

Оскільки для всіх $x \in X$ і $A \in \mathscr{A}$

$$\|Ax\|_Y \le \|A\|\|x\|_X,$$

то з рівномірно обмеженості множини $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ випливає її поточкова обмеженість. Несподіваним є те, що справедлива обернена імплікація.

Теорема Банаха-Штейнгауза.

Теорема 29.2. *Нехай X, Y - банахові простори і $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Якщо множина $\mathscr{A}$ є поточково обмежена, то вона є також і рівномірно обмеженою.*

Доведення. Нехай множина $\mathscr{A}$ є поточково обмежена. Розглянемо у просторі X підмножини

$$X_n = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \le n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки оператор $A \in \mathscr{A}$ є неперервним, а множина

$$X_{n,A} := \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \le n\}$$

є прообразом замкненої кулі (у просторі Y) при відображенні A, то $X_{n,A}$ є замкненена множина. А, отже, замкненою є кожна множина X_n. З поточкової обмеженості множини $\mathscr{A}$ випливає, що кожна точка $x \in X$ належить деякому X_n, тобто

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Згідно з теоремою Бера банахів простір X є множиною другої категорії, тому існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що множина X_{n_0} не є ніде не щільна. Оскільки множина X_{n_0} є замкнена, то вона мусить мати внутрішні точки. Це означає, що в X існує замкнена куля $\bar{B}(x_0, r)$ (з центром в точці $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$), яка міститься в X_{n_0}. Візьмемо довільний вектор $x \in X$ такий, що $\|x\|_X \leq 1$. Його можна подати у вигляді

$$x = \frac{1}{r}(rx + x_0 - x_0) = \frac{1}{r}(y_1 - y_2),$$

де $y_1 = rx + x_0$ і $y_2 = x_0$. Зауважимо, що $y_1, y_2 \in \bar{B}(x_0, r)$. Тому для довільного $A \in \mathscr{A}$

$$\|Ax\|_Y = \frac{1}{r}\|A(y_1 - y_2)\|_Y \leq \frac{1}{r}(\|Ay_1\|_Y + \|Ay_2\|_Y) \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Оскільки x є довільним елементом одиничної кулі (в X), то за означенням норми оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \leq \frac{2n_0}{r}, \qquad A \in \mathscr{A}.$$

Отже,

$$\sup_{A \in \mathscr{A}} \|A\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Теорема доведена. □

З теореми Банаха-Штейнгауза випливає наступний

Наслідок 29.3. *Нехай X, Y - банахові простори і $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ послідовність операторів в $\mathcal{B}(X, Y)$. Якщо для кожного $x \in X$ векторна послідовність $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ збігається у просторі Y, то:*

(1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$;
(2) *існує $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ такий, що для всіх $x \in X$* $\lim_{n \to \infty} A_n x = Ax$ *і* $\|A\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$.

Доведення. Нехай виконані умови наслідку. Збіжна послідовність у нормованому просторі є обмежена, тому $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y < \infty$ для кожного $x \in X$. Отже, множина $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є поточково обмеженою. Згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза $\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

Доведемо другу частину наслідку. Покладемо за означенням

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x, \qquad x \in X.$$

Покажемо, що A є лінійним оператором. Дійсно, маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x + A_n y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda A x.$$

Покажемо, що A є обмеженим. Дійсно, нехай $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. Тоді

$$\|A_n x\|_Y \leq \|A_n\| \|x\|_X \leq \alpha \|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Звідси, враховуючи неперервність норми, маємо

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y \leq \alpha \|x\|_X, \qquad x \in X,$$

тобто $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ і $\|A\| \leq \alpha$. □

Доведення теореми Банаха-Штейнгауза не є надто складним і основним його моментом є красиве використання теореми Бера про категорії. Натомість доведення теореми Банаха про обернений оператор є складним.

Теорема Банаха про обернений оператор.

Теорема 29.4. *Нехай X, Y - банахові простори і $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Якщо оператор A є бієкцією, то обернений оператор A^{-1} належить простору $\mathcal{B}(Y,X)$.*

Вправа 29.5. *Нехай X, Y - нормовані простори і $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Оператор A є бієкцією тоді і тільки тоді, коли $\ker A = \{0\}, \quad \operatorname{Im} A = Y$.*

З огляду на вправу 32.9 теорему Банаха про обернений оператор можна також сформулювати у вигляді

Теорема 29.6. *Нехай* X, Y *- банахові простори і* $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. *Якщо* $\ker A = \{0\}$ *і* $\operatorname{Im} A = Y$, *то* A *має неперервний обернений.*

Теорема Банаха про обернений оператор є дуже сильним інструментом. З алгебраїчної властивості (бієкції) випливає топологічна властивість (неперервність).

На жаль, через брак часу ми не будемо розглядати доведення теореми Банаха про обернений оператор, бажаючі можуть ознайомитися з ним за підручником.

Перейдемо тепер до третього принципу.

Теорема Гана-Банаха.

Теорема Гана-Банаха має декілька форм (алгебраїчну, геометричну і топологічну).

Для наглядності почнемо з опису геометричної форми у найпростішому варіанті - у просторі $\mathbb{R}^2$.

Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ є дві компактні опуклі множини, що не перетинаються. Тоді існує пряма, яка поділяє площину так, що множини лежать у різних півплощинах. Пропоную довести цей факт самостійно.

Аналогічне твердження можна довести і у випадку простору $\mathbb{R}^n$.

Перейдемо тепер до алгебраїчної форми теореми Гана-Банаха. Вона служить відправною точкою до доведенні всіх своїх форм.

Означення 29.7. *Нехай* L *дійсний лінійний простір. Невід'ємну функцію* $p : L \to [0, \infty)$ *назвемо калібровочним функціоналом, якщо :*

(1) $\forall x \in L \quad \forall \alpha \geq 0 \quad p(\alpha x) = \alpha p(x)$;
(2) $\forall x, y \in L \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Теорема 29.8. *Нехай p - калібровочний функціонал у дійсному лінійному просторі L і f_0 - лінійний функціонал, який заданий на лінійному підпросторі $L_0 \subset L$ і підпорядкований p, тобто*

$$\forall x \in L_0 \quad f_0(x) \le p(x).$$

Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням умови підпорядкування, тобто $\quad \forall x \in L \quad f(x) \le p(x).$

Доведення. Доведення теореми Гана-Банаха складається з двох частин. Перша частина полягає в побудові продовження функціонала на підпростір $Y := \mathrm{lin}\{L_0 \cup \{z\}\}$, де z довільний вектор в $L \setminus L_0$. Цю частину доведення можна назвати арифметичною. Друга частина полягає у використанні трансфінітної індукції (леми Цорна). Ми обмежимося першою частиною доведення. З другою частиною бажаючі можуть ознайомитися у підручнику.

Зафіксуємо довільний вектор $z \in L \setminus L_0$. Тоді підпростір Y, що є лінійною оболонкою множини $L_0 \cup \{z\}$, складається з усіх векторів вигляду

$$y = x + tz, \qquad x \in L_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що продовження функціоналу f_0 на простір Y вже побудоване. Тоді

$$f(x + tz) = f(x) + tf(z) = f_0(x) + tc,$$

де $c = f(z)$. Отже, все зводиться до того, щоб підібрати число $c \in \mathbb{R}$, для якого

$$f_0(x) + tc \le p(x + tz), \qquad x \in L_0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{29.1}$$

Беручи до уваги однорідність функціонала f і додатну однорідність функціоналу p, бачимо, що для виконання нерівності (29.1) досить, щоб вона виконувалася для $t = 1$ і $t = -1$.

Дійсно, (29.1) можна переписати у вигляді

$$f_0(x) \pm tc \le p(x \pm tz), \qquad x \in L_0, \quad t > 0.$$

Виконуючи ділення на $t > 0$, отримуємо

$$f_0(x/t) \pm c \le p(x/t \pm z), \qquad x \in L_0, \quad t > 0.$$

Оскільки $x/t \in L_0$, то нам досить, щоб для всіх $x \in L_0$

$$f_0(x) + c \le p(x + z), \qquad f_0(x) - c \le p(x - z),$$

тобто

$$f_0(x) - p(x-z) \le c \le p(x'+z) - f_0(x'), \qquad x, x' \in L_0. \tag{29.2}$$

Зауважимо, що для довільних $x, x' \in L_0$

$$f_0(x) + f_0(x') = f_0(x+x') \le p(x+x') \le p(x-z+x'+z) \le p(x-z) + p(x'+z),$$

тобто

$$f_0(x) - p(x-z) \le p(x'+z) - f_0(x'), \qquad x, x' \in L_0. \tag{29.3}$$

Розглянемо множини

$$A := \{f_0(x) - p(x-z) \mid x \in L_0\}, \qquad B := \{p(x'+z) - f_0(x') \mid x' \in L_0\}.$$

З (29.3) випливає, що

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \le b. \tag{29.4}$$

Згідно з аксіомою повноти для дійсних чисел, з умови (29.4) випливає, що

$$\exists c \in \mathbb{R} \qquad \forall \in A \quad \forall b \in B \quad a \le c \le b,$$

тобто існує $c \in \mathbb{R}$, для якого виконується (29.2). Арифметична частина доведення виконана. □

Доведемо тепер теорему Гана-Банаха для лінійного простору над полем комплексних чисел.

Означення 29.9. *Невід'ємний функціонал p на комплексному лінійному просторі L назвемо півнормою, якщо для нього виконуються властивості:*

(1) $\forall x, y \in L \quad p(x+y) \le p(x) + p(y)$;
(2) $\forall x \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Теорема 29.10. *Нехай p - півнорма у комплексному лінійному просторі L і f_0 - лінійний функціонал, який заданий на лінійному підпросторі $L_0 \subset L$ і підпорядкований p, тобто*

$$\forall x \in L_0 \quad |f_0(x)| \le p(x).$$

Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням умови підпорядкування, тобто $\forall x \in L \quad |f(x)| \le p(x)$.

Доведення. Позначимо через L_R і $L_{0,R}$ простори L і L_0, які ми розглядаємо як лінійні простори над полем дійсних чисел. Розглянемо на підпросторі $L_{0,R}$ дійсного лінійного простору L_R дійснозначний функціонал

$$g_0(x) := \operatorname{Re} f_0(x), \qquad x \in L_{0,R}.$$

Очевидно, що він є лінійний. Крім того,

$$g_0(x) \le |\operatorname{Re} f_0(x)| \le |f_0(x)| \le p(x), \qquad x \in L_{0,R}.$$

Зрозуміло, що півнорма є також калібровочним функціоналом на L_R. Тому згідно з дійсним варіантом теореми Гана-Банаха g_0 можна продовжити до деякого лінійного функціоналу g, який заданий на всьому L_R і

$$g(x) \le p(x), \qquad x \in L_R.$$

Використаємо дійснозначний функціонал g для побудови потрібного нам комплекснозначного функціоналу f. Покладемо за означенням

$$f(x) = g(x) - ig(ix), \qquad x \in L.$$

Неважко бачити, що для довільних $x, y \in L$

$$f(x+y) = g(x+y) - ig(ix+iy) = g(x) - ig(ix) + g(y) - ig(iy) = f(x) + f(y)$$

і для довільних $\alpha \in \mathbb{R}$ і $x \in L$

$$f(\alpha x) = g(\alpha x) - ig(i\alpha x) = \alpha(g(x) - ig(ix)) = \alpha f(x).$$

Крім того,

$$f(ix) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x), \qquad x \in L.$$

Тому для довільного $\lambda = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ і довільного $x \in L$ маємо

$$f(\lambda x) = f(ux) + f(ivx) = uf(x) + ivf(x) = \lambda f(x).$$

Отже функціонал f є лінійним функціоналом.

Покажемо, що f є продовженням f_0. Дійсно, нехай $x \in L_0$. Тоді з означення функціоналів f і g_0 випливає, що

$$\operatorname{Re} f(x) = g(x) = g_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x).$$

Крім того,

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix) = -g(ix) = -g_0(ix) =$$
$$= -\operatorname{Re} f_0(ix) = -\operatorname{Re} i f_0(x) = \operatorname{Im} f_0(x).$$

Тому $f(x) = f_0(x)$.

Залишається переконатися, що

$$|f(x)| \le p(x), \qquad x \in L.$$

Зафіксуємо довільне $x \in L$. Тоді

$$f(x) = re^{i\varphi},$$

де $r = |f(x)|$ і $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тому

$$|f(x)| = r = f(e^{-i\varphi}x) = g(e^{-i\varphi}x) \le p(e^{-i\varphi}x) = |e^{-i\varphi}|p(x) = p(x),$$

тобто

$$|f(x)| \le p(x).$$

Теорема доведена. $\square$

Наостаток доведемо теорему Гана-Банаха в топологічній формі.

Теорема 29.11. *Нехай L - комплексний нормований простір і f_0 - лінійний обмежений функціонал на підпросторі $L_0 \subset L$. Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням його норми.*

Доведення. Нехай $\|f_0\|$ норма функціонала f_0. Очевидно, що можна вважати, що $\|f_0\| \ne 0$. (Якщо $\|f_0\| = 0$, то $f_0 = 0$ і за f можна взяти нульовий функціонал.) Покладемо

$$p(x) = \|f_0\| \|x\|_L, \qquad x \in L.$$

Легко бачити, що p є нормою, а, отже, і півнормою. Крім того,

$$|f_0(x)| \le \|f_0\| \|x\|_L = p(x), \qquad x \in L_0.$$

Згідно з комплексним варіантом теореми Гана-Банаха існує продовження f_0 до лінійного функціонала f на весь L зі збереженням умови підпорядкування:

$$|f(x)| \le p(x) = \|f_0\| \|x\|_L, \qquad x \in L_0.$$

З якої випливає, що

$$\|f\| \le \|f_0\|.$$

Але,

$$\|f_0\| = \sup_{x\in L_0,\, \|x\|_L=1} |f_0(x)| = \sup_{x\in L_0,\, \|x\|_L=1} |f(x)| \le \sup_{x\in L,\, \|x\|_L=1} |f(x)| = \|f\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. Теорема доведена $\square$

З топологічної форми теореми Гана-Банаха випливає

Наслідок 29.12. *Нехай X - нормований простір і $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$. Тоді існує $f \in X'$ такий, що $f(x_0) = 1$ і $\|f\| = 1$.*

Довести самостійно.

30. Практичне заняття: Знаходження норм функціоналів.

Нагадаємо, що для знаходження норми оператора є декілька формул. А власне, якщо X, Y - нормовані простори і $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, то

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \min\{C \ge 0 \mid \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \le C\|x\|_X\},\\
\|A\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y,\\
\|A\| &= \sup_{\|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y,\\
\|A\| &= \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.
\end{aligned} \tag{30.1}$$

Зауваження 30.1. *Відзначимо два прості, але корисні спостереження.*

1)Якщо з допомогою обчислень ми отримали, що для деякого додатного числа $\alpha > 0$ виконується оцінка

$$\|Ax\|_Y \le \alpha\|x\|_X, \qquad x \in X,$$

то $\|A\| \le \alpha$.

2) Якщо з допомогою обчислень ми отримали, що для ненульового $x_0 \in X$ $\|Ax_0\|_Y = \beta$, то $\|A\| \ge \beta/\|x_0\|_X$. Зокрема, якщо $\|x_0\|_X = 1$, то $\|A\| \ge \beta$.

Використовуючи 1), ми можемо оцінити норму $\|A\|$ зверху. А використовуючи 2), ми можемо оцінити норму $\|A\|$ знизу. Якщо станеться так, що оцінка зверху і оцінка знизу будуть однаковими, то їхнє значення буде давати норму $\|A\|$.

Таким чином задача на знаходження норми оператора $\|A\|$ зводиться до отримання достатньо добрих оцінок зверху і знизу для норми $\|A\|$.

Задачі на знаходження норми оператора можуть бути досить складними, однак, ми будемо розглядати нескладні задачі, які при набутті відповідного досвіду розв'язуються доволі просто.

Потрібно мати на увазі, що для того, щоб знайти норму оператора A потрібно знати (пам'ятати), означення норм у просторах X і Y.

Ми почнемо з задач на знаходження норм лінійних функціоналів.

Нагадаємо, що лінійним функціоналом називається оператор, що діє з лінійного L в $\mathbb{C}$.

Наприклад, формула

$$l(f) := \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f \in C[0,1], \tag{30.2}$$

задає лінійний функціонал на просторі $C[0,1]$. Дійсно, функція l приймає числові (комплексні) значення і

$$l(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = l(f) + l(g),$$

$$l(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda l(f).$$

Натомість формула

$$l(f) := \int_0^1 f^2(x)\,dx, \qquad f \in C[0,1],$$

не задає лінійного функціонала, бо, як легко бачити,

$$l(\lambda f) = \int_0^1 (\lambda f)^2(x)\,dx = \lambda^2 \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda^2 l(f).$$

Функціонал l не є лінійним, бо для нього не виконується властивість, що називається однорідністю.

Зауважимо, що формули для норми функціонала (див. (40.1)) приймають вигляд

$$
(30.3) \qquad \begin{aligned}
\|l\| &= \min\{C \geq 0 \mid \forall x \in X \quad |l(x)| \leq C\|x\|_X\},\\
\|l\| &= \sup_{\|x\|_X = 1} |l(x)|,\\
\|l\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} |l(x)|,\\
\|l\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_X}.
\end{aligned}
$$

Задача 30.2. *Знайти норму функціонала, що заданий формулою* (40.11).

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| = \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \max |f| = \|f\|, \qquad f \in C[0,1].$$

Отже, $\|l\| \leq 1$.

2) Нехай $f_0(x) \equiv 1$. Тоді $f_0 \in C[0,1]$, причому $\|f_0\| = 1$ і $l(f_0) = 1$. Отже, $\|l\| \geq |l(f_0)| = 1$.

Таким чином $\|l\| = 1$.

Задача 30.3. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[-1,1]$ *формулою*

$$l(f) = f(0) + f(1) + f(-1), \qquad f \in C[-1,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \leq |f(0)| + |f(1) + |f(-1)| \leq 3 \max |f| = 3\|f\|, \qquad f \in C[-1,1].$$

Отже, $\|l\| \leq 3$.

2) Нехай функція f_0 така, що $\|f_0\| = 1$, причому $f_0(1) = 1$, $f_0(-1) = 1$ і $f_0(1) = 1$. Така функція існує. Наприклад, можна взяти функцію

$$f_0(x) \equiv 1, \qquad x \in [-1,1].$$

Для неї $\|f_0\| = 1$ і $l(f_0) = 3$, а, отже, $\|l\| \geq |l(f_0| = 3$.

Таким чином $\|l\| = 3$.

Задача 30.4. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[0,1]$ *формулою*

$$l(f) = f(0) - f(1), \qquad f \in C[0,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le |f(0)| + |f(1)| \le 2 \max |f| = 2\|f\|, \qquad f \in C[0,1].$$

Отже, $\|l\| \le 2$.

2) Нехай функція f_0 така, що $\|f_0\| = 1$, причому $f_0(0) = 1$ і $f_0(1) = -1$. Така функція існує. Наприклад, можна взяти функцію

$$f_0(x) = \cos \pi x, \qquad x \in [0,1],$$

або функцію

$$f_0(x) = 1 - 2x, \qquad x \in [0,1],$$

Тоді $\|f_0\| = 1$ і $l(f_0) = 2$, а, отже, $\|l\| \ge |l(f_0| = 2$.

Таким чином $\|l\| = 2$.

Ускладнимо попередню задачу.

Задача 30.5. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[0,1]$ *формулою*

$$l(f) = f(0) - f(1) + \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f \in C[0,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху. Враховуючи попередні задачі, маємо

$$|l(f)| \le |f(0)| + |f(1)| + \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le 3 \max |f| = 3\|f\|, \qquad f \in C[0,1].$$

Отже, $\|l\| \le 3$.

2) Підібрати функцію $f_0 \in C[0,1]$, для якої $\|f_0\| = 1$ і $l(f_0) = 3$ не можна, бо такої функції не існує. Але, ми можемо підібрати функцію $f_0 \in C[0,1]$, для якої число $l(f_0)$ є близьким до числа 3. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ покладемо за означенням

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0, 1 - 1/n]; \\ 2n(1 - x - 1/2n), & \text{якщо } x \in (1 - 1/n, 1]. \end{cases}$$

Функція f_n є неперервна і кусково лінійна. Її графіком є ламана, що послідовно проходить через точки $(0,1)$, $(1 - 1/n, 1)$ і $(1, -1)$. Легко бачити, що

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - 1/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді $l(f_n) = 3 - 1/n$. Зауважимо також, що $\|f_n\| = 1$. Тому

$$\|l\| \ge |l(f_n)| = 3 - 1/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи в нерівності $\|l\| \ge 3 - 1/n$ до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\|l\| \ge 3.$$

Отже, $\|l\| = 3$.

Задача 30.6. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[0,2\pi]$ *формулою*

$$l(f) = \int_0^{\pi} (\sin x) f(x)\, dx, \qquad f \in C[0,\pi].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le \left| \int_0^{\pi} (\sin x) f(x)\, dx \right| \le \int_0^{\pi} |\sin x||f(x)|\, dx, \qquad f \in C[0,\pi].$$

Оскільки

$$|\sin x||f(x)| \le \|f\|\, |\sin x|, \qquad x \in [0,\pi],$$

то

$$|l(f)| \le \|f\| \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx = \|f\| \int_0^{\pi} \sin x = 2\|f\|.$$

Отже, $\|l\| \le 2$.

2) Для функції

$$f_0(x) \equiv 1, \qquad x \in [0,\pi],$$

ми маємо, що $\|f_0\| = 1$ і

$$l(f_0) = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2.$$

Отже,

$$\|l\| \ge 2.$$

Тому $\|l\| = 2$.

Задача 30.7. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[0,2\pi]$ *формулою*

$$l(f) = \int_0^{2\pi} (\sin x) f(x)\, dx, \qquad f \in C[0,2\pi].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le \left| \int_0^{2\pi} (\sin x) f(x)\, dx \right| \le \int_0^{2\pi} |\sin x||f(x)|\, dx, \qquad f \in C[0,2\pi].$$

Оскільки

$$|\sin x||f(x)| \le \|f\|\, |\sin x|, \qquad x \in [0,2\pi],$$

то

$$|l(f)| \le \|f\| \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = 2\|f\| \int_0^{\pi} \sin x = 4\|f\|.$$

Отже, $\|l\| \le 4$.

2) Для довільного $n \in \mathbb{N}$ покладемо за означенням

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0, \pi - 1/n]; \\ -1, & \text{якщо } x \in [\pi + 1/n, 2\pi]; \\ n(\pi - x), & \text{якщо } x \in (\pi - 1/n, \pi + 1/n). \end{cases}$$

Функція f_n є неперервна і кусково лінійна. Її графіком є ламана, що послідовно проходить через точки $(0, 1)$, $(\pi - 1/n, 1)$, $(\pi + 1/n, -1)$ і $(2\pi, -1)$. Легко бачити, що

$$|\sin x| - f_n(x)\sin x = 0, \qquad x \in [0, \pi - 1/n,] \cup [\pi + 1/n, 2\pi],$$

і

$$|\sin x| - f_n(x)\sin x = |\sin x| - |f_n(x)||\sin x| \le |\sin x| \le 1, \qquad x \in (\pi - 1/n, \pi + 1/n).$$

Тому

$$\int_0^{2\pi} (|\sin x| - f_n(x)\sin x)\, dx \le \int_{\pi-1/n}^{\pi+1/n} dx = 2/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$4 - l(f_n) \le 2/n,$$

тобто $l(f_n) \ge 4 - 2/n$. Зауважимо також, що $\|f_n\| = 1$. Тому

$$\|l\| \ge |l(f_n)| \ge 4 - 2/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі в нерівності, маємо

$$\|l\| \ge 4.$$

Отже, $\|l\| = 4$.

Задача 30.8. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі $C[0, 2\pi]$ формулою*

$$l(f) = \int_0^{2\pi} (\cos x) f(x)\, dx, \qquad f \in C[0, 2\pi].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le \left| \int_0^{2\pi} (\cos x) f(x)\, dx \right| \le \int_0^{2\pi} |\cos x||f(x)|\, dx, \qquad f \in C[0, 2\pi].$$

Оскільки

$$|\cos x||f(x)| \le \|f\|\, |\cos x|, \qquad x \in [0, 2\pi],$$

то

$$|l(f)| \le \|f\| \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx = 4\|f\| \int_0^{\pi/2} \cos x = 4\|f\|.$$

Отже, $\|l\| \le 4$.

2) Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через f_n функцію, яка неперервна і кусково лінійна з графіком, що послідовно проходить через точки $(0,1)$, $(\pi/2-1/n, 1)$, $(\pi/2+1/n, -1)$, $(3\pi/2-1/n, -1)$, $(3\pi/2+1/n, 1)$, і $(2\pi, 1)$. Легко бачити, що

$$|\cos x| - f_n(x)\cos x = 0, \qquad x \in [0, \pi/2-1/n,] \cup [\pi/2+1/n, 3\pi/2-1/n] \cup [3\pi/2+1/n, 2\pi],$$

і

$$|\sin x| - f_n(x)\sin x \le |\sin x| \le 1, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Тому

$$\int_0^{2\pi} (|\sin x| - f_n(x)\sin x)\, dx \le \int_{\pi/2-1/n}^{\pi/+1/n} dx + \int_{3\pi/2-1/n}^{3\pi/2+1/n} dx = 4/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$4 - l(f_n) \le 4/n,$$

тобто $l(f_n) \ge 4 - 4/n$. Оскільки $\|f_n\| = 1$, то

$$\|l\| \ge |l(f_n)| \ge 4 - 4/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі в нерівності, маємо

$$\|l\| \ge 4.$$

Отже, $\|l\| = 4$.

Задача 30.9. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі $C[-1,1]$ формулою*

$$l(f) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx, \qquad f \in C[-1,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le \left| \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx \right| \le \int_{-1}^{1} x^2 |f(x)|\, dx, \qquad f \in C[-1,1].$$

Оскільки

$$x^2 |f(x)| \le \|f\|\, x^2,$$

то

$$|l(f)| \le \|f\| \int_{-1}^{1} x^2\, dx = 2\|f\|/3.$$

Отже, $\|l\| \le 2/3$.

2) Для функції

$$f_0(x) \equiv 1, \qquad x \in [-1,1],$$

ми маємо, що $\|f_0\| = 1$ і

$$l(f_0) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = 2/3.$$

Отже,

$$\|l\| \geq 2/3.$$

Тому $\|l\| = 2/3$.

Задача 30.10. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі $C[-1,1]$ формулою*

$$l(f) = \int_{-1}^{1} x^3 f(x)\, dx, \qquad f \in C[-1,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \leq \left| \int_{-1}^{1} x^3 f(x)\, dx \right| \leq \int_{-1}^{1} |x^3||f(x)|\, dx, \qquad f \in C[-1,1].$$

Оскільки

$$|x^3||f(x)| \leq \|f\|\, |x^3|,$$

то

$$|l(f)| \leq \|f\| \int_{-1}^{1} |x^3|\, dx = 2\|f\| \int_{0}^{1} x^3\, dx = \|f\|/2.$$

Отже, $\|l\| \leq 1/2$.

2) Для довільного $n \in \mathbb{N}$ покладемо за означенням

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [1/n, 1]; \\ -1, & \text{якщо } x \in [-1, -1/n]; \\ nx, & \text{якщо } x \in (-1/n, 1/n). \end{cases}$$

Функція f_n є неперервна і кусково лінійна. Її графіком є ламана, що послідовно проходить через точки $(-1,-1)$, $(-1/n,-1)$, $(1/n,1)$ і $(1,1)$. Легко бачити, що

$$|x^3| - x^3 f_n(x) = 0, \qquad x \in [-1,-1/n] \cup [1/n, 1],$$

і

$$|x^3| - x^3 f_n(x) \leq |x^3| \leq 1, \qquad x \in (-1/n, 1/n).$$

Тому

$$\int_{-1}^{1} (|x^3| - x^3 f_n(x))\, dx \leq \int_{-1/n}^{1/n} dx = 2/n.$$

Отже,

$$\int_{-1}^{1} (|x^3| - x^3 f_n(x))\, dx = 1/2 - l(f_n) \leq 2/n,$$

тобто $l(f_n) \geq 1/2 - 2/n$. Зауважимо також, що $\|f_n\| = 1$. Тому

$$\|l\| \geq |l(f_n)| \geq 1/2 - 2/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі в нерівності, маємо

$$\|l\| \geq 1/2.$$

Отже, $\|l\| = 1/2$.

Задача 30.11. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі $C[-1,1]$ формулою*

$$l(f) = f(0) - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \qquad f \in C[-1,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \leq |f(0)| + \left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| \leq \max|f| + 2\max|f| = 3\max|f| = 3\|f\|, \qquad f \in C[-1,1].$$

Отже, $\|l\| \leq 3$.

2) Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через f_n функцію, яка неперервна кусково лінійна і її графік послідовно проходить через точки:

$$(-1,-1), \quad (-1/n,-1), \quad (0,1), \quad (1/n,-1), \quad (1,-1).$$

Легко бачити, що

$$\int_{-1}^{1} f_n(x))\,dx = -2 + 2/n.$$

Отже,

$$l(f_n) = 3 - 2/n.$$

Зауважимо також, що $\|f_n\| = 1$. Тому

$$\|l\| \geq |l(f_n)| \geq 3 - 2/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі в нерівності $\|l\| \geq 3 - 2/n$, маємо

$$\|l\| \geq 3.$$

Отже, $\|l\| = 3$.

Задача 30.12. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі ℓ_1 формулою*

$$F(x) = 4x_1 + 3x_2, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|F(x)| \leq 4|x_1| + 3|x_2| \leq 4 \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 4\|x\|, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1.$$

Отже, $\|F\| \leq 4$.

2) Розглянемо послідовність $y = (1, 0, \ldots, 0...)$. Вона належить простору ℓ_1 і $\|y\| = 1$. Крім того, $F(y) = 4$. Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| = 4,$$

тобто $\|F\| \geq 4$.

Отже, $\|F\| = 4$.

Задача 30.13. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* ℓ_1 *формулою*

$$F(x) = 2x_1 - x_2, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|F(x)| \leq 2|x_1| + |x_2| \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 2\|x\|, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1.$$

Отже, $\|F\| \leq 2$.

2) Розглянемо послідовність $y = (1, 0, \ldots, 0...)$. Вона належить простору ℓ_1 і $\|y\| = 1$. Крім того, $F(y) = 2$. Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| = 2,$$

тобто $\|F\| \geq 2$.

Отже, $\|F\| = 2$.

Задача 30.14. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* ℓ_1 *формулою*

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x_n, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|F(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1.$$

Отже, $\|F\| \leq 1$.

2) Розглянемо послідовність $y = (1, 0, \dots, 0 \dots)$. Вона належить простору ℓ_1 і $\|y\| = 1$. Крім того, $F(y) = -1$. Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| = 1,$$

тобто $\|F\| \geq 1$.

Отже, $\|F\| = 1$.

Задача 30.15. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі ℓ_∞ формулою*

$$F(x) = 2x_1 - x_2, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|F(x)| \leq 2|x_1| + |x_2| \leq 3 \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 3\|x\|, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

Отже, $\|F\| \leq 3$.

2) Розглянемо послідовність $y = (1, -1, 0, \dots, 0 \dots)$. Вона належить простору ℓ_∞ і $\|y\| = 1$. Крім того, $F(y) = 3$. Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| = 3,$$

тобто $\|F\| \geq 3$.

Отже, $\|F\| = 3$.

Задача 30.16. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі ℓ_∞ формулою*

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2)^{-n} x_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|F(x)| = \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2)^{-n} x_n \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |(-2)^{-n} x_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |x_n| \leq$$
$$\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \right) \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = \|x\|.$$

Отже, $\|F\| \leq 1$.

2) Розглянемо послідовність $y = (-1, 1, -1, 1 \dots)$. Вона належить простору ℓ_∞ і $\|y\| = 1$. Крім того,

$$F(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1.$$

Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| = 1,$$

тобто $\|F\| \geq 1$.

Отже, $\|F\| = 1$.

Задача 30.17. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* ℓ_2 *формулою*

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{-n} x_n, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху. Використаємо нерівність Буняковського.

$$|F(x)| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{-n} x_n \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{-2n} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{-2n} \right)^{1/2} \|x\|$$

Отже,

$$\|F\| \leq \alpha := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} 3^{-2n} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{9} \frac{1}{1 - 1/9} \right)^{1/2} = 8^{-1/2}$$

2) Розглянемо послідовність $y = (3^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Вона належить простору ℓ_2 і $\|y\| = \alpha$. Крім того,

$$F(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (3^{-n})^2 = \alpha^2.$$

Тому

$$\|F\| \geq |F(y)| / \|y\| = \alpha^2 / \alpha = \alpha,$$

тобто $\|F\| \geq \alpha$.

Отже, $\|F\| = \alpha = 8^{-1/2}$.

Задача 30.18. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* ℓ_2 *формулою*

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{\sqrt{(n-1)!}}, \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху. Використаємо нерівність Буняковського.

$$|F(x)| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{\sqrt{(n-1)!}} \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n-1)!} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{e} \|x\|$$

Отже,

$$\|F\| \leq \sqrt{e}.$$

2) Розглянемо послідовність $y = (1/\sqrt{(n-1)!})_{n\in\mathbb{N}}$. Вона належить простору ℓ_2 і

$$\|y\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

Крім того,

$$F(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

Тому

$$\|F\| \geq |F(y)|/\|y\| = e/\sqrt{e},$$

тобто $\|F\| \geq \sqrt{e}$.

Отже, $\|F\| = \sqrt{e}$.

Задача 30.19. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[-1,1]$ *формулою*

$$l(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{k=n} f(k/n).$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху. Враховуючи попередні задачі, маємо

$$|l(f)| \leq 2\|f\| + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{k=n} |f(k/n)| \leq 3\|f\|, \qquad f \in C[-1,1].$$

Отже, $\|l\| \leq 3$.

2) З оцінкою знизу складніше. Ідея така. Візьмемо функцію f_ε, яка:

a) $|f_\varepsilon| \leq 1$ для всіх $x \in [-1,1]$;

b) $f_\varepsilon(k/n) = -1$ для всіх $k = -n, \ldots, n$;

c) $f_\varepsilon \equiv 1$ поза ε-околами точок k/n.

Намалюйте ескіз графіка неперервної кусково лінійної функції з такими властивостями.

Тоді

$$\int_{-1}^{1} f_\varepsilon(x)\,dx \geq 2 - 2(2n+1)\varepsilon,$$

а, отже,

$$l(f_\varepsilon) \geq 3 - 2(2n+1)\varepsilon \to 3, \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Оскільки $\|f_\varepsilon\| = 1$, то $\|l\| \geq 3$, а, отже, $\|l\| = 3$.

Задача 30.20. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі* $C[0,1]$ *формулою*

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} f(t^n)\,dt, \qquad f \in C[0,1].$$

Розв'язок. Границю в означенні функціонала можна знайти. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} t^n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0,1); \\ 1, & \text{якщо } t = 1. \end{cases}$$

Тому природно виникає думка, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0), \qquad f \in C[0,1]. \tag{30.4}$$

Якщо так, то, очевидно,

$$\|l\| = 1.$$

Доведемо (30.4). Зафіксуємо довільне $f \in C[0,1]$ і довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо число $\delta \in (0,1)$ таким, що

$$(1-\delta)\|f\| < \varepsilon/4.$$

Оскільки послідовність функцій $\varphi_n(t) := t^n$ на проміжку $[0,\delta]$ рівномірно збігається до нуля, то послідовність функцій $f_n(t) := f(t^n)$ на проміжку $[0,\delta]$ рівномірно збігається до функції $g(t) \equiv f(0)$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta f(t^n)\,dt = \delta f(0). \tag{30.5}$$

Тоді існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$

$$\left| \int_0^\delta f(t^n)\,dt - \delta f(0) \right| \le \varepsilon/2.$$

Звідки випливає, що для всіх $n > n_0$

$$\left| \int_0^1 f(t^n)\,dt - f(0) \right| \le \left| \int_0^\delta f(t^n)\,dt - \delta f(0) \right| + \left| \int_\delta^1 f(t^n)\,dt \right| + (1-\delta)|f(0)| \le$$
$$\le \varepsilon/2 + (1-\delta)\|f\| + (1-\delta)\|f\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,$$

тобто

$$\left| \int_0^1 f(t^n)\,dt - f(0) \right| < \varepsilon, \qquad n > n_0.$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0).$$

Задача 30.21. *Знайти норму функціонала, що заданий на просторі $C[0,1]$ формулою*

$$l(f) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} f(2^{-n}), \qquad f \in C[0,1].$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|l(f)| \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|f(2^{-n})| \le \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2\|f\|.$$

Отже, $\|l\| \le 2$.

2) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t) \equiv 1$. Тоді $\|f_0\| = 1$ і

$$|l(f_0)\| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

Отже,

$$\|l\| \ge 2.$$

Таким чином, $\|l\| = 2$.

Домашнє завдання. З задачника: Задачі з теорії міри та функціонального аналізу

зробити задачі з розділу 28:

28.8 -28.20.

31. Практичне заняття: Знаходження норм операторів.

Дане заняття ми присвятимо знаходженню норм різних операторів. Задачі, які ми розглянемо є доволі простими. Їх розв'язання йде по тій же схемі, яку ми вже відпрацювали при знаходженні норм функціоналів. Перший крок - оцінка зверху, другий крок - оцінка знизу.

Задачі, які ми розглянемо нижче взяті, в основному з нашого задачника (Олег Сторож, Задачі з теорії міри та функціонального аналізу).

Задача 31.1. *Довести, що оператор $A : C[0,1] \mapsto C[0,1]$, який діє за формулою*

$$(Af)(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Розв'язок. 1) Адитивність.

$$(A(f+g))(x)=\int_0^1 e^{x-t}(f(t)+g(t))\,dt=\int_0^1 e^{x-t}f(t)\,dt+\int_0^1 e^{x-t}g(t)\,dt,$$

тобто

$$A(f+g)=Af+Ag.$$

2) Однорідність.

$$(A(\lambda f))(x)=\int_0^1 e^{x-t}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_0^1 e^{x-t}f(t)\,dt,$$

тобто

$$A(\lambda f)=\lambda Af.$$

3) Неперервність і оцінка зверху для норми.

$$\|Af\|=\max_{0\le x\le 1}\left|\int_0^1 e^{x-t}f(t)\,dt\right|=\max_{0\le x\le 1}e^x\left|\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt\right|=e\left|\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt\right|.$$

Оскільки

$$|e^{-t}f(t)|\le e^{-t}|f(t)|\le e^{-t}\max|f|=e^{-t}\|f\|,$$

то

$$\|Af\|=e\left|\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt\right|\le e\|f\|\int_0^1 e^{-t}\,dt=e(1-e^{-1})\|f\|,\qquad f\in C[0,1].$$

Отже, оператор A обмежений (неперервний). Крім того,

$$\|A\|\le e-1.$$

4) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t)\equiv 1$. Тоді $\|f_0\|=1$ і

$$(Af_0)(x)=\int_0^1 e^{x-t}\,dt=e^x\int_0^1 e^{-t}\,dt=(1-e^{-1})e^x.$$

Тому

$$\|Af_0\|=\max_{0\le x\le 1}|(Af_0)(x)|=\max_{0\le x\le 1}(1-e^{-1})e^x=e-1.$$

Отже,

$$\|A\|\ge\|Af_0\|=e-1.$$

Таким чином, $\|A\|=e-1$.

Задача 31.2. *Довести, що оператор* $A : C[0,\pi] \mapsto C[0,\pi]$, *який діє за формулою*
$$(Af)(x) = \int\limits_0^\pi \cos x \sin t\, f(t)\, dt, \qquad x \in [0,\pi],$$
є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Розв'язок. Лінійність перевіряємо аналогічно як в попередній задачі.
Знайдемо норму.
1) Оцінка зверху.
$$\|Af\| = \max_{0\le x\le\pi} |\cos x| \left|\int\limits_0^\pi \sin t\, f(t)\, dt\right| = \left|\int\limits_0^\pi \sin t\, f(t)\, dt\right|.$$
Оскільки
$$|\sin t\, f(t)| \le |\sin t||f(t)| \le |\sin t| \max|f| = |\sin t|\|f\|,$$
то
$$\|Af\| \le \|f\| \int\limits_0^\pi |\sin t|\, dt = \|f\| \int\limits_0^\pi \sin t\, dt = 2\|f\|, \qquad f \in C[0,\pi].$$
Отже,
$$\|A\| \le 2.$$
2) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t) \equiv 1$. Тоді $\|f_0\| = 1$ і
$$(Af_0)(x) = \cos x \int\limits_0^\pi \sin t\, dt = 2\cos x.$$
Тому
$$\|Af_0\| = \max_{0\le x\le\pi} |2\cos x| = 2.$$
Отже,
$$\|A\| \ge \|Af_0\| = 2.$$
Таким чином, $\|A\| = 2$.

Задача 31.3. *Довести, що оператор* $A : C[0,\pi] \mapsto C[0,\pi]$, *який діє за формулою*
$$(Af)(x) = \int\limits_0^\pi \sin(x-t)\, f(t)\, dt, \qquad x \in [0,\pi],$$

є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Розв'язок. Знайдемо норму.

1) Оцінка зверху.

$$\|Af\| = \max_{0 \le x \le \pi} \left| \int_0^\pi \sin(x-t)\, f(t)\, dt \right|.$$

Оскільки

$$|\sin(x-t)\, f(t)| \le |\sin(x-t)||f(t)| \le |\sin(x-t)|\|f\|$$

і

$$\left| \int_0^\pi \sin(x-t)\, f(t)\, dt \right| \le \int_0^\pi |\sin(x-t)|\, dt = \int_x^{\pi+x} |\sin t|\, dt = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2.$$

то

$$\|Af\| \le \max_{0 \le x \le \pi} \|f\| \int_0^\pi |\sin(x-t)|\, dt = 2\|f\|, \qquad f \in C[0,\pi].$$

Отже,

$$\|A\| \le 2.$$

2) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t) \equiv 1$. Тоді $\|f_0\| = 1$ і

$$(Af_0)(x) = \int_0^\pi \sin(x-t)\, dt.$$

Тому

$$\|Af_0\| \ge |(Af_0)(\pi)| = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2.$$

Отже,

$$\|A\| \ge 2.$$

Таким чином, $\|A\| = 2$.

Задача 31.4. *Довести, що оператор $A : C[0,1] \mapsto C[0,1]$, який діє за формулою*

$$(Af)(x) = \int_0^x tf(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Розв'язок. Знайдемо норму.

1) Оцінка зверху.

$$|Af(x)| = \left|\int\limits_0^x tf(t)\,dt\right| \le \int\limits_0^x t|f(t)|\,dt \le \|f\| \int\limits_0^x t\,dt = \|f\|x^2/2.$$

Тому

$$\|Af\| \le \max_{0\le x\le 1} \|f\|x^2/2 = \tfrac{\|f\|}{2},$$

а, отже, $\|A\| \le 1/2$.

2) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t) \equiv 1$. Тоді $\|f_0\| = 1$ і

$$(Af_0)(x) = \int\limits_0^x t\,dt = x^2/2.$$

Тому

$$\|Af_0\| = 1/2.$$

Отже,

$$\|A\| \ge 1/2.$$

Таким чином, $\|A\| = 1/2$.

Задача 31.5. *Довести, що оператор* $A : C[0,1] \mapsto C[0,1]$, *який діє за формулою*

$$(Af)(x) = 2f(x^2), \qquad x \in [0,1],$$

є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Розв'язок. Знайдемо норму.

1) Оцінка зверху.

$$\|Af\| = \max_{0\le x\le 1} |2f(x^2)| = 2\max_{0\le x\le 1} |f(x^2)| = 2\|f\|$$

Отже, $\|A\| \le 2$.

2) Оцінка знизу. Нехай $f_0(t) \equiv 1$. Тоді $\|f_0\| = 1$ і

$$(Af_0)(x) \equiv 2.$$

Тому
$$\|Af_0\| = 2.$$
Отже,
$$\|A\| \geq 2.$$
Таким чином, $\|A\| = 2$.

Задача 31.6. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_1 формулою*
$$Ax = (0, x_1, x_2, \dots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок.
$$\|Ax\| = 0 + |x_1| + |x_2| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|.$$
Отже,
$$\|Ax\| = \|x\|, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1.$$
Оператор A є ізометричним, $\|A\| = 1$.

Задача 31.7. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_1 формулою*
$$Ax = (x_2, x_3, \dots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.
$$\|Ax\| = |x_2| + |x_3| + \dots \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|,$$
тобто
$$\|Ax\| \leq \|x\|, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1.$$
Отже, $\|A\| \leq 1$.

2) Оцінка знизу. Розглянемо послідовність
$$y = (0, 1, 0, 0, \dots).$$
Очевидно, що $\|y\| = 1$ і
$$\|Ay\| = \|(1, 0, 0, \dots)\| = 1.$$
Отже, $\|A\| \geq 1$. Таким чином, $\|A\| = 1$.

Задача 31.8. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_1 формулою*

$$(Ax)_n = x_n - 2x_{n+1}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$\|Ax\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - 2x_{n+1}| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}| \le 3\|x\|.$$

Отже, $\|A\| \le 3$.

2) Оцінка знизу. Розглянемо послідовність

$$y = (0, 1, 0, \dots).$$

Тоді $\|y\| = 1$ і

$$Ay = (-2, 1, 0, \dots).$$

Оскільки $\|Ay\| = 3$, то $\|A\| \ge 3$. Таким чином, $\|A\| = 3$.

Задача 31.9. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_1 формулою*

$$(Ax)_n = x_n - x_{n+1} + 2x_{n+2}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$\|Ax\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1} + 2x_{n+2}| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}| + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+2}| \le 4\|x\|.$$

Отже, $\|A\| \le 4$.

2) Оцінка знизу. Розглянемо послідовність

$$y = (0, 0, 1, 0 \dots).$$

Тоді $\|y\| = 1$ і

$$Ay = (2, -1, 1, 0, 0, \dots).$$

Оскільки $\|Ay\| = 2 + 1 + 1 = 4$, то $\|A\| \ge 4$. Таким чином, $\|A\| = 4$.

Задача 31.10. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_∞ формулою*

$$(Ax)_n = x_n - x_{n+1} + 3x_{n+2}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$|(Ax)_n| = |x_n - x_{n+1} + 3x_{n+2}| \leq |x_n| + |x_{n+1}| + 3|x_{n+2}| \leq 5 \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 5\|x\|.$$

Отже, $\|A\| \leq 5$.

2) Оцінка знизу. Розглянемо послідовність

$$y = (1, -1, 1, 0, 0, \dots).$$

Тоді $\|y\| = 1$ і

$$Ay = (5, -2, 1, 0, 0, \dots).$$

Оскільки $\|Ay\| = 5$, то $\|A\| \geq 5$. Таким чином, $\|A\| = 5$.

Задача 31.11. *Знайти норму оператора, що заданий на просторі ℓ_2 формулою*

$$(Ax)_n = \frac{1}{n} x_{n+1}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Розв'язок. 1) Оцінка зверху.

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n} x_{n+1}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^2 \leq \|x\|^2$$

Отже, $\|Ax\| \leq \|x\|$, тобто $\|A\| \leq 1$.

2) Оцінка знизу. Розглянемо послідовність

$$y = (0, 1, 0, 0, \dots).$$

Тоді $\|y\| = 1$ і

$$Ay = (1, 0, 0, \dots).$$

Оскільки $\|Ay\| = 1$, то $\|A\| \geq 1$. Таким чином, $\|A\| = 1$.

Домашнє завдання. З задачника (Задачі з теорії міри та функціонального аналізу) зробити наступні задачі з розділу 29:

29.16,
29.20,
29.28,
29.47,
29.48.

32. Гільбертові простори.

Сьогодні ми починаємо вивчати простори зі скалярним добутком.

Означення 32.1. *Нехай X - лінійний простір над полем комплекних чисел. Скалярним добутком у просторі X називається функція*

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto (x \mid y) \in \mathbb{C},$$

яка володіє наступними властивостями:

(1) $\forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$ *(лінійність за першим аргументом);*
(2) $\forall x, y \in X \quad (y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$ *(ермітова симетричність);*
(3) $\forall x \in X \setminus \{0\} \quad (x \mid x) > 0$ *(додатна визначенність).*

Зауважимо, що з властивостей (1) і (2) випливає, що

$$\forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (z \mid \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}(z \mid x) + \bar{\beta}(z \mid y).$$

Ця властивість називається півлінійність за другим аргументом.

Тому можна дати також наступне (еквівалентне) і більш лаконічне означення скалярного добутку.

Означення 32.2. *Нехай X - лінійний простір над полем комплексних чисел. Скалярним добутком на просторі X називається півторалінійна ермітово симетрична додатно визначена форма на X.*

Лінійний простір з заданим на ньому скалярним добутком називається простором зі скалярним добутком.

Означення 32.3. *Нехай X - лінійний простір над полем комплекних чисел. Псевдоскалярним добутком у просторі X називається півторалінійна ермітово симетрична форма $(\cdot \mid \cdot)$ на X, для якої виконується умова*

$$\forall x \in X \quad (x \mid x) \geq 0.$$

Кожний скалярний добуток є псевдоскалярним, але не кожен псевдоскалярний добуток є скалярним добутком.

Теорема 32.4. *Нехай $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ - псевдоскалярний добуток в лінійному просторі X. Тоді для нього справедлива нерівність Буняковського:*

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 \leq \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle, \qquad x, y \in X. \tag{32.1}$$

Доведення. Нехай $x, y \in X$. Припустимо, що $\langle x \mid y \rangle \geq 0$. Розглянемо функцію

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto p(t) := \langle x + ty \mid x + ty \rangle.$$

З властивостей псевдоскалярного добутку випливає, що вона є невід'ємна і

$$p(t) = at^2 + 2bt + c, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де

$$a = \langle y \mid y \rangle, \quad b = \langle x \mid y \rangle, \quad c = \langle x \mid x \rangle,$$

причому $a \geq 0$ і $b \geq 0$.

Якщо $a = 0$, то $b = 0$ (бо інакше функція p буде знакозмінною). Тому у випадку $a = 0$ нерівність (40.1) виконується. Якщо $a > 0$, то з невід'ємності квадратного тричлена випливає, що

$$4b^2 - 4ac \leq 0,$$

тобто $b^2 \leq ac$. Отже, нерівність (40.1) виконується у випадку, коли $\langle x \mid y \rangle \geq 0$
.

Розглянемо тепер довільні $x, y \in X$. Тоді

$$\langle x \mid y \rangle = re^{i\varphi},$$

де $r = |\langle x \mid y \rangle|$ і $\varphi \in [0, 2\pi)$. А, отже,

$$|\langle x \mid y \rangle| = r = e^{-i\varphi} \langle x \mid y \rangle = \langle e^{-i\varphi} x \mid y \rangle.$$

Оскільки

$$\langle e^{-i\varphi} x \mid y \rangle \geq 0$$

і

$$\langle e^{-i\varphi} x \mid e^{-i\varphi} x \rangle = \langle x \mid x \rangle,$$

то з вже доведеного випливає, що

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 = \langle e^{-i\varphi} x \mid y \rangle^2 \leq \langle e^{-i\varphi} x \mid e^{-i\varphi} x \rangle \langle y \mid y \rangle = \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle.$$

$\square$

Теорема 32.5. *Нехай* $(\cdot \mid \cdot)$ *- скалярний добуток в лінійному просторі* X. *Тоді формула*

$$\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}, \qquad x \in X, \tag{32.2}$$

задає норму на просторі X.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1) Якщо $x \neq 0$, то $(x \mid x) > 0$, а, отже, $\|x\| > 0$. Якщо $x = 0$, то

$$(x \mid x) = (0 \cdot x \mid x) = 0 \cdot (x \mid x) = 0,$$

а, отже, $\|x\| = 0$. З другого боку, якщо $\|x\| = 0$, то $(x \mid x) = 0$, а, отже, $x = 0$.

2) Для довільних $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x \mid x) = |\lambda|^2\|x\|^2,$$

тобто $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3) Для довільних $x, y \in X$

$$(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Нерівність Буняковського дає, що

$$\mathrm{Re}(x \mid y) \leq |(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

а, отже, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Теорема доведена. $\square$

З доведеної вище теореми випливає, що скалярний добуток у просторі X породжує норму, що задана формулою (40.11). Надалі, ми будемо завжди вважати, що ця норма є природною нормою простору зі скалярним добутком. Таким чином, простір зі скалярним добутком є окремим випадком нормованого простору. Отже, ми можемо говорити про повноту простору зі скалярним добутком.

Означення 32.6. *Повний простір зі скалярним добутком називається гільбертовим простором.*

Зауваження 32.7. *З огляду на формулу* (40.11) *нерівність Буняковського для скалярного добутку можна переписати у більш зручній формі:*

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X. \tag{32.3}$$

Запам'ятаємо також формулу для квадрата норми суми:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x \mid y) + \|y\|^2, \qquad x, y \in X, \tag{32.4}$$

яка є відповідником теореми косинусів.

Геометрія гільбертового простору. За своєю геометрією гільбертів простір є подібний до евклідового простору $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$. Ми вже маємо відповідник теореми косинусів (див. формулу (40.5). Від неї ми легко прийдемо до аналогу теореми Піфагора.

Означення 32.8. *Нехай X простір зі скалярним добутком* $(\cdot \mid \cdot)$*. Вектори $x, y \in X$ називаються ортогональними (скорочений запис $x \perp y$), якщо* $(x \mid y) = 0$ *.*

Теорема Піфагора у просторі зі скалярним добутком. Нехай X - простір зі скалярним добутком. Тоді

$$\forall x, y \in X \qquad x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{32.5}$$

Рівність паралелограма. Нехай X - простір зі скалярним добутком. Тоді

$$\forall x, y \in X \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{32.6}$$

Доведення рівностей (40.6) і (40.8) легко отримується з рівності (40.5).

Вправа 32.9. *Нехай $x_1, \dots, x_n$ набір попарно ортогональних векторів у гільбертовому просторі H. Доведіть, що*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1} \|x_j\|^2.$$

Неперервність скалярного добутку.

Теорема 32.10. *Нехай H - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Тоді скалярний добуток є неперервний за сукупністю змінних. Зокрема, якщо послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі H збігаються до x і y відповідно, то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \mid y_n) = (x \mid y).$$

Доведення. Нехай x, y, x', y' вектори в H, що належать кулі $B := \bar{B}(0, r)$. З властивостей скалярного добутку випливає, що

$$(x \mid y) - (x' \mid y') = (x - x' \mid y) + (x' \mid y - y').$$

Застосовуючи нерівність Буняковського, отримуємо

$$|(x \mid y) - (x' \mid y')| \leq \|x - x'\| \, \|y\| + \|x'\| \, \|y - y'\| \leq r(\|x - x'\| + \|y - y'\|).$$

Таким чином скалярний добуток на $B \times B$ задовольняє умову Ліпшиця, а, отже, є рівномірно неперервним. Зі сказаного і довільності r випливає, що для довільних збіжних послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ маємо рівність

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \mid y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n \mid \lim_{n\to\infty} y_n) = (x \mid y).$$

$\square$

Приклади гільбертових просторів. Гільбертових просторів є багато. Однак, на даний момент ми обмежимося тільки трьома прикладами.

Простір $\mathbb{C}^n$. Лінійний простір $\mathbb{C}^n$ з евклідовою нормою

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n,$$

є гільбертовим простором. Дійсно, евклідова норма породжена скалярним добутком

$$(x \mid y)_{\mathbb{C}^n} := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n. \tag{32.7}$$

Перевірте виконання аксіом скалярного добутку.

Простір ℓ_2. Через ℓ_2 ми позначаємо лінійний простір квадратично сумовних послідовностей:

$$\ell_2 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Норма у просторі ℓ_2 задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Легко бачити, що вона породжена скалярним добутком:

$$(x \mid y)_{\ell_2} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, y = (y_j)_{j=1}^{\infty}. \tag{32.8}$$

Зауважимо, що ряд у формулі (32.8) є абсолютно збіжним. Дійсно, нерівність Буняковського дає, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j\overline{y_j}| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Самостійно перевірте виконання аксіом скалярного добутку.

Простір $\ell_2(\mathbb{Z})$. Через $\ell_2(\mathbb{Z})$ ми позначаємо лінійний простір квадратично сумовних двосторонніх послідовностей:

$$\ell_2(\mathbb{Z}) := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid \forall j \in \mathbb{Z} \quad x_j \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Простір $\ell_2(\mathbb{Z})$ є аналогом простору ℓ_2. Скалярний добуток в ньому задається формулою:

$$(x \mid y)_{\ell_2(\mathbb{Z})} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}, y = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{32.9}$$

Породжена ним норма задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Перевірка аксіом скалярного добутку така ж як і у випадку простору ℓ_2.

Означення 32.11. *Підпростором банахового (гільбертового) простору X ми завжди будемо називати замкнений лінійний підпростір в X.*

Означення 32.12. *Нехай G підмножина гільбертового простору H. Ми скажемо, що вектор $f \in H$ є ортогональний до G ($f \perp G$), якщо*

$$\forall g \in G \quad g \perp f.$$

Множину всіх ортогональних до G векторів ми назвемо ортогональним доповненням до G і позначатимемо її через $G^{\perp}$.

Вправа 32.13. *Доведіть, що для довільної підмножини G гільбертового простору H множина $G^{\perp}$ є підпростором в H.*

Ортогональні суми підпросторів. Алгебраїчною сумою підпросторів G, F лінійного простору X називається множина

$$G + F := \{g + f \mid g \in G, f \in F\}.$$

Два підпростори G, F гільбертового простору H називаються взаємно ортогональними, якщо

$$\forall f \in F \quad \forall g \in G \quad f \perp g.$$

Ортогональною сумою підпросторів G, F називається їх алгебраїчна сума у випадку, коли G, F є взаємно ортогональними.

Аналогічно можна ввести алгебраїчну і ортогональну суму для скінченного числа підпросторів. А власне, множина

$$\{f = \sum_{j=1}^{n} g_j \mid \forall j \;\; g_j \in G_j\}$$

називається алгебраїчною сумою підпросторів $G_j, j = 1, \dots, n$. Ця сума буде ортогональною, якщо різні простори G_j є взаємно ортогональними. Для ортогональної суми просторів G_j ми використовуємо позначення $\oplus_{j=1}^{n} G_j$.

Вправа 32.14. *Ортогональна сума є прямою сумою підпросторів.*

Теорема про ортогональну проекцію.

Теорема 32.15. *Нехай G підпростір гільбертового простору H і $f \in H$. Існує єдиний елемент $u \in G$ такий, що $f - u \perp G$. Цей елемент, який ми назвемо ортогональною проекцією елемента f на підпростір G (скорочене позначення $u = \mathrm{pr}_G f$), володіє властивістю*

$$\|f - u\| = \min_{v \in G} \|f - v\|.$$

Доведення. Нехай $f \in H$ і $\alpha := \inf_{v \in G} \|f - v\|$. Якщо $\alpha = 0$, тоді в G знайдеться послідовність $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до f. З огляду на замкненість множини G вектор f належить G, а, отже, $u = f$ і є ортогональною проекцією на G елемента f.

Нехай $\alpha > 0$. Тоді, очевидно, в G існує послідовність $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ така, що

$$\lim_{n \to \infty} \|f - v_n\| = \alpha.$$

Використовуючи рівність паралелограма маємо, що

$$2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) = 4\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \|v_n - v_m\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Зауважуючи, що $\frac{v_n + v_m}{2}$ належить G отримуємо, що

$$2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) \geq 4\alpha^2 + \|v_n - v_m\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

а, отже,

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq [2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4\alpha^2] \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Це означає, що послідовність (v_n) є фундаментальна, а, отже, збіжна. Нехай $u = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$. З неперервності норми випливає, що

$$\|f - u\| = \lim_{n \to \infty} \|f - v_n\| = \alpha.$$

Покажемо, що $(f - u) \perp G$. Якщо це не так, то існує вектор $v \in G$ такий, що

$$(f - u \mid v) < 0.$$

Для довільного $t > 0$ маємо, що

$$0 \leq (\|(f-u)+tv)\|^2 - \|f-u\|^2) = 2t(f-u \mid v) + t^2\|v\|^2,$$

тобто

$$(f-u \mid v) + t\|v\|^2 \geq 0, \qquad t > 0.$$

Переходячи до границі при $t \to 0$ отримуємо, що

$$(f-u \mid v) \geq 0.$$

Отримали суперечність.

Існування ортогональної проекції доведено. Доведемо єдиність. Припустимо, що існують $u_1, u_2 \in G$ такі, що $(f-u_j) \in G^{\perp}$. Тоді $(u_1-u_2) \in G^{\perp}$. Отже, вектор (u_1-u_2) належить одночасно G і $G^{\perp}$, тобто вектор (u_1-u_2) є ортогональний сам до себе. Це означає, що

$$\|u_1-u_2\|^2 = 0,$$

тобто $u_1 = u_2$. Єдиність доведена. □

Друге формулювання теореми про ортогональну проекцію.

Теорема 32.16. *Нехай G підпростір гільбертового простору H. Тоді $H = G \oplus G^{\perp}$.*

Доведення. Нехай $f \in H$ і $u = \mathrm{pr}_G f$. Тоді $u \in G$ і $(f-u) \in G^{\perp}$. Оскільки

$$f = u + f - u,$$

то $f \in G \oplus G^{\perp}$. Отже, $H = G \oplus G^{\perp}$. □

Обернення теореми про ортогональну проекцію.

Теорема 32.17. *Нехай G та F підпростори гільбертового простору H і $H = G \oplus F$. Тоді $F = G^{\perp}$.*

Доведення. Оскільки $H = G \oplus F$, то $F \perp G$, а, отже $F \subset G^{\perp}$. Візьмемо довільний вектор $h \in G^{\perp}$. Оскільки $H = G \oplus F$, то h можна подати у вигляді $h = g + f$, де $g \in G$, $f \in F$. Звідки отримуємо, що $g = h - f \in G^{\perp}$, тобто $g \in G \cap G^{\perp}$. Отже, $g = 0$ і $h = f \in F$. А це означає, що $G^{\perp} = F$. □

33. Практичне заняття: Гільбертові простори.

Задача 33.1. *Чи формула*
$$(x \mid y) := x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$
задає скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}^2$.

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена.

Нагадаємо, що додатна визначенність скалярного добутку полягає в тому, що виконується умова
$$\forall x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \qquad (x \mid x) > 0.$$
Нехай $u = (0, 1)$. Тоді $(u \mid u) = -1$.

Задача 33.2. *Чи формула*
$$(x \mid y) := x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$
задає скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}^2$.

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай $u = (1, -1)$. Тоді $(u \mid u) = -2$.

Задача 33.3. *Чи формула*
$$(x \mid y) := (x_1 + x_2)\bar{y}_1 + (x_1 - x_2)\bar{y}_2, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$
задає скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}^2$.

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай $u = (0, 1)$. Тоді $(u \mid u) = -1$.

Задача 33.4. *Чи формула*
$$(x \mid y) := x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3, \qquad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$
задає скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}^3$.

Розв'язок. Так, задає.

1) Лінійність за першим аргументом:
$$(x + z \mid y) = (x_1 + z_1)\bar{y}_1 + 2(x_2 + z_2)\bar{y}_2 + 3(x_3 + z_3)\bar{y}_3 = (x \mid y) + (z \mid y),$$
$$(\lambda x \mid y) = (\lambda x_1)\bar{y}_1 + 2(\lambda x_2)\bar{y}_2 + 3(\lambda x_3)\bar{y}_3 = \lambda(x \mid y).$$
2) Ермітова симетричність. Оскільки
$$(x \mid y) := x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3,$$

$$(y \mid x) := y_1\bar{x}_1 + 2y_2\bar{x}_2 + 3y_3\bar{x}_3,$$

то

$$\overline{(y \mid x)} = \bar{y}_1 x_1 + 2\bar{y}_2 x_2 + 3\bar{y}_3 x_3 = (x \mid y).$$

3) Додатна визначенність.

$$(x \mid x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0.$$

Якщо

$$(x \mid x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0,$$

то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Отже, додатна визначенність є.

Тому, ми маємо скалярний добуток.

Задача 33.5. *Чи формула*

$$(x \mid y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_k \bar{y}_{k+1}, \qquad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

задає скалярний добуток у просторі ℓ_2*.*

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай

$$u = (1, 0, 0, \dots).$$

Тоді $(u \mid u) = 0$.

Задача 33.6. *Чи формула*

$$(f \mid g) := \int_{-1}^{1} x f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad f, g \in C[-1, 1],$$

задає скалярний добуток у просторі $C[-1, 1]$*.*

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай

$$f(x) \equiv 1.$$

Тоді

$$(f \mid f) = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0.$$

Задача 33.7. *Чи формула*

$$(f \mid g) := \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f, g \in C[-1,1],$$

задає скалярний добуток у просторі $C[-1,1]$.

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-1,0]; \\ 0, & \text{якщо } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Тоді

$$(f \mid f) = 0.$$

Задача 33.8. *Чи формула*

$$(f \mid g) := \int\limits_{-1}^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx, \qquad f, g \in C^1[-1,1],$$

задає скалярний добуток у просторі $C^1[-1,1]$.

Розв'язок. Ні, не задає. Форма не є додатно визначена. Нехай $f(x) \equiv 1$. Тоді $(f \mid f) = 0$.

Задача 33.9. *Чи формула*

$$(f \mid g) := \int\limits_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f, g \in C[-1,1],$$

задає скалярний добуток у просторі $C[-1,1]$.

Розв'язок. Так задає.

1) Лінійність за першим аргументом:

$$(f + h \mid g) = \int\limits_{-1}^1 (f(x) + h(x))\overline{g(x)}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int\limits_{-1}^1 h(x)\overline{g(x)}\,dx = (f \mid g) + (h \mid g),$$

$$(\lambda f \mid g) = \int_{-1}^{1} (\lambda f(x))\overline{g(x)}\,dx = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \lambda(f \mid g).$$

2) Ермітова симетричність.

$$\overline{(g \mid f)} = \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = (f \mid g).$$

3) Додатна визначенність.

$$(f \mid f) = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \geq 0.$$

Якщо

$$(f \mid f) = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx = 0,$$

то $f \equiv 0$. Отже, додатна визначенність є.

Тому, ми маємо скалярний добуток.

Задача 33.10. *Нехай у просторі $C[-1,1]$ скалярний добуток заданий формулою*

$$(f \mid g) := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f, g \in C[-1,1].$$

Чи є ортогональними функції

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Розв'язок. Функції f і g не є ортогональними. Дійсно,

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Зауважимо, що

$$x \operatorname{arctg} x > 0, \qquad x \neq 0.$$

Тому $(f \mid g) > 0$.

Задача 33.11. *Нехай у просторі $C[-1,1]$ скалярний добуток заданий формулою*

$$(f \mid g) := \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f,g \in C[-1,1].$$

Чи є ортогональними функції

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Розв'язок. Функції f і g є ортогональними. Дійсно,

$$(f \mid g) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Зауважимо, що функція $x^2 \operatorname{arctg} x$ є непарною. Тому інтеграл від неї по проміжку $[-1,1]$ є рівний нулю. Отже, $f \perp g$.

Ортогональна проекція на підпростір

Нехай H гільбертів простір, а G - підпростір в H. Розглянемо задачі на знаходження ортогональної проекції $\operatorname{pr}_G f$ елемента $f \in H$.

Можливі наступні варіанти підходів до розв'язку таких задач.

1) Припустимо, що ми знаємо якусь ортонормовану базу $(e_j)_{j=1}^N$ $(N \leq \infty)$ підпростору G. Тоді ортогональну проекцію елемента f можна знайти за формулою

$$\operatorname{pr}_G f = \sum_{j=1}^{N} (f \mid e_j) e_j.$$

2) Припустимо, що $\dim G = n < \infty$ і нам відома деяка база $(\varphi_j)_{j=1}^n$ лінійного простору G. Тоді ортогональну проекцію елемента f можна знайти наступним чином.

a) Ми знаємо, що ортогональна проекція $u = \operatorname{pr}_G f$ належить підпростору G, а, отже, вона є лінійною комбінацією векторів бази $(\varphi_j)_{j=1}^n$, тобто

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j.$$

Тут c_j - невідомі числові коефіцієнти.

b) Як зайти невідомі числові коефіцієнти c_j? Їх ми знаходимо з умови (див. означення ортогональної проекції)

$$f - u \perp G,$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$(f-u \mid \varphi_j)=0, \qquad j=1,\dots,n.,$$

і яку можна переписати у вигляді системи лінійних рівнянь для чисел c_j. Враховуючи, що

$$f-u=f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k,$$

отримуємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(\varphi_k \mid \varphi_j)=(f \mid \varphi_j), \qquad j=1,\dots,n.$$

Оскільки нам відомі елементи φ_j і f, то ми можемо вирахувати скалярні добутки $(f \mid \varphi_j)$ і $(\varphi_k \mid \varphi_j)$, а тоді перейти до знаходження чисел c_j з системи лінійних рівнянь.

3) Деколи, використовуючи специфіку простору G і елемента f, можна вгадати ортогональну проекцію $u=\mathrm{pr}_G f$ без обчислень, маючи на увазі умову

$$f-u \perp G.$$

Серед вказаних підходів найчастіше використовують підхід 2).

Розглянемо відповідні приклади.

Задача 33.12. *Нехай* $H=\mathbb{R}^3$ *і*

$$f=(1,1,-1), \quad \varphi_1=(1,0,1), \quad \varphi_2=(1,0,0).$$

Знайдіть ортогональну проекцію f *на підпростір* $G=\mathrm{lin}\{\varphi_1,\varphi_2\}$.

Розв'язок. Спочатку знаходимо, що

$$(f \mid \varphi_1)=0, \quad (f \mid \varphi_2)=1,$$

$$(\varphi_1 \mid \varphi_1)=2, \quad (\varphi_1 \mid \varphi_2)=1=(\varphi_2 \mid \varphi_1), \qquad (\varphi_2 \mid \varphi_2)=1.$$

Шукаючи ортогональну проекцію $u=\mathrm{pr}_G f$ у вигляді

$$u=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$$

приходимо до системи рівнянь

$$2c_1+c_2=0, \qquad c_1+c_2=1.$$

Отримуємо, що $c_1=-1$ і $c_2=2$. А, отже,

$$u=-(1,0,1)+2(1,0,0)=(1,0,-1).$$

Задача 33.13. *Нехай* $H = \mathbb{C}^4$ *і*

$$f = (1, 1, -1, 0), \quad \varphi_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \varphi_2 = (1, 2, 0, 0).$$

Знайдіть ортогональну проекцію f *на підпростір* $G = \operatorname{lin}\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Розв'язок. Спочатку знаходимо, що

$$(f \mid \varphi_1) = 1, \quad (f \mid \varphi_2) = 3,$$

$$(\varphi_1 \mid \varphi_1) = 2, \quad (\varphi_1 \mid \varphi_2) = 1 = (\varphi_2 \mid \varphi_1), \qquad (\varphi_2 \mid \varphi_2) = 5.$$

Шукаючи ортогональну проекцію $u = \operatorname{pr}_G f$ у вигляді

$$u = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

приходимо до системи рівнянь

$$2c_1 + c_2 = 1, \qquad c_1 + 5c_2 = 3.$$

Отримуємо, що $c_1 = 2/9$ і $c_2 = 5/9$. А, отже,

$$u = \frac{2}{9}(1, 0, 0, 1) + \frac{5}{9}(1, 2, 0, 0) = \left(\frac{7}{9}, \frac{10}{9}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

Задача 33.14. *Нехай* $H = \ell_2$ *і*

$$f = (1, 1, 1, 2, -1, 0, \dots), \quad \varphi_1 = (1, 0, \dots), \quad \varphi_2 = (0, 2, 1, 0, \dots), \varphi_3 = (1, 0, 1, 0, \dots)$$

Знайдіть ортогональну проекцію f *на підпростір* $G = \operatorname{lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Розв'язок. Ми можемо повторити ті самі міркування, що і в двох попередніх задачах. Проте, можна дану задачу зробити більш простим способом.

Зауважимо, що $\dim G = 3$ і кожен вектор φ_j можна отримати як лінійну комбінацію векторів

$$e_1 := (1, 0, \dots), \qquad e_2 := (0, 1, 0, \dots), \qquad e_3 := (0, 0, 1, 0, \dots).$$

Легко бачити, що вектори e_j є попарно ортогональні і $\|e_j\| = 1$, тобто $(e_j)_{j=1}^3$ є ортонормованою системою. Зі сказаного вище випливає, що $(e_j)_{j=1}^3$ є ортонормованою базою у просторі G. Тому

$$\operatorname{pr}_G f = \sum_{j=1}^{3} (f \mid e_j) e_j = (1, 1, 1, 0, \dots)$$

Задача 33.15. *Наділимо простір* $C[-1, 1]$ *скалярним добутком*

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad f, g \in C[-1, 1]$$

Простір $C[-1,1]$ з таким скалярним добутком не є повним, але ортогональна проекція на скінченновимірний простір існує і її можна знаходити тим самим способом.

Нехай

$$f(x) = x, \qquad \varphi_1(x) = x - 1, \qquad \varphi_2(x) = x^2.$$

Знайдіть ортогональну проекцію f на підпростір $G = \operatorname{lin}\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Розв'язок. Спочатку знаходимо скалярні добутки:

$$(f \mid \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x(x-1)\,dx = 2/3, \qquad (f \mid \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

$$(\varphi_1 \mid \varphi_1) = \int_{-1}^{1} (x-1)^2\,dx = 8/3, \qquad (\varphi_2 \mid \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = 2/5,$$

$$(\varphi_1 \mid \varphi_2) = (\varphi_2 \mid \varphi_1) = \int_{-1}^{1} (x-1)x^2\,dx = -2/3.$$

Шукаючи ортогональну проекцію $u = \operatorname{pr}_G f$ у вигляді

$$u = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

приходимо до системи рівнянь

$$\frac{8}{3}c_1 - \frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3}, \qquad -\frac{2}{3}c_1 + \frac{8}{3}c_2 = 0.$$

Отже, $c_1 = 4/15, c_2 = 1/15$ і $u = \frac{4}{15}(x-1) + \frac{1}{15}x^2$.

34. Ортогональні ряди.

Почнемо з означення рядів у банаховому просторі.

Означення 34.1. *Нехай X - банахів простір. Рядом в банаховому просторі X називається формальна сума $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, де $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність в X. Ми кажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається, якщо в X існує границя часткових сум, тобто границя $S = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$. Якщо вона існує, то ми її називаємо сумою вказаного ряду і записуємо цей факт у вигляді рівності $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Ми говоримо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжний, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Таким чином, позначення $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ несе подвійне навантаження.. З одного боку це формальна нескінченна сума, а з другого боку конкретний елемент банахового простору, якщо ряд збіжний.

Достатня умова збіжності ряду у банаховому просторі.

Теорема 34.2. *Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховому просторі X є абсолютно збіжний, то він збіжний і*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{34.1}$$

Доведення. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжний. Покладемо

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких, що $m < n$, маємо

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=1+m}^{n} x_j \right\| \le \sum_{j=1+m}^{n} \|x_j\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Звідки випливає, що послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна (бо простір X є повний). З нерівності трикутника для норми випливає, що

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\| \le \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|.$$

Переходячи в нерівності до границі при $N \to \infty$, з врахуванням неперервності норми отримуємо нерівність (34.1). Теорема доведена. □

Означення 34.3. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *у гільбертовому просторі називається ортогональним, якщо* $x_n \perp x_m$ *при* $n \neq m$.

Критерій збіжності ортогонального ряду.

Теорема 34.4. *Нехай* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *- ортогональний ряд в гільбертовому просторі. Для того, що він збігався необхідно і досить, щоб збігався числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$*. Якщо останній збігається, то справедлива рівність*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2. \tag{34.2}$$

Доведення. Покладемо

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З означення ортогонального ряду випливає, що для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких, що $m < n$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{j=1+m}^{n} x_n\right\|^2 = \sum_{j=1+m}^{n} \|x_n\|^2$$

Звідси отримуємо, що збіжність послідовності $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є еквівалентна збіжності числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$. Дійсно, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ збігається, то

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{j=1+m}^{n} \|x_n\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Звідки випливає, що послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна (бо простір є повний).

А якщо послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна, то вона фундаментальна і

$$\sum_{j=1+m}^{n} \|x_n\|^2 = \|S_n - S_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

а, отже, згідно з критерієм Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ збігається.

Переходячи в рівності

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2$$

до границі при $N \to \infty$, з врахуванням неперервності норми отримуємо рівність (34.2). Теорема доведена. □

Зауваження 34.5. *Рівність* (34.2) *можна розглядати як узагальнення теореми Піфагора на нескінченну кількість попарно ортогональних доданків.*

Ортонормовані системи та їх властивості.

Означення 34.6. *Система* $(e_j)_{j\in J}$ *векторів гільбертового простору називається ортонормованою, якщо*

$$(e_j \mid e_k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k; \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Означення 34.7. *Нехай* $(e_j)_{j\in J}$ *- ортонормована система у гільбертовому просторі і* $f \in H$. *Рядом Фур'є елемента* f *за ортонормованою системою* $(e_j)_{j\in J}$ *називається ряд*

$$\sum_{j\in J} (f \mid e_j) e_j.$$

При цьому коефіцієнти $(f \mid e_j)$ *називаються коефіцієнтами Фур'є елемента* f *за ортонормованою системою* $(e_j)_{j\in J}$.

Нерівність Бесселя.

Теорема 34.8. *Нехай* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ортонормована система у гільбертовому просторі* H. *Для довільного* $f \in H$ *справедлива нерівність Бесселя:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f \mid e_j)|^2 \le \|f\|^2. \tag{34.3}$$

Доведення. Покладемо

$$c_j := (f \mid e_j), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо вектор

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} c_j e_j.$$

Переконаємося, що

$$f - S_n \perp e_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{34.4}$$

Дійсно, якщо $k \le n$, то

$$(f - S_n \mid e_k) = (f|e_k) - (S_n \mid e_k) =$$

$$= (f|e_k) - \sum_{j=1}^{n} c_j (e_j \mid e_k) = (f|e_k) - c_k = 0.$$

З (40.14) випливає, що

$$f - S_n \perp S_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Дійсно,

$$(f - S_n \mid S_n) = (f - S_n \mid \sum_{j=1}^{n} c_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j (f - S_n \mid e_j) = 0.$$

Використовуючи теорему Піфагора, отримуємо,

$$\|f\|^2 = \|f - S_n + S_n\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n\|^2.$$

А, отже,

$$\|f\|^2 \ge \|S_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|c_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2,$$

тобто

$$\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \le \|f\|^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ отримуємо, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \le \|f\|^2.$$

Теорема доведена. $\square$

Наслідок 34.9. *Нехай $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ортонормована система у гільбертовому просторі H. Тоді для довільного $f \in H$ ряд Фур'є $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(f \mid e_j)e_j$ збігається в H.*

Доведення. Нехай $f \in H$. Використовуючи нерівність Бесселя, маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|(f \mid e_j)e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|(f \mid e_j)|^2 \le \|f\|^2.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(f \mid e_j)e_j$ є ортогональним, то згідно з критерієм збіжності ортогональних рядів він збігається. $\square$

Означення 34.10. *Ортонормована система $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ у гільбертовому просторі H називається повною, якщо її лінійна оболонка всюди щільна в H.*

Існування повної ортонормованої системи.

Теорема 34.11. *У кожному гільбертовому просторі існує повна ортонормована система.*

Вправа 34.12. *Нехай H - сепарабельний гільбертів простір. Тоді:*
(1) *кожна ортонормована система в H є не більш ніж зліченна;*
(2) *якщо $\dim H = \infty$, то кожна повна ортонормована система є зліченна.*

Означення 34.13. *Систему $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ у сепарабельному нескінченновимірному гільбертовому просторі H назвемо базою, якщо кожен вектор $f \in H$ можна подати у вигляді*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j e_j,$$

причому однозначно (тут $\eta_j \in \mathbb{C}$, а ряд збігається за нормою простору). Якщо ортонормована система є базою, то ми називаємо її ортонормованою базою гільбертового простору.

Теорема 34.14. *Нехай* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *- повна ортонормована система у гільбертовому просторі* H. *Тоді* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *є базою, причому для довільного* $f \in H$

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j) e_j \tag{34.5}$$

і

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(f \mid e_j)|^2. \tag{34.6}$$

Доведення. З наслідку 34.9 випливає, що для довільного $f \in H$ ряд Фур'є $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j) e_j$ збігається у просторі H. Покладемо

$$S := \sum_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j) e_j, \qquad h := f - S.$$

Для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$(S \mid e_k) = (\sum_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j) e_j \mid e_k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j)(e_j \mid e_k) = (f \mid e_k).$$

Тут ми скористалися неперервністю скалярного добутку і властивістю ортонормованої системи. Тому

$$(h \mid e_k) = (f \mid e_k) - (S \mid e_k) = (f \mid e_k) - (f \mid e_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що ортонормована система $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ належить підпростору

$$G := \{h\}^{\perp}.$$

А, отже, її лінійна оболонка і її замикання належать G. Оскільки система $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є повна, то замиканням її лінійної оболонки є весь простір H. Тому $G = H$. Отже, $h \perp H$, тобто $h = 0$. А це означає, що виконується рівність (34.5). Щоб довести, що наша система є базою, потрібно переконатися, що зображення елемента f у вигляді

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j e_j$$

є єдиним, тобто $\eta_j = (f \mid e_j)$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$(f \mid e_k) = (\sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j e_j \mid e_k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j (e_j \mid e_k) = \eta_k.$$

З рівності (34.5) і теореми про ортогональні ряди маємо, що

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|(f \mid e_j) e_j\|^2 == \sum_{j\in\mathbb{N}} |(f \mid e_j)|^2.$$

□

Вправа 34.15. *Нехай $\mathcal{E}$ - ортонормована система. Ми скажемо, що вона є тотальною, якщо $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$. Доведіть, що кожна тотальна ортонормована система є повною.*

Вправа 34.16. *Нехай $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ - ортонормована система у гільбертовому просторі H і $G := \overline{\operatorname{lin}\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$. Доведіть, що для кожного $f \in H$ справедлива рівність*

$$\operatorname{pr}_G f = \sum_{j\in\mathbb{N}} (f \mid e_j) e_j.$$

Тут $\operatorname{pr} f$ *- ортогональна проекція елемента f на підпростір G.*

Теорема Ріса про зображення неперервного функціонала.

Теорема 34.17. *Нехай H - гільбертів простір. Для кожного неперервного лінійного функціонала F на просторі H існує єдиний елемент $h \in H$ такий, що*

$$F(x) = (x \mid h), \qquad x \in H,$$

причому $\|F\| = \|h\|$.

Доведення. Нехай F - неперервний лінійний функціонал на H. Доведемо існування елемента h. Якщо $F = 0$, то, очевидно, елемент $h = 0$ має потрібні нам властивості. Розглянемо випадок $F \neq 0$. Нехай

$$G = \ker F := \{g \in H \mid F(g) = 0\}.$$

З неперервності F випливає, що G є підпростором в H. При цьому $G \neq H$, бо $F \neq 0$. Тому $G^{\perp} \neq \{0\}$. Отже, існує вектор $u \in G^{\perp}$ такий, що $\|u\| = 1$. Оскільки $u \notin G$, то $F(u) \neq 0$. Для довільного $x \in H$ елемент

$$x - \frac{F(x)}{F(u)} u$$

належить простору G. Дійсно,

$$F\left(x - \frac{F(x)}{F(u)} u\right) = F(x) - F(x) = 0.$$

Тому для всіх $x \in H$

$$(x - \frac{F(x)}{F(u)} u \mid u) = 0.$$

Звідки випливає, що

$$(x \mid u) = \frac{F(x)}{F(u)} (u \mid u) = \frac{F(x)}{F(u)}.$$

А, отже,

$$F(x) = F(u)(x \mid u) = (x \mid h), \qquad x \in H,$$

де $h = \overline{F(u)}u$. Таким чином, існування елемента h доведено.

Доведемо єдиність. Припустимо, що для елементів $h_1, h_2 \in H$ виконуються рівності

$$F(x) = (x \mid h_1), \quad F(x) = (x \mid h_2), \qquad x \in H.$$

Тоді

$$(x \mid h_1 - h_2) = (x \mid h_1) - (x \mid h_2) = F(x) - F(x) = 0, \qquad x \in H,$$

тобто $(h_1 - h_2) \perp H$. А, отже, $h_1 - h_2 = 0$, тобто $h_1 = h_2$. Єдиність доведена.

Залишається переконатися, що $\|F\| = \|h\|$.

Використовуючи нерівність Буняковського для скалярного добутку, маємо

$$|F(x)| = |(x \mid h)| \leq \|h\|\|x\|.$$

Звідки випливає, що $\|F\| \leq \|h\|$. З іншого боку,

$$\|F\| \geq \frac{|F(h)|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|.$$

Отже, $\|F\| = \|h\|$. Теорема доведена. □

Теорема про спряжений оператор.

Теорема 34.18. *Нехай H - гільбертів простір. Для кожного оператора $A \in \mathcal{B}(H)$ існує єдиний оператор $B \in \mathcal{B}(H)$ такий, що*

$$\forall x, y \in H \quad (Ax \mid y) = (x \mid By).$$

При цьому $\|B\| \leq \|A\|$.

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$. Зафіксуємо довільне $y \in H$ і розглянемо функціонал

$$l(x) := (Ax \mid y), \qquad x \in H.$$

З лінійності оператора A і лінійності скалярного добутку за першим аргументом випливає, що функціонал l є лінійним. Він також є неперервним. Дійсно, з нерівності Буняковського випливає, що

$$|l(x)| = |(Ax \mid y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\| = (\|A\|\|y\|)\,\|x\|, \qquad x \in \ H.$$

А, отже, l є обмеженим, причому $\|l\| \leq \|A\|\|y\|$.

Згідно з теоремою Ріса існує єдине $y^* \in H$ таке,

$$(Ax \mid y) = (x \mid y^*), \qquad x \in H.$$

Отже,

$$\forall y \in H \quad \exists! y^* \in H \quad \forall x \in H \quad (Ax \mid y) = (x \mid y^*).$$

Розглянемо відображення

$$B(y) := y^*, \qquad y \in H.$$

Воно є лінійним. Дійсно, нехай $y_1, y_2 \in H$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді для довільних $x \in H$

$$(x|B(y_1+y_2) - B(y_1) - B(y_2)) = (x|B(y_1+y_2)) - (x|B(y_1)) - (x|B(y_2)) = \\ = (Ax \mid y_1+y_2) - (Ax \mid y_1) - (Ax \mid y_2) = 0$$

і

$$(x|B(\lambda y_1) - \lambda B(y_1)) = (x|B(\lambda y_1)) - \bar{\lambda}(x|B(y_1)) = (Ax \mid \lambda y_1) - \bar{\lambda}(Ax|y_1) = 0.$$

Отже, вектори $B(y_1+y_2) - B(y_1) - B(y_2)$ і $B(\lambda y_1) - \lambda B(y_1)$ є ортогональними до всього H. А це означає, що вони рівні нулеві, тобто

$$B(y_1+y_2) = B(y_1) + B(y_2), \qquad B(\lambda y_1) = \lambda B(y_1).$$

Отже, відображення B є лінійним оператором.

Покажемо, що він є обмежений. Дійсно, для довільних $x, y \in H$

$$|(x \mid By)| = |(Ax \mid y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|,$$

тобто

$$|(x \mid By)| \leq \|A\|\|x\|\|y\|.$$

Покладемо в останній нерівності $x = By$. Тоді

$$\|By\|^2 \leq \|A\|\|By\|\|y\|,$$

а, отже,

$$\|By\| \leq \|A\|\|y\|, \qquad y \in H.$$

Звідки випливає, що оператор B є обмежений (неперервний) і $\|B\| \leq \|A\|$. Залишається довести єдиність. Припустимо, що в алгебрі $\mathcal{B}(H)$ існують оператори B_1 і B_2, такі, що

$$\forall x, y \in H \quad (Ax \mid y) = (x \mid B_1 y) = (x \mid B_2 y).$$

Тоді

$$\forall x, y \in H \quad (x \mid (B_1 - B_2)y) = 0,$$

тобто

$$\forall y \in H \quad (B_1 - B_2)y \perp H.$$

Це означає, що

$$\forall y \in H \quad (B_1 - B_2)y = 0,$$

тобто $B_1 = B_2$. Єдиність доведена. Теорема доведена. □

Означення 34.19. *Оператор B з попередньої теореми називається спряженим оператором до A і позначається через A^*. Таким чином, оператор A^* пов'язаний з оператором A рівністю*

$$\forall x, y \in H \quad (Ax \mid y) = (x \mid A^* y).$$

Відображення

$$\mathcal{B}(H) \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{B}(H)$$

називається операцією взяття спряженого.

Теорема 34.20. *Операція взяття спряженого володіє наступними властивостями:*

(1) $I^* = I, \quad 0^* = 0$;
(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
(3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;
(4) $(AB)^* = B^* A^*$;
(5) $(A^*)^* = A$;
(6) $\|A^*\| = \|A\|$;
(7) *якщо оператор A оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(H)$, то A^* теж оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(H)$ і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Доведення. Доведення пункту (1) є очевидним.

Нехай $A, B \in \mathcal{B}(H)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$((A+B)x \mid y) = (x \mid A^*y) + (x \mid B^*y) = (x \mid (A^* + B^*)y),$$

$$(\lambda Ax \mid y) = \lambda(Ax \mid y) = \lambda(x \mid A^*y) = (x \mid (\bar{\lambda}A^*)y),$$

$$((AB)x \mid y) = (Bx \mid A^*y) = (x \mid B^*A^*y) = (x \mid (B^*A^*)y),$$

$$(A^*x|y) = \overline{(y \mid A^*x)} = \overline{(Ay \mid x)} = (x \mid Ay).$$

З виписаних рівностей випливає справедливість рівностей $(2-5)$.

Доведемо (6). З теореми про існування спряженого оператора випливає нерівність $\|A^*\| \leq \|A\|$. Використовуючи (5) маємо, що

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|,$$

а, отже, $\|A^*\| = \|A\|$.

Доведемо (7). Припустимо, що оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ є оборотний. Тоді

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}.$$

З пунктів $(1), (4)$ випливає, що

$$I = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^*, \qquad I = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^*A^*,$$

тобто

$$A^*(A^{-1})^* = I = (A^{-1})^*A^*.$$

Звідки випливає, що оператор A^* є оборотний і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Теорема доведена.

Означення 34.21. *Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається самоспряженим, якщо $A^* = A$.*

□

Банахові простори $L_p(X)$. Гільбертів простір $L_2(X)$.

Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ простір з мірою і $p \in [1, \infty)$. Позначимо через $\widetilde{L}_p(X)$ множину всіх функцій $f : X \to \mathbb{C}$, які є μ-вимірні і такі, що функція $|f|^p$ є інтегровна на X за мірою μ. Виявляється, що $\widetilde{L}_p(X)$ утворює лінійний простір. При цьому формула

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

задає псевдонорму. Для неї виконується властивості

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

і

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

але не виконується перша аксіома норми. Дійсно, якщо функції $f, g \in \widetilde{L}_p(X)$ є μ- еквівалентними, то

$$\|f - g\|_p = 0.$$

Навпаки, якщо $\|f - g\|_p = 0$, то функції $f, g \in \widetilde{L}_p(X)$ є μ- еквівалентними.

Позначимо через $L_p(X)$ фактор-простір класів μ-еквівалентних функцій. Норму класу задамо, як норму однієї з функцій цього класу (вони всі є рівними). Тоді $L_p(X)$ перетворюється в нормований простір. Більше того, цей простір є повним, тобто банаховим.

Прийнято вважати простір $L_p(X)$ функціональним простором (хоча формально це не так). Дійсно, можна вважати, що в кожному класі вибрано одного представника і всі операції з класом виконуються через цього представника.

При $p = 2$ простір $L_p(X)$ є гільбертовим. Дійсно, скалярний простір у цьому випадку задаються формулою

$$(f \mid g) = \int\limits_X f \bar{g} \, d\mu, \qquad f, g \in L_2(X).$$

Перевірка властивостей скалярного добутку є зовсім простою.

Простори $L_p(X)$ є аналогами просторів ℓ_p, а гільбертів простір $L_2(X)$ є аналогом простору ℓ_2

35. Практичне заняття: Знаходження спряженого оператора.

Нехай H - гільбертів простір і $A \in \mathcal{B}(H)$. Спряженим оператором до A називається оператор $A^* \in \mathcal{B}(H)$, який єдиним чином визначається зі співвідношення:

$$\forall x, y \in H \quad (Ax \mid y) = (x \mid A^* y).$$

Відображення

$$\mathcal{B}(H) \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{B}(H)$$

називається операцією взяття спряженого і володіє наступними властивостями:

(1) $I^* = I, \quad 0^* = 0$;
(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
(3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;
(4) $(AB)^* = B^* A^*$;
(5) $(A^*)^* = A$;
(6) $\|A^*\| = \|A\|$;
(7) якщо оператор A оборотний в $\mathcal{B}(H)$, то A^* теж оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(H)$ і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Спряжений до оператора у просторі ℓ_2.

Задача 35.1. *Знайти спряжений до оператора $A : \ell_2 \to \ell_2$, що діє за формулою:*

$$Ax := (ix_3, x_2, x_2, 0, 0, \dots), \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Розв'язок. Нехай $x, y \in \ell_2$. Нагадаємо, що скалярний добуток у просторі ℓ_2 задається формулою

$$(x \mid y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j.$$

Тому

$$(Ax \mid y) = ix_3\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 = x_2\overline{(y_2 + y_3)} + x_3\overline{(-iy_1)} = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* := (0, y_2 + y_3, -iy_1, 0, 0, \dots), \quad y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Отже,

$$A^* x = (0, x_2 + x_3, -ix_1, 0, 0, \dots), \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Задача 35.2. *Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Ax = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Розв'язок. Зауважимо, що оператор A називається оператором одностороннього зсуву вправо.

Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Ax \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax)_n \bar{y}_n = x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + x_3\bar{y}_4 + \dots = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots).$$

Звідси випливає, що оператор A^* діє за формулою:

$$A^*y = y^* = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots).$$

Отриманий нами оператор A^* є оператором одностороннього зсуву вліво.

Задача 35.3. *Знайти спряжений до оператора $B \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Bx = B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Розв'язок. З попередньої задачі випливає, що $B = A^*$. Тому

$$B^* = (A^*)^* = A,$$

тобто

$$B^*x = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Задача 35.4. *Знайти спряжений до оператора $A : \ell_2 \to \ell_2$, що діє за формулою:*

$$Ax := (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots), \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Розв'язок. Нехай $x, y \in \ell_2$. Тоді

$$(Ax \mid y) = x_2\bar{y}_2 + x_4\bar{y}_4 + x_6\bar{y}_6 + \dots = (x \mid Ay).$$

Отже,

$$A^* = A.$$

Задача 35.5. *Знайти спряжений до оператора $A : \ell_2 \to \ell_2$, що діє за формулою:*

$$Ax := (2x_4 - x_2, 2ix_1, x_1 - x_3, 0, 0, \dots), \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Розв'язок. Нехай $x, y \in \ell_2$. Тоді

$$(Ax \mid y) = (2x_4 - x_2)\bar{y}_1 + (2ix_1)\bar{y}_2 + (x_1 - x_3)\bar{y}_3 = x_1\overline{(-2iy_2 + y_3)} + x_2\overline{(-y_1)} + x_3\overline{(-y_3)} + x_4\overline{(2y_1)}.$$

Отже,

$$A^*y := (-2iy_2 + y_3, -y_1, -y_3, 2y_1, 0, 0, \dots), \quad y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Задача 35.6. *Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Ax = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \dots, \tfrac{1}{n}x_n, \dots).$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Ax \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} x_n \bar{y}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\left(\tfrac{1}{n} y_n\right)} = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* = (y_1, \tfrac{1}{2}y_2, \dots, \tfrac{1}{n}y_n, \dots).$$

Звідси випливає, що оператор A^* діє за формулою:

$$A^*y = y^* = (y_1, \tfrac{1}{2}y_2, \dots, \tfrac{1}{n}y_n, \dots),$$

тобто

$$A^*x = Ax = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \dots, \tfrac{1}{n}x_n, \dots).$$

Таким чином оператор A є самоспряженим.

Задача 35.7. *Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Ax = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (a_1x_2, a_2x_3, \dots, a_nx_{n+1}, \dots),$$

де (a_n) обмежена послідовність комплексних чисел.

Розв'язок. Півторалінійна оператора A має вигляд:

$$(Ax \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n+1} \bar{y}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} \overline{\bar{a}_n y_n} = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* = (0, \bar{a}_1 y_1, \bar{a}_2 y_2, \dots, \bar{a}_n y_n, \dots).$$

Звідси випливає, що оператор A^* діє за формулою:

$$A^*y = (0, \bar{a}_1 y_1, \bar{a}_2 y_2, \ldots, \bar{a}_n y_n, \ldots).$$

Задача 35.8. *Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Ax = (2x_1 - x_2, ix_2, x_1 - x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots).$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Ax \mid y) = (2x_1 - x_2)\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2 + (x_1 - x_3)\bar{y}_3 + \sum_{n=4}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Розкриваючи дужки і перегруповуючи доданки, отримуємо

$$(Ax \mid y) = 2x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2 + x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_3 + \sum_{n=4}^{\infty} x_n \bar{y}_n =$$

$$= x_1\overline{(2y_1 + y_3)} + x_2\overline{(-y_1 - iy_2)} + x_3\overline{(-y_3)} + \sum_{n=4}^{\infty} x_n \bar{y}_n = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* = (2y_1 + y_3, -y_1 - iy_2, -y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots).$$

Звідси випливає, що оператор A^* діє за формулою:

$$A^*y = (2y_1 + y_3, -y_1 - iy_2, -y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots).$$

Задача 35.9. *Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, який діє за формулою:*

$$Ax = (x_1 + x_2 + ix_3, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots), \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Ax \mid y) = (x_1 + x_2 + ix_3)\bar{y}_1 + (x_1 - x_2)\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 + \sum_{n=4}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Розкриваючи дужки і перегруповуючи доданки, отримуємо

$$(Ax \mid y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_1 + ix_3\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 + \sum_{n=4}^{\infty} x_n \bar{y}_n =$$

$$= x_1\overline{(y_1+y_2)} + x_2\overline{(y_1-y_2)} + x_3\overline{(-iy_1+y_3)} + \sum_{n=4}^{\infty} x_n\bar{y}_n = (x \mid y^*),$$

де

$$y^* = (y_1+y_2, y_1-y_2, -iy_1+y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots).$$

Звідси випливає, що оператор A^* діє за формулою:

$$A^*y = (y_1+y_2, y_1-y_2, -iy_1+y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots).$$

Спряжений до оператора множення на функцію.

Розглянемо у просторі $H = L_2(X, \mu)$ оператор A, що заданий формулою:

$$(Af)(x) = s(x)f(x), \qquad x \in X,$$

де s - числова функція на X. Такий оператор називається оператором множення на функцію. Нехай $f, g \in H$. Тоді

$$(Af \mid g) = \int_X s(x)f(x)\overline{g(x)}\,d\mu = \int_X f(x)\overline{(\overline{s(x)}g(x))}\,d\mu = (f \mid Bg),$$

де оператор B діє за формулою

$$(Bg)(x) = \overline{s(x)}g(x), \qquad x \in X.$$

Отже,

$$(A^*f)(x) = \overline{s(x)}f(x), \qquad x \in X.$$

Задача 35.10. *Знайти спряжений до оператора $A : L_2(0,\infty) \to L_2(0,\infty)$, що діє за формулою:*

$$(Af)(x) := e^{2ix}f(x), \qquad x \in (0,\infty), \quad f \in L_2(0,\infty).$$

Розв'язок. З означення оператора випливає, що

$$(A^*f)(x) = e^{-2ix}f(x), \qquad x \in (0,\infty), \quad f \in L_2(0,\infty).$$

Спряжений до оператора композиції.

Задача 35.11. *Знайти спряжений до оператора $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, що діє за формулою:*

$$(Af)(x) := f(1-x), \qquad x \in (0,\infty), \quad f \in L_2(0,\infty).$$

Розв'язок. Нехай $f, g \in L_2(0,1)$. Тоді

$$(Af \mid g) = \int_0^1 f(1-x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Зробимо в інтегралі заміну змінних $y = 1 - x$. Отримаємо

$$\int_0^1 f(1-x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(y)\overline{g(1-y)}\,dy = (f \mid Bg),$$

де

$$(Bg)(y) = g(1-y) = (Ag)(y).$$

Отже,

$$(Af \mid g) = (f \mid Ag),$$

тобто $A^* = A$. Оператор A є самоспряжений.

Задача 35.12. *Знайти спряжений до оператора* $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, *що діє за формулою:*

$$(Af)(x) := f(3x-2), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Розв'язок. Нехай $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді

$$(Af \mid g) = \int_{\mathbb{R}} f(3x-2)\overline{g(x)}\,dx.$$

Зробимо в інтегралі заміну змінних $y = 3x - 2$. Отримаємо

$$\int_{\mathbb{R}} f(3x-2)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{g((y+2)/3)}\,dy = (f \mid Bg),$$

де

$$(Bg)(y) = \frac{1}{3}g((y+2)/3), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$(Af \mid g) = (f \mid Bg), \qquad f, g \in L_2(\mathbb{R}).$$

тобто

$$(A^*g)(x) = \frac{1}{3}g((x+2)/3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Задача 35.13. *Знайти спряжений до оператора* $A : L_2(1,\infty) \to L_2(1,\infty)$, *що діє за формулою:*

$$(Af)(x) := f(x^2), \qquad x \in (1,\infty), \quad f \in L_2(1,\infty).$$

Розв'язок. Нехай $f, g \in L_2(1,\infty)$. Тоді

$$(Af \mid g) = \int_0^\infty f(x^2)\overline{g(x)}\, dx.$$

Зробимо в інтегралі заміну змінних $y = x^2$. Отримаємо

$$\int_0^\infty f(x^2)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\overline{y^{-1/2}g(\sqrt{y})}\, dy = (f \mid Bg),$$

де

$$(Bg)(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}g(\sqrt{y}), \qquad y \in (1,\infty).$$

Отже,

$$(A^*g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}g(\sqrt{y}), \qquad y \in (1,\infty).$$

Задача 35.14. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(-1,1)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = if(-x), \qquad x \in (-1,1).$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Af \mid g) = \int_{-1}^{1}(Af)(x)\bar{g}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} if(-x)\bar{g}(x)\, dx.$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну змінних $t = -x$. Отримуємо

$$(Af \mid g) = \int_{-1}^{1} if(t)\bar{g}(-t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{(-ig(-t))}\, dt.$$

Отже,

$$(A^*g)(t) = -ig(-t), \qquad t \in (-1,1), \quad g \in L_2(-1,1),$$

або

$$(A^*f)(x) = -if(-x), \qquad x \in (-1,1), \quad f \in L_2(-1,1).$$

Задача 35.15. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(\mathbb{R})$ за формулою:*

$$(Af)(x) = 2f(2x+1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Af \mid g) = \int\limits_{\mathbb{R}} (Af)(x)\bar{g}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} 2f(2x+1)\bar{g}(x)\,dx.$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну змінних $t = 2x+1$. Отримуємо

$$(Af \mid g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(\tfrac{t-1}{2})\,dt.$$

Отже,

$$(A^*g)(t) = g(\tfrac{t-1}{2}), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad g \in L_2(\mathbb{R}).$$

Задача 35.16. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(\mathbb{R})$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\,dy}{1+y^2+2x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Af \mid g) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\bar{g}(x)}{1+y^2+2x^4}\,dy\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\bar{g}(x)\,dx}{1+y^2+2x^4} \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(x)\,dx}{1+y^2+2x^4} \right)}\, dy$$

Звідки випливає, що

$$(A^*g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(x)\,dx}{1+y^2+2x^4}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Якщо в останній формулі переставити змінні x та y місцями і замінити g на f (що цілком допустимо, бо це лише позначки) то її можна переписати у вигляді подібному до вигляду оператора A:

$$(A^*f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\,dx}{1+x^2+2y^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Задача 35.17. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(R)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{if(y)\,dy}{1+y^2+ix^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Півторалінійна форма оператора A має вигляд:

$$(Af \mid g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{if(y)\bar{g}(x)}{1+y^2+ix^2}\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{i\bar{g}(x)\,dx}{1+y^2+ix^2} \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{-ig(x)\,dx}{1+y^2-ix^2} \right)}\,dy$$

Звідки випливає, що

$$(A^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-ig(x)\,dx}{1+y^2-ix^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Або

$$(A^*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-if(y)\,dx}{1+x^2-iy^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. З двох останніх задач можна прийти до наступного висновку. Якщо оператор A діє у просторі $L_2(a,b)$ за формулою

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy, \qquad x \in (a,b),$$

де K - функція двох змінних (з достатньо добрими властивостями), то спряжений оператор діє за формулою

$$(A^*f)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)}f(y)\,dy, \qquad x \in (a,b).$$

Задача 35.18. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(0,1)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int_0^x (ix+2y)f(y)\,dy, \qquad x \in (0,1).$$

Розв'язок. В даній задачі можна скористатися попереднім зауваженням, якщо зрозуміти, що в даній задачі

$$K(x,y) = \begin{cases} (ix+2y), & \text{якщо } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{якщо } 0 \le x < y \le 1. \end{cases}$$

Проте, як показує досвід, у цьому випадку більшість студентів вважає більш привабливим шлях прямих обчислень через півторалінійну форму з заміною порядку інтегрування в подвійному інтегралі. А власне, маємо

$$(Af \mid g) = \int_0^1 \left(\int_0^x (ix+2y)f(y)\,dy \right) \bar{g}(x)\,dx = \int_0^1 \int_0^x (ix+2y)f(y)\bar{g}(x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 f(y) \left(\int_y^1 (ix+2y)\bar{g}(x)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 f(y) \overline{\left(\int_y^1 (-ix+2y)g(x)\,dx \right)} dy.$$

Звідки випливає, що

$$(A^*g)(y) = \int_y^1 (-ix+2y)g(x)\,dx,$$

або

$$(A^*f)(x) = \int_x^1 (-iy+2x)f(y)\,dy, \qquad x \in (0,1).$$

Задача 35.19. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(0,1)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin(x-y)f(y)\,dy, \qquad x \in (0,1).$$

Розв'язок. Маємо

$$(Af \mid g) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin(x-y)f(y)\,dy \right) \bar{g}(x)\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin(x-y)f(y)\bar{g}(x)\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 f(y) \left(\int\limits_{y^2}^1 \sin(x-y)\bar{g}(x)\,dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 f(y) \overline{\left(\int\limits_{y^2}^1 \sin(x-y)g(x)\,dx \right)} dy.$$

Звідки випливає, що

$$(A^*g)(y) = \int\limits_{y^2}^1 \sin(x-y)g(x)\,dx,$$

або

$$(A^*f)(x) = \int\limits_{x^2}^1 \sin(y-x)g(y)\,dy, \qquad x \in (0,1).$$

Задача 35.20. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(0,1)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int\limits_0^{x^3} (x^2+iy)f(y)\,dy, \qquad x \in (0,1).$$

Розв'язок. Маємо

$$(Af \mid g) = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} (x^2 + iy) f(y)\, dy \right) \bar{g}(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^{x^3} (x^2 + iy) f(y) \bar{g}(x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 f(y) \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 (x^2 + iy) \bar{g}(x)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 f(y) \overline{\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 (x^2 - iy) g(x)\, dx \right)} dy.$$

Звідки випливає, що

$$(A^* g)(y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^1 (x^2 - iy) g(x)\, dx, \qquad y \in (0, 1).$$

Або

$$(A^* f)(x) = \int_{\sqrt[3]{x}}^1 (y^2 - ix) f(y)\, dy, \qquad x \in (0, 1).$$

Задача 35.21. *Знайти спряжений до оператора A, який діє у просторі $L_2(0, \infty)$ за формулою:*

$$(Af)(x) = \int_0^{2x} \frac{f(y)\, dy}{(1 + x^2 + iy^3)}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Розв'язок. Маємо

$$(Af \mid g) = \int_0^\infty \left(\int_0^{2x} \frac{f(y)\, dy}{(1 + x^2 + iy^3)} \right) \bar{g}(x)\, dx = \int_0^\infty \int_0^{2x} \frac{f(y) \bar{g}(x)}{(1 + x^2 + iy^3)}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^\infty f(y) \left(\int_{y/2}^\infty \frac{\bar{g}(x)\, dx}{(1 + x^2 + iy^3)} \right) dy = \int_0^\infty f(y) \overline{\left(\int_{y/2}^\infty \frac{g(x)\, dx}{(1 + x^2 - iy^3)} \right)} dy.$$

Звідки випливає, що

$$(A^*g)(y) = \int\limits_{y/2}^{\infty} \frac{g(x)\,dx}{(1+x^2-iy^3)}, \qquad y \in (0,\infty).$$

Або

$$(A^*f)(x) = \int\limits_{x/2}^{\infty} \frac{f(y)\,dy}{(1+y^2-ix^3)}, \qquad x \in (0,\infty).$$

Спряжений до добутку і суми операторів.

Задача 35.22. *Знайти спряжений до оператора $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, що діє за формулою:*

$$(Af)(x) := (2+i\sin x)f(3x) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2x^2+4t^2} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Розв'язок. Легко бачити, що оператор A можна подати у вигляді

$$A_1A_2 + A_3,$$

де оператори A_j діють за формулами:

$$(A_1f)(x) := (2+i\sin x)f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$(A_2f)(x) := f(3x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$(A_3f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2x^2+4t^2} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

З властивостей операції взяття спряженого маємо, що

$$A^* = A_2^*A_1^* + A_3^*.$$

Тому досить знайти оператори A_j^*. Використовуючи вже наведені вище міркування отримуємо, що

$$(A_1^*f)(x) = (2-i\sin x)f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$(A_2^*f)(x) = \frac{1}{3}f(x/3), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$(A_3^*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2t^2+4x^2} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

В результаті отримуємо, що

$$(A^* f)(x) = \frac{1}{3}(1 - i\sin(x/3))f(x/3) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2t^2+4x^2} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

36. Елементи спектральної теорії операторів. Спектр оператора.

Ми підійшли до заключної частини нашого курсу. Вона присвячена спектральній теорії лінійних операторів. Оскільки у нас залишається тільки декілька лекцій, то ми встигнемо ознайомитися лише з деякими елементами цієї теорії.

Спектр лінійного оператора.

Нехай X банахів простір і $A \in \mathcal{B}(X)$, тобто A - лінійний всюди заданий неперервний оператор в X. Важливою характеристикою оператора A є його спектр.

Нагадаємо, що оператор A називається оборотним в алгебрі $\mathcal{B}(X)$, якщо існує оператор $B \in \mathcal{B}(X)$ такий, що

$$AB = I = BA.$$

Якщо вказаний оператор B існує, то він є єдиним і ми позначаємо його через A^{-1} та називаємо оберненим до оператора A. Домовимося множину всіх оборотних операторів в алгебрі $\mathcal{B}(X)$ позначати через $\mathcal{B}_{\text{inv}}(X)$.

Вправа 36.1. *Довести, що $\mathcal{B}_{\text{inv}}(X)$ разом з операцією множення операторів утворює мультиплікативну групу.*

З теореми Банаха про обернений оператор випливає, що

$$(36.1) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(X) \qquad (A \in \mathcal{B}_{\text{inv}}(X)) \Longleftrightarrow (\ker(A) = \{0\}) \wedge (\operatorname{ran}(A) = X).$$

Зауваження 36.2. *Якщо $A \in \mathcal{B}(X)$ і $\ker(A) = \{0\}$, то оператор A є ін'єктивним відображенням. Тому обернений оператор A^{-1} існує. Однак, якщо не виконана умова $\operatorname{ran}(A) = X$, то A^{-1} не є всюди заданим на X, а, отже, $A^{-1} \notin \mathcal{B}(X)$, тобто оператор A не є оборотним в алгебрі $\mathcal{B}(X)$.*

Означення 36.3. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$. Резольвентною множиною оператора A називається множина в комплексній площині $\mathbb{C}$, яку ми позначаємо через $\rho(A)$ і задаємо формулою*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \in \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}(X)\}.$$

Доповнення до резольвентної множини $\rho(A)$ називається спектром оператора A і позначається через $\sigma(A)$, тобто

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Резольвентою оператора A називається операторнозначна функція

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto A_\lambda := (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X).$$

Нижче ми покажемо, що спектр оператора A є компактом, а резольвента оператора A є аналітичною функцією на $\rho(A)$. Але, для цього нам потрібно попередньо встановити ряд важливих фактів.

Ряд Неймана.

Означення 36.4. *Рядом Неймана оператора $A \in \mathcal{B}(X)$ називається формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$, тобто формальна сума операторної геометричної прогресії.*

Теорема 36.5. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і виконана умова*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} < 1. \tag{36.2}$$

Тоді:

(1) *ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в алгебрі $\mathcal{B}(X)$;*

(2) *оператор $I - A$ є оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(X)$ і $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Доведення. Якщо виконана умова (36.2), то за ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$ є збіжний. Отже, ряд Неймана є абсолютно збіжним. Отже, виконана достатня умова збіжності ряду в банаховому просторі $\mathcal{B}(X)$. Позначимо через S суму ряду Неймана і нехай $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$. Зауважимо, що

$$(I - A)S_n = I - A^{n+1} = S_n(I - A).$$

Зі збіжності ряду Неймана випливає, що $S_n \to S$ і $A^n \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси, враховуючи неперервність добутку операторів, отримуємо, що

$$(I - A)S = \lim_{n\to\infty}(I - A)S_n = I = \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) = S(I - A),$$

тобто оператор $(I - A)$ є оборотний і $(I - A)^{-1} = S$. Теорема доведена. □

Означення 36.6. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$. Тоді число*

$$r(A) := \varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

називають спектральним радіусом оператора A.

Оскільки для довільного $A \in \mathcal{B}(X)$ і довільного $n \in \mathbb{N}$ $\|A^n\| \le \|A\|^n$, то

$$r(A) \le \|A\|, \qquad A \in \mathcal{B}(X). \tag{36.3}$$

Наслідок 36.7. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $\|A\| < 1$. Тоді ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в алгебрі $\mathcal{B}(X)$ і*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Крім того, справедлива оцінка

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{36.4}$$

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $\|A\| < 1$. Оскільки $r(A) \le \|A\| < 1$, то згідно з теоремою 36.5 оператор $I - A$ оборотний і

$$\|(I - A)^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

□

Теорема про збурення оборотного оператора.

Теорема 36.8. *Нехай $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}(X)$ і $B \in \mathcal{B}(X)$. Якщо виконана умова*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}, \tag{36.5}$$

то $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}(X)$.

Доведення. Зауважимо, що

$$B = A - (A - B) = A(I - A^{-1}(A - B)).$$

Нехай $K := A^{-1}(A - B)$. З умови (36.5) випливає, що

$$\|K\| \le \|A^{-1}\|\|A - B\| < 1.$$

Тому згідно з теоремою 36.5 оператор $I-K$ є оборотний. Зі сказаного випливає, що оператор B оборотний і $B^{-1}=(I-K)^{-1}A^{-1}$. $\square$

З теореми 36.16 очевидним чином випливає

Наслідок 36.9. *Множина $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}(X)$ є відкритою множиною в $\mathcal{B}(X)$.*

Вправа 36.10. *Доведіть, що рівномірна границя послідовності необоротних операторів є необоротним оператором.*

Теорема про спектр оператора $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 36.11. *Нехай $T \in \mathcal{B}(X)$. Тоді:*

(1) *резольвентна множина $\rho(T)$ є відкритою множиною;*

(2) *спектр оператора T є компактом, причому*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le r(T)\}. \tag{36.6}$$

Доведення. 1) Нехай $\lambda_0 \in \rho(T)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Розглянемо оператори

$$A = T - \lambda_0 I, \qquad B = T - \lambda I.$$

За означенням $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}(X)$ і $A^{-1} = T_{\lambda_0}$. Зауважимо, що

$$\|A - B\| = |\lambda - \lambda_0|.$$

Тому з огляду на теорему про збурення оборотного оператора, якщо

$$|\lambda - \lambda_0| < \|T_{\lambda_0}\|^{-1},$$

то оператор $T - \lambda I$ є оборотний, тобто $\lambda \in \rho(T)$. Зі сказаного випливає, що λ_0 є внутрішньою точкою множини $\rho(T)$. З довільності точки $\lambda_0 \in \rho(T)$ випливає, що $\rho(T)$ є відкритою множиною в $\mathbb{C}$.

2) З 1) випливає, що спектр $\sigma(T)$ є замкнена множина. Тому нам досить довести включення (36.6). Припустимо, що $\lambda \in \mathbb{C}$ і $|\lambda| > r(T)$. Розглянемо оператор $A := \lambda^{-1}T$. Оскільки

$$\|A^n\| = |\lambda^{-n}|\|T^n\|,$$

то

$$r(A) = \varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \varlimsup_{n\to\infty} |\lambda|^{-1}\|T^n\|^{1/n} = |\lambda|^{-1} \varlimsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = |\lambda|^{-1} r(T) < 1.$$

З огляду на теорему про ряд Неймана оператор $I - A$ є оборотний. Оскільки

$$T - \lambda I = -\lambda(I - A),$$

то оборотним є і оператор $T - \lambda I$, тобто $\lambda \in \rho(T)$. Отже,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T).$$

Звідки, враховуючи, що $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, отримуємо включення (36.6). $\square$

Зауваження 36.12. *Оскільки*

$$r(T) \leq \|T\|, \qquad T \in \mathcal{B}(X),$$

то з (36.6) *випливає, що*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}, \tag{36.7}$$

тобто спектр $\sigma(T)$ міститься крузі радіуса $\|T\|$ з центром в нулі.

Можна довести, що число $r(T)$ є найменшим серед чисел $r \geq 0$, для яких

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}.$$

Означення 36.13. *Нехай Ω - відкрита множина в $\mathbb{C}$ і f - функція, яка задана на Ω і приймає значення в банаховому просторі X. Функція f називається аналітичною на Ω, якщо для кожного $\lambda_0 \in \Omega$ існує $\delta > 0$ таке, що в крузі $K_\delta(\lambda_0) := \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ функцію f можна подати у вигляді*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n, \qquad \lambda \in K_\delta(\lambda_0),$$

де $a_n \in X$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і степеневий векторний ряд рівномірно збігається в $K_\delta(\lambda_0)$.

Теорема про аналітичність резольвенти оператора.

Теорема 36.14. *Нехай $T \in \mathcal{B}(X)$. Тоді:*

(1) *резольвента $\rho(T) \ni \lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{B}(X)$ є аналітична в $\rho(T)$;*

(2) *якщо $\lambda_0 \in \rho(T)$ і $0 < \delta < \|T_{\lambda_0}\|^{-1}$, то*

$$T_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n T_{\lambda_0}^{n+1}, \qquad \lambda \in K_\delta(\lambda_0), \tag{36.8}$$

причому ряд в (36.8) *рівномірно збіжний в крузі $K_\delta(\lambda_0)$;*

(3) *в зовнішності круга $K_\delta(0)$ з $\delta > \|T\|$ резольвента розкладається в ряд Лорана*

$$T_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n, \tag{36.9}$$

який рівномірно збіжний в області $\{z \mid |z| \geq \delta\}$.

Доведення. Очевидно, що досить довести пункти 2) і 3).

2) Нехай $\lambda_0 \in \rho(T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $0 < \delta < \|T_{\lambda_0}\|^{-1}$. Припустимо, що $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$. Зауважимо, що

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}].$$

Розглянемо оператор $A := (\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}$. Оскільки

$$\|A\| = |\lambda - \lambda_0|\|T_{\lambda_0}\| \le \delta\|T_{\lambda_0}\| < 1,$$

то згідно з теоремою про ряд Неймана оператор $I - A$ є оборотний і

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n T_{\lambda_0}^n.$$

Звідси випливає, що $\lambda \in \rho(T)$ і

$$(T - \lambda I)^{-1} = (I - A)^{-1}T_{\lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n T_{\lambda_0}^{n+1}. \tag{36.10}$$

Оскільки

$$\|(\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}\| = \alpha < \delta\|T_{\lambda_0}\| < 1,$$

то

$$\|(\lambda - \lambda_0)^n T_{\lambda_0}^{n+1}\| \le (\delta\|T_{\lambda_0}\|)^n\|T_{\lambda_0}\|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а, отже, ряд в (36.10) рівномірно збігається в крузі $K_\delta(\lambda_0)$.

3) Нехай $\delta > \|T\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $|\lambda| \ge \delta$. Оскільки

$$T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$$

і

$$\|\lambda^{-1}T\| \le \delta^{-1}\|T\| < 1,$$

то $\lambda \in \rho(T)$ і

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n. \tag{36.11}$$

Оскільки

$$\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| \le \alpha := \delta^{-1}\|T\|\| < 1,$$

то ряд в (36.11) рівномірно збігається в області $\{\lambda \mid |\lambda| \ge \delta\}$. $\square$

Класифікація точок спектру.

Виявляється, що різні точки спектру можуть мати різну природу. Тому їх класифікують за відповідними ознаками. Є декілька таких класифікацій. Ми розглянемо одну з найбільш вживаних класифікацій, коли спектр оператора A розбивається на точковий спектр - $\sigma_p(A)$, неперервний спектр - $\sigma_c(A)$ і залишковий спектр - $\sigma_r(A)$.

Нагадаємо, що згідно з теоремою Банаха про обернений оператор

$$(36.12) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(X) \qquad (A \in \mathcal{B}_{\text{inv}}(X)) \Longleftrightarrow (\ker(A) = \{0\}) \wedge (\operatorname{ran}(A) = X).$$

Тому точка $\lambda \in \mathbb{C}$ належить спектру оператора $A \in \mathcal{B}(X)$, якщо не виконується або умова $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, або умова $\operatorname{ran}(A - \lambda I) = X$.

Означення 36.15. *Нехай* $A \in \mathcal{B}(X)$. *Тоді:*

$\sigma_p(A) :=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$,

$\sigma_c(A) :=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\ker(A - \lambda I) = \{0\}) \wedge (\operatorname{ran}(A - \lambda I) \neq X) \wedge (\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = X)\}$,

$\sigma_r(A) :=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\ker(A - \lambda I) = \{0\}) \wedge (\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} \neq X)\}$.

Теорема 36.16. *Нехай* $A \in \mathcal{B}(X)$. *Тоді*

$$(36.13) \qquad \sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A).$$

Доведення. З означення 36.18 випливає, що $\sigma_p(A)$ не перетинається з $\sigma_c(A)$ і $\sigma_r(A)$, а $\sigma_c(A)$ не перетинається з $\sigma_r(A)$. З огляду на (36.12) ми маємо, що

$$\sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A) \subset \sigma(A).$$

З іншого боку, якщо точка λ не належить множині

$$\sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A),$$

то

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\} \quad \text{і} \quad \operatorname{ran}(A - \lambda I) = X.$$

Тому згідно з теоремою Банаха (див. (36.12)) оператор $A - \lambda I$ є оборотний, тобто $\lambda \notin \sigma(A)$. А це означає, що

$$\sigma(A) \subset \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A).$$

Тим самим теорема доведена. □

Означення 36.17. *Число* $\lambda \in \mathbb{C}$ *називається власним числом оператора* $A \in \mathcal{B}(X)$, *якщо існує ненульовий елемент* $x \in X$ *такий, що* $Ax = \lambda x$. *При цьому* x *називається власним вектором оператора* A, *що відповідає власному числу* λ.

Якщо λ *є власним числом оператора* A, *то* $\ker(A - \lambda I)$ *називається власним підпростором оператора* A, *що відповідає власному числу* λ.

Оператори обмежені знизу.

Означення 36.18. *Оператор* $A \in \mathcal{B}(X)$ *називається обмеженим знизу, якщо*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \geq \delta \|x\|.$$

Вправа 36.19. *Доведіть, що якщо оператор* $A \in \mathcal{B}(X)$ *є оборотний в алгебрі* $\mathcal{B}(X)$, *то він є обмеженим знизу.*

Теорема 36.20. *Нехай оператор* $A \in \mathcal{B}(X)$ *є обмеженим знизу. Тоді:*

(1) $\operatorname{ran}(A)$ *є замкненим підпростором в* X;

(2) *оператор* A^{-1} *неперервно діє з* $\operatorname{ran}(A)$ *в* X.

Доведення. 1) Візьмемо довільне $y \in \overline{\operatorname{ran}(A)}$. Тоді в $\operatorname{ran}(A)$ існує послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Очевидно, що для кожного y_n існує $x_n \in X$ таке, що $y_n = Ax_n$. Покажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна. Дійсно, для довільних $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq \delta \|x_n - x_m\|,$$

тобто

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\delta}\|y_n - y_m\|. \tag{36.14}$$

Оскільки послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна, то вона фундаментальна. А, отже,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0.$$

Звідки, враховуючи (36.14), отримуємо, що

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0,$$

тобто послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна. Нехай вона збігається до $x \in X$. Тоді з врахуванням неперервності оператора A отримуємо

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax,$$

тобто $y \in \operatorname{ran}(A)$. Звідки випливає, що $\overline{\operatorname{ran}(A)} \subset \operatorname{ran}(A)$, тобто $\operatorname{ran}(A)$ є замкненим підпростором.

2) З обмеженості знизу оператора A випливає, що

$$\|Ax\| \geq \delta\|x\|, \qquad x \in X. \tag{36.15}$$

Звідки робимо висновок, що $\ker A = \{0\}$. Тому оператор A^{-1} існує і діє з $\operatorname{ran}(A)$ в X. Для довільного $y \in \operatorname{ran}(A)$ покладемо $x = A^{-1}y \in X$. Тоді $Ax = y$. З означення 36.18 випливає, що

$$\|y\| = \|Ax\| \geq \delta\|x\| = \delta\|A^{-1}y\|, \qquad y \in \operatorname{ran}(A).$$

Отже,

$$\|A^{-1}y\| \leq \delta^{-1}\|y\|, \qquad y \in \operatorname{ran}(A),$$

тобто оператор A^{-1} є обмежений. Тому він неперервно діє з $\operatorname{ran}(A)$ в X. □

Наслідок 36.21. *Нехай оператор $A \in \mathcal{B}(X)$ обмежений знизу і $\overline{\operatorname{ran}(A)} = X$. Тоді оператор A є оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(X)$.*

Доведення. Нехай виконані умови наслідку. Тоді згідно з теоремою 36.20

$$\operatorname{ran}(A) = \overline{\operatorname{ran}(A)} = X.$$

Тому згідно з тією ж теоремою 36.20 A^{-1} неперервно відображає X в X, тобто A - оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(X)$. □

Наслідок 36.22. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Якщо оператор $A-\lambda I$ обмежений знизу, то або $\lambda \in \rho(A)$, або $\lambda \in \sigma_r(A)$.*

Доведення. Нехай виконані умови наслідку. Оскільки оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу, то $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$. У випадку, коли $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} \neq X$, точка λ за означенням належить $\sigma_r(A)$. Якщо ж $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = X$, то з огляду на наслідок 36.21 оператор $A - \lambda I$ є оборотний, тобто $\lambda \in \rho(A)$. □

37.1. **Многочлени від оператора.** Позначимо через $\mathscr{P}$ лінійний простір всіх многочленів з комплексними коефіцієнтами. Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$, $p \in \mathscr{P}$ і

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Означимо многочлен від оператора $A \in \mathcal{B}(X)$ формулою

$$p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j. \tag{37.1}$$

Формула (37.1) задає відображення

$$\mathscr{P} \ni p \mapsto p(A) \in \mathcal{B}(X). \tag{37.2}$$

Це відображення можна розглядати як продовження дії многочлена з $\mathbb{C}$ на алгебру $\mathcal{B}(X)$. Дійсно, алгебру $\mathbb{C}$ комплекних чисел можна вкласти в $\mathcal{B}(X)$ з допомогою відображення

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda I \in \mathcal{B}(X)$$

і ототожнити з підалгеброю $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Вправа 37.1. *Доведіть, що для довільних $A \in \mathcal{B}(X)$, $p, q \in \mathscr{P}$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ виконуються рівності:*

$$\begin{gathered}(\alpha p + \beta q)(A) = \alpha f(A) + \beta q(A),\\ (pq)(A) = p(A)q(A).\end{gathered} \tag{37.3}$$

А які ще функції можна вираховувати від операторів? Замість многочленів можна розглянути раціональні функції, тобто функції, що мають вигляд

$$f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)},$$

де p і q многочлени. Позначимо через $\mathscr{R}$ множину всіх раціональних функцій. Зауважимо, що $\mathscr{R}$ утворює функціональну алгебру, тобто раціональні функції можна додавати, множити на число і множити між собою. Знайдемо відповідну формулу для $f(A)$. Розглянемо простий дріб, тобто функцію вигляду

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \alpha}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

де α - фіксована точка (полюс). Якщо α не належить спектру оператора A, то природньо припустити, що

$$f(A) = (A - \alpha I)^{-1}.$$

Припустимо, що многочлен $q \in \mathscr{P}$ не обертається в нуль на спектрі оператора A. Тоді його можна подати у вигляді

$$q(\lambda) = c_0 \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j),$$

де $c_0 \neq 0$ і λ_j - нулі многочлена q (з врахуванням їх кратності). Зауважимо, що оскільки q не обертається в нуль на спектрі оператора A, то $\lambda_j \notin \sigma(A)$. Розглянемо раціональну функцію f вигляду

$$f(\lambda) = \frac{1}{q(\lambda)},$$

З огляду на сказане вище, природньо вважати, що

$$f(A) = c_0 (A - \lambda_1 I)^{-1} \cdots (A - \lambda_n I)^{-1}.$$

З вправи 37.1 випливає, що тоді

$$f(A) = [q(A)]^{-1}.$$

Розглянемо тепер загальний випадок. Позначимо через $\mathscr{R}(A)$ множину всіх раціональних функцій, полюси яких не потрапляють на спектр оператора A. Якщо $f \in \mathscr{R}(A)$, то функцію f можна подати у вигляді

$$f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)},$$

де p і q многочлени, причому q не обертається в нуль на спектрі оператора A. Покладемо за означенням

$$f(A) = p(A)[q(A)]^{-1}. \tag{37.4}$$

Вправа 37.2. *Доведіть, що для довільних $A \in \mathcal{B}(X)$, $f, g \in \mathscr{R}(A)$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ виконуються рівності:*

$$\begin{gathered} (\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A), \\ (fg)(A) = f(A) g(A). \end{gathered} \tag{37.5}$$

Теорема про відображення спектрів.

Теорема 37.3. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $f \in \mathscr{R}(A)$. Тоді*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)). \tag{37.6}$$

Доведення. 1) Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $f \in \mathscr{R}(A)$. Припустимо, що f не обертається в нуль на $\sigma(A)$. Тоді функція $g := \frac{1}{f}$ належить $\mathscr{R}(A)$ і (див. вправу 37.2)

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = (fg)(A) = I.$$

Отже оператор $f(A)$ є оборотний.

2) Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$ і $f \in \mathscr{R}(A)$. Припустимо, що $\alpha \notin f(\sigma(A))$. Тоді функція

$$\varphi(\lambda) := f(\lambda) - \alpha$$

не обертається в нуль на $\sigma(A)$. З пункту 1) випливає, що оператор $\varphi(A)$ є оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(X)$. Але,

$$\varphi(A) := f(A) - \alpha I.$$

Тому $\alpha \notin \sigma(f(A))$. Таким чином ми довели імплікацію

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (\alpha \notin f(\sigma(A))) \Longrightarrow (\alpha \notin \sigma(f(A))).$$

З неї випливає, що якщо $\alpha \in \sigma(f(A))$, то $\alpha \in f(\sigma(A))$, тобто

$$\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A)).$$

3) Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$, $f \in \mathscr{R}(A)$ і $\alpha \in f(\sigma(A))$. Покажемо, що оператор $\varphi(A)$ є необоротний.

Оскільки $\alpha \in f(\sigma(A))$, то функція

$$\varphi(\lambda) := f(\lambda) - \alpha$$

обертається в нуль в деякій точці $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Розглянемо функцію

$$g(\lambda) := \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Очевидно, що $g \in \mathscr{R}(A)$ і

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda).$$

Тому

$$\varphi(A) = (A - \lambda_0 I)g(A) = g(A)(A - \lambda_0 I). \tag{37.7}$$

Припустимо, що оператор $\varphi(A)$ є оборотний. Тоді

$$\operatorname{ran}(\varphi(A)) = X, \qquad \ker(\varphi(A)) = \{0\}.$$

Звідки, враховуючи (37.7) отримуємо, що

$$\operatorname{ran}(A - \lambda_0 I) = X, \qquad \ker(A - \lambda_0 I) = \{0\}.$$

Тому згідно з теоремою Банаха про обернений оператор $A - \lambda_0 I$ є оборотний. Отримали суперечність, бо $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Отже, оператор $\varphi(A)$ є необоротний. Але,

$$\varphi(A) := f(A) - \alpha I.$$

Тому $\alpha \in \sigma(f(A))$. Таким чином ми довели імплікацію
$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (\alpha \in f(\sigma(A))) \Longrightarrow (\alpha \in \sigma(f(A)))$$
тобто
$$f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A)).$$
Звідси, враховуючи пункт 2), отримуємо рівність
$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)).$$
□

Приклади застосування теореми про відображення спектрів.

1) Припустимо, що $A \in \mathcal{B}(X)$, $p \in \mathscr{P}$ і $p(A) = 0$. Що можна сказати про спектр оператора A?

З теореми про відображення спектрів випливає, що
$$p(\sigma(A)) = \sigma(p(A)) = \sigma(0).$$
Спектр нульового оператора складається тільки з нуля, тобто
$$\sigma(0) = \{0\}.$$
Отже,
$$p(\sigma(A)) = \{0\}.$$
Тому
$$\sigma(A) \subset p^{-1}(0).$$

2) Припустимо, що $A \in \mathcal{B}(X)$ і
$$(0,1) \subset \sigma(A) \subset (-1,1]$$
Що можна сказати про спектр оператора A^2?

З теореми про відображення спектрів випливає, що
$$\sigma(A^2) = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$
Тому
$$(0,1) \subset \sigma(A^2) \subset [0,1].$$
Але, спектр оператора є замкненим. Отже
$$\sigma(A^2) = [0,1].$$

38. Самоспряжені оператори. Спектр самоспряженого оператора.

В даній лекції ми розглянемо властивості самоспряжених операторів. Всюди в даній лекції H - гільбертів простір.

Означення 38.1. *Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається самоспряженим, якщо $A^* = A$.*

Означення 38.2. *Квадратичною формою оператора називається функція*
$$H \ni x \to (Ax \mid x) \in \mathbb{C}.$$

Вправа 38.3. *Щоб оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ був самоспряженим необхідно і досить, щоб його квадратична форма була дійснозначною.*

Наступна теорема дає нам ще одну формулу для знаходження норми самоспряженого оператора.

Теорема про норму обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 38.4. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді*
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax \mid x)|.$$

Доведення. Нехай виконані умови теореми і
$$\alpha := \sup_{\|x\|=1} |(Ax \mid x)|.$$

1) Використовуючи нерівність Буняковського отримуємо, що
$$|(Ax \mid x)| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = 1.$$
Тому $\alpha \leq \|A\|$.

2) Нехай $x \in H \setminus \{0\}$. Тоді
$$|(Ax \mid x)| = \|x\|^2 |(A\tfrac{x}{\|x\|} \mid \tfrac{x}{\|x\|})| \leq \alpha\|x\|^2.$$
Звідки випливає, що
$$|(Ax \mid x)| \leq \alpha\|x\|^2, \qquad x \in H.$$

Скористаємося тим, що для довільних $x, y \in H$

$$(38.1) \quad (A(x+y) \mid x+y) - (A(x-y) \mid x-y) = 2(Ax \mid y) + 2(Ay \mid x) = \\ = 2(Ax \mid y) + 2(y \mid Ax) = 4\operatorname{Re}(Ax \mid y).$$

Звідки випливає, що

$$(38.2) \quad 4|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \le |(A(x+y \mid x+y)| + |(A(x-y \mid x-y)| \le \\ \le \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 = \alpha(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2).$$

Нехай $\|x\| = \|y\| = 1$. Тоді використовуючи рівність паралелограма, отримуємо

$$4|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \le \alpha(\|x+y\|^2 + \|x+y\|^2) = \alpha(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) = 4\alpha.$$

Отже,

$$|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \le \alpha, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Припустимо, що $\|x\| = 1$, $\|Ax\| \neq 0$ і покладемо $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Оскільки $\|y\| = 1$ і

$$|\operatorname{Re}(Ax \mid \tfrac{Ax}{\|Ax\|})| = \|Ax\|,$$

то з останньої нерівності випливає, що

$$\|Ax\| \le \alpha, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = 1,$$

тобто

$$\|A\| \le \alpha.$$

З доведених нерівностей маємо, що $\|A\| = \alpha$. Теорема доведена.

$\square$

Співвідношення між областю значень оператора A і ядром спряженого оператора A^*.

Теорема 38.5. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді*

$$(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*, \qquad \overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^\perp.$$

Доведення. Доведемо першу рівність. Маємо

$$(y \perp \operatorname{ran} A) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (Ax \mid y) = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (x \mid A^*y) = 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A^*y \perp H) \Leftrightarrow (A^*y = 0) \Leftrightarrow (y \in \ker A^*).$$

Отже,

$$(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*.$$

Звідси випливає, що
$$(\ker A^*)^\perp = [(\operatorname{ran} A)^\perp]^\perp.$$
З неперервності скалярного добутку випливає, що
$$(\operatorname{ran} A)^\perp = (\overline{\operatorname{ran} A})^\perp.$$
А згідно з теоремою про ортогональну проекцію
$$[(\overline{\operatorname{ran} A})^\perp]^\perp = \overline{\operatorname{ran} A}.$$
Тому
$$\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^\perp.$$
□

Теорема про спектр обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 38.6. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $\lambda = \xi + i\varepsilon$, де $\xi, \varepsilon \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon \neq 0$. Покажемо, що оператор $A - \lambda I$ є обмежений знизу. Дійсно, для довільного $x \in H$
$$\operatorname{Im}((A - \lambda I)x \mid x) = -\operatorname{Im}\lambda(x \mid x) = -\varepsilon\|x\|^2,$$
а , отже,
$$|\varepsilon|\|x\|^2 = |\operatorname{Im}((A - \lambda I)x \mid x)| \le |((A - \lambda I)x \mid x)| \le \|(A - \lambda I)x\|\|x\|.$$
Тут ми скористалися нерівністю Буняковського. З останньої нерівності маємо, що
$$\|(A - \lambda I)x\| \ge |\varepsilon|\|x\|.$$
Тим самим обмеженість знизу оператора $A - \lambda I$ доведена. З обмеженості знизу випливає, що
$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$
Використовуючи співвідношення між областю значень оператора і ядром його спряженого, маємо
$$\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = [\ker(A - \lambda I)^*]^\perp = [\ker(A - \bar{\lambda} I)]^\perp = \{0\}^\perp = H.$$
Оскільки оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу і $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = H$, то він є оборотний. Отже,
$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$
Звідки випливає, що $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. □

Грані самоспряженого оператора.

Означення 38.7. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Числа*

$$\beta(A) := \sup_{\|x\|=1} (Ax \mid x), \qquad \alpha(A) := \inf_{\|x\|=1} (Ax \mid x)$$

називаються відповідно верхньою і нижньою гранями самоспряженого оператора A.

Вправа 38.8. *Довести, що для самоспряженого оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ справедлива рівність*

$$\|A\| = \max\{|\alpha(A)|, |\beta(A)|\}.$$

Уточнена теорема про спектр обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 38.9. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma(A) \subset [\alpha(A), \beta(A)]$, причому грані $\alpha(A)$ і $\beta(A)$ є точками спектру.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha := \alpha(A)$ і $\lambda < \alpha$. Покажемо, що оператор $A - \lambda I$ є обмежений знизу. Зауважимо, що для довільного $x \in H \setminus \{0\}$

$$(Ax \mid x) = (A\frac{x}{\|x\|} \mid \frac{x}{\|x\|})\|x\|^2 \geq \alpha\|x\|^2.$$

Звідки випливає, що

$$(Ax \mid x) \geq \alpha\|x\|^2, \qquad x \in H. \tag{38.3}$$

Тому

$$((A - \lambda)x \mid x) = (Ax \mid x) - \lambda\|x\|^2 \geq (\alpha - \lambda)\|x\|^2$$

Використовуючи нерівність Буняковського, отримуємо

$$(\alpha - \lambda)\|x\|^2 \leq ((A - \lambda)x \mid x) \leq \|(A - \lambda)x\|\|x\|.$$

А , отже,

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq (\alpha - \lambda)\|x\|.$$

Тим самим обмеженість знизу оператора $A - \lambda I$ доведена. З обмеженості знизу випливає, що

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Використовуючи співвідношення між областю значень оператора і ядром його спряженого, маємо

$$\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = [\ker(A - \lambda I)^*]^\perp = [\ker(A - \lambda I)]^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

Оскільки оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу і $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = H$, то він є оборотний. Отже,

$$(-\infty, \alpha) \subset \rho(A).$$

Аналогічно показуємо, що

$$(\beta(A), \infty) \subset \rho(A).$$

Тому $\sigma(A) \subset [\alpha(A), \beta(A)]$.

Залишається довести, точки $\alpha(A)$ і $\beta(A)$ є точками спектру. Досить показати, що $\beta(A) \in \sigma(A)$. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$0 \leq \alpha(A) \leq \beta(A).$$

Дійсно, при потребі можна перейти від оператора A до оператора $A - \lambda I$ з $\lambda < \alpha$. При цьому маємо, що

$$\alpha(A - \lambda I) = \alpha(A) - \lambda > 0, \qquad \beta(A - \lambda I) = \beta(A) - \lambda > 0$$

і

$$\sigma(A - \lambda I) = \{\xi - \lambda \mid \xi \in \sigma(A)\}.$$

Отже, нехай виконана умова

$$0 \leq \alpha(A) \leq \beta(A).$$

і $\beta := \beta(A)$. Покажемо, що оператор $A - \beta I$ є необоротним, для цього досить показати, що він не є обмежений знизу.

З означення верхньої грані оператора A випливає, що існує послідовність $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в H така, що $\|e_n\| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{n\to\infty} (Ae_n \mid e_n) = \beta.$$

Тоді, враховуючи, що $\|Ae_n\|^2 \leq \|A\|^2 = \beta^2$, маємо

$$\begin{aligned}\|(A-\beta I)e_n\|^2 &= \|Ae_n\|^2 - 2\beta(Ae_n \mid e_n)| + \beta^2 \leq \\ &\leq \beta^2 - 2\beta(Ae_n \mid e_n)| + \beta^2 = 2\beta(\beta - (Ae_n \mid e_n)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\beta I)e_n\| = 0.$$

А це означає, що оператор $A - \beta I$ не є обмежений знизу. Таким чином $\beta \in \sigma(A)$. Теорема доведена. □

В самоспряженого оператора відсутній залишковий спектр.

Теорема 38.10. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Доведення. Припустимо, що точка $\lambda \in \mathbb{R}$ є точкою залишкового спектру самоспряженого оператора $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді $\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H$, а, отже,

$$(\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)})^\perp \neq \{0\}.$$

Оскільки

$$(\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)})^\perp = \ker(A-\lambda I)^* = \ker(A-\lambda I),$$

$\ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$, тобто $\lambda \in \sigma_p(A)$. Але, $\sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$. Суперечність. Отже, $\sigma_r(A) = \emptyset$. □

Теорема про власні вектори самоспряженого оператора.

Теорема 38.11. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Якщо λ і μ два різні власні значення оператора A, то*

$$\ker(A-\lambda I) \perp \ker(A-\mu I).$$

Доведення. Нехай $f \in \ker(A-\lambda I)$ і $g \in \ker(A-\mu I)$, тобто

$$Af = \lambda f, \qquad Ag = \mu g.$$

Тоді

$$\lambda(f \mid g) = (Af \mid g) = (f \mid Ag) = \mu(f \mid g).$$

Тут ми врахували, що $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$(\lambda - \mu)(f \mid g) = 0.$$

Оскільки $\lambda - \mu \neq 0$, то $(f \mid g) = 0$. Теорема доведена. $\square$

Ортопроектори.

Означення 38.12. *Оператор $P : H \to H$ називається ортопроектором, якщо існує замкнений підпростір $G \subset H$ такий, що*

$$Pf = \operatorname{pr}_G f.$$

При цьому ми кажемо, що P - ортопроектор на підпростір G.

Теорема 38.13. *Кожен ортопроектор є лінійним неперервним самоспряженим оператором в H. Його норма рівна одиниці або нулю.*

Доведення. Нехай P - ортопроектор на підпростір G. Для довільних $f, g \in H$

$$(f - Pf) \in G^{\perp}, \qquad (g - Pg) \in G^{\perp}.$$

Тому для довільних $a, b \in \mathbb{C}$

$$a(f - Pf) + b(g - Pg) \in G^{\perp}.$$

Отже,

$$[(af + bg) - (aPf + bPg)] \in G^{\perp}.$$

Оскільки $(aPf + bPg) \in G$, то з теореми про ортогональну проекцію випливає, що

$$P(af + bg) = aPf + bPg.$$

Отже, оператор P є лінійним.

З означенні ортогональної проекції випливає, що

$$\|\operatorname{pr}_G f\| \leq \|f\|,$$

тобто

$$\|Pf\| \leq \|f\|, \qquad f \in H.$$

Це означає, що $\|P\| \leq 1$.

Якщо $f \in G$, то, очевидно, $Pf = f$. Тому $\|P\| = 1$, якщо $G \neq \{0\}$ і $\|P\| = 0$, якщо $G = \{0\}$.

Залишається довести, що $P^* = P$. Для довільних $f, g \in H$

$$Pf, Pg \in G, \qquad f - Pf \perp G, \qquad g - Pg \perp G.$$

Тому

$$(Pf \mid g) = (Pf \mid g - Pg) + (Pf \mid Pg) = (Pf \mid Pg) = (f \mid Pg) - (f - Pf \mid Pg) = (f \mid Pg).$$

Отже,
$$(Pf \mid g) = (f \mid Pg), \qquad f, g \in H,$$
тобто $P^* = P$. $\square$

Наступна теорема дає необхідну і достатню умову, що оператор $P \in \mathcal{B}(H)$ є ортопроектором.

Теорема 38.14. *Щоб оператор $P \in \mathcal{B}(H)$ був ортопроектором необхідно і досить, щоб $P^2 = P$ і $P^* = P$.*

Доведення. Необхідність. З попередньої теореми випливає, що P є самоспряжений оператор. Оскільки $Pf \in G$ для довільного $f \in H$ і $Pg = g$ для довільного $g \in G$, то $P^2 = P$.

Достатність. Нехай $P \in \mathcal{B}(H)$ і $P^2 = P$, $P^* = P$. Розглянемо множини
$$G = \ker(I - P), \qquad F := \ker P.$$
Вони є замкненими підпросторами (бо $I - P$ і P є неперервними операторами в H). Оскільки $P^2 = P$, то
$$(I - P)P = P(I - P) = 0.$$
Отже,
$$\operatorname{ran} P \subset G.$$
Оскільки $Pg = g$ для довільного $g \in G$, то $G \subset \operatorname{ran} P$. Тому $G = \operatorname{ran} P$. Візьмемо довільне $f \in H$. Тоді для довільних $g \in G$
$$(f - Pf \mid g) = ((I - P)f \mid Pg) = (P(I - P)f \mid g) = 0,$$
отже, $(f - Pf) \perp G$. Це означає, що
$$Pf = \operatorname{pr}_G f.$$
Теорема доведена.

$\square$

Вправа 38.15. *Нехай оператори $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ є ортопроекторами і $P_1P_2 = 0$. Доведіть, що тоді $P_2P_1 = 0$.*

Означення 38.16. *Ортопроектори $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ називаються взаємно ортогональними якщо $P_1P_2 = 0$.*

Вправа 38.17. *Нехай ортопроектори $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ є взаємно ортогональними Доведіть, що їх сума $P_1 + P_2$ є ортопроектором.*

Вправа 38.18. *Нехай ортопроектори $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ і $P_1P_2 = P_2P_1$. Доведіть, що їх добуток P_1P_2 є ортопроектором.*

Вправа 38.19. *Нехай оператори $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ є ортопроекторами і їх сума є ортопроектором. Доведіть, що P_1 і P_2 є взаємно ортогональними.*

39. Компактні оператори.

Означення 39.1. *Лінійний оператор, що діє з банахового простору X в банахів простір Y називається компактним (або цілком неперервним), якщо він кожну обмежену множину переводить в цілком обмежену. Множину всіх лінійних компактних операторів $A : X \to Y$ ми будемо позначати через $\mathcal{B}_\infty(X, Y)$.*

З означення компактного оператора випливає, що він є неперервним. Дійсно, якщо оператор $A : X \to Y$ є компактний, то він переводить кожну обмежену множину в обмежену. Зокрема, він переводить одиничну кулю простору X в обмежену множину, а, отже, є обмеженим, тобто неперервним.

В даній лекції ми ознайомимося з властивостями компактних операторів.

Скінченновимірні оператори.

Означення 39.2. *Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається скінченновимірним, якщо* $\dim \operatorname{ran} A < \infty$.

Множину всіх скінченновимірних операторів ми будемо позначати через $\mathcal{B}_f(H)$, число $r(A) := \dim \operatorname{ran} A$ називемо рангом скінченновимірного оператора $A \in \mathcal{B}_f(H)$. Множину $\mathcal{B}_f(H)$ також називають множиною операторів скінченного рангу.

Теорема про зображення операторів скінченного рангу.

Теорема 39.3. *Нехай* $A \in \mathcal{B}_f(H)$ *і* $r(A) = n$. *Тоді оператор* A *можна зобразити у вигляді*

$$Af = \sum_{j=1}^{n} (f \mid \varphi_j)\psi_j,$$

де $(\varphi_j)_{j=1}^n$ *і* $(\psi_j)_{j=1}^n$ *послідовності в просторі* H.

Доведення. Нехай виконані умови теореми і $G := \operatorname{ran} A$. Тоді $\dim G = n$. Оскільки G є скінченновимірним підпростором, то G є замкненим. Тому в G існує ортонормована база. Нехай $(\psi_j)_{j=1}^n$ довільна ортонормована база в просторі G. Для довільного $f \in H$ вектор Af належить простору G. Тому його можна розкласти в ряд (скінченну суму) Фур'є:

$$Af = \sum_{j=1}^{n} (Af|\psi_j)\psi_j.$$

Оскільки

$$(Af|\psi_j) = (f \mid A^*\psi_j), \qquad j = 1, \dots n.,$$

то покладаючи $\varphi_j := A^*\psi_j$, отримуємо твердження теореми. □

Вправа 39.4. *Використовуючи попередню теорему, доведіть, що:*

(1) $\forall A, B \in \mathcal{B}_f(H) \quad r(A + B) \leq r(A) + r(B)$*;*
(2) $\forall A \in \mathcal{B}_f(H) \quad \forall U \in \mathcal{B}(H) \quad r(AU), r(UA) \leq r(A)$.

Компактність скінченновимірних операторів.

Покажемо, що кожен скінченновимірний оператор є компактним, тобто справедливе включення

$$\mathcal{B}_f(X, Y) \subset \mathcal{B}_\infty(X, Y)$$

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}_f(X, Y)$ і Ω - обмежена множина в X. Оскільки за означенням оператор A є обмеженим, то множина $A\Omega$ є обмежена. А оскільки оператор A є скінченновимірним, то множина $A\Omega$ лежить в скінченновимірному просторі. Але, в скінченновимірному просторі всі обмежені множини є цілком обмеженими (теорема Больцано-Вейєрштраса). Отже, A - компактний. □

Приклад обмеженого оператора, що не є компактним.

Нехай P - ортопроектор в гільбертовому просторі H, який проектує H на нескінченновимірний підпростір G. Оператор P є обмеженим ($\|P\| = 1$). Покажемо, що він не є компактним.

Доведення. Нехай $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ортонормована база в G. Множина $\Omega := \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ є обмежена і $P\Omega = \Omega$, бо $Pe_n = e_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Але, множина Ω не є цілком обмежена, бо

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}, \qquad \text{при} \quad n \neq m,$$

а, отже, для неї не існує скінченної $1/2$-сітки. Тому оператор P не є компактним. □

$\mathcal{B}_\infty(X,Y)$ - підпростір в $\mathcal{B}(X,Y)$.

Теорема 39.5. *Множина $\mathcal{B}_\infty(X,Y)$ є замкненим лінійним підпростором в $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Доведення. 1) Якщо множина $\mathscr{K} \subset Y$ є цілком обмеженою і $\alpha \in \mathbb{C}$, то, очевидно, що множина

$$\alpha\mathcal{K} := \{\alpha x \mid x \in \mathscr{K}\}$$

теж є цілком обмежена. Зі сказаного випливає, що для довільних $B \in \mathcal{B}_\infty(X,Y)$ і $\alpha \in \mathbb{C}$ оператор αB є компактним.

2) Нехай $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_\infty(X,Y)$ і Ω -обмежена множина в X. Покажемо, що оператор $A = A_1 + A_2$ є компактним. Оскільки $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_\infty(X,Y)$, то множини

$$\mathscr{K}_j := A_j\Omega, \qquad j = 1, 2,$$

є цілком обмежені. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і нехай E_j - скінченна $\varepsilon/2$-сітка множини $\mathscr{K}_j$. Очевидно, що алгебраїчна сума

$$E = E_1 + E_2 := \{x + y \mid x \in E_1, \quad y \in E_2\}$$

є скінченною ε-сіткою множини алгебраїчної суми

$$\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2 := \{x + y \mid x \in \mathscr{K}_1, \quad y \in \mathscr{K}_2\}.$$

Оскільки $A\Omega$ міститься в алгебраїчній сумі $\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2$, то E є скінченною ε-сіткою множини $A\Omega$. Отже, оператор A є компактний.

3) з пунктів 1) і 2) випливає, що $B \in \mathcal{B}_\infty(X,Y)$ є лінійним простором.

Покажемо, що $B \in \mathcal{B}_\infty(X,Y)$ є замкненою множиною в $\mathcal{B}(X,Y)$. Для цього потрібно довести, що якщо послідовність $(A_n)_{n=1}^\infty$ в $\mathcal{B}_\infty(X,Y)$ збігається в просторі $\mathcal{B}(X,Y)$ до деякого $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, то A є компактний.

Нехай Ω -обмежена множина в X і

$$C = 1 + \sup_{x\in\Omega} \|x\|_X.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\|A - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Тоді для кожного $x \in \Omega$

$$\|Ax - A_m x\|_Y \le \|A - A_m\| \|x\|_X \le C\frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2},$$

тобто множина $A_m\Omega$ є $\varepsilon/2$-сіткою множини $A\Omega$. Нехай E є скінченна $\varepsilon/2$-сітка множини $A_m\Omega$. Тоді E є ε-сіткою множини $A\Omega$. Отже оператор A є компактний. $\square$

Ідеал $\mathcal{B}_\infty(X)$.

Зауважимо, що $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$ це не тільки банахів простір, але також банахова алгебра, в якій роль множення відіграє множення операторів.

Пропоную самостійно зробити наступну вправу.

Вправа 39.6. *Доведіть, що для довільних $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$ і $B \in \mathcal{B}(X)$ оператори AB та BA є компактними.*

З цієї вправи і попередньої теореми випливає, що $\mathcal{B}_\infty(X)$ є замкненим двостороннім ідеалом в алгебрі $\mathcal{B}(X)$.

Теорема про апроксимацію.

Теорема 39.7. *Нехай H - гільбертів простір і $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний оператор $A_\varepsilon \in \mathcal{B}_f(H)$ такий, що*

$$\|A - A_\varepsilon\| \le \varepsilon.$$

Доведення. Нехай $S = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$, тобто S - одинична сфера у просторі H. Тоді множина AS є цілком обмежена. Нехай $\{x_j\}_{j=1}^n$ - скінченна ε-сітка для AS і

$$G := \operatorname{lin}\{x_j\}_{j=1}^n$$

лінійна оболонка множини $\{x_j\}_{j=1}^n$. Позначимо через P ортопроектор на G. Покладемо $A_\varepsilon := PA$ і зауважимо, що $A_\varepsilon \in \mathcal{B}_f(H)$. Для довільного $x \in S$

$$\|(A - A_\varepsilon)x\| = \|Ax - PAx\| = \inf_{u \in G} \|Ax - u\| \le \min_{1 \le j \le n} \|Ax - x_j\| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\|A - A_\varepsilon\| = \sup_{x \in S} \|(A - A_\varepsilon)x\| \le \varepsilon.$$

Теорема доведена □

З теореми про апроксимацію випливає

Наслідок 39.8. *Кожен компактний оператор* $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$ *є рівномірною границею послідовності в* $\mathcal{B}_f(H)$*, тобто* $\mathcal{B}_\infty(H) = \overline{\mathcal{B}_f(H)}$.

Компактність спряженого оператора.

Теорема 39.9. *Якщо* $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$*, то* $A^* \in \mathcal{B}_\infty(H)$.

Доведення. 1) Нехай $A \in \mathcal{B}_f(H)$. Тоді оператор A можна зобразити у вигляді

$$Ax = \sum_{j=1}^n (x \mid \varphi_j)\psi_j, \qquad x \in H,$$

де $(\varphi_j)_{j=1}^n$ і $(\psi_j)_{j=1}^n$ послідовності в H. Неважко перевірити, що для спряженого оператора справедлива формула

$$A^*x = \sum_{j=1}^n (x \mid \psi_j)\varphi_j, \qquad x \in H.$$

З неї випливає, що A^* теж є скінченновимірним.

2) Нехай $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді з наслідка теореми про апроксимацію випливає, що A є рівномірною границею деякої послідовності $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathcal{B}_f(H)$. З властивостей операції взяття спряженого випливає, що

$$\|A^* - A_n^*\| = \|A - A_n\| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тобто A^* належить замиканню множини $\mathcal{B}_f(H)$. Але, $\mathcal{B}_\infty(H) = \overline{\mathcal{B}_f(H)}$. Отже, A^* є компактний. □

Теореми Фредгольма.

Шведський математик Ерік Фредгольм (1866-1927), досліджуючи інтегральні рівняння довів ряд важливих результатів, які з часом назвали теорією Фредгольма. Результати Фредгольма були узагальнені Шаудером і Рісом. Фактично з теорії Фредгольма і починається розвиток теорії операторів. Ми розглянемо теорію Фредгольма в абстрактній постановці, як теорію рівнянь з компактним оператором у гільбертовому просторі.

Нехай $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$, H - гільбертів простір. Розглянемо три наступні рівняння:

$$x + Ax = y, \tag{39.1}$$

$$x + Ax = 0, \tag{39.2}$$

$$x + A^*x = 0. \tag{39.3}$$

Сформулюємо три знамениті теореми Фредгольма.

Перша теорема Фредгольма.

Теорема 39.10. *Щоб неоднорідне рівняння $x+Ax = y$ мало єдиний розв'язок при довільному $y \in H$ необхідно і досить, що однорідне рівняння $x + Ax = 0$ мало лише нульовий розв'язок.*

Друга теорема Фредгольма.

Теорема 39.11. *Кількість лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння $x+Ax = 0$ рівна кількості лінійно незалежних розв'язків спряженого однорідного рівняння $x + A^*x = 0$.*

Третя теорема Фредгольма.

Теорема 39.12. *Щоб неоднорідне рівняння $x + Ax = y$ мало розв'язок необхідно і досить, щоб права частина була ортогональна до кожного розв'язку спряженого однорідного рівняння $x + A^*x = 0$.*

За браком часу я лише розповім ідею доведення цих теорем.

1) Перший крок. Використовуючи теорему про апроксимацію все можна звести до випадку, коли $A \in \mathcal{B}_f(H)$.

2) Другий крок. Випадок $A \in \mathcal{B}_f(H)$ можна легко звести до випадку $\dim H < \infty$.

3) Третій крок. Випадок $\dim H < \infty$ зводиться до відповідних результатів в теорії матриць. Зокрема, в теорії матриць відповідниками перших двох теорем Фредгольма є:

a) теорема, яка стверджує, що необхідною і достатною умовою існування і єдиності розв'язку системи лінійних рівнянь є відмінність від нуля визначника матриці;

b) теорема про те, що ранги матриці і спряженої до неї є рівними.

Спектр компактного оператора.

Означення 39.13. *Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним числом оператора $A \in \mathcal{B}(X)$. Лінійний простір*

$$\ker(A - \lambda I)$$

називається власним підпростором оператора A, що відповідає власному числу λ. При цьому число $\dim \ker(A - \lambda I)$ називається геометричною кратністю власного числа λ. Лінійний простір

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(A - \lambda I)^n$$

називається кореневим підпростором оператора A, що відповідає власному числу λ. Його вимірність називається алгебраїчною кратністю (або просто кратністю) власного числа λ.

Лема 39.14. *Якщо A - самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H і $\lambda \in$ Ç є його власним числом, то власний і кореневий підпростори, що відповідають λ, є рівними. Зокрема, кратність власного числа є рівна його геометричній кратності.*

Доведення. Нехай A - самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H і $\lambda \in \mathbb{C}$ є його власним числом. Оскільки оператор A є самоспряжений, то $\lambda \in \mathbb{R}$. Розглянемо оператор $B = A - \lambda I$. Він є самоспряженим. Нам досить переконатися, що для всіх натуральних n

$$\ker B = \ker B^n.$$

А для цього, в свою чергу, досить переконатися, що для всіх натуральних n справедлива імплікація

$$\forall x \in H \quad (B^{n+1}x = 0) \Longrightarrow (B^n x = 0).$$

Припустимо що для деякого $n \in \mathbb{N}$ вона є невірна. Тоді існує $x \in H$ таке, що

$$B^{n+1}x = 0, \qquad B^n x \neq 0.$$

Тоді вектор $y := B^n x$ є ненульовим і належить одночасно $\ker B$ та $\operatorname{ran} B$. Враховуючи співвідношення між областю значень оператора і ядром його спряженого, маємо

$$(\operatorname{ran} B)^{\perp} = \ker B^* = \ker B.$$

Тому $y \perp y$, тобто $y = 0$. Суперечність. Тим самим лема доведена. □

Теорема 39.15. *Нехай H - гільбертів простір і $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Для довільного $\varepsilon > 0$ зовні круга $K_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \varepsilon\}$ спектр оператора A складається тільки з власних значень; кількість цих власних значень і кратність кожного з них є скінченна.*

Доведення. В загальному випадку доведення теореми є досить довгим. Тому ми розглянемо лише випадок, коли оператор A є самоспряженим.

Нехай $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$, $A = A^*$.

1) Нехай $\lambda \in \sigma(A)$ і $\lambda \neq 0$. Покажемо, що λ є власним значенням. Припустимо, що це не так, тобто $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$ Розглянемо оператор $B = -\frac{1}{\lambda}A$. Оскільки $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$, то $B \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Беручи до уваги, що

$$-\lambda(I + B) = A - \lambda I,$$

отримуємо, що

$$\ker(I + B) = \ker(A - \lambda I) = \{0\}.$$

З першої теореми Фредгольма випливає, що оператор $I + B$ є бієкцією. Тому з огляду на теорему Банаха про обернений оператор отримуємо, що $I + B$ є оборотний. А, отже, $A - \lambda I$ теж оборотний. А це суперечить тому, що $\lambda \in \sigma(A)$. Отже, λ є власним значенням.

2) Покажемо, що поза кругом K_ε є скінчена кількість точок спектру оператора A. Припустимо, що це не так. Тоді з вже доведеного випливає, що в зовнішності круга K_ε існує послідовність $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ власних значень оператора A. Кожному λ_n поставимо у відповідність власний вектор e_n одиничної довжини. Оскільки власні вектори самоспряженого оператора, що відповідають різним власним числам є ортогональними, то $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є ортонормованою системою. Розглянемо множину $\Omega := \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}^\infty$. Вона обмежена, а тому множина

$$A\Omega = \{Ae_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda_n e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

є цілком обмежена. Однак, теорема Піфагора дає нам, що при $n \neq m$

$$\|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = \|\lambda_n e_n\|^2 + \|\lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

А це означає, що множину $A\Omega$ не можна покрити скінченною кількістю куль радіуса $\varepsilon/2$. Отже, множина $A\Omega$ не є цілком обмежена. Суперечність. Отже, в зовнішності круга K_ε може бути лише скінченна кількість точок спектру оператора A.

3) Нехай λ - ненульове власне значення оператора A. Припустимо, що його кратність є нескінченна. Тоді в $\ker(A - \lambda I)$ існує нескінченна ортонормована система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$. Оскільки

$$Ae_n = \lambda e_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то повторюючи міркування попереднього пункту, ми приходимо до суперечності. Отже, кратність власного значення λ є скінченною. $\square$

Наслідок 39.16. *Спектр компактного оператора є скінченна або зліченна множина, єдиною граничною точкою якої може бути лише точка* $\lambda = 0$.

Теорема Гільберта-Шмідта.

Теорема, про яку піде мова, була отримана німецькими математиками Давидом Гільбертом (1862-1943) і Ерхардом Шмідтом (1876-1959). Часто цю теорему називають теоремою Гільберта про повноту, але я вважаю, що це несправедливо. Е. Шмідт був учнем Д.Гільберта, математика якого вважають одним з найвизначніших математиків всіх часів. Безумовно, що ідея закладена в основу теореми належала Гільберту, але її реалізація, на мою думку, належала Шмідту. І це потрібно належно оцінювати.

Про що йдеться в теоремі Гільберта-Шмідта? Всі ми знаємо знамениту теорему Жордана про приведення ермітово симетричної матриці до діагонального вигляду. Так ось, теорема Гільберта-Шмідта є аналогом цієї теореми у випадку компактного самоспряженого оператора у гільбертовому просторі.

Теорема 39.17. *Нехай* H *- гільбертів простір і* $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$, $A^* = A$. *Тоді в* H *існує ортонормована база, що складена з власних векторів оператора* A.

Доведення. З теореми 39.15 і наслідку 39.16 випливає, що множина $\Lambda := \sigma(A) \setminus \{0\}$ є не більш ніж зліченна і складається з власних значень скінченної кратності. Для кожного $\lambda \in \Lambda$ позначимо через $\{e_{\lambda,j}\}_{j=1}^{n_\lambda}$ ортонормовану базу простору $\ker(A - \lambda I)$ і позначимо через $\mathcal{E}$ ортонормовану систему

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{e_{\lambda,j}\}_{j=1}^{n_\lambda}.$$

Очевидно, що система $\mathcal{E}$ складена з власних векторів. Якщо вона є повна, то доведення завершене. Якщо вона є неповна, то розглянемо простір

$$G := \mathcal{E}^{\perp}.$$

Покажемо, що простір G є інваріантний стосовно оператора A, тобто

$$AG \subset G.$$

Дійсно, для довільного $x \in G$

$$(Ax \mid e_{\lambda,j}) = (x \mid Ae_{\lambda,j}) = \lambda(x \mid e_{\lambda,j}) = 0, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

тобто $Ax \in G$. Розглянемо оператор

$$B := A|_G.$$

Очевидно, що $B \in \mathcal{B}_\infty(G)$ і $B^* = B$. Покажемо, що оператор B не може мати ненульових власних значень. Припустимо, що це не так і число $\lambda \neq 0$ є власним числом оператора B. Тоді λ є власним числом оператора A і

$$\ker(A - \lambda I) \supset \ker(B - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Оскільки за побудовою

$$\ker(A - \lambda I) \perp G, \quad \ker(B - \lambda I) \subset G,$$

то $\ker(B - \lambda I) \subset G \cap G^{\perp} = \{0\}$. Суперечність. Отже, оператор B не має власних значень. Тоді з теореми теореми 39.15 випливає, що $\sigma(B) = \{0\}$. Звідси, враховуючи уточнену теорему про спектр самоспряженого оператора отримуємо, що верхня і нижня грані оператора B рівні нулю, а, отже, $\|B\| = 0$, тобто $B = 0$.

Виберемо в G довільну ортонормовану базу $\mathcal{E}_0$. Зауважимо, що кожен з її векторів є власним вектором оператора B, а, отже, і оператора A. Тоді система $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}_0$ є, очевидно, ортонормованою базою у просторі H, що складена з власних векторів .

Теорема доведена.

40. Практичне заняття: Знаходження оберненого оператора.

Мета даного заняття полягає в тому, щоб продемонструвати як знаходиться обернений до лінійного оператора в не дуже складних випадках.

Нехай лінійний оператор A діє з лінійного простору X в лінійний простір Y. Задача знаходження оберненого оператора A^{-1} (якщо останній існує) зводиться до розв'язування рівняння

$$Ax = y, \tag{40.1}$$

у якому y - фіксований (але довільний) елемент простору Y, а x - невідомий елемент простору X. Щоб обернений оператор існував (як оператор, що діє з Y в X) необхідно і досить, щоб рівняння (40.1) мало єдиний розв'язок при довільному $y \in Y$. При цьому єдиність розв'язку еквівалентна виконанню умови $\ker A = \{0\}$, а існування розв'язку еквівалентне виконанню умови $\operatorname{ran} A = Y$.

Допустимо, що ми розв'язали рівняння (40.1) і його розв'язок $x \in X$ є єдиним. Тоді $A^{-1}y = x$ за означенням оберненого оператора.

Потрібно сказати, що дуже велика частина математичних задач зводиться до розв'язування рівнянь різного типу. Ці рівняння бувають різної складності. Деякі ми розв'язуємо легко і швидко, а деякі є дуже складними. У випадку рівняння (40.1) нам суттєво допомагає лінійність оператора A. Якщо оператор A є нелінійним, то задача ускладнюється многократно. Однак, рівняння з лінійним оператором A теж можуть бути дуже складними.

Нам потрібно на простих задачах зрозуміти як в принципі підходити до проблеми знаходження оберненого оператора. Справа в тому, що при знаходженні оберненого оператора ми можемо прийти до досить незвичних рівнянь. Тому потрібна певна фантазія і варіативність підходів, щоб з цим справитися.

Однак, є класи рівнянь, для яких методи розв'язування є добре відпрацьовані. Одним з таких класів рівнянь є рівняння вигляду (40.1) з оператором $A : X \to X$, що є скінченновимірним збуренням одиничного оператора.

Означення 40.1. *Оператор K, що діє в лінійному просторі X називаєтся скінченновимірним, якщо область значень оператора K є скінченновимірним простором.*

Вправа 40.2. *Якщо K є скінченновимірним оператором у лінійному просторі X, то його можна подати (неоднозначно) у вигляді*

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) y_j,$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\{y_j\}_{j=1}^n$ - набір векторів простору X, $\{l_j\}_{j=1}^n$ - набір лінійних функціоналів на просторі X (тобто $l_j \in X^*$).

Якщо X є нормованим простором, а K - неперервним скінченновимірним оператором в X, $\{l_j\}_{j=1}^n$ - набір лінійних неперервних функціоналів на просторі X (тобто $l_j \in X'$).

Рівняння вигляду (40.1) **з** $A = I + K$**, де** K **-скінченновимірний.** Розглянемо рівняння

$$x + Kx = y, \tag{40.2}$$

де K скінченновимірний оператор в лінійному просторі X, y - фіксований елемент в X, а x - невідомий елемент в X. Виявляється, що розв'язування рівняння (40.2) можна звести до розв'язування системи лінійних (числових)рівнянь.

Покажемо, як це можна зробити. Подамо оператор K у вигляді

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) y_j.$$

Тоді наше рівняння приймає вигляд

$$x + \sum_{j=1}^{n} l_j(x) y_j = y. \tag{40.3}$$

Щоб його розв'язати нам досить знайти невідомі нам числа $l_j(x)$. Запишемо рівняння (40.3) у вигляді системи

$$\begin{cases} x + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j y_j = y \\ c_j = l_j(x), \quad j = 1, \dots n., \end{cases}$$

З цієї системи можна виключити невідому x. З першого рівняння системи ми маємо, що

$$x = y - \sum_{j=1}^{n} c_j y_j.$$

Підставимо це значення x в рівняння $c_j = l_j(x)$. Ми прийдемо до системи

$$c_j = l_j \left(y - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \right) = l_j(y) - \sum_{k=1}^{n} c_k l_j(y_k), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Покладемо $b_j := l_j(y)$, $a_{jk} := l_j(y_k)$ і зауважимо, що числа b_j і a_{jk} є відомими. Невідомими залишаються числа c_j, які мають задовольняти систему рівнянь

$$c_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = b_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{40.4}$$

Це звичайна система лінійних числових рівнянь. У випадку, якщо n є невеликим така система може бути розв'язана вручну. Якщо n велике, то потрібно використати комп'ютер. Знайшовши числа c_j (невідомі множники) ми отримуємо, розв'язок рівняння (40.3):

$$x = y - \sum_{j=1}^{n} c_j y_j.$$

Зауваження 40.3. *Якщо рівняння* (40.3)*є простим (*$n = 1, 2$*), то можна знаходити безпосередньо значення* $l_j(x)$ *без введення невідомих* c_j*. Але, якщо вирази для* $l_j(x)$ *є громіздкими, то краще ввести невідомі* c_j*.*

Перейдемо до конкретних задач.

Задача 40.4. *Нехай оператор A діє у просторі $C[0,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) + f(0)(1+x), \qquad x \in [0,1].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x) + f(0)(1+x) = g(x), \qquad x \in [0,1], \tag{40.5}$$

де g - фіксована функція простору $C[0,1]$.

Щоб розв'язати рівняння (40.5) нам досить знати значення функції f у точці $x = 0$, тобто число $f(0)$. Якщо в рівнянні (40.5) покласти $x = 0$, то ми отримаємо, що

$$f(0) + f(0) = g(0).$$

Отже, $f(0) = g(0)/2$ і, як наслідок, маємо

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(0)(1+x), \qquad x \in [0,1],$$

тобто

$$(A^{-1}g)(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(0)(1+x), \qquad x \in [0,1],$$

Ускладнимо попередню задачу.

Задача 40.5. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) + f(1)x - f(-1)x^2, \qquad x \in [-1,1].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x) + f(1)x - f(-1)x^2 = g(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{40.6}$$

де g - фіксована функція простору $C[-1,1]$.

Щоб розв'язати рівняння (40.6) нам досить знати значення функції f у точках $x = 1$ і $x = -1$. Якщо в рівняння (40.6) послідовно покласти $x = 1$ і $x = -1$, то ми отримаємо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} &f(1) + f(1) - f(-1) = g(1), \\ &f(-1) - f(1) - f(-1) = g(-1). \end{aligned} \tag{40.7}$$

Розв'язуючи цю систему отримуємо, що

$$f(1) = -g(-1), \qquad f(-1) = -2g(-1) - g(1).$$

Отже,
$$f(x) = g(x) - f(1)x + f(-1)x^2 = g(x) + g(-1)x - (2g(-1) + g(1))x^2,$$
тобто
$$(A^{-1}g)(x) = g(x) + g(-1)x - (2g(-1) + g(1))x^2, \qquad x \in [-1, 1],$$
Ще ускладнимо попередню задачу.

Задача 40.6. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*
$$(Af(x)) = f(x) + f(0) + \int_{-1}^{1} xtf(t)\,dt - \int_{-1}^{1} x^2 f(t)\,dt, \qquad x \in [-1, 1].$$
Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння
$$Af = g,$$
тобто рівняння
$$f(x) + f(0) + x\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt - x^2\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = g(x), \qquad x \in [-1, 1], \tag{40.8}$$
де g - фіксована функція простору $C[-1,1]$.

Щоб розв'язати рівняння (40.8) нам досить знати числа :
$$c_1 = f(0), \qquad c_2 = \int_{-1}^{1} tf(t)\,dt, \qquad c_3 = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$
Дійсно, тоді
$$f(x) = g(x) - c_1 - c_2 x + c_3 x^2.$$
Таким чином ми приходимо до системи рівнянь
$$\begin{cases} f(x) = g(x) - c_1 - c_2x + c_3x^2 \\ c_1 = f(0) \\ c_2 = \int_{-1}^{1} tf(t)\,dtdt \\ c_3 = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \end{cases}$$
яка є еквівалентна вихідному рівнянню (40.8). Виключаючи з системи функцію f, ми отримуємо, що
$$\begin{cases} c_1 = g(0) - c_1 \\ c_2 = \int_{-1}^{1} tg(t)\,dt - c_1\int_{-1}^{1} t\,dt - c_2\int_{-1}^{1} t^2\,dt + c_3\int_{-1}^{1} t^3\,dt \\ c_3 = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - 2c_1 - c_2\int_{-1}^{1} t\,dt + c_3\int_{-1}^{1} t^2\,dt \end{cases}$$
Обчислюючи інтеграли ми приходимо до системи
$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}g(0) \\ c_2 = \int_{-1}^{1} tg(t)\,dt - \frac{2}{3}c_2 \\ c_3 = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - 2c_1 + \frac{2}{3}c_3 \end{cases}$$

Звідки отримуємо, що

$$c_1 = \frac{1}{2}g(0), \qquad c_2 = \frac{3}{5}\int_{-1}^{1} tg(t)\,dt \qquad c_3 = 3\left(\int_{-1}^{1} g(t)\,dt - g(0)\right).$$

Остаточно маємо

$$(A^{-1}g)(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(0) - \left(\frac{3}{5}\int_{-1}^{1} tg(t)\,dt\right)x + 3\left(\int_{-1}^{1} g(t)\,dt - g(0)\right)x^2.$$

Задача 40.7. *Нехай оператор A діє у просторі $C[0,\pi]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) + 2\int_0^{\pi} \cos(x-t)f(t)\,dt, \qquad x \in [0,\pi].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x) + 2\int_0^{\pi} \cos(x-t)f(t)\,dt = g(x), \qquad x \in [0,\pi], \tag{40.9}$$

де g - фіксована функція простору $C[0,\pi]$. Перепишемо рівняння (40.9), враховуючи, що

$$\cos(x-t) = \cos x\cos t + \sin x\sin t.$$

Отримуємо

$$f(x) + 2\cos x\int_0^{\pi}(\cos t)f(t)\,dt + 2\sin x\int_0^{\pi}(\sin t)f(t)\,dt = g(x), \qquad x \in [0,\pi].$$

Щоб розв'язати це рівняння досить знайти числа :

$$c_1 = 2\int_0^{\pi}(\cos t)f(t)\,dt, \qquad c_2 = 2\int_0^{\pi}(\sin t)f(t)\,dt.$$

Перепишемо наше рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases} f(x) = g(x) - c_1\cos x - c_2\sin x \\ c_1 = 2\int_0^{\pi}(\cos t)f(t)\,dt \\ c_2 = 2\int_0^{\pi}(\sin t)f(t)\,dt. \end{cases}$$

Виключаючи з системи змінну f, отримуємо, що

$$\begin{cases} c_1 = 2\int_0^{\pi}(\cos t)g(t)\,dt - 2c_1\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt - 2c_2\int_0^{\pi}\cos t\sin t\,dt \\ c_2 = 2\int_0^{\pi}(\sin t)g(t)\,dt - 2c_1\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt - 2c_2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt. \end{cases}$$

Оскільки

$$\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt = 0,$$

ми отримуємо систему

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - \pi c_1 \\ c_2 = b_2 - \pi c_2. \end{cases}$$

де

$$b_1 = 2\int_0^\pi (\cos t)g(t)\,dt, \qquad b_2 = 2\int_0^\pi (\sin t)g(t)\,dt.$$

В результаті ми отримуємо, що

$$c_1 = \frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\cos t)g(t)\,dt, \qquad c_2 = \frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\sin t)g(t)\,dt.$$

Тому

$$f(x) = g(x) - \left(\frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\cos t)g(t)\,dt\right)\cos x - \left(\frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\sin t)g(t)\,dt\right)\sin x,$$

а, отже,

$$(A^{-1}f)(x) = g(x) - \left(\frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\cos t)g(t)\,dt\right)\cos x - \left(\frac{2}{1+\pi}\int_0^\pi (\sin t)g(t)\,dt\right)\sin x$$

Перейдемо до розгляду задач довільного типу.

Задача 40.8. *Нехай оператор A діє у просторі $C[0,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) - 2f(1-x), \qquad x \in [0,1].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x) - 2f(1-x) = g(x), \qquad x \in [0,1], \tag{40.10}$$

де g - фіксована функція простору $C[0,1]$. Рівняння (40.11) є незвичним. Тому потрібна виявити певну винахідливість. Якщо уважно придивитися до рівняння (40.11), то можна помітити, що при заміні x на $1-x$ рівняння запишеться у вигляді

$$f(1-x) - 2f(x) = g(1-x).$$

З останнього рівняння (яке, зрозуміло, є еквівалентне вихідному) ми отримуємо, що

$$f(1-x) = 2f(x) + g(1-x).$$

Заміняючи в рівнянні (40.11) функцію $f(1-x)$ на $2f(x)+g(1-x)$, отримуємо

$$f(x) - 2(2f(x) + g(1-x)) = g(x),$$

тобто

$$f(x) = -\frac{1}{3}(g(x) + 2g(1-x)), \qquad x \in [0,1].$$

Тоді

$$(A^{-1}g)(x) = -\frac{1}{3}(g(x) + 2g(1-x)), \qquad x \in [0,1].$$

Задача 40.9. *Нехай оператор A діє у просторі $C[0,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x^2), \qquad x \in [0,1].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x^2) = g(x), \qquad x \in [0,1], \tag{40.11}$$

де g - фіксована функція простору $C[0,1]$. Оскільки функція $\varphi(x) = x^2$ бієктивно відображає відрізок $[0,1]$ на себе, то роблячи заміну $x^2 = t$, ми отримуємо, що

$$f(t) = g(\sqrt{t}), \qquad t \in [0,1],$$

тобто

$$(A^{-1}g)(t) = g(\sqrt{t}), \qquad t \in [0,1].$$

Останню формулу можна, записати подібно до формули для A у вигляді

$$(A^{-1}f)(x) = f(\sqrt{x}), \qquad x \in [0,1].$$

Задача 40.10. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x^2), \qquad x \in [-1,1].$$

Чи існує обернений до оператора A?

Розв'язок. Обернений до оператора A не існує. Дійсно, візьмемо функцію $f \in C[-1,1]$, яка дорівнює нулю на проміжку $[0,1]$, але не є нульова. Наприклад можна взяти за f функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0,1]; \\ x, & \text{якщо } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Тоді

$$(Af)(x) = f(x^2) = 0, \qquad x \in [-1,1].$$

А це означає, що $\ker A \neq \{0\}$. Отже, оператор не є ін'єктивним.

Задача 40.11. *Нехай оператор A діє у просторі $C[0,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) - \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Af = g,$$

тобто рівняння

$$f(x) - \int_0^x f(t)\,dt = g(x), \qquad x \in [0,1], \tag{40.12}$$

де g - фіксована функція простору $C[0,1]$. Рівняння (40.12) можна звести до лінійного диференціального рівняння першого порядку. Дійсно, зробимо у рівнянні (40.12) заміну

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Зауважимо, що

$$F'(x) = f(x), \qquad F(0) = 0,$$

і з рівняння (40.12) випливає, що

$$F'(x) - F(x) = g(x).$$

Таким чином функція F є розв'язком задачі Коші:

$$F'(x) - F(x) = g(x), \qquad F(0) = 0.$$

Розв'язуючи цю задачу отримуємо, що

$$F(x) = \int_0^x e^{x-t} g(t)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Звідки маємо

$$f(x) = F'(x) = F(x) + g(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t} g(t)\,dt.$$

Отже,

$$(A^{-1}g)(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t} g(t)\,dt.$$

Перейдемо до задач у просторі ℓ_2.

Задача 40.12. *Нехай оператор A діє у просторі ℓ_2 за формулою*

$$Ax = (x_2, x_3, x_1 - x_2, x_4, x_5 \dots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Ax = y,$$

тобто рівняння

$$(x_2, x_3, x_1 - x_2, x_4, x_5 \dots) = y = (y_1, y_2, y_3, \dots). \tag{40.13}$$

де y - фіксований елемент простору ℓ_2.

Рівняння (40.14) зводиться до системи

$$\begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 = y_3 \\ x_j = y_j, \quad \text{при} \quad j \geq 4. \end{cases}$$

Ця система складається з нескінченного числа рівнянь, але, по суті рівнянь лише три, бо решта є тривіальні. Розв'язуючи дану систему отримуємо

$$x_1 = y_1 + y_3, \quad x_2 = y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_j = y_j, \quad \text{при} \quad j \geq 4.$$

Отже,

$$x = (y_1 + y_3, y_1, y_2, y_4, y_5, \dots),$$

тобто

$$A^{-1}y = (y_1 + y_3, y_1, y_2, y_4, y_5, \dots).$$

Задача 40.13. *Нехай оператор A діє у просторі ℓ_2 за формулою*

$$Ax = (x_1 + x_2, x_1, x_3 + x_4, x_3, \dots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Знайти обернений до оператора A.

Розв'язок. Нам потрібно дослідити рівняння

$$Ax = y,$$

тобто рівняння

$$(x_1 + x_2, x_1, x_3 + x_4, x_3, \dots) = y = (y_1, y_2, y_3, \dots). \tag{40.14}$$

де y - фіксований елемент простору ℓ_2.

Рівняння (40.14) зводиться до системи

$$\begin{cases} x_{2j-1} + x_{2j} = y_{2j-1} \\ x_{2j-1} = y_{2j} \end{cases}$$

Ця система складається з нескінченного числа рівнянь, але, по суті рівнянь лише два. Розв'язуючи дану систему отримуємо

$$A^{-1}y = (y_2, y_1 - y_2, y_4, y_3 - y_4, \dots).$$

Задачі для самостійного опрацювання. Знайти обернені до операторів в задачах: 32.7 -32.10; 32.28-32.29 (з задачника О.Г. Сторожа).

41. Знаходження власних значень оператора.

Нехай A - оператор діє в банаховому просторі X. На даному занятті ми будемо розглядати задачу знаходження власних значень оператора A. Постановка задачі є зовсім простою. Нам потрібно:

1) виявснити при яких $\lambda \in \mathbb{C}$ рівняння

$$Ax = \lambda x \tag{41.1}$$

має ненульовий розв'язок;

2) для тих λ, для яких рівняння (41.1) має ненульовий розв'язок, описати власний простір $\ker(A - \lambda I)$ (тобто знайти відповідні власні вектори).

Наша мета полягає в тому, щоб на простих прикладах зрозуміти як можна розв'язувати такі задачі.

Розглянемо оператори вигляду $A = \gamma I + K$, де $\gamma \in \mathbb{C}$, а K - скінченновимірний оператор, що діє у банаховому просторі X і I - одиничний оператор у просторі X.

Як знайти власні значення оператора A?

Виявляється, що нам досить вказану задачу розв'язати для оператора K. Дійсно, точкові спектри операторів A і K пов'язані дуже простим чином:

$$\sigma_p(A) = \{\gamma + \lambda \mid \lambda \in \sigma_p(K)\}.$$

При цьому

$$\ker(K - \lambda I) = \ker(A - (\lambda + \gamma)I), \qquad \lambda \in \sigma_p(K).$$

Тому зосередимося на задачі знаходження власних значень оператора K.

Оскільки оператор K є скінченновимірним, то його можна подати у вигляді

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) y_j, \tag{41.2}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\{y_j\}_{j=1}^n$ - набір векторів простору X, $\{l_j\}_{j=1}^n$ - набір лінійних функціоналів на просторі X. Якщо система векторів $\{y_j\}_{j=1}^n$ або система $\{l_j\}_{j=1}^n$ лінійних функціоналів є лінійно залежною, то можна знайти інше зображення для оператора K з меншим числом доданків. Наприклад, нехай

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j$$

Тоді

$$Kx = \sum_{j=1}^{n-1} l_j(x) y_j + l_n(x) \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j = \sum_{j=1}^{n-1} (l_j(x) + c_j l_n(x)) y_j.$$

Покладаючи

$$\widetilde{l}_j := l_j + c_j l_n, \qquad j = 1, \dots, n-1.,$$

ми отримаємо зображення

$$Kx = \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{l}_j(x) y_j$$

Для чого це робити? Справа в тому, що задача знаходження власних значень для оператора K зводиться до знаходження власних значень квадратної $n \times n$ матриці, причому n теж саме, що і в формулі (41.2). Зрозуміло, що зменшуючи число n у формулі (41.2) ми тим самим зменшуємо собі обсяг обчислень.

Надалі будемо вважати, що система $\{y_j\}_{j=1}^n$ у формулі (41.2) є лінійно незалежною.

Перейдемо до розгляду рівняння

$$Kx = \lambda x. \tag{41.3}$$

1) Якщо простір X є нескінченновимірним, то число $\lambda = 0$ завжди є власним числом оператора K. При цьому відповідний власний простір, це, очевидно, ядро $\ker K$. Якщо система $\{y_j\}_{j=1}^n$ є лінійно незалежна, то

$$\ker K = \{x \in X \mid l_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Отже з власним значенням $\lambda = 0$ і відповідним власним простором ми розібралися.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Використовуючи зображення (41.2), рівняння (41.3) можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} l_j(x) y_j = \lambda x. \tag{41.4}$$

Якщо x є розв'язком рівняння (41.4), то x мусить бути лінійною комбінацією векторів y_j, тобто x має вигляд

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \tag{41.5}$$

де c_j - невідомі числа. Використовуючи рівність (41.5), ми можемо рівняння (41.4) переписати у вигляді

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_k l_j(y_k) y_j, \tag{41.6}$$

Оскільки система $\{y_j\}_{j=1}^n$ є лінійно незалежною, рівняння (41.6) можна переписати у вигляді системи

$$\lambda c_j = \sum_{k=1}^{n} c_k l_j(y_k), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Покладемо

$$b_{jk} = l_j(y_k), \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Тоді ми отримуємо, що

$$\lambda c_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_k, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Таким чином ми звели наше рівняння на власні значення до системи лінійних рівнянь. Цю систему можна записати у матричній формі. Нехай

$$B = (b_{jk})_{1 \le j,k \le n}, \qquad c = (c_1, \ldots, c_n).$$

Тоді наше рівняння прийме вигляд

$$(B - \lambda I_n)c = 0.$$

Тут I_n - одинична матриця розміру $n \times n$. Отже, ненульові власні значення матриці B є ненульовими власними значеннями оператора K і ненульові власні значення оператора K є ненульовими власними значеннями матриці B. При цьому, якщо $\lambda \neq 0$ є власним значенням оператора K, то

$$\ker(K - \lambda I) = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \mid (B - \lambda I_n)c = 0, \quad c = (c_1, \ldots, c_n) \right\}.$$

Зауваження 41.1. *Зі сказаного вище випливає, що якщо* $\dim X = \infty$ *і* K *-скінченновимірний оператор рангу* n*, то*

1) число $\lambda = 0$ *є власним числом оператора* K*, а відповідний власний підпростір рівний*

$$\{x \in X \mid l_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, n\};$$

2) число ненульових власних значень оператора K *не перевищує* n*, а відповідні власні вектори* x *оператора* K *пов'язані з відповідними власними векторами* $c = (c_j)_{j=1}^n$ *матриці* B *формулою*

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j.$$

Перейдемо тепер до розв'язування конкретних задач.

Задача 41.2. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(x) + f(1)x, \qquad x \in [0,1].$$

Знайдіть власні значення і власні вектори оператора A.

Розв'язок. Оператор A має вигляд

$$A = I + K,$$

де K - скінченновимірний оператор рангу 1 і заданий формулою

$$(Kf)(x) := f(1)x, \qquad x \in [0,1].$$

Знайдемо власні значення оператора K.

1) $\lambda = 0$ є власним значення оператора K і

$$\ker K = \{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0\}.$$

наприклад функція $f(x) = 1 - x$ є власною функцією, що відповідає власному числу $\lambda = 0$.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо рівняння

$$Kf = \lambda f,$$

тобто

$$f(1)x = \lambda f(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок рівняння має мати вигляд

$$f(x) = cx, \qquad x \in [0,1].$$

Тоді

$$f(1) = c.$$

Оскільки

$$f(1)x = \lambda cx, \qquad x \in [0,1],$$

то

$$f(1) = \lambda c.$$

Таким чином ми приходимо до рівняння

$$c = \lambda c.$$

Це рівняння має ненульовий розв'язок тільки при $\lambda = 1$ (йдеться про випадок $\lambda \neq 0$). При цьому власний вектор оператора A, що відповідає власному числу $\lambda = 1$ з точністю до числового множника має вигляд $\varphi(x) = x$.

Зі сказаного випливає, що оператор K має два власні значення:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1.$$

Власною функцією для першого є, наприклад функція $\varphi_1 = 1 - x$, а для другого функція $\varphi_2(x) = x$.

Тому оператор A має власні значення:

$$\xi_1 = 1 + \lambda_1 = 1, \qquad \xi_2 = 1 + \lambda_2 = 2.$$

Власною функцією для першого є, наприклад функція $\varphi_1 = 1 - x$, а для другого функція $\varphi_2(x) = x$.

Задача 41.3. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = f(1)(x+1) - f(-1)(1-x)^2, \qquad x \in [-1,1].$$

Знайти власні значення оператора A.

Розв'язок. Оператор A є оператором рангу 2, що діє в нескінченновимірному просторі. Тому $\lambda = 0$ є власним значенням оператора A. Кожна функція $f \in C[-1,1]$, що задовольняє умови

$$f(1) = f(-1) = 0$$

є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda = 0$.

Знайдемо ненульові власні значення оператора A. Для цього розглянемо рівняння

$$Af = \lambda f,$$

тобто рівняння

$$f(1)(x+1) - f(-1)(1-x)^2 = \lambda f(x).$$

Щоб розв'язати дане рівняння досить знайти числа $f(1)$ і $f(-1)$. З попереднього рівняння отримуємо, систему

$$2f(1) = \lambda f(1), \qquad -2f(-1) = \lambda f(-1).$$

Легко бачити, що вона має ненульовий розв'язок тільки, якщо $\lambda = 2$ або $\lambda = -2$. Це і є ненульові власні значення. Відповідні власні функції

$$g_1(x) = 1 + x, \qquad g_2(x) = 1 - x.$$

Задача 41.4. *Нехай оператор A діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою*

$$(Af(x)) = 2f(x) + f(1)x + f(-1)(1-x), \qquad x \in [-1,1].$$

Знайдіть власні значення і власні вектори оператора A.

Розв'язок. Оператор A має вигляд

$$A = 2I + K,$$

де K - скінченновимірний оператор рангу 2 і заданий формулою

$$(Kf)(x) := f(1)x + f(-1)(1-x), \qquad x \in [-1,1].$$

Знайдемо власні значення оператора K.

1) $\lambda_0 = 0$ є власним значення оператора K і

$$\ker K = \{f \in C[-1,1] \mid f(1) = f(-1) = 0\}.$$

наприклад функція $f_0(x) = 1 - x^2$ є власною функцією, що відповідає власному числу λ_0.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо рівняння

$$Kf = \lambda f,$$

тобто

$$f(1)x + f(-1)(1-x) = \lambda f(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок рівняння має мати вигляд

$$f(x) = c_1 x + c_2(1-x), \qquad x \in [-1,1].$$

Тоді

$$f(1) = c_1, \qquad f(-1) = -c_1 + 2c_2$$

Оскільки

$$f(1)x + f(-1)(1-x) = \lambda(c_1 x + c_2(1-x)), \qquad x \in [-1,1],$$

то з лінійної незалежності функцій $g_1(x) = x$ та $g_2(x) = 1-x$ випливає, що

$$f(1) = \lambda c_1, \qquad f(-1) = \lambda c_2.$$

Таким чином ми приходимо до системи

$$\begin{cases} c_1 = \lambda c_1 \\ -c_1 + 2c_2 = \lambda c_2 \end{cases} \tag{41.7}$$

Щоб ця система мала ненульовий розв'язок потрібно, щоб

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

тобто

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

При $\lambda = \lambda_1$ ненульовий розв'язок системи (41.13) з точністю до числового множника має вигляд $c = (1,1)$, а при $\lambda = \lambda_2$ ненульовий розв'язок системи (41.13) з точністю до числового множника має вигляд $c = (0,1)$.

Відповідь. В оператора A є три власні значення:

1) $\xi_0 = \lambda_0 + 2 = 2,$ власний вектор $f_0(x) = 1 - x^2;$
2) $\xi_1 = \lambda_1 + 2 = 3,$ власний вектор $f_1(x) \equiv 1;$
3) $\xi_2 = \lambda_2 + 2 = 4,$ власний вектор $f_2(x) = 1 - x.$

Задача 41.5. Знайти власні значення і власні вектори оператора $A : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, що діє за формулою

$$(Af)(x) := \int\limits_{-1}^{1} (3xt - 10x^2t^2)\, f(t)\, dt, \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок. Оператор A є скінченновимірний оператор рангу 2 і

$$(Af)(x) = 3x\int\limits_{-1}^{1} tf(t)\, dt - 10x^2\int\limits_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt, \qquad x \in [-1,1].$$

Знайдемо власні значення оператора A.

1) $\lambda_0 = 0$ є власним значення оператора A і

$$\ker A = \{f \in L_2[-1,1] \mid \int_{-1}^{1} tf(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt = 0\}.$$

Знайдемо якусь власну функцію, що відповідає власному числу λ_0. Її можна шукати, наприклад, у вигляді многочлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

коефіцієнти якого підбираємо так, щоб виконувалися рівності

$$\int_{-1}^{1} tf(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt = 0.$$

Наприклад, легко перевірити, що функція $f_0(x) = 3-5x^2$ є власною функцією, що відповідає власному числу λ_0.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо рівняння

$$Kf = \lambda f,$$

тобто

$$3x\int\limits_{-1}^{1} tf(t)\, dt - 10x^2\int\limits_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt = \lambda f(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок рівняння має мати вигляд

$$f(x) = c_1x + c_2x^2, \qquad x \in [-1,1],$$

де c_1 і c_2 невідомі числа. Отже,

$$3x\int_{-1}^{1} t(c_1t+c_2t^2)\,dt - 10x^2\int_{-1}^{1} t^2(c_1t+c_2t^2)\,dt = \lambda(c_1x+c_2x^2), \qquad x\in[-1,1],$$

З лінійної незалежності функцій $g_1(x)=x$ та $g_2(x)=x^2$ випливає, що

$$3\int_{-1}^{1} t(c_1t+c_2t^2)\,dt = \lambda c_1, \qquad -10\int_{-1}^{1} t^2(c_1t+c_2t^2)\,dt = \lambda c_2.$$

Враховуючи, що

$$\int_{-1}^{1} t\,dt = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0, \qquad \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \qquad \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{2}{5},$$

ми приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} 2c_1 = \lambda c_1 \\ -4c_2 = \lambda c_2 \end{cases} \tag{41.8}$$

Очевидно, що ця система має ненульовий розв'язок (при ненульових λ) тільки у випадках, коли $\lambda=\lambda_1 := 2$ і $\lambda=\lambda_2 := -4$. З точністю до числового множника відповідні ненульові розв'язки системи рівні $(1,0)$ і $(0,1)$.

Відповідь. В оператора A є три власні значення:
1) $\lambda_0=0$, власний вектор $f_0(x)=3-5x^2$;
2) $\lambda_1=2$, власний вектор $f_1(x)=x$;
3) $\lambda_2=-4$, власний вектор $f_2(x)=x^2$.

Задача 41.6. Знайти власні значення і власні вектори оператора $A : C[-1,1]\to C[-1,1]$, якщо

$$(Af)(x) = \int_{-1}^{1} 3xf(t)\,dt + f(1)x^2, \qquad x\in[-1,1].$$

Розв'язок. Оператор A є скінченновимірний оператор рангу 2 і

$$(Af)(x) = 3x \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + f(1)x^2, \qquad x \in [-1,1].$$

Знайдемо власні значення оператора A.

1) $\lambda_0 = 0$ є власним значення оператора A і

$$\ker A = \{f \in C[-1,1] \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = f(1) = 0\}.$$

Знайдемо якусь власну функцію, що відповідає власному числу λ_0. Її можна шукати, наприклад, у вигляді многочлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

коефіцієнти якого підбираємо так, щоб виконувалися рівності

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = f(1) = 0.$$

Легко перевірити, що функція $f_0(x) = 3x^2 - 2x - 1$ є власною функцією, що відповідає власному числу λ_0.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо рівняння

$$Kf = \lambda f,$$

тобто

$$3x \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + f(1)x^2 = \lambda f(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Розв'язок рівняння має мати вигляд

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2, \qquad x \in [-1,1],$$

де c_1 і c_2 невідомі числа. Отже,

$$3x \int_{-1}^{1} (c_1 t + c_2 t^2)\,dt + (c_1 + c_2)x^2 = \lambda(c_1 x + c_2 x^2), \qquad x \in [-1,1],$$

З лінійної незалежності функцій $g_1(x) = x$ та $g_2(x) = x^2$ випливає, що

$$3 \int_{-1}^{1} (c_1 t + c_2 t^2)\,dt = \lambda c_1, \qquad c_1 + c_2 = \lambda c_2.$$

Враховуючи, що

$$\int_{-1}^{1} t\,dt = 0, \qquad \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3},$$

ми приходимо до системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c_2 = \lambda c_1 \\ c_1 + c_2 = \lambda c_2 \end{array} \right. \tag{41.9}$$

Оскільки

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

то система має ненульовий розв'язок тільки у випадках, коли $\lambda = \lambda_1 := 2$ і $\lambda = \lambda_2 := -1$.

У випадку $\lambda = \lambda_1 := 2$ наша система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c_2 = 2c_1 \\ c_1 + c_2 = 2c_2 \end{array} \right.$$

З точністю до числового множника її ненульовий розв'язок рівний $(1, 1)$.

У випадку $\lambda = \lambda_1 := -1$ наша система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c_2 = -c_1 \\ c_1 + c_2 = -c_2 \end{array} \right.$$

З точністю до числового множника її ненульовий розв'язок рівний $(-2, 1)$.

Відповідь. В оператора A є три власні значення:

1) $\lambda_0 = 0$, власний вектор $f_0(x) = 3x^2 - 2x - 1$;
2) $\lambda_1 = 2$, власний вектор $f_1(x) = x + x^2$;
3) $\lambda_2 = -1$, власний вектор $f_2(x) = -2x + x^2$.

Задача 41.7. Знайти власні значення і власні вектори оператора $A : \ell_2 \to \ell_2$, що діє за формулою

$$Ax = (x_3, 2x_2, 9x_1, x_4, x_5, \dots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Розв'язок. Дану задачу можна розв'язувати за описаною вище схемою. Дійсно оператор A має вигляд

$$A = I + K,$$

де скінченновимірний оператор, що діє за формулою

$$Kx = (x_3 - x_1, x_2, 9x_1 - x_3, 0, 0, \dots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Знайдемо власні значення оператора K.

1) $\lambda_0 = 0$ є власним значення оператора K і

$$\ker K = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\}.$$

Наприклад, власним вектором, що відповідає власному числу λ_0 є елемент $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

2) Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо рівняння

$$Kf = \lambda f,$$

тобто

$$(x_3 - x_1, x_2, 9x_1 - x_3, 0, 0, \dots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Його можна переписати у вигляді системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = \lambda x_1 \\ x_2 = \lambda x_2 \\ 9x_1 - x_3 = \lambda x_3 \\ x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geq 4 \end{cases} \tag{41.10}$$

Ця система має ненульовий розв'язок, якщо

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 9 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 - 9) = (1-\lambda)(\lambda-2)((\lambda+4) = 0,$$

тобто система має ненульовий розв'язок тільки у випадках, коли $\lambda = \lambda_1 := 1$, $\lambda = \lambda_2 := 2$ і $\lambda = \lambda_3 := 4$.

У випадку $\lambda = \lambda_1$ наша система має вигляд

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ 9x_1 - x_3 = x_3 \\ x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geq 4 \end{cases} \tag{41.11}$$

З точністю до числового множника її ненульовий розв'язок рівний $(0, 1, 0, 0, \dots)$.

У випадку $\lambda = \lambda_2$ наша система має вигляд

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_2 \\ 9x_1 - x_3 = 2x_3 \\ x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geq 4 \end{cases} \tag{41.12}$$

З точністю до числового множника її ненульовий розв'язок рівний $(1, 0, 3, 0, 0, \dots)$.

У випадку $\lambda = \lambda_3$ наша система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 - x_1 = -4x_1 \\ x_2 = -4x_2 \\ 9x_1 - x_3 = -4x_3 \\ x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \geq 4 \end{array} \right. \tag{41.13}$$

З точністю до числового множника її ненульовий розв'язок рівний $(1, 0, -3, 0, 0, \dots)$.

Відповідь. В оператора A є чотири власні значення:
1) $\xi_0 = 1 + \lambda_0 = 1$, власний вектор $(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
2) $\xi_1 = 1 + \lambda_1 = 2$, власний вектор $(0, 1, 0, 0, \dots)$;
3) $\xi_2 = 1 + \lambda_2 = 3$, власний вектор $(1, 0, 3, 0, 0, \dots)$;
4) $\xi_3 = 1 + \lambda_3 = -3$, власний вектор $(1, 0, -3, 0, 0, \dots)$.

$\square$

Екзаменаційні питання з функціонального аналізу та теорії міри.

1. Системи множин.
2. Загальне означення міри.
3. Елементарні властивості міри.
4. σ-напівадитивність міри .
5. Зовнішня міра та її властивості.
6. Теорема Лебега про продовження міри.
7. Вимірні функції, два означення.
8. Вимірні функції та їх властивості.
9. Теорема про поточкову границю послідовності вимірних функцій.
10. Означення збіжності майже скрізь і збіжності за мірою.
11. Довести, що зі збіжності м.с. випливає збіжність за мірою.
12. Теорема Єгорова.
13. Пояснити зв'язки між різними видами збіжності.
14. Довести, що кожна вимірна функція є рівномірною границею послідовності простих вимірних функцій.
15. Інтеграл Лебега для простих функцій та його базові властивості.
16. Загальне означення інтеграла Лебега та його базові властивості.
17. Довести абсолютну неперервність інтеграла Лебега.
18*. Довести зліченну адитивність інтеграла Лебега.
19*. Довести нерівність Чебишева.
20. Теорема про мажоровану збіжність.

21. Теорема про монотонну збіжність.
22. Теорема Фату.
23. Порівняння інтеграла Рімана і Лебега.
24. Прямий добуток мір. Теорема Фубіні.
25. Теорема Лебега про похідну монотонної функції.
26. Драбина Кантора.
27. Функцій обмеженої варіації та їх основні властивості.
28. Довести, що сума функцій обмеженої варіації є функцією обмеженої варіації.
29. Теорема про зображення функції обмеженої варіації у вигляді різниці монотонних.
30. Теорема про похідну інтеграла.
31. Абсолютно неперервні функції та їх властивості.
32. Формула Ньютона-Лейбніца для абсолютно неперервних функцій
33. Міри Лебега-Стільтьєса.
34. Інтеграл Лебега-Стільтьєса.
35. Теореми Хеллі.
36. Метричні простори. Приклади.
37. Неперервність метрики.
38. Повнота метричного простору. Критерій повноти.
39. Приклади повних і неповних метричних просторів (з поясненнями).
40. Ніде нещільні і всюди щільні множини. Приклади.
41. Теорема Бера про категорії.
42. Принцип стискуючих відображень.
43. Принцип продовження за неперервністю.
44. Сформулювати теорему про поповнення.
45. Компактність, секвенціальна компактність.
46. Критерій компактності множини повного метричного простору.
47. Теорема Арцела.
48. Нормовані простори. Приклади.
49. Нерівність Гельдера то нерівність Мінковського.
50. Еквівалентні норми. Еквівалентність норм у просторі скінченної розмірності.
51. Неперервність норми .
52. Обмежені оператори. Норма оператора.
53. Принцип рівномірної обмеженості (теорема Банаха-Штейгауза)(з доведенням).
54. Теорема Гана-Банаха (дійсний варіант).
55. Теорема Гана-Банаха (комплексний варіант).
56. Теорема Банаха про обернений оператор.
57. Спряжений простір до нормованого простору.
58. Простори зі скалярним добутком. Гільбертові простори. Приклади.

59. Нерівність Буняковського .
60. Неперервність скалярного добутку.
61. Теорема Піфагора, рівність паралелограма в гільбертовому просторі.
62. Ортогональні ряди. Критерій їх збіжності.
63. Ряд Фур'є.
64. Нерівність Бесселя.
65. База, ортонормована база у гільбертовому просторі.
66. Існування ортонормованої бази у гільбертовому просторі.
67. Довести, що повна ортонормована система є ортонормованою базою.
68. Теорема про ортогональну проекцію. Два формулювання.
69. Обернена теорема про ортогональну проекцію.
70. Теорема Ріса про зображення неперервного функціонала у гільб. пр-рі.
71. Теорема про збурення оборотного оператора.
72. Спектр обмеженого оператора. Класифікація точок спектру.
73. Теорема про ряд Немана.
74. Аналітичність резольвенти оператора.
75. Обмеженість і замкненість спектру обмеженого лінійного оператора.
76. Теорема про зображення скінченновимірного оператора.
77. Теорема про існування спряженого оператора.
78. Властивості операції взяття спряженого.
79. Теорема про наближення компактного оператора скінченновимірними.
80. Теорема про зв'язок між областю значень оператора і ядром спряженого оператора.
81. Три теореми Фредгольма.
82. Теорема про спектр компактного оператора.
83. Формула для норми самоспряженого оператора.
84. Теорема про власні вектори самоспряженого оператора.
85. Теорема Гільберта про повноту .