Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

**В.В. Бабенко, А.Г.Зіневич, С.М.Кічура,
Б.М.Тріщ, Ж.Я.Цаповська**

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2005

ББК В11я73-4
Б-12
УДК 51 (076.1)

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. В. Заболоцький*
(Львів, ЛНУ ім. Івана Франка);
д-р тех. наук, проф. *М. М. Стадник*
(Львів, Український державний лісотехнічний університет);
д-р фіз.-мат. наук, доц. *Б. І. Копитко*
(Львів, Львівський банківський інститут).

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів природничих і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

(Лист Міністерства освіти і науки України №14/18.2-2336 від 29.12.2003 р.)

Б-12 **В.В. Бабенко, $\boxed{\text{А.Г.Зіневич}}$, С.М.Кічура, Б.М.Тріщ, Ж.Я.Цаповська**
Збірник задач з вищої математики.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 256 с.
ISBN- 966-613-396-2

Збірник задач охоплює всі розділи вищої математики, зокрема, теорію ймовірностей і математичну статистику. Збірник можна використовувати на практичних заняттях і для самостійної роботи студентів. Вміщені на початку кожного параграфа основні твердження і формули сприяють повторенню теоретичного матеріалу перед розв'язуванням задач. Задачі прикладного змісту сприяють виробленню у студентів інтересу до математики, вмінь застосування математичних методів у прикладних дослідженнях. Наявний у додатку перелік основних команд пакета Maple та прикладів їх використання допоможе студентам розв'язувати значну частину задач з допомогою сучасних обчислювальних засобів.

Для студентів природничих і економічних спеціальностей.

ББК В11я73-4

ISBN- 966-613-396-2

РОЗДІЛ I

ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

§1. Матриці й операції над ними

Означення. Прямокутна таблиця чисел вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(або $A=(a_{ij})$) називається матрицею розмірності $m\times n$, а числа a_{ij} — елементами цієї матриці.

Якщо $m=n$, то матрицю називають квадратною порядку n.

Матрицю розмірності $m\times 1$ називають m-вимірним вектор-стовпцем, а матрицю розмірності $1\times n$ — n-вимірним вектор-рядком.

Дві матриці однакової розмірності $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ рівні (пишуть $A=B$) тоді і лише тоді, коли $\forall i(1\le i\le m)\forall j(1\le j\le n)$: $a_{ij}=b_{ij}$.

1°. *Додавання матриць.* Якщо $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$, то $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

Матриця $\mathbf{0}$, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою матрицею.

Протилежною до матриці $A=(a_{ij})$ є матриця $-A=(-a_{ij})$.

2°. *Множення матриці на скаляр.* Якщо λ — деяке число, то $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

3°. *Множення матриць.* Нехай $A=(a_{ij})$,— матриця розмірності $m\times n$, а $B=$ $=(b_{ij})$, — матриця розмірності $n\times p$. Добутком AB називається матриця $C=(c_{ij})$ розмірності $m\times p$, елементи якої визначаються за правилом

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Зауважимо, що добутки AB і BA не завжди рівні, навіть, якщо вони існують.

4°. *Транспонування матриці.* Нехай $A=(a_{ij})$ — прямокутна матриця розмірності $m\times n$. Перетворення, яке полягає у заміні місцями рядків і стовпців матриці A, називається транспонуванням матриці. Транспоновану матрицю позначатимемо A^T. $A^T=(a_{ji})$. Матриця A^T є матрицею розмірності $n\times m$.

Виконуються властивості:

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $A+0=A$.
4. $A+(-A)=0$.
5. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
8. $(A^T)^T=A$.
9. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
10. $(AB)^T=B^TA^T$.

I.1. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

I.2. Виконати дії:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 12 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

I.3. Обчислити:

1) $-3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

5) $-2\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \\ 15 & -18 & 3 \end{pmatrix}$.

I.4. Виконати дії:

1) $2\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

I.5. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^2$; 10) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

I.6. Знайти матрицю, транспоновану до заданої:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

§2. Поняття визначника

Означення 1. Визначником матриці першого порядку називається відображення, яке матриці $A=(a_{11})$ ставить у відповідність число a_{11}.

Визначник матриці позначається символом $|A|$ або $\det A$. Отже, якщо $A=(a_{11})$, то $|A|=a_{11}$ або $\det A=a_{11}$.

Означення 2. Визначником матриці другого порядку називається відображення, яке матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ставить у відповідність число

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Означення 3. Визначником матриці третього порядку називається відображення, яке матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ставить у відповідність число, що обчислюється за формулою

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

I.7. Обчислити визначник матриці:

1) $A=(3)$; 2) $A=(-6)$; 3) $A=(37,5)$; 4) $A=(-1/6)$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 4-\sqrt{5} \\ 4+\sqrt{5} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ x^3 & x^2-x+1 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix}$.

I.8. Обчислити:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 9 & 6 & 12 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

§3. Властивості визначників. Визначники вищих порядків

На практиці при обчисленні визначників використовують їхні властивості.

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то його знак зміниться на протилежний.

3. Якщо всі елементи деякого рядка визначника дорівнюють нулеві, то визначник дорівнює нулеві.

4. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника однакові, то визначник дорівнює нулеві.

5. Якщо всі елементи деякого рядка визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків пропорційні, то визначник дорівнює нулеві.

7. Якщо рядки визначника лінійно залежні, то визначник дорівнює нулеві.

8. Якщо всі елементи i-го рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ $(j=1,2,3)$, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в яких всі рядки, крім i-го, такі самі, як і в заданого визначника, а i-ий рядок першого визначника складається з елементів b_{ij}, а другого — з елементів c_{ij}.

9. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на деяке число.

Мінором елемента a_{ij} визначника n-го (n=2,3) порядку Δ називається визначник $(n-1)$-го порядку, що утворюється з Δ в результаті викреслення рядка та стовпця, які містять цей елемент. Мінор елемента a_{ij} позначається M_{ij}.

Алгебричним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ називають число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

10. Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів будь-якого рядка на їхні алгебраїчні доповнення.

Розвинення визначника другого порядку Δ за елементами i-го (i=1,2) рядка має вигляд:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}.$$

Розвинення визначника третього порядку Δ за елементами i-го (i=1,2,3) рядка має вигляд:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}.$$

11. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на відповідні алгебричні доповнення елементів іншого рядка дорівнює нулеві.

Аналогічні властивості виконуються і стосовно стовпців визначників матриці.

Визначником матриці n-го порядку ($n>3$) називають відображення, яке матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ставить у відповідність число

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots a_{1n}A_{1n}.$$

Для визначників вищих порядків справджуються всі сформульовані раніше властивості.

I.9. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами першого стовпця:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

I.10. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами першого рядка:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

I.11. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами того рядка(стовпця), що містить найбільшу кількість нулів:

$$1)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & a & -a \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & b & 2 \\ 0 & -b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix};\quad 4)\ \begin{vmatrix} 2z & 3 & 0 \\ -1 & z & z \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

I.12. Обчислити визначники, попередньо перетворивши їх:

$$1)\ \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & -a & -a \\ a & a & -a \end{vmatrix};\ 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};\ 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix};\ 4)\ \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix};$$

$$5)\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};\ 6)\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix};\ 7)\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

I.13. Знайти x з рівняння:

$$1)\ \begin{vmatrix} x^2 & 2 & 1 \\ x & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0;\quad 2)\ \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad 3)\ \begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$4)\ \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ x & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

I.14. Обчислити визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};\quad 5)\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix};\quad 6)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$7)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix};\ 8)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix};\ 9)\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix};$$

$$10)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix};$$

$$11)\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a & \dots & -a \\ 2 & 1 & -a & -a & \dots & -a \\ 3 & 2 & 1 & -a & \dots & -a \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Вказівка.

10) До першого рядка додати другий, помножений на x, третій — на x^2 і т.д. Потім розкласти отриманий визначник за першим рядком.

11) Від кожного стовпця, починаючи з першого, відняти наступний. Потім подати у вигляді суми двох визначників за останнім стовпцем.

§4. Обернена матриця

Квадратна матриця A називається невиродженою, якщо $\det A \neq 0$. В іншому випадку матриця A називається виродженою.

Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається оберненою до матриці A порядку n, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

де I — одинична матриця.

Якщо матриця A невироджена, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Правильні співвідношення:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;

4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

I.15. Для заданої матриці знайтити обернену:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I.16. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 0 & 13 & 8 \\ -12 & -5 & -12 \end{pmatrix}$.

§5. Системи лінійних рівнянь

Система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2,\dots,x_n$ має вигляд

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad i=1, 2,\dots,m.$$

Тут a_{ij} — коефіцієнти системи, b_i — вільні члени.

Система (1) називається однорідною, якщо всі вільні члени є нулями, і неоднорідною в іншому випадку.

Розв'язком системи (1) називається набір впорядкованих n чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, при підстановці яких в систему замість $x_1, x_2,\dots,x_n$ кожне рівняння перетворюється в правильну рівність.

Система (1) сумісна, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісна — якщо не має жодного. Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має лише один розв'язок, і невизначеною, якщо кількість її розв'язків більше одного.

Розв'язати систему рівнянь означає:

1) дослідити її на сумісність;

2) у разі сумісності визначити кількість її розв'язків і знайти ці розв'язки.

Дві системи рівнянь називають еквівалентними, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Позначивши

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix},$$

запишемо систему (1) у матричній формі

$$A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}. \tag{2}$$

Матриця $A=(a_{ij})$ називається матрицею системи, $\overrightarrow{b}$ — стовпцем вільних членів, $\overrightarrow{x}$ — стовпцем невідомих.

Правило Крамера застосовують для розв'язання систем з квадратною матрицею A. Якщо визначник $\Delta=\det A$ матриці системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i=1,2,\dots,n,$$

де Δ_i, $(i=1,2,\dots,n)$ — визначник, який отримується з визначника Δ заміною його i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Розв'язок системи (2) з невиродженою квадратною матрицею A можна також знайти за формулою

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}.$$

Поряд з матрицею A системи (1) розглядається розширена матриця

$$A_b=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

яку отримують шляхом приєднання до матриці A стовпця вільних членів системи (1).

Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають такі операції:

1) перестановку двох рівнянь системи;

2) множення будь-якого рівняння системи на число, відмінне від нуля.

3) додавання до одного рівняння системи іншого її рівняння, помноженого на деяке число, відмінне від нуля.

Кожне елементарне перетворення будь-якої системи лінійних рівнянь переводить її в еквівалентну систему.

Оскільки система лінійних рівнянь повністю визначається своєю розширеною матрицею, то елементарним перетворенням системи відповідають елементарні перетворення розширеної матриці.

Матриця називається східчастою, якщо в кожному її рядку, починаючи з другого, кількість перших нульових елементів більша, ніж у попередньому. Система лінійних рівнянь, розширена матриця якої східчаста, називається східчастою.

Для розв'язування системи m лінійних рівнянь з n невідомими можна використати метод Гауса, суть якого полягає в тому, що кожну систему лінійних рівнянь шляхом елементарних перетворень за скінченну кількість кроків можна звести до еквівалентної їй східчастої системи.

Позначимо рядки матриці A так: $a_i' = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Лінійною комбінацією рядків $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ матриці називатимемо вираз $k_1 a_1' + k_2 a_2' + k_m a_m'$, де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — деякі константи.

Рядки матриці A називають лінійно незалежними, якщо лінійна комбінація цих рядків дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли всі константи дорівнюють нулеві.

Рангом матриці за рядками (стовпцями) називають максимальну кількість лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків цієї матриці.

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Теорема Кронеккера-Капеллі. Для сумісності системи (1) необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A системи збігався з рангом її розширеної матриці A_b.

З а у в а ж е н н я. Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими за умови, що $\det A \neq 0$, має лише нульовий розв'язок, який ще називають тривіальним розв'язком, ненульові розв'язки вона може мати лише за умови $\det A = 0$.

I.17. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера або знаходячи обернену матрицю:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 14, \\ 4x - 5y = -16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 4x - 6y = -10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 4y = 7, \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - 7y = 3, \\ -2x + 3y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ -10x - 2y = -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 15x + 3y = 12, \\ -x + 2y = -3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 12, \\ 4x + 5y + 3z = 10, \\ x - 4y + 4z = -6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5, \\ 2x - 4y - z = -5, \\ 3x + 3y + z = -4; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0, \\ x + 4y - 8z = 6, \\ -3x + 2y + 4z = 4; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x - 5y + 6z = -1, \\ -2x + 4y + 3z = 0, \\ x + 3y + 2z = -5; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 2, \\ 2x - y + 3z = 3, \\ 3x - 5y + 5z = -1; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x - 2y + 5z = -1, \\ x + z = 3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_2 - x_1 + 3x_3 - 4x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_4 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

I.18. Розв'язати системи рівнянь, використовуючи метод Гауса:

1) $\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 2, \\ x - 5y - 2z = 1, \\ x + 3y + z = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 4, \\ 2x + 2y - 4z = 6, \\ -2x + 5y - 6z = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 7, \\ -4x + 3y + 5z = 0, \\ 2x - y + 2z = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 2y - 5z = -5, \\ 3x + 3y + 2z = 1, \\ 4x + 4y + 3z = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1, \\ 4x - 2y + 3z = 3, \\ 2x + 6y + 5z = -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2, \\ 2x - 2z = 3, \\ 2x - 4y - 2z = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + 2y + z = 1, \\ -x - 7y + z = 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3, \\ 4x - y + 5z = 1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8, \\ -x + 2y - 3z = -1, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x + 2y + 6z = -1, \\ x + 4y + 3z = 2, \\ x + 3z = 1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -2, \\ 2x + 4y - 4z = 3, \\ -2x - y + 4z = 0; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -3x + 2y = 1, \\ 2x - y + 5z = 2, \\ -6x + 5y + 15z = 10; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

I.19. Обчислити ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & 9 & -5 & 16 & -4 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 43 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

I.20. Дослідити сумісність системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ -3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

I.21. Розглядається n галузей промисловості, кожна з яких випускає свою продукцію. Частина її йде на споживання тими самими галузями, а решта призначена для кінцевої реалізації. Елементи a_{ij} матриці прямих затрат показують, яка частка продукції i-ї галузі йде на споживання j-ю галуззю. Якщо x_i — валовий випуск i-ї галузі, а y_i — кінцевий продукт i-ї галузі, то модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва) записують системою рівнянь

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i (i = 1, \ldots, n) \quad \text{(або } X = AX + Y \text{у векторній формі).}$$

1. Дані про виконання балансу за звітний період наведено в таблиці

Галузь	Споживання		Кінцевий	Валовий
	енергетика	машинобудування	продукт	випуск
Енергетика	7	21	72	100
Машинобудування	12	15	123	150

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції енергетики збільшиться удвічі, а машинобудування не зміниться.

2. Дані про виконання балансу за звітний період наведено в таблиці

Галузь	Споживання		Кінцевий	Валовий
	галузь 1	галузь 2	продукт	випуск
Галузь 1	100	160	240	500
Галузь 2	275	40	85	400

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі 1 збільшиться на 100%, а галузі 2 — на 20%.

§6. Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай для однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

виконується умова $\operatorname{rang} A=r<n$, тоді будь-які $n-r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(n-r)}$ утворюють її фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок однорідної системи записують у вигляді

$$x=C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}+\dots+C_{n-r}x^{(n-r)},$$

де $C_1,C_2,\dots,C_{n-r}$ — довільні сталі.

Якщо для системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

виконується умова $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_b=r<n$, то її загальний розв'язок дорівнює сумі будь-якого часткового розв'язку неоднорідної системи та загального розв'язку відповідної однорідної системи лінійних рівнянь

$$x=x^*+C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}+\dots+C_{n-r}x^{(n-r)}.$$

I.22. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1-x_2+2x_3=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x_1+6x_2-9x_3=-12, \\ x_1-2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1-4x_2+6x_3=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=10, \\ 2x_1-3x_2+5x_3+3x_4=-6, \\ x_1+2x_2-3x_3-4x_4=4, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1-x_2+x_4=1, \\ -x_1+2x_2+x_3-3x_4=-1, \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4=-2, \\ -x_2+3x_3-x_4=-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1; \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 8x_4 - 4x_1 = -8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 4; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ -3x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 13x_4 + 3x_5 = -5, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 11x_4 - 2x_5 = 3; \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 5x_5 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = -1; \end{cases}$

$$18)\ \begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3+6x_4+3x_5=3, \\ 4x_1-3x_2+x_3-4x_4-5x_5=-1, \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=1, \\ x_1+4x_2+6x_3+8x_4-x_5=6, \\ x_1+7x_2+2x_3+10x_4+x_5=6;. \end{cases}$$

$$19)\ \begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4=0, \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=0, \\ -2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0; \end{cases}$$

$$20)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=0, \\ -x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-5x_3-2x_4=0; \end{cases}$$

$$21)\ \begin{cases} -x_1+x_2+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_4-x_5=0, \\ 3x_1-2x_3+x_4+5x_5=0, \\ -x_1+4x_2+x_3+2x_4=0; \end{cases}$$

$$22)\ \begin{cases} -2x_1+4x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-2x_4+x_5=0, \\ -2x_2-4x_3-2x_5=0, \\ -2x_1-x_2+2x_4+x_5=0, \\ 6x_1+7x_2+8x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases}$$

§7. Лінійний векторний простір

1°. *Означення лінійного векторного простору*

Множина X, на якій введено операцію додавання її елементів та операцію множення елементів з X на дійсний скаляр, називається лінійним векторним простором над полем дійсних чисел, якщо для її елементів справджуються такі аксіоми.

I. $\forall a,b,c\in X: \quad (a+b)+c=a+(b+c)$.

II. $\forall a,b\in X: \quad a+b=b+a$.

III. $\exists e\in X\,\forall a\in X: \quad a+e=a$.

IV. $\forall a\in X\,\exists(-a)\in X: \quad a+(-a)=e$.

V. $\forall \mu,\nu\in R\,\forall a\in X: \quad \mu(\nu a)=(\mu\nu)a$.

VI. $\forall \mu,\nu\in R\,\forall a\in X: \quad (\mu+\nu)a=\mu a+\nu a$.

VII. $\forall \mu\in R\,\forall a,b\in X: \quad \mu(a+b)=\mu a+\mu b$.

VIII. $\forall a\in X: \quad 1\cdot a=a$.

Елементи лінійного векторного простору називають векторами.

2°. *Системи векторів. Поняття бази*

Означення. Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа α_1, α_2,...,α_n, з яких хоча б одне не дорівнює нулеві, і при яких справджується рівність

(1) $$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Означення. Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність (1) можлива лише у випадку, коли всі числа α_1, α_2,...,α_n дорівнюють нулеві.

Лінійно незалежні вектори утворюють *базу простору*, якщо будь-який вектор цього простору можна подати у вигляді лінійної комбінації заданих векторів.

Якщо в деякій базі $\{e_i\}$ для вектора x справджується рівність
$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,$$
то числа $x_1,x_2,...,x_n$ називають *координатами* вектора x в базі $\{e_i\}$.

Будь-які дві бази лінійного простору мають однакову кількість векторів.

Кількість векторів бази називають *розмірністю простору.*

Ранг матриці, складеної з координат векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_n$ деякої системи, дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних векторів цієї системи.

3°.*Зв'язок між базами. Перетворення координат*

Якщо $\{e_i\}$ і $\left\{e'_i\right\}$ дві бази лінійного векторного простору, причому $e'_k=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ik}e_i$, то матрицю $A=(a_{ik})$, стовпчиками якої є координати векторів бази $\left\{e'_i\right\}$ у базі $\{e_i\}$, називають *матрицею переходу* від бази $\{e_i\}$ до бази $\left\{e'_i\right\}$.

Матриця переходу є невиродженою. Обернена матриця є матрицею переходу від бази $\left\{e'_i\right\}$ до бази $\{e_i\}$.

Координати вектора x у базі $\{e_i\}$ і у базі $\left\{e'_i\right\}$ пов'язані співвідношеннями
$$x=Ax', \qquad x'=A^{-1}x.$$

I.23. Чи є лінійним простором над полем дійсних чисел:

1) множина всіх векторів простору паралельних заданій прямій;

2) множина всіх векторів простору перпендикулярних заданій прямій;

3) множина всіх векторів простору не паралельних заданій прямій;

4) множина впорядкованих пар дійсних чисел, на якій введено такі операції:

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$; $\qquad \alpha(a_1, b_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1)$;

5) множина впорядкованих трійок дійсних чисел, на якій введено такі операції:

$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$;

$\alpha(a_1, b_1, c_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1)$;

6) множина впорядкованих n дійсних чисел, на якій введено такі операції:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;

$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$;

7) множина квадратних матриць n-го порядку зі звичайним додаванням матриць і множенням матриці на скаляр;

8) множина діагональних матриць n-го порядку зі звичайним додаванням матриць і множенням матриці на скаляр;

9) множина матриць розмірності $m \times n$ зі звичайним додаванням матриць і множенням матриці на скаляр;

10) множина розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ 3x+y-z+3t=0 \\ y-z=0 \end{cases}$?

Визначте базу і розмірність кожного простору.

I.24. Чи будуть лінійно залежними вектори $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}+\vec{l}$, $\vec{b}=\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{l}$, $\vec{c}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{d}=\vec{n}-\vec{l}$, якщо $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{l}$ — лінійно незалежні.

I.25. Визначити при яких значеннях x і y вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, пов'язані співвідношенням $(x+2y+3)\vec{b}+(3x-y+2)\vec{a}=\vec{0}$, можуть бути лінійно незалежними?

I.26. Визначити при яких значеннях x, y та z вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, пов'язані співвідношенням $(x+y-z-2)\vec{a}+(2x-2y+z-1)\vec{b}+(x-1)\vec{c}=\vec{0}$, можуть бути лінійно незалежними?

I.27. Знаючи розвинення векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ за трьома лінійно незалежними векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{l}$, перевірити, чи будуть лінійно залежними вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Якщо так, то визначити лінійну залежність між ними:

1) $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}-\vec{l}$, $\vec{b}=2\vec{n}-\vec{m}-\vec{l}$, $\vec{c}=2\vec{l}-\vec{m}-\vec{n}$;

2) $\vec{a}=\vec{l}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}-\vec{l}$, $\vec{c}=\vec{m}-\vec{n}+\vec{l}$;

3) $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{l}$, $\vec{b}=\vec{n}+\vec{l}$, $\vec{c}=-\vec{m}+\vec{l}$.

I.28. Серед векторів $a=(1,1,1)$, $b=(0,0,1)$, $c=(2,2,3)$, $d=(2,-1,0)$, $e=(1,2,1)$ вибрати базу простору R^3.

I.29. Знайти координати $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ в базі, складеній з векторів $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{l}=2\vec{b}+3\vec{c}$ (вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно незалежні).

I.30. Показати, що вектори $f_1=(2,1,-3)$, $f_2=(3,2,-5)$ та $f_3=(1,-1,1)$ утворюють базу та знайти координати вектора $x=(6,2,-7)$ в цій базі.

I.31. Знайти матрицю переходу від бази $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,2,3)$, $f_3=(0,1,3)$ до бази $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

§8. Матриця лінійного оператора

Означення. Оператор $A{:}X\to X$ називають лінійним оператором на просторі X, якщо:

1°) $\forall x_1,x_2\in X{:}A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$

2°) $\forall x\in X \forall\lambda\in P{:}A(\lambda x)=\lambda Ax$.

Якщо розмірність простору X дорівнює n, то дію оператора A можна задати квадратною матрицею розмірності n.

Означення. Матрицю A, стовпцями якої є координати образів векторів бази простору X, називають матрицею лінійного оператора $A{:}X\to X$ у цій базі.

Тоді образом вектора x при дії оператора A буде вектор $y{=}Ax$.

Матрицею суми двох операторів $A{:}X\to X$ і $B{:}X\to X$ в деякій базі є сума $A{+}B$ матриць цих операторів у заданій базі.

Матрицею композиції (добутку) двох операторів $A{:}X\to X$ і $B{:}X\to X$ у деякій базі є добуток BA матриць цих операторів у тій самій базі.

Якщо матриця A оператора є невиродженою, то для оператора A існує обернений оператор, матриця якого дорівнює A^{-1}.

Якщо T матриця переходу від бази $\{e_i\}$ до бази $\{e_i'\}$, то матриця A' оператора A в базі $\{e_i'\}$ обчислюється за формулою

$$A'{=}T^{-1}AT.$$

I.32. Показати, що оператор, який кожному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ простору ставить у відповідність вектор $y = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ є лінійним і знайти його матрицю в базі $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

I.33. Показати, що ортогональне проектування тривимірного простору на вісь Oz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.34. Показати, що симетрія тривимірного простору відносно площини xOz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.35. Показати, що симетрія тривимірного простору відносно осі Oy є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.36. Показати, що поворот тривимірного простору відносно осі Oz є лінійним оператором і знайти його матрицю у базі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

I.37. Показати, що оператор диференціювання є лінійним оператором на просторі многочленів, степені яких не вищі, ніж другий, та знайти його матрицю в базі $1, x, x^2$.

I.38. Знайти матриці композицій відображень з прикладів I.33 та I.34 в одному й іншому порядку. Чи комутують ці відображення?

I.39. Оператор A переводить вектори $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (0, 1, 2,)$ та $a_3 = (1, 0, 0)$ відповідно у вектори $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (2, 1, 2)$. Знайти матрицю оператора A у тій базі, в якій задані координати векторів.

I.40. У базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ оператор має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього оператора в базі з векторів:

а) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_3 - \vec{e}_4$;

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

§9. Власні вектори і власні значення матриці

Означення. Ненульовий вектор $\vec{x}$, що задовольняє співвідношення $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ називається власним вектором матриці A, а скаляр λ – власним значенням матриці A, що відповідає власному векторові $\vec{x}$.

Отже, $\vec{x}\neq\vec{0}$ є власним вектором матриці A, якщо вона переводить вектор $\vec{x}$ у колінеарний йому вектор $\lambda\vec{x}$: $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

Система рівнянь $(A-\lambda E)x=0$ матиме ненульовий розв'язок тоді і лише тоді, коли матриця

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

буде виродженою. Отже, власні значення матриці A є коренями многочлена $f(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, який називають характеристичним многочленом матриці A,

Власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,..., $\vec{x}_m$ матриці A, які відповідають попарно різним власним значенням λ_1, λ_2, ..., λ_m, є лінійно незалежними.

Матриця оператора A у базисі, що складається із власних векторів цього оператора, є діагональною.

I.41. Знайти власні вектори і власні значення матриці:

а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$;

і) $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; ї) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$; й) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

I.42. З'ясувати, яку з матриць можна звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нової бази. Знайти цю базу і відповідну їй матрицю.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.43. Нехай n країн, національний дохід кожної з яких відповідно дорівнює $x_1, x_2, \dots, x_n$ проводять між собою торговий обмін. Нехай a_{ij} — частка національного доходу, що витрачає i-та країна на купівлю товарів у j-ій країні. Вважатимемо, що весь національний дохід кожної країни витрачається на закупку товарів всередині країни або на імпорт з інших країн, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Матрицю $A = (a_{ij})$ називають структурною матрицею торгівлі. Торгівля між країнами буде збалансованою, якщо $AX = X$. Показати, що число 1 справді є власним значенням структурної матриці торгівлі.

I.44. Знайти співвідношення національних доходів трьох країн, яке забезпечить збалансовану торгівлю між ними (див. попередню вправу), якщо структурна матриця торгівлі має вигляд:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 2) A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

§10. Квадратична форма

Означення. Квадратичною формою від змінних x_1, x_2,..., x_n називають однорідний многочлен другого степеня вигляду

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де a_{ij} — дійсні числа, причому $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,\dots,n$.

Симетрична матриця $A=(a_{ij})$, $i,j=1,\dots,n$, складена з коефіцієнтів квадратичної форми Q, називається матрицею квадратичної форми.

Квадратична форма називається виродженою (невиродженою), якщо виродженою (невиродженою) є її матриця.

Квадратичну форму у базі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ можна подати у вигляді

$$Q(\vec{x})=\vec{x}^T A\vec{x},$$

де $A=(a_{ij})$ – матриця квадратичної форми в цій базі.

Дві квадратичні форми називаються еквівалентними, якщо від однієї квадратичної форми можна перейти до іншої шляхом невиродженого лінійного перетворення змінних.

Квадратичну форму Q називають канонічною, якщо при $i\neq j$ всі її коефіцієнти $a_{ij}=0$, а коефіцієнти a_{ii} дорівнюють 1, -1 або 0, тобто, якщо вона має вигляд

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\dots+\alpha_nx_n^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^2,$$

де α_i дорівнюють 1, -1 або 0.

Будь–яку квадратичну форму $Q(\vec{x})$ можна звести невиродженим перетворенням змінних до суми квадратів, тобто до канонічного вигляду

$$Q'(\vec{x}\,')=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_{ii}{x'_i}^2.$$

Для практичного зведення квадратичної форми до канонічного вигляду застосовують метод виділення повних квадратів (метод Лагранжа) або метод зведення квадратичної форми до головних осей. В останньому випадку квадратична форма зводиться до вигляду

$$Q'(\vec{x}\,')=(\vec{x}\,')^T A'\vec{x}\,'=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\cdots+\lambda_n x_n'^2,$$

де λ_i – власні значення матриці A; $A'=T^{-1}AT$; $T^{-1}=T^T$, T – матриця переходу від початкової ортонормованої бази до бази, складеної з ортонормованих власних векторів матриці A.

Квадратичну форму $Q(\vec{x})$ називають додатно (від'ємно) визначеною, якщо для будь-якого ненульового вектора $\vec{x}$ виконується співвідношення $Q(\vec{x})>0$ ($Q(\vec{x})<0$).

Справджуються такі твердження:

1) квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти в канонічному вигляді квадратичної форми додатні;

2) квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці квадратичної форми додатні;

3) якщо квадратична форма додатно визначена, то визначник матриці квадратичної форми додатний;

4) *критерій Сільвестра:* квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці квадратичної форми додатні.

I.45. Записати квадратичну форму з матрицею A, якщо матриця A має вигляд:

а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

I.46. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду:

а) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+4x_1x_3$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$.

I.47. За допомогою методу Лагранжа звести квадратичну форму до нормального вигляду:

а) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

г) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2+2x_2x_3+10x_3^2$.

I.48. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду. Записати відповідне невироджене перетворення змінних:

а) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

в) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_4$.

I.49. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду та записати цей канонічний вигляд:

а) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

в) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

I.50. Звести до головних осей квадратичну форму. Знайти відповідне ортогональне перетворення:

а) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;

б) $Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

I.51. Показати, що квадратична форма додатно визначена:

а) $Q(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.

I.52. Знайти значення параметра λ, при якому квадратична форма додатно визначена:

а) $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

в) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

г) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

I.53. Сформулювати означення та ознаки від'ємної визначеності квадратичної форми.

РОЗДІЛ II

СИСТЕМИ КООРДИНАТ

§1. Декартова система координат

1°. *Система координат на прямій*

Пряма, на якій вибрано початок відліку — точку O, напрям і одиницю довжини, називається віссю координат. Її позначають Ox.

Координатою точки на прямій називають довжину відрізка OM, взяту зі знаком плюс, якщо точка M лежить справа від початку координат, і зі знаком мінус, якщо вона розміщена зліва від точки O.

Кожній точці M на координатній осі можна поставити у відповідність дійсне число x — її координату (рис. 1.) Ця відповідність між точками прямої і їх координатами записується так: $M(3)$, $N(5)$, $K(-\sqrt{3})$.

2°. *Система координат на площині*

Дві взаємно перпендикулярні координатні осі Ox і Oy на площині зі спільним початком O утворюють прямокутну систему координат на площині. Її позначають Oxy. Вісь Ox називають віссю абсцис, а вісь Oy — віссю ординат.

Кожній точці M площини відповідає впорядкована пара чисел $(a;b)$, де a — абсциса, а b — ордината точки M (рис. 2).

Осі координат ділять площину на чотири частини, які називають чвертями.

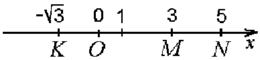


Рис. 1

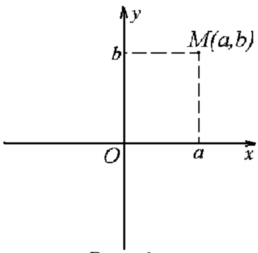


Рис. 2

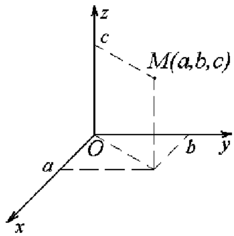


Рис. 3

3°. *Система координат у просторі*

Три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють у просторі прямокутну систему координат. Її позначають $Oxyz$.

Кожній точці M простору відповідає впорядкована трійка чисел $(a;b;c)$, де a — абсциса, b — ордината, c — апліката точки M (рис. 3).

II.1. Знайти координату точки симетричної з точкою $A(4)$ щодо:

1) початку координат; 2) точки $B(-1)$; 3) точки $C(6)$.

II.2. Сторона квадрата дорівнює 1. Знайти координати його вершин, якщо осями координат є дві його діагоналі.

II.3. Знайти координати точок, симетричних до точки M стосовно осей та початку координат, якщо: 1) $M(1;-2)$; 2) $M(-3;0)$; 3) $M(1;2;-4)$.

II.4. Знайти координати вершин правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a, коли відомо, що початок координат є в центрі шестикутника, а вісь абсцис проходить через одну з його діагоналей.

II.5. Куб з ребром a стоїть на площині Oxy так, що центр його основи збігається з початком координат, а бічні ребра лежать на координатних площинах. Знайти координати вершин куба.

II.6. Знайти координати вершин куба з ребром a, якщо одна з вершин основи лежить в початку координат, а ребра тригранного кута в цій вершині збігаються з осями координат.

II.7. Знайти координати вершин правильної трикутної піраміди з висотою h, якщо її вершина є в початку координат, а вершини основи — на осях координат.

II.8. Як розміщені у просторі точки, для яких:

1) $x = y$; 2) $y = z$; 3) $x = y = z$.

II.9. Визначити координати точки, що симетрична точці $M(x; y)$ щодо: 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат; 4) бісектриси першого координатного кута.

II.10. Побудувати в просторі точки $M_1(2; 4; 6)$ і $M_2(3; -2; 5)$.

II.11. Обчислити координати точки, симетричної з точкою $M(a; b; c)$ щодо:

1) площини Oxy; 2) осі Ox; 3) осі Oy; 4) початку координат.

II.12. Побудувати області, координати точок яких задовольняють нерівності:

1) $\begin{cases} y < 2 - x, \\ x > -2, \\ y > -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y > 2 - x, \\ x < 4, \\ y < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} \leq 1, \\ y \geq x + 2, \\ y \geq -4. \end{cases}$

§2. Відстань між двома точками

1°. *Відстань між точками на прямій.* Відстань d між точками $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на осі Ox обчислюється за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|.$$

2°. *Відстань між точками на площині.* Відстань d між точками $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ на площині обчислюється за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

3°. *Відстань між точками у просторі.* Відстань d між точками $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$ у просторі обчислюється за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

II.13. Побудувати на числовій прямій точки $A(-5)$, $B(4)$ і $C(-2)$, знайти довжини відрізків AB, BC і AC на осі. Перевірити, чи $|AB| = |BC| + |AC|$.

II.14. Виконати попередню задачу для точок $A(+1)$, $B(-4)$ і $C(+5)$.

II.15. Побудувати на числовій прямій точки $A(1)$, $B(-2)$ і $C(-3)$, знайти довжини відрізків AB, BC і AC на осі. Перевірити, що $|AB| + |BC| = |AC|$.

II.16. Точка B симетрична до $A(4;-1)$ стосовно бісектриси першого координатного кута. Знайти довжину AB.

II.17. Знайти координати точки, рівновіддаленої від точок $A(-4;0)$ і $B(-3;-7)$, яка розміщена на:

1) осі Ox; 2) на осі Oy.

II.18. Побудувати трикутник з вершинами в точках $A(-4;2)$, $B(0;-1)$ і $C(3;3)$. Визначити його периметр і кути.

II.19. Довести, що трикутник з вершинами $A(-3;-2)$, $B(0;-1)$ і $C(-2;5)$ прямокутний.

II.20. Побудувати точки $A(-4;0)$, $B(-1;4)$ і точки A_1, B_1, симетричні заданим стосовно осі Oy. Обчислити периметр трапеції ABB_1A_1.

II.21. На площині побудувати точки $A(-7;0)$, $B(0;1)$ і точки A_1, B_1, симетричні даним відносно бісектриси першого та третього координатних кутів. Обчислити периметр трапеції ABB_1A_1.

II.22. Знайти точку, що віддалена на 5 одиниць як від точки $A(2;1)$, так і від осі Oy.

II.23. На осі ординат знайти точку, що однаково віддалена від початку координат і від точки $A(-2;5)$.

II.24. На осі абсцис знайти точку, віддалену від точки $A(-2;3)$ на $3\sqrt{5}$ одиниць.

II.25. На осі ординат знайти точку, що віддалена від точки $A(4;-1)$ на 5 одиниць. Пояснити за допомогою побудови, чому отримано два розв'язки.

II.26. На осі абсцис знайти точку, віддалену від точки $A(a;b)$ на c одиниць. Дослідити розв'язок при $c > |b|$, $c = |b|$ і $c < |b|$.

II.27. На осі Ox знайти точку, однаково віддалену від початку координат і від точки $A(8;4)$.

II.28. Знайти центр і радіус кола, описаного навколо трикутника з вершинами:

1) $A(4;3)$, $B(-3;2)$ і $C(1;-6)$; 2) $A(-3;-1)$, $B(5;3)$ і $C(6;-4)$.

§3. Поділ відрізка у заданому відношенні. Площа многокутника

1°. *Поділ відрізка на площині у заданому відношенні.* Координати точки $M(x;y)$, що ділить відрізок AB з кінцями $A(x_1,y_1)$ та $B(x_2,y_2)$ у відношенні $AM{:}MB=\lambda$, визначають за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

При діленні відрізка навпіл (тобто у відношенні $\lambda=1:1=1$)

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

2°. *Поділ відрізка у заданому відношенні у просторі.* Координати точки $M(x;y;z)$, що ділить відрізок AB з кінцями $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$ у відношенні $AM{:}MB=\lambda$, визначають за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

3°. *Площа многокутника.* Площа многокутника з вершинами $A_1(x_1;y_1), A_2(x_2;y_2)$, $\ldots, A_n(x_n;y_n)$ дорівнює

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right].$$

II.29. Побудувати точки $A(-2;1)$ і $B(3;6)$ і знайти точку $M(x;y)$, що ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 3 : 2$.

II.30. Задано точки $A(-2;1)$ і $B(3;6)$. Розділити відрізок AB у відношенні $AM : MB = 2 : 3$.

II.31. Визначити середини сторін трикутника з вершинами $A(2;-1)$, $B(4;3)$ і $C(-2;1)$. Обчислити периметр новоутвореного трикутника.

II.32. Задано відрізок з кінцями $A(1;-3)$ і $B(31;17)$. Визначити координати точок відрізка, що ділять його: 1) навпіл; 2) на три рівні частини; 3) на шість рівних частин.

II.33. Знайти координати кінців відрізка, що лежать на осях координат, якщо його середина є в точці: 1) $A(2;-1)$; 2) $B(3;4)$.

II.34. У точках $A(x_1)$ і $B(x_2)$ осі Ox розміщено маси m_1 і m_2. Знайти центр мас цієї системи.

II.35. У точках $A(x_1)$, $B(x_2)$ і $C(x_3)$ осі Ox розміщено маси m_1, m_2 і m_3 відповідно. Показати, що в точці $x = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$ буде центр мас цієї системи.

II.36. На кінці однорідного стержня довжиною 40 см і масою 500 г насаджено кулі масою 100 і 400 г. Визначити центр мас цієї системи.

II.37. У точках $A(-3;-1)$ і $B(4;6)$ прикладено паралельні сили, що відповідно дорівнюють 30 і 40 Н. На відрізку AB знайти точку прикладення рівнодійної.

II.38. У точках $A(-2;4)$, $B(3;-1)$ і $C(2;3)$ розміщено відповідно маси 60 г, 40 г і 100 г. Визначити центр мас цієї системи.

II.39. У точках $O(0;0)$, $A(2;-5)$ і $B(4;2)$ розміщено відповідно маси 500 г, 200 г і 100 г. Визначити центр мас цієї системи.

II.40. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$ і $C(1;-4)$ визначити довжину бісектриси AE.

II.41. У трикутнику з вершинами $O(0;0)$, $A(8;0)$ і $B(0;6)$ визначити довжину медіани OC і бісектриси OD.

II.42. Знайти центр мас трикутника з вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ і $C(x_3;y_3)$.

Вказівка. Центр мас трикутника є в точці перетину його медіан.

II.43. Задано дві суміжні вершини паралелограма $A(-4;-7)$ і $B(2;6)$ і точка перетину його діагоналей $M(3;1)$. Знайти координати вершини, що:

1) протилежна до вершини A; 2) протилежна до вершини B.

II.44. Знайти центр мас трикутника з вершинами $A(1;-1)$, $B(6;4)$ і $C(2;6)$.

II.45. Які маси можна помістити в точки A і B так, щоб центром мас двох матеріальних точок стала така точка M, що

1) $AM = \frac{3}{7}BM$; 2) $AM = 7\,BM$?

II.46. Знайти центр мас чотирикутної однорідної дошки з вершинами $A(-2;1)$, $B(3;6)$, $C(5;2)$ і $D(0;-6)$.

II.47. Доведіть, що положення центра мас системи матеріальних точок не зміниться, якщо всі маси цих матеріальних точок збільшити в ту саму кількість разів.

II.48. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2;0)$, $B(5;3)$ і $C(2;6)$.

II.49. Показати, що точки $A(1;1)$, $B(-1;7)$ і $C(0;4)$ лежать на одній прямій.

II.50. Обчислити площу чотирикутника $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ і $D(5;-2)$.

II.51. Задано точки $A(1;2)$ і $B(4;4)$. На осі Ox визначити точку C так, щоб площа трикутника ABC дорівнювала 5. Побудувати трикутник ABC.

§4. Рівняння лінії як геометричного місця точок

II.52. Показати, що рівнянням кола з радіусом R і з центром в початку координат є $x^2 + y^2 = R^2$.

II.53. Написати рівняння кола з центром $C(3;4)$ і радіусом $R = 5$. Чи лежать на цьому колі точки: $A(-1;1)$, $B(2;3)$, $O(0;0)$ і $D(4;1)$?

II.54. Написати рівняння лінії, вздовж якої рухається точка $M(x;y)$, що рівновіддалена від точок $A(0;2)$ і $B(4;-2)$. Чи лежать на цій лінії точки $C(-1;1)$, $D(1;-1)$, $E(0;-2)$ і $F(2;2)$?

II.55. Написати рівняння лінії, вздовж якої рухається точка $M(x;y)$, що рівновіддалена від початку координат і від точки $A(-4;2)$. Чи лежать на цій лінії точки $B(-2;1)$, $C(2;3)$, $D(1;7)$?

II.56. Написати рівняння траєкторії точки $M(x;y)$, яка при своєму русі залишається втричі далі від точки $A(0;9)$, ніж від точки $B(0;1)$.

II.57. Написати рівняння траєкторії точки $M(x;y)$, яка при своєму русі залишається удвічі ближче від точки A, ніж від точки B, якщо:

1) $A(-1;1)$, $B(-4;4)$; 2) $A(0;-1)$, $B(0;4)$.

II.58. Написати рівняння бісектрис координатних кутів.

II.59. Написати рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від кожної з яких до точок $F(2;0)$ і $F_1(-2;0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$. Побудувати лінію за її рівнянням.

II.60. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(2;2)$ і від осі Ox. Побудувати лінію за її рівнянням.

II.61. Написати рівняння лінії, вздовж якої рухається точка $M(x;y)$, що залишається удвічі далі від осі Ox, ніж від осі Oy.

II.62. Побудувати лінії:

1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 2x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 5$; 5) $y = 4 - x^2$;
6) $y = x^2 - 4x + 3$.

II.63. Визначити точки перетину з осями координат таких ліній та побудувати ці лінії:

1) $3x - 2y = 12$; 2) $2x + 5y + 10 = 0$; 3) $y = x^2 + 4x$;
4) $y = 3 - 2x - x^2$; 5) $y^2 = 2x + 4$; 6) $y^2 = 4 - x$.

II.64. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від осі Oy і від точки $F(4;0)$. Побудувати криву за її рівнянням.

II.65. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від осі Ox і від точки $F(0;2)$. Побудувати лінію за її рівнянням.

II.66. Написати рівняння геометричного місця точок, різниця відстаней від кожної з яких до точок $F_1(-2;-2)$ і $F(2;2)$ дорівнює 4. Побудувати лінію за її рівнянням.

§5. Полярні координати

У полярній системі координат положення точки на площині визначається *полярним радіусом* — відстанню від *полюса O* та *полярним кутом* φ (рис. 4). Додатні кути φ відраховують проти руху годинникової стрілки, а від'ємні — за її рухом.

Якщо прийняти полюс за початок декартових прямокутних координат, а полярну вісь — за вісь абсцис (рис. 5), то декартові координати $(x;y)$ точки M і її полярні координати $(r;\varphi)$ будуть зв'язані залежністю

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

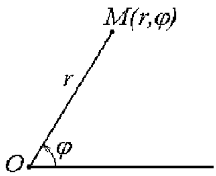


Рис. 4

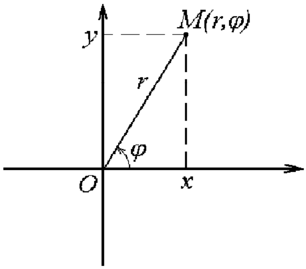


Рис. 5

II.67. У полярній системі координат $(r;\varphi)$ побудувати точки $A(3;0)$, $B(2;\pi/4)$, $C(3;\pi/2)$, $D(2;\pi)$, $E(3;3\pi/2)$.

II.68. Побудувати точки:

$A(2;-\pi/2)$, $A_1(2;3\pi/2)$; $B(3;-\pi/3)$, $B_1(3;5\pi/3)$;
$C(4;-3\pi/4)$, $C_1(4;5\pi/4)$; $D(3;-2\pi/3)$, $D_1(3;4\pi/3)$.

II.69. Побудувати лінію $r = 2 + 2\cos\varphi$.

II.70. Побудувати лінії:

1) $r = a\varphi$ (архімедова спіраль);
2) $r = a(1-\cos\varphi)$ (кардіоїда);
3) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемніската);
4) $r = a/\varphi$ (гіперболічна спіраль);
5) $r = a(1+2\cos\varphi)$ (равлик Паскаля).

II.71. Побудувати лінії:

1) $r = a$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; 3) $r = \dfrac{b}{\sin\varphi}$.

II.72. Написати в полярних координатах рівняння:

1) прямої, що відтинає на полярній осі відрізок a і перпендикулярна до неї;

2) прямої, що проходить через точку $A(a;\alpha)$ і паралельна до полярної осі.

II.73. Написати в полярних координатах рівняння прямої, що проходить через точку $A(a;\alpha)$ й утворює з полярною віссю кут β.

II.74. Написати в полярних координатах рівняння кола з центром у точці $C(0;a)$ і радіусом, що дорівнює a.

II.75. Побудувати криві:

1) $r = 3 - 2\sin 2\varphi$; 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$; 3) $r = 1 - \sin 3\varphi$.

Вказівка. Визначити спочатку кути, при яких досягається $r_{\max}$ і $r_{\min}$.

II.76. Побудувати лінії:

1) $r = a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова роза);
2) $r = a\sin 2\varphi$ (чотирипелюсткова роза).

II.77. Записати рівняння ліній у полярних координатах:

1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 = a^2$; 3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; 4) $y = x$;

5) $x^2+y^2=ax$; 6) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

II.78. Записати рівняння ліній у декартових координатах і побудувати їх:

1) $r\cos\varphi=a$; 2) $r=2a\sin\varphi$; 3) $r^2\sin 2\varphi=2a^2$;

4) $r\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=a\sqrt{2}$; 5) $r=a(1+\cos\varphi)$.

РОЗДІЛ III

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Додавання векторів, множення вектора на скаляр

1°. *Означення.* Вектором називається напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ (рис. 7), з початком у точці A і кінцем у точці B.

Вектор характеризується довжиною і напрямом. Довжина вектора позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або $|\vec{a}|$. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 7) називаються рівними, якщо вони мають: 1) рівні довжини; 2) однакові напрями.

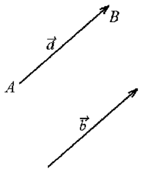


Рис. 7

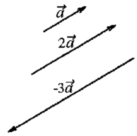


Рис. 8

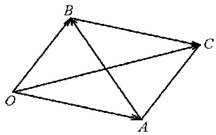


Рис. 9

Вектори, паралельні одній прямій, називаються колінеарними. Колінеарні вектори однаково напрямлені або протилежно напрямлені. Вектори, паралельні одній площині, називаються компланарними.

2°. *Множення вектора на скаляр.* Добутком вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ називається вектор, що має довжину $|\vec{a}|\cdot|\lambda|$ і напрямлений однаково з $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$ і протилежно до $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$ (рис. 8).

Для будь-якого вектора $\vec{b}$ існує вектор $-\vec{b}$, протилежний заданому, $-\vec{b}=-1\cdot\vec{b}$.

3°. *Додавання векторів.* Сумою векторів $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{BC}$ називатимемо вектор $\overrightarrow{OC}$ (рис. 9). У паралелограмі, побудованому на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, одна вектор-діагональ $\overrightarrow{OC}$ є сумою $\vec{a}+\vec{b}$ заданих векторів, а друга — $\overrightarrow{AB}$ — різницею $\vec{b}-\vec{a}$.

4°. *Проекція вектора на вісь.* Нехай вектор $\vec{a}$ утворює кут φ з віссю Ox. Тоді проекція вектора на цю вісь визначається формулою

$$\text{пр}_x\vec{a}=|a|\cos(\widehat{\vec{a},Ox})=|\vec{a}|\cos\varphi.$$

Проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі проекцій векторів на цю вісь

$$\text{пр}_x(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_x\vec{a}+\text{пр}_x\vec{b}.$$

III.1. На сторонах OA і OB прямокутника $OACB$ відкладено одиничні вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$. Виразити через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$, якщо $OA=3$, $OB=4$.

III.2. На площині задано точки $A(0;-2)$, $B(4;2)$ і $C(4;-2)$. В початку координат прикладено сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Побудувати їх рівнодійну

$\overrightarrow{OM}$, знайти її величину і проекції на осі координат. Виразити сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OM}$ через одиничні вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ координатних осей.

III.3. На площині задано точки $A(3;3)$, $B(-3;3)$ і $C(-3;0)$. У початку координат прикладено сили , $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Побудувати рівнодійну $\overrightarrow{OM}$, знайти її величину та проекції на осі координат. Виразити сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OM}$ через одиничні вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ координатних осей.

III.4. Перевірити аналітично та геометрично векторні тотожності:

$$1)\ \vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};\quad 2)\ \vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}.$$

III.5. Задано вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ — медіана трикутника OAB. Розкласти:

1) вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

III.6. Задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими 120°. Побудувати вектор $\vec{c}=$ $=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ і знайти його довжину, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$.

III.7. Задано три компланарні одиничні вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{p}$. $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=30^\circ$, $(\widehat{\vec{n},\vec{p}})=60^\circ$. Побудувати вектор $\vec{u}=\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}$ і обчислити його довжину.

III.8. Задано точки $A(3;4)$, $B(-4;8)$, $C(6;9)$. Побудувати вектори $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

III.9. У рівнобедренній трапеції $OACB$ кут $\widehat{BOA}=60^\circ$, $|OB|=|BC|=$ $=|CA|=2$, M і N – середини сторін BC і AC. Виразити вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ і $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори напрямів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$

III.10. У прямокутнику $OACB$ M і N – середини сторін BC і AC. Розкласти вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ за векторами $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{ON}=\vec{b}$, якщо $|AC|=$ $=4, |BC|=3$.

Вказівка. В умову $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ підставити вирази для $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ і прирівняти коефіцієнти зліва і справа при $\vec{i}$ та $\vec{j}$.

§2. Прямокутні координати вектора в просторі

1°. *Радіус-вектор точки в просторі.* Нехай у просторі задано прямокутну систему координат $Oxyz$ і точку $M(x;y;z)$.

Означення. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ називають радіус-вектором точки M.

Довжина радіус-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ визначається за формулою

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ координатних осей Ox, Oy та Oz відповідно називають ортами. Радіус-вектор $\vec{r}$ можна записати у вигляді розвинення

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Коефіцієнти x, y, z цього розвинення називають координатами вектора $\vec{r}$.

2°. *Координати вектора, заданого кінцями.* Нехай задано точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$. Проекції вектора $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ на осі координат будуть:

$$\begin{cases} \text{пр}_x\overrightarrow{AB}=X=x_2-x_1, \\ \text{пр}_y\overrightarrow{AB}=Y=y_2-y_1, \\ \text{пр}_z\overrightarrow{AB}=Z=z_2-z_1, \end{cases}$$

тому

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k},$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Оскільки в заданій системі координат вектор $\vec{u}$ повністю визначається трьома числами X, Y, Z, то пишуть $\vec{u}=(X;Y;Z)$.

Якщо α, β, γ – кути, що утворює вектор $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ з осями координат Ox, Oy та Oz відповідно, то

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{u}|}, \quad \cos\beta=\frac{Y}{|\vec{u}|}, \quad \cos\gamma=\frac{Z}{|\vec{u}|},$$

тому

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

III.11. Задано точку $M(2;3;5)$, визначити довжину і напрям її радіус-вектора.

III.12. Задано $A(2;1;4)$ і $B(-3;5;1)$. Знайти довжину вектора $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ і його напрям.

III.13. Знайти одиничний вектор $\vec{a_0}$, напрям якого збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(4;0;5)$, $B(7;1;3)$.

III.14. Задано точки $A(2;6)$ і $B(0;2)$; побудувати вектор $\overrightarrow{AB}$, його компоненти на осях, обчислити $\text{пр}_x\overrightarrow{AB}$, $\text{пр}_y\overrightarrow{AB}$ і довжину $|AB|$.

III.15. У точці $A(2;5)$ прикладена сила, проекції якої на осі $X=3$ і $Y=3$. Визначити координати кінця вектора, що зображає цю силу, і величину сили.

III.16. У точці $A(-3;-2)$ прикладено силу, проекція якої $Y=-1$, а проекція X додатна. Визначити координати кінця вектора $\overrightarrow{AB}$, що зображає силу, якщо її величина дорівнює $5\sqrt{2}$.

III.17. Задано точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$. В початку координат прикладено сили, які зображено векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$. Побудувати їх рівнодійну $\overrightarrow{OC}$; довести, що проекція рівнодійної на координатну вісь дорівнює сумі проекцій складових на цю саму вісь.

III.18. Вектор утворює з осями координат Ox і Oz кути 30° і 60°. Знайти кут, що утворює вектор з віссю Oy.

III.19. Радіус-вектор точки M утворює з віссю Ox кут 45°, а з віссю Oy кут 60°. Його довжина $r=6$. Визначити координати точки M, якщо її координата z від'ємна, і виразити вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ через орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

III.20. Вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ утворює з осями координат рівні гострі кути. Визначити ці кути і побудувати вектор $\vec{r}$, якщо його довжина — $2\sqrt{3}$.

III.21. Вектор утворює з осями Oy і Oz кути $60°$ і $120°$ відповідно. Який кут він утворює з віссю Ox?

III.22. Задано точки $A(1;1;-2)$ і $B(4;-5;3)$. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, його проекції на осі координат і визначити довжину та напрям вектора. Знайти кути, що утворює вектор $\vec{u}$ з осями координат.

III.23. Задано точки $A(2;2;0)$ і $B(0;-2;5)$. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ і визначити його довжину і напрям.

III.24. Вектор $\vec{u}$ утворює з осями координат Ox і Oy кути $60°$ і $30°$. Знайти кут, який він утворює з віссю Oz, якщо його довжина дорівнює 3.

III.25. Побудувати паралелограм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{i}+\vec{j}$ і $\overrightarrow{OB} = 3\vec{j}-2\vec{k}$, визначити діагоналі паралелограма та їхню довжину.

III.26. У точці $A(2;1;-1)$ прикладена сила $\vec{R}$, причому $|\vec{R}| = 7$. Знаючи дві координати цієї сили $X = 2$ і $Y = -3$, визначити напрям і координати кінця вектора, що зображає цю силу.

III.27. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ і $C(6;4;4)$. Знайти його четверту вершину D.

§3. Скалярний добуток двох векторів

1°. *Скалярний добуток векторів на площині.* Нехай на площині задано вектори $\vec{a}(a_x,a_y)$ і $\vec{b}(b_x,b_y)$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається відображення, яке парі цих векторів ставить у відповідність число

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ утворює з віссю Ox кут α, а вектор $\vec{b}$ з віссю Ox — кут β, то $\vec{a}=(|\vec{a}|\cos\alpha;|\vec{a}|\sin\alpha)$, $\vec{b}=(|\vec{b}|\cos\beta;|\vec{b}|\sin\beta)$.

Звідси

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\alpha-\beta)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

де $\varphi=\alpha-\beta$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2°. *Скалярний добуток векторів у просторі.* Нехай у просторі задано вектори $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$. Тоді скалярний добуток цих векторів визначають формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Як і у випадку площини

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між цими векторами.

3°. *Властивості скалярного добутку.* Скалярний добуток володіє такими властивостями:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$, причому $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$.

4°. *Довжина вектора.* Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$, то довжину вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ знаходимо за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

5°. *Кут між векторами.* Кут між векторами $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$ обчислюємо за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_x^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_x^2}}.$$

6°. *Умови колінеарності та перпендикулярності векторів.*

Умова колінеарності: $\vec{b}=m\vec{a}$ або $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=m$.

Умова перпендикулярності: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ або $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

III.28. Визначити кут між векторами

1) $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$; 3) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2k$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$;

2) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3k$ і $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$; 4) $\vec{a}=\vec{i}+2k$ і $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}$.

III.29. Визначити кути трикутника ABC з вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ і $C(0;0;5)$.

III.30. З вершини квадрата проведено прямі, що ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між цими прямими.

III.31. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.

III.32. Розкрити дужки у виразі $(2\vec{i}-\vec{j})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\cdot\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{k})^2$.

III.33. Обчислити:

1) $(\vec{m}+\vec{n})^2$, якщо $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори з кутом між ними 30°;

2) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=135°$.

III.34. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

1) $a=mi+5j$, $b=3i-j$;

2) $a=mi+4j+8k$, $b=-28i+7j+14k$?

III.35. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні:

1) $a=mi+j$, $b=3i-3j+4k$;

2) $a=mi+3j+4k$, $b=4i+mj-7k$?

III.36. Визначити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах:

1) $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=60°$;

2) $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{n}$ і $\vec{b}=2\vec{m}-3\vec{n}$, де $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$.

III.37. Задано вектор $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори з кутом 120° між ними. Знайти $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{m}})$ і $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{n}})$.

III.38. Розкрити дужки у виразах: 1) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$. З'ясувати геометричний зміст одержаних формул.

III.39. На площині задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, такі що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ $|\vec{c}|=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$, $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=60°$. Побудувати вектор $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ і обчислити його довжину за формулою $\vec{u}=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}$.

III.40. На осях Ox, Oy і Oz відкласти рівні відрізки, $a=4$ і на них побудувати куб. Нехай M – центр верхньої грані, а N – центр правої бічної грані куба. Визначити вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ і кут між ними.

III.41. Задано вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, причому $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $=60°$. Визначити кут між медіаною $\overrightarrow{OM}$ трикутника AOB і стороною $\overrightarrow{OA}$.

III.42. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Знайти четверту вершину D і кут між $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

III.43. Знайти кут між векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори, що утворюють кут $120°$.

III.44. Показати, що кут між діагоналями прямокутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{a}\perp\vec{b}$), визначається за формулою $\cos\varphi=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

III.45. Із вершини прямокутника зі сторонами 6 см і 4 см проведено прямі, що ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут φ між ними.

III.46. Задано точки $A(3;3;-2)$, $B(0;-3;4)$, $C(0;-3;0)$ і $D(0;2;-4)$. Побудувати вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

III.47. У рівнобедреній трапеції $OACB$ ($AC \parallel OB$) точки M і N — середини сторін $|BC|=2$ і $|AC|=2$. Гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Визначити кут між векторами $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$.

§4. Векторний добуток двох векторів

1°. *Означення.* Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ (рис. 10):

1) що має довжину, яка чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) перпендикулярний до площини паралелограма;

3) утворює з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ праву трійку.

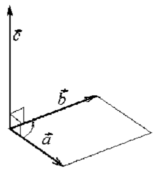


Рис. 10

Векторний добуток позначається: $\vec{a}\times\vec{b}$.

2°. *Властивості векторного добутку.* Векторний добуток володіє такими властивостями:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$; 2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

3) Якщо $\vec{a}\|\vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$, зокрема, $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

3°. *Векторний добуток ортів.*

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

4°. *Вираження векторного добутку через координати векторів.* Якщо задано вектори $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, то їх векторний добуток визначають за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

5°. *Площа паралелограма і трикутника.* Площі паралелограма і трикутника, що побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюють відповідно за формулами:

$$S_{\text{пар}}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\qquad S_{\triangle}=\frac{1}{2}\,|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

III.48. Визначити і побудувати вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}=3\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{k}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; 3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$.

Знайти в кожному випадку площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

III.49. Обчислити площу трикутника з вершинами у точках $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ і $C(4;5;-2)$.

III.50. Розкрити дужки і спростити вирази:

1) $\vec{i}\times(\vec{j}-\vec{k})+\vec{j}\times(\vec{i}-\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{c}+\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}+\vec{a})$;

3) $(2\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a})\times(\vec{a}+2\vec{b})$;

4) $(3\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{c})-\vec{a}\times(2\vec{c}+\vec{b})$.

III.51. Задано точки $A(1;2;1)$, $B(2;3;4)$ і $C(4;3;2)$. Обчислити площу трикутника з вершинами в цих точках.

III.52. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $45°$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ і $3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

III.53. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах:

1) $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=5\vec{m}-7\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=60°$.

2) $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=30°$.

3) $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=135°$.

4) $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ і $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$ де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=30°$.

III.54. Довести, що $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{b}$. З'ясувати геометричний зміст цієї тотожності.

III.55. Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\vec{m}-\vec{n}$ і $4\vec{m}-5\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, що утворюють кут $45°$.

Вказівка. Діагоналі паралелограма — $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$ і $\vec{a}-\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — вектори-сторони паралелограма. Перемноживши їх, знайдемо вектор $2\vec{b}\times\vec{a}$, довжина якого дорівнює подвоєній шуканій площі.

III.56. Побудувати вектори $\vec{a}=3\vec{k}-2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$ і $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Обчислити довжину вектора $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

III.57. Побудувати трикутник з вершинами $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$ і $C(6;2;0)$. Обчислити його площу та висоту BD.

III.58. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів:

1) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+2k$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+2k$.

III.59. Довести, що $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$.

III.660. Обчислити діагоналі та площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

§5. Мішаний добуток трьох векторів

1°. *Означення.* Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається вираз
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

2°. *Вираз мішаного добутку через координати векторів.* Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані своїми координатами, то мішаний добуток визначаємо формулою

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

3°. *Властивості мішаного добутку.*

1. Від перестановки двох довільних множників мішаний добуток змінює знак на протилежний $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$.

2. Оскільки $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, то мішаний добуток записують у вигляді $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

3. Якщо два з трьох заданих векторів колінеарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

4. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і лише тоді, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

5. Об'єм паралепіпеда та піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, обчислюють відповідно за формулами $V_{\text{пар}}=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$, $V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

III.61. Побудувати паралелепіпед на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$, і обчислити його об'єм. Праву чи ліву трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

III.62. Побудувати піраміду з вершинами A, B, C, D:

1) $A(0;0;0)$, $B(5;2;0)$, $C(2;5;0)$, $D(1;2;4)$, обчислити її об'єм, площу грані BCD і висоту піраміди, що опущена на цю грань;

2) $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;3;8)$, обчислити її об'єм і знайти висоту, опущену на грань ABC.

III.63. Обчислити об'єм пірамди, побудованої на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}$ і $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

III.64. Показати, що точки A, B, C, D лежать в одній площині:

1) $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$;

2) $A(1;2;4)$, $B(3;-1;0)$, $C(4;3;13)$, $D(2;6;7)$.

III.65. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні і розкласти $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$;

2) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$.

III.66. Показати, що

1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot[(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}]=-(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$;

2) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\cdot[(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})]=3\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

III.67. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, якщо ці вектори напрямлені по бісектрисах координатних кутів і довжина кожного вектора дорівнює 2.

III.68. Побудувати вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$ і $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$. Показати, що вони компланарні, і знайти лінійну залежність між ними.

III.69. Обчислити об'єм паралелепіпеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в якому заданоо три вершини нижньої основи $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$, $B(3;2;0)$ і вершина верхньої основи $B_1(3;0;4)$, що лежить на бічному ребрі BB_1, протилежному до ребра OO_1.

III.70. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на діагоналях граней заданого паралелепіпеда, дорівнює подвоєному об'єму заданого паралелепіпеда.

РОЗДІЛ IV
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ
§1. Рівняння прямої

1°. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.* Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y=kx+b.$$

Параметр k дорівнює тангенсу кута α нахилу прямої до осі Ox ($k=\operatorname{tg}\alpha$) і називається кутовим коефіцієнтом.

2°. *Загальне рівняння прямої.* Загальне рівняння прямої має вигляд

$$Ax+By+C=0.$$

3°. *Рівняння прямої у відрізках на осях.*

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд

$$\tfrac{x}{a}+\tfrac{y}{b}=1,$$

де a і b — алгебричні величини відрізків, які відтинаються прямою на осях координат.

IV.1. Побудувати прямі, що задаються параметрами:

1) $b=-2$, $\alpha=60°$; 2) $b=-2$, $\alpha=120°$. Написати їхні рівняння.

IV.2. Визначити параметри k і b прямої, яка проходить через точку $M(-2;3)$ і утворює з віссю Ox кут $45°$. Побудувати пряму і написати її рівняння.

IV.3. Побудувати пряму, яка відтинає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює з віссю Ox кут: 1) $45°$; 2) $135°$. Написати рівняння цих прямих.

IV.4. Побудувати пряму, що відтинає на осі Oy відрізок $b=-3$ і утворює з віссю Ox кут: 1) $60°$; 2) $120°$. Написати рівняння цих прямих.

IV.5. Написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут:

1) $45°$; 2) $60°$; 3) $90°$; 4) $120°$; 4) $135°$.

IV.6. Побудувати пряму, що проходить через початок координат і через точку $M(-2;3)$, написати її рівняння.

IV.7. Визначити параметри k і b для кожної з прямих:

1) $2x-3y=6$; 2) $2x+3y=0$; 3) $y=-3$; 4) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$.

IV.8. Побудувати прямі:

1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$.

IV.9. Визначити параметри k і b прямої, яка проходить через точку $A(2;3)$ і утворює з віссю Ox кут $45°$. Написати рівняння цієї прямої.

IV.10. Рівняння прямих 1) $2x-3y=6$; 2) $3x-2y+4=0$ записати у вигляді рівнянь у відрізках. Побудувати ці прямі.

IV.11. Задано точки $O(0;0)$ і $A(-3;0)$. На відрізку OA побудований паралелограм, діагоналі якого перетинаються в точці $B(0;2)$. Написати рівняння сторін і діагоналей паралелограма.

IV.12. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 3.

IV.13. Прямі $y=-2$ і $y=4$ перетинають пряму $3x-4y-5=0$ відповідно в точках A і B. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB}$, визначити його довжину і його проекції на осі координат.

IV.14. Чи лежать точки $A(3;5)$, $B(2;7)$, $C(-1;-3)$ і $D(-2;-6)$ на прямій $y=2x-1$, чи вони розташовані "вище" або "нижче" цієї прямої?

IV.15. Прямі $x=-1$ і $x=3$ перетинають пряму $y=2x+1$ відповідно в точках A і B. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB}$, визначити його довжину і проекції на осі координат.

IV.16. Рівнобедренна трапеція з основами 8 см і 2 см має гострий кут $45°$. Написати рівняння сторін трапеції, прийнявши за вісь Ox більшу основу і за вісь Oy – вісь симетрії трапеції.

IV.17. Написати рівняння сторін ромба з діагоналями 10 см і 6 см, прийнявши більшу діагональ за вісь Ox, а меншу — за вісь Oy.

IV.18. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4;6)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 6.

IV.19. Написати рівняння лінії, по якій рухається точка $M(x;y)$, залишаючись удвічі далі від осі Ox, ніж від прямої $x=-3$.

§2. Кут між прямими. Рівняння пучка прямих, що проходять через задану точку. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

1°. *Кут між прямими.* Кут між прямими $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ визначають із співвідношення

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Для прямих, що задані рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad \text{і} \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

використовують формули

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right| \quad \text{або} \quad \cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Умова паралельності прямих

$$k_1=k_2 \qquad \text{або} \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

Умова перпендикулярності прямих

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \qquad \text{або} \qquad A_1A_2+B_1B_2=0.$$

2°. *Рівняння пучка прямих.* Рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A(x_1;y_1)$ має вигляд

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

3°. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки.* Рівняння прямої, що проходить через задані точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ має вигляд

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

IV.20. Визначити кут між прямими:

1) $y = 2x - 3, \quad y = \dfrac{1}{2}x + 1;$ 4) $5x - y + 7 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0;$

2) $2x + y = 0, \quad y = 3x - 4;$ 5) $3x + 2y = 0, \quad 6x + 4y + 9 = 0;$

3) $3x - 4y = 6, \quad 8x + 6y = 11;$ 6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \quad \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1.$

IV.21. Задано рівняння прямих: $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$. Зазначити, які з них паралельні, які перпендикулярні.

IV.22. Написати рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A(2; 3)$. Вибрати з цього пучка прямі, які утворюють з віссю Ox кути: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $135°$; 4) $0°$. Побудувати їх.

IV.23. Написати рівняння сторін і знайти кути трикутника з вершинами $A(0; 7)$, $B(6; -1)$ і $C(2; 1)$.

IV.24. Задано трикутник з вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ і $C(4; 0)$. Написати рівняння сторін трикутника, медіани AE, висоти AD і знайти довжину медіани AE.

IV.25. Побудувати точку $A(-2; 5)$ і пряму $2x - y = 0$. Написати рівняння пучка прямих, що проходять через точку A і вибрати з цього пучка пряму, яка: 1) паралельна заданій; 2) перпендикулярна заданій.

IV.26. У точках перетину прямої $2x - 5y - 10 = 0$ з осями координат проведено перпендикуляри до заданої прямої. Написати їхні рівняння.

IV.27. Пряма $2x - y + 8 = 0$ перетинає осі Ox і Oy в точках A і B. Точка M ділить AB у відношенні $AM : MB = 3 : 1$. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного в точці M до прямої AB.

IV.28. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1; 3)$ і $B(4; -2)$.

IV.29. У трикутнику з вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$ і $C(4; 2)$ проведено висоту BD і медіану BE. Написати рівняння сторони AC, медіани BE і висоти BD.

IV.30. Знайти внутрішні кути трикутника, сторони якого задано рівняннями $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$.

IV.31. Побудувати трикутник, сторони якого задано рівняннями $x + y = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$. Знайти кути і площу трикутника.

IV.32. Написати рівняння прямих, які проходять через початок координат під кутом $45°$ до прямої $y = 4 - 2x$.

IV.33. Написати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-1; 1)$ під кутом $45°$ до прямої $2x + 3y = 6$.

IV.34. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задано рівняннями $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$.

IV.35. Знайти точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника з вершинами $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ і $C(5; 0)$.

§3. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Рівняння бісектрис. Рівняння пучка прямих, які проходять через точку перетину двох заданих прямих

1°. *Нормальне рівняння прямої.* Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0,$$

де p – довжина перпендикуляра (нормалі), проведеного з початку координат на пряму, а β – кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ox.

Щоб звести загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$ до нормального вигляду, треба всі його члени домножити на *нормуючий* множник $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, що береться зі знаком, протилежним до знака вільного члена C.

2°. *Відстань від точки до прямої.* Відстань d від точки $(x_0;y_0)$ до прямої обчислюємо за формулою

$$d=|x_0\cos\beta+y_0\sin\beta-p| \qquad \text{або} \qquad d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3°. *Рівняння бісектрис кутів між двома прямими.* Рівняння бісектрис кутів між прямими $Ax+By+C=0$ і $A_1x+B_1y+C_1=0$ має вигляд

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

4°. *Рівняння пучка прямих.* Рівняння пучка прямих, які проходять через точку перетину двох даних прямих $Ax+By+C=0$ і $A_1x+B_1y+C_1=0$ має вигляд

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A_1x+B_1y+C_1)=0.$$

IV.36. Рівняння прямих

1) $3x-4y-20=0$; 2) $x+y+3=0$; 3) $y=kx+b$

звести до нормального вигляду.

IV.37. Побудувати пряму, якщо довжина нормалі $p=2$, а кут β нахилу її до осі Ox дорівнює: 1) $45°$; 2) $135°$; 3) $225°$; 4) $315°$. Написати рівняння цих прямих.

IV.38. Знайти відстань від точок $A(4;3)$, $B(2;1)$ і $C(1;0)$ до прямої $3x+$ $+4y-10=0$. Побудувати точки і пряму.

IV.39. Знайти відстань від початку координат до прямої $12x-5y+39=0$.

IV.40. Показати, що прямі $2x-3y=6$ і $4x-6y=25$ паралельні, знайти відстань між ними.

Вказівка. На одній із прямих взяти довільну точку і знайти відстань від неї до другої прямої.

IV.41. Знайти k з умови, що пряма $y=kx+5$ віддалена від початку координат на відстань $d=\sqrt{5}$.

IV.42. Знайти довжину висоти BD у трикутнику з вершинами $A(-3;0)$, $B(2;5)$ і $C(3;2)$.

IV.43. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;4)$ і віддалена від початку координат на відстань $d=2$.

IV.44. Написати рівняння геометричного місця точок, що віддалені від прямої $4x-3y=0$ на відстань $d=4$.

IV.45. Написати рівняння прямої, що віддалена від точки $A(4;-2)$ на відстань $d=4$ і паралельна до прямої $8x-15y=0$.

IV.46. Перевірити, що точки $A(-4;-3)$, $B(-5;0)$, $C(5;6)$ і $D(1;0)$ є вершинами трапеції, знайти її висоту.

IV.47. Через початок координат проведена пряма на однаковій відстані від точок $A(2;2)$ і $B(4;0)$. Знайти цю відстань.

IV.48. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими $2x+3y=10$ і $3x+2y=10$.

IV.49. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими $3x+4y=12$ і $y=0$.

IV.50. Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених від прямої $x+2y-5=0$ на відстань, що дорівнює $\sqrt{5}$.

IV.51. Написати рівняння траєкторії точки $M(x;y)$, яка, рухаючись, залишається вдвічі далі від прямої $y=2x-4$, ніж від прямої $y=4-2x$.

IV.52. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M перетину прямих $2x+y+6=0$ і $3x+5y-15=0$ і через точку $N(1;-2)$ (не знаходячи точки M).

IV.53. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M перетину прямих $5x-y+10=0$ і $8x+4y+9=0$ і паралельна до прямої $x+3y=0$ (не знаходячи точки M).

IV.54. Написати рівняння траєкторії точки $M(x;y)$, яка, рухаючись, залишається вдвічі далі від прямої $y=x$, ніж від прямої $y=-x$.

§4. Різні задачі на пряму

IV.55. Через початок координат провести пряму, що утворює з прямими $x+y=a$ і $x=0$ трикутник, площа якого дорівнює a^2.

IV.56. Задано точки $A(-4;0)$ і $B(0;6)$. Через середину відрізка AB провести пряму, що відтинає на осі Ox відрізок, вдвічі більший, ніж на осі Oy.

IV.57. Задано точки $A(-2;0)$ і $B(2;-2)$. На відрізку OA побудований паралелограм $OACD$, діагоналі якого перетинаються в точці B. Написати рівняння сторін, діагоналей паралелограма і знайти кут CAD.

IV.58. Знайти кути і площу трикутника, утвореного прямими $y=2x$, $y=-2x$ і $y=x+b$.

IV.59. З початку координат проведено дві взаємно перпендикулярні прямі, які утворюють з прямою $2x+y=a$ рівнобедрений трикутник. Знайти площу цього трикутника.

IV.60. Знайти внутрішні кути трикутника, якщо задано рівняння його сторін AB: $x-3y+3=0$ і AC: $x+3y+3=0$ і основа $D(-1;3)$ висоти AD.

IV.61. Задано рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $3x + y = = 0$ і $x - 3y = 0$ і точка $(5; 0)$ на його основі. Знайти периметр і площу трикутника.

IV.62. У трикутнику ABC задано: рівняння сторони AB: $3x + 2y = 12$; рівняння висоти BM: $x + 2y = 4$; рівняння висоти AM: $4x + y = 6$, де M – точка перетину висот. Написати рівняння сторін AC, BC і висоти CM.

§5. Коло

Рівняння кола з центром в точці $C(a;b)$ і радіусом, що дорівнює R, має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Загальне рівняння кола

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0. \tag{2}$$

Щоб від рівняння (2) перейти до рівняння вигляду (1), потрібно в лівій частині рівняння (2) виділити повні квадрати

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p.$$

IV.63. Написати рівняння кола з центром $C(-4; 3)$, радіусом $R = 5$ і побудувати його. Чи лежать на цьому колі точки $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$, $O(0; 0)$?

IV.64. Задано точку $A(-4; 6)$. Написати рівняння кола, діаметром якого слугує відрізок OA.

IV.65. Задано точки $A(-3; 0)$ і $B(3; 6)$. Написати рівняння кола, діаметром якого слугує відрізок AB.

IV.66. Знайти центри та радіуси кіл:

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2,5 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 7y = 0$.

Побудувати ці кола.

IV.67. Побудувати кола:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

IV.68. Побудувати коло $x^2 + y^2 + 5x = 0$, пряму $x + y = 0$ і знайти точки їхнього перетину.

IV.69. Написати рівняння кола, що дотикається осей координат і проходить через точку $A(1; 2)$.

IV.70. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, які проведено в точки перетину кола з віссю Oy.

IV.71. Написати рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ і $C(1; -1)$.

Вказівка. Написати рівняння шуканого кола у вигляді $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, підставити в нього координати кожної точки і знайти m, n і p.

IV.72. Написати рівняння кола, що проходить через точки перетину кола $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ з прямою $y = -x$ і через точку $A(4;4)$.

IV.73. Написати рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, які проведено з початку координат.

IV.74. Задано точку $A(a;0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику OMA кут OMA залишається прямим. Визначити траєкторію руху точки.

IV.75. Визначити траєкторію точки $M(x;y)$, яка рухається так, що сума квадратів відстаней від неї до точок $A(-a;0)$, $B(0;a)$ і $C(a;0)$ постійно дорівнює $3a^2$.

IV.76. Коло дотикається осі Ox в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Написати рівняння цього кола і знайти точки перетину кола з бісектрисами координатних кутів.

IV.77. Написати рівняння кола, яке проходить через початок координат і через точки перетину кола $x^2 + y^2 = a^2$ з прямою $x + y + a = 0$.

IV.78. Написати рівняння дотичних, які проведені з початку координат до кола, що проходить через точки $A(1;-2)$, $B(0;-1)$ і $C(-3;0)$.

IV.79. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$, що проведені в точки перетину кола з віссю Ox.

IV.80. Точка $M(x;y)$ рухається так, що сума квадратів відстаней від неї до початку координат і до точки $A(-a;0)$ постійо дорівнює a^2. Визначити траєкторію руху точки M.

§6. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок F_1 і F_2 (фокусів) є стала величина $2a$ більша, ніж $|F_1F_2|$.

Канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Еліпс, заданий канонічним рівнянням, симетричний щодо осей координат (рис. 11).

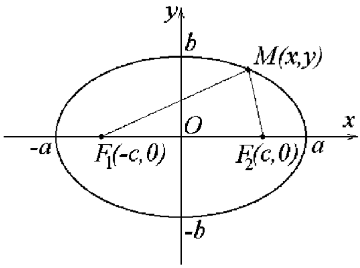


Рис. 11

Параметри a і b називаються півосями еліпса. Якщо $a>b$, то фокуси F_1 і F_2 розміщені на осі Ox на відстані $c=\sqrt{a^2-b^2}$ від центра. Відношення $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ називається ексцентриситетом еліпса. Відстані від точки $M(x;y)$ еліпса до його фокусів (фокальні радіуси) визначають за формулами

$$r_1=a-\varepsilon\, x, \qquad r_2=a+\varepsilon\, x.$$

IV.81. Побудуватии еліпс $x^2 + 4y^2 = 16$, знайти його фокуси та ексцентриситет.

IV.82. Написати канонічне рівняння еліпса, знаючи, що: 1) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b = 3$; 2) більша піввісь $a = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,5$.

IV.83. Знайти малу піввісь b і ексцентриситет ε еліпса, що має більшу піввісь $a = 5$ і параметр c, що дорівнює: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0. Побудувати кожен з еліпсів.

IV.84. Еліпс, симетричний щодо осей координат, проходить через точки $M(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ і $A(6; 0)$. Написати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстань від точки M до фокусів.

IV.85. Написати канонічне рівняння еліпса, в якого відстані від одного з фокусів до кінців більшої осі дорівнюють 5 і 1.

IV.86. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює приблизно 147,5 млн. км, а найбільшша 152,5 млн. км. Знайти більшу піввісь та ексцентриситет орбіти Землі.

IV.87. Еліпс, симетричний щодо осей координат, проходить через точки $M(2; \sqrt{3})$ і $B(0; 2)$. Написати його рівняння і знайти відстань від точки M до фокусів.

IV.88. Еліпс, симетричний щодо осей координат, фокуси якого лежать на осі Ox, проходить через точку $M(-4; \sqrt{21})$ і має ексцентриситет $8\varepsilon = = \frac{3}{4}$. Написати рівняння еліпса і знайти фокальні радіус-вектори точки M.

IV.89. Знайти довжину хорди еліпса $x^2 + 2y^2 = 18$, що ділить кут між осями навпіл.

IV.90. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої півосей.

IV.91. На еліпсі $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса в чотири рази більша, ніж відстань до лівого фокуса.

IV.92. Ординати всіх точок кола $x^2+y^2 = 36$ зменшені втричі. Написати рівняння отриманої нової кривої.

IV.93. Визначити траєкторію точки M, яка, рухаючись, залишається вдвічі ближче до точки $F(-1; 0)$, ніж до прямої $x = -4$.

IV.94. Знайти довжину хорди еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що напрямлена вздовж діагоналі прямокутника, побудованого на осях еліпса.

IV.95. Знайти спільні точки еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і кола, що проходить через фокуси еліпса і має центр в його "верхній" вершині.

IV.96. На прямій $x = -5$ знайти точку, яка однаково віддалена від "лівого" фокуса і від "верхньої" вершини еліпса $x^2 + 5y^2 = 20$.

IV.97. Абсциси точок кола $x^2 + y^2 = 4$ збільшені вдвічі. Визначити одержану криву.

IV.98. Визначити траєкторію точки M, яка, рухаючись, залишається втричі ближче до точки $A(1; 0)$, ніж до прямої $x = 9$.

§7. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох заданих точок F_1 і F_2 (фокусів) є сталою величиною $2a$, $(0<2a<|F_1F_2|)$.

Канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Гіпербола, що задана канонічним рівнянням, симетрична щодо осей координат (рис. 12). Вона перетинає вісь Ox в точках $A(a;0)$ і $A_1(-a;0)$ — вершинах параболи і не перетинає вісь Oy. Параметр a називається дійсною піввіссю гіперболи, а b — її уявною піввіссю. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ є відстанню від фокуса до центра.

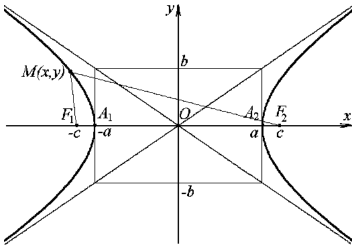


Рис. 12

Відношення $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ називається ексцентриситетом гіперболи. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи.

Відстані від точки $M(x;y)$ гіперболи до її фокусів (фокальні радіус-вектори) визначають за формулами

$$r_1=|\varepsilon x-a|, \qquad r_2=|\varepsilon x+a|.$$

Гіпербола, в якої $a=b$, називається рівносторонньою, її рівняння $x^2-y^2=a^2$, а рівняння асимптот $y=\pm x$.

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ називаються спряженими.

IV.99. Написати канонічне рівняння гіперболи, знаючи, що відстані від однієї з її вершин до фокусів дорівнюють 9 і 1.

IV.100. Побудувати гіперболу $x^2-4y^2=16$ і її асимптоти. Знайти фокуси, ексцентриситет і кут між асимптотами.

IV.101. На гіперболі $x^2-4y^2=16$ взято точку M з ординатою 1. Знайти відстань від неї до фокусів.

IV.102. Написати канонічне рівняння гіперболи, знаючи, що: 1) відстань між фокусами дорівнює 10, а між вершинами 8; 2) дійсна піввісь $a=2\sqrt{5}$, а ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$.

IV.103. Гіпербола, симетрична щодо осей координат, проходить через точку $M(6;-2\sqrt{2})$ і має уявну піввісь $b=2$. Написати її рівняння і знайти відстань від точки M до фокусів.

IV.104. Знайти точку перетину асимптот гіперболи $x^2-3y^2=12$ з колом, яка має центр у правому фокусі гіперболи і проходить через початок координат.

IV.105. Написати рівняння гіперболи, яка має вершини в фокусах, а фокуси – в вершинах еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

IV.106. Написати рівняння гіперболи, яка має ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$, проходить через точку $M(2a;a\sqrt{3})$ і симетрична щодо осей координат.

IV.107. Побудувати гіперболу $y^2 = x^2 + a^2$, знайти координати її фокусів і кут між асимптотами.

IV.108. Гіпербола, проходить через точку $M(6;3\sqrt{5}/2)$, симетрична щодо осей координат і має дійсну піввісь $a = 4$. Написати рівняння перпендикулярів, опущених з лівого фокуса гіперболи на її асимптоти.

IV.109. Знайти відстань від фокуса гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ до її асимптот і кут між асимптотами.

IV.110. Знайти ексцентриситет гіперболи, асимптота якої утворює з дійсною віссю кут: 1) $60°$; 2) α.

IV.111. Визначити траєкторію точки $M(x;y)$, яка, рухаючись, залишається вдічі ближче до прямої $x = 1$, ніж до точки $F(4;0)$.

IV.112. На гіперболі $9x^2 - 16y^2 = 144$ знайти точку, відстань від якої до лівого фокуса вдвічі менша, ніж до правого.

IV.113. Точка M ділить відстань між фокусами гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ у відношенні $F_1M : MF = 2 : 3$, де F_1 – лівий фокус гіперболи. Через точку M проведено пряму під кутом $135°$ до осі Ox. Знайти точки перетину цієї прямої з асимптотами гіперболи.

IV.114. Визначити траєкторію точки M, яка, рухаючись, залишається вдвічі далі від точки $F(-8;0)$, ніж від прямої $x = -2$.

§8. Парабола

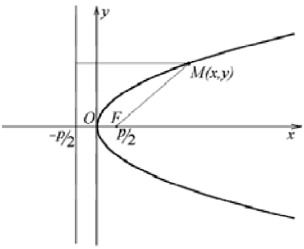


Рис. 13

Параболою називається геометричне місце точок, однаково віддалених від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px.$$

Парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки $M(x;y)$ на ній $r = x + \frac{p}{2}$.

IV.115. Написати рівняння геометричного місця точок, що однаково віддалені від точки $F(0;2)$ і від прямої $y = 4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її.

IV.116. Написати рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від початку координат і від прямої $x = 4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її.

IV.117. Написати рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від початку координат і від прямої $x = -4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її.

IV.118. Написати рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від точки $F(2;0)$ і від прямої $y = 2$. Знайти вершину параболи, точки перетину цієї кривої з віссю Ox і побудувати її.

IV.119. Побудувати параболи,які задано рівняннями:

1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$,

відмітити їхні фокуси і записати рівняння директрис.

IV.120. Написати рівняння параболи, що:

1) проходить через точки $(0;0)$ і $(1;-3)$ і симетрична щодо осі Ox;
2) проходить через точки $(0;0)$ і $(-1;2)$ і симетрична щодо осі Ox;
3) проходить через точки $(0;0)$ і $(2;-4)$ і симетрична щодо осі Oy;
4) проходить через точки $(0;0)$ і $(2;4)$ і симетрична щодо осі Oy.

IV.121. Написати рівняння кола, яке має центр у фокусі параболи $y^2 = 2px$ і дотикається її директриси. Знайти точки перетину параболи і кола.

IV.122. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ і симетрична щодо осі Oy. Побудувати коло, пряму і параболу.

IV.123. На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 4,5.

IV.124. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y = x$ і кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$ і симетрична щодо осі Ox. Побудувати коло, пряму і параболу.

РОЗДІЛ V

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

§1. Рівняння площини

1°. *Рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.* Нехай $M(x;y;z)$ — довільна точка площини (рис. 14). Тоді рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;B;C)$ має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

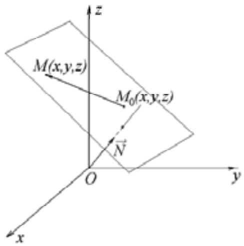


Рис. 14

2°. *Загальне рівняння площини.* Загальне рівняння площини має вигляд

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ є вектором нормалі до площини.

3°. *Рівняння площини, що проходить через три точки.* Якщо $M(x,y,z)$ – довільна точка площини, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні і рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4°. *Рівняння площини у відрізках на осях.* Рівняння площини у відрізках на осях має вигляд

$$\tfrac{x}{a}+\tfrac{y}{b}+\tfrac{z}{x}=1.$$

V.1. Побудувати площини: 1) $5x-2y+3z-10=0$; 2) $3x+2y-z=0$; 3) $3x+2z=6$; 4) $2z-7=0$; 5) $2x+y-z+6=0$; 6) $x-y-z=0$; 7) $y-2z+8=0$; 8) $2x-5==0$; 9) $x+z=1$; 10) $y+z=0$.

V.2. Побудувати площини 1) $2x+3y+6z-12=0$; 2) $2x-2y+z-6=0$. Знайти кути, що утворюють з осями координат нормалі до цих площин.

V.3. Через точку $M(-1;2;3)$ проведена площина перпендикулярна до $\overrightarrow{OM}$. Написати її рівняння.

V.4. Задано точки $M_1(0;-1;3)$ і $M_2(1;3;5)$. Написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}$.

V.5. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0;1;3)$ і $M_2(2;4;5)$ паралельно до осі Ox. Побудувати цю площину.

V.6. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;2;0)$ і $M_2(4;0;0)$ паралельно до осі Oz. Побудувати задану площину.

V.7. Написати рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $M_1(2;-4;3)$. Побудувати задану площину.

V.8. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.
V.9. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_1(-4;0;4)$ і відтинає на осях Ox і Oy відрізки $a=4$ і $b=3$.
V.10. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;4)$, $M_2(2;1;2)$ і $M_3(1;-1;2)$.
V.11. Написати рівняння площини, що відтинає на осях Oy і Oz відрізки, удвічі більші, ніж на осі Ox, і проходить через точку $M_1(1;-3;5)$.
V.12. Написати рівняння площини, що паралельна до осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz відрізки a і c. Побудувати цю площину.

§2. Кут між площинами. Відстань від точки до площини. Рівняння пучка площин, що проходять через лінію перетину двох заданих площин

1°. *Кут між площинами.* Кут між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ задовольняє співвідношення

$$\cos\varphi=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

де $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ — вектори нормалей до площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно.

Умова паралельності площин

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності площин

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

2°. *Відстань від точки до площини.* Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3°. *Рівняння пучка площин, що проходять через лінію перетину двох площин.* Рівняння пучка площин, що проходять через лінію перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ має вигляд

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

V.13. Знайти кут між площинами:
1) $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$; 2) $x+2z-6=0$ і $x+2y-4=0$.
V.14. Знайти площину, яка проходить через точку $M(2,2,-2)$ паралельно до площини $x-2y-3z=0$.
V.15. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;5)$ перпендикулярно до площин $3x-2y+z+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.
V.16. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M(2;-1;4)$ і $N(3;2;-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$.

V.17. Знайти відстань від точки $A(5;1;-1)$ до площини $x-2y-2z+4=0$.
V.18. Знайти відстань від точки $(4;3;0)$ до площини, що проходить через точки $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ і $M_3(3;0;1)$.
V.19. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+3y-5z-8=0$ і $4x+3y-5z+12=0$.
V.20. Написати рівняння площин, паралельних до площини $x-2y+2z-$ $-5=0$ і віддалених від неї на відстань, що дорівнює 2.
V.21. Написати рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ і через точку $(1;2;4)$.
V.22. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $3x+2y-z+4=0$ і $x+y+z-3=0$.
V.23. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $(2;0;-1)$ і $(1;-1;3)$ перпендикулярно до площини $3x+2y-z+5=0$.
V.24. Знайти відстань від $M(1;3;-2)$ до площини $2x-3y-4z+12=0$.
V.25. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M(2;3;-5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.
V.26. Знайти рівняння площини, точки якої однаково віддалені від точок $P(1;-4;2)$ і $Q(7;1;-5)$.
V.27. Написати рівняння площин, паралельних до площини $2x+2y+z-$ $-8=0$ і віддалених від неї на відстань $d=4$.

§3. Рівняння прямої в просторі

1°. *Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно до вектора.* Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і паралельна до вектора $\vec{l}=(m;n;p)$ має вигляд

(1)
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

де $M(x,y,z)$ — довільна точка прямої. Рівняння (1) називають канонічним рівнянням прямої. Вектор $\vec{l}=(m;n;p)$ називають напрямним вектором прямої.

2°. *Параметричне рівняння прямої.* Параметричне рівняння прямої, що має вигляд

$$x=mt+x_0,\quad y=nt+y_0,\quad z=pt+z_0,$$

отримаємо, прирівнюючи кожне з відношень (1) до параметра t.

3°. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки.* Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4°. *Загальне рівняння прямої.* Загальне рівняння прямої має вигляд

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

5°. *Рівняння прямої в проекціях.* Рівняння прямої в проекціях має вигляд

$$\begin{cases} x=mz+x_0, \\ y=nz+y_0. \end{cases}$$

V.28. Рівняння прямої $2x-y+3z-1=0$ і $5x+4y-z-7=0$ звести до канонічного вигляду.

V.29. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3;0)$, паралельно до вектора $\vec{P}=(-1;1;1)$. Побудувати цю пряму.

V.30. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $(0;-4;0)$, паралельно до вектора $\vec{P}(1;2;3)$.

V.31. Побудувати прямі:

1) $y=3$, $z=2$; 2) $y=2$, $z=x+1$; 3) $x=4$, $z=y$

і визначити їхні напрямні вектори.

V.32. Рівняння прямої $2x+y+8z-16=0$, $x-2y-z+2=0$ написати в канонічній формі.

V.33. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1;2;3)$ і $B(2;6;-2)$, знайти її напрямні косинуси.

V.34. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $N(5;-1;-3)$, паралельно до прямої $2x+3y+z-6=0$, $4x-5y-z+2=0$.

V.35. Написати рівняння та побудувати пряму, що проходить через точки $A(2;-1;3)$ і $B(2;3;3)$.

V.36. Написати параметричне рівняння прямої:

1) що проходить через точку $A(-2;1;-1)$, паралельно до вектора $\vec{P}=(1;-2;3)$;

2) що проходить через точки $A(3;-1;4)$ і $B(1;1;2)$.

V.37. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(a;b;c)$:

1) паралельно до осі Oz; 2) перпендикулярно до осі Oz.

V.38. Знайти кут між прямою $x=2z-1$, $y=-2z+1$ і прямою, що проходить через початок координат і точку $A(1;-1;-1)$.

V.39. Знайти кут між прямими:

1) $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$.

Вказівка. Напрямний вектор кожної з прямих можна визначити як векторний добуток нормальних векторів площин ($\vec{P}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$).

V.40. Показати, що пряма $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої $x= =z+1$, $y=1-z$.

V.41. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $(-4;3;0)$, паралельно до прямої $x-2y+ +z=4$, $2x+y-z=0$.

V.42. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2;-3;4)$ на вісь Oz.

Вказівка. Шукана пряма проходить ще через точку (0;0;4).

V.43. Знайти відстань від точки $(2;-1;3)$ до прямої
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}.$$

Вказівка. Точка $A(-1;-2;1)$ лежить на прямій; $\vec{p}(3;4;5)$ — напрямний вектор заданої прямої. Тоді $d=|AM|\sin\alpha=|AM|\frac{|\vec{p}\times\overrightarrow{AM}|}{|\vec{p}|\cdot|AM|}=\frac{|\vec{p}\times\overrightarrow{AM}|}{|\vec{p}|}$.

V.44. Знайти відстань від точки $M(3;0;4)$ до прямої $y=2x+1$, $z=2x$.

V.45. Побудувати пряму $x=3$, $z=5$ і знайти її напрямні косинуси.

V.46. Знайти відстань між паралельними прямими

1) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ і $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$;

2) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ і $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

V.47. У рівняннях прямої $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{n}$ визначити параметр n так, щоб ця пряма перетиналася з прямою $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{1}$ і знайти їхню точку перетину.

§4. Пряма і площина

1°. *Кут між прямою і площиною.* Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ задовольняє співвідношення
$$\sin\varphi=\frac{|\vec{N}\cdot\vec{l}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{l}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини $(\vec{n}\perp\vec{l})$
$$Am+Bn+Cp=0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини $(\vec{n}\parallel\vec{l})$
$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

2°. *Точка перетину прямої і площини.* Для знаходження точки перетину прямої і площини треба параметричне рівняння прямої
$$\begin{cases} x=mt+x_0,\\ y=nt+y_0,\\ z=pt+z_0 \end{cases}$$
підставити в рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ і знайти t_c, а потім x_c, y_c, z_c. Координати точки перетину прямої і площини називаються слідом.

3°. *Умова розміщення двох прямих в одній площині.*

Дві прямі $\dfrac{x-x_0'}{m}{}_1=\dfrac{y-y_0'}{n}{}_1=\dfrac{z-z_0'}{p}{}_1$ і $\dfrac{x-x_0''}{m}{}_2=\dfrac{y-y_0''}{n}{}_2=\dfrac{z-z_0''}{p}{}_2$ лежать в одній площині, якщо виконується співвідношення
$$\begin{vmatrix} x_0'-x_0'' & y_0'-y_0'' & z_0'-z_0''\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

V.48. Побудувати площину $x+y-z=0$ і пряму, що проходить через точки $A(0;0;4)$ і $B(2;2;0)$. Знайти точку перетину прямої з площиною і кут між ними.

V.49. Знайти кут між прямою $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ і площиною $2x+y+z-4=0$.

V.50. Показати, що пряма $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x+y-z=0$, а пряма $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ лежить у цій площині.

V.51. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ і точку $A(3;4;0)$.

V.52. Написати рівняння площини, яка проходить через $A(-1;2;-3)$ перпендикулярно до прямої $x=2$, $y-z=1$.

V.53. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z=4$.

V.54. Написати рівняння площини, що проходить через паралельні прямі
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \text{ і } \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}.$$

V.55. Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат і утворює рівні кути з площинами $4y=3x$, $y=0$ і $z=0$. Знайти ці кути.

V.56. Знайти точку перетину прямої $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=1-t$ з площиною $3x-2y+z=3$.

V.57. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ з площиною $x+2y+3z-29=0$.

V.58. Знайти найкоротшу відстань між мимобіжними прямими
$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \text{ і } \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

Вказівка. Знайти висоту паралелепіпеда утвореного напрямними векторами цих прямих і вектором, що з'єднує задані на них точки.

V.59. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2;1;0)$ на пряму $x=3z-1$, $y=2z$.

V.60. Показати, що прямі $x=z-2$, $y=2z+1$ і $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ перетинаються, написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

V.61. Написати рівняння площини, що проходить через паралельні прямі
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3} \text{ і } \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

V.62. Знайти найкоротшу відстань між мимобіжними прямими

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1} \text{ і } \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

V.63. З точки $(3;-2;4)$ опустити перпендикуляр на площину $5x-3y-7z+1=0$.

V.64. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(3;1;-2)$ і через пряму $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

V.65. Побудувати площину $y=z$, пряму $x=-z+1$, $y=2$ і знайти:

1) точку їхнього перетину; 2) кут між ними.

V.66. Показати, що прямі $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ і $x=3z-4$, $y=z+2$ перетинаються. Знайти точку їхнього перетину.

V.67. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(1;0;-1)$ на пряму $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

V.68. Знайти проекцію точки $M(3;-2;4)$ на площину $5x-3y-7z+1=0$.

V.69. Знайти проекцію точки $A(2;1;0)$ на пряму $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=z$.

V.70. Знайти точку, симетричну точці $B(3;2;-4)$ щодо:

1) площини $2x+2y-z=5$; 2) прямої $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

РОЗДІЛ VI

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§1. Множини. Дійсні числа. Логічна символіка

Якщо кожний елемент множини A є одночасно елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B і записують $A \subset B$. З того, що $A \subset B$ і $B \subset A$, випливає, що $A = B$.

Об'єднанням множин A і B називають множину, що складається з елементів, які належать хоч одній з цих множин. Об'єднання множин A і B позначають $A \cup B$.

Перерізом множин A і B називають множину, що складається з елементів, які одночасно належать як до множини A, так і до множини B. Переріз множин A і B позначають $A \cap B$.

Справджуються рівності:

1) $A \cup B = B \cup A$ і $A \cap B = B \cap A$; 2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ і $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ і $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Різницею множин A і B називають множину C, яка складається з елементів, що належать до A, але не належать до B. Різницю множин A і B позначають $A \setminus B$.

Множину, елементами якої є всі впорядковані пари (a, b), де $a \in A$, $b \in B$, називають *декартовим добутком* множин A і B і позначають $A \times B$. Зауважимо, що $A \times B \neq$ $\neq B \times A$, коли $A \neq B$.

Буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R}$ позначають відповідно множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел. Названі множини пов'язані співвідношенням $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Абсолютною величиною, або модулем дійсного числа x називають невід'ємне число

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{коли } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{коли } x < 0. \end{cases}$$

Логічні символи. Запис $\alpha \wedge \beta$ означає "α і β", запис $\alpha \vee \beta$ означає "α або β", а запис $\neg \alpha$ означає заперечення α (не "α").

Запис $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означає: твердження α еквівалентне твердженню β, тобто з α випливає β, і навпаки, а запис $\alpha \Rightarrow \beta$ треба розуміти, що твердження β випливає з твердження α (але не навпаки).

Запис $\forall x \in X$ читається: для будь-якого (для всіх) $x \in X$, а запис $\exists x \in X$: існує (можна знайти) $x \in X$. Наприклад, запис $\forall b > 0 \, \exists a \, \forall x$: $x^2 + ax + b > 0$ треба читати: для будь-якого числа $b > 0$ знайдеться число a, що для всіх x виконується нерівність $x^2 + ax + b > 0$.

VI.1. Нехай $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x \leqslant 2\}$ і $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 4\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ і $B \setminus A$.

VI.2. Нехай $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2 \leqslant x \leqslant 6\}$ і $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 - 4 = 0\}$. З яких елементів складаються множини:

1) $B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cup B \cap C$; 4)$A \cup (B \cap C)$; 5) $A \times C$; 6) $C \times A$?

VI.3. Довести рівності:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 2) $A \setminus B \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cup A)$.

VI.4. Перевірити правильність включень

1) $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$; 2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

VI.5. Записати раціональні дроби $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{3}{14}$; $-\frac{5}{17}$ у вигляді нескінченних десяткових дробів.

VI.6. Подати у вигляді раціональних дробів числа 0,125; 0,(3); 2,4(35); 0,2(9); 3,13(26).

VI.7. Довести, що сума раціонального й ірраціонального чисел є число ірраціональне. Чи може бути раціональною сума двох ірраціональних чисел?

VI.8. Довести твердження:

1) $(\forall a \in \mathbb{R}) : (|a| > 0) \wedge (|a| = |-a|) \wedge (-|a| < a < |a|)$;

2) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : |a+b| \leqslant |a| + |b|$;

3) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : |ab| = |a||b|$.

VI.9. Довести нерівності:

1) $|a-b| \geqslant ||a| - |b||$;

2) $|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$.

VI.10. Розв'язати нерівності:

1) $|x+1| \leqslant 0,05$;

2) $|x-2| \geqslant 10$;

3) $|x| > |x+1|$;

4) $|2x-1| < |x-1|$;

5) $|x+2| + |x-2| \leqslant 12$;

6) $|x+1| - |x-1| > 1$;

7) $||x+1| - |x-1|| < 1$;

8) $|x(1-x)| \leqslant 0,05$;

§2. Комплексні числа

Вираз $z=x+iy$, де x,y — дійсні числа, i — уявна одиниця ($i^2=-1$), називають комплексним числом у алгебричній формі. Числа $\operatorname{Re} z=x$ та $\operatorname{Im} z=y$ називають відповідно дійсною й уявною частиною комплексного числа. Число $\bar{z}=x-iy$ називають спряженим до числа $z=x+iy$.

Дії над комплексними числами $z_1=x_1+iy_1$ та $z_2=x_2+iy_2$ виконуються так:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2); \qquad z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2);$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Якщо на площині введена декартова прямокутна система координат xOy, то всякому комплексному числу $z=x+iy$ на площині відповідає точка $M(x,y)$, при цьому кажуть, що точка $M(x,y)$ зображає комплексне число $z=x+iy$.

Площина xOy, на якій зображаються комплексні числа, називається комплексною площиною, при цьому Ox називають дійсною віссю, а Oy — уявною віссю.

Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ називають модулем комплексного числа $z=x+iy$ і позначають $|z|$. Модуль комплексного числа дорівнює відстані до точки $M(x,y)$, яка зображає комплексне число, від початку координат. Кут φ, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з додатним напрямом осі Ox, називають аргументом комплексного числа і позначають $\operatorname{Arg} z$. Запис $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ називають тригонометричною формою комплексного числа.

Будь-яке комплексне число $z\neq 0$ ($|z|\neq 0$) має аргумент φ, який є розв'язком системи рівнянь $\cos\varphi=\frac{x}{r}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}$.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі виконуються так:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=(r+r_1)[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)].$$

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=\frac{r}{r_1}[(\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)].$$

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad \text{де } k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Дві останні формули називають формулами Муавра.

Формула Ейлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

VI.11. Виконати дії:

а) $(2+3i)(3-2i)$; б) $(a+bi)(a-bi)$; в) $(3-2i)^2$; г) $(1+i)^3$; д) $\dfrac{1+i}{1-i}$; е) $\dfrac{2i}{1+i}$; є) $\dfrac{4-3i}{4+3i}$; ж) $(a+bi)^3-(a-bi)^3$.

VI.12. Розв'язати рівняння:

а) $x^2+25=0$; б) $x^2-2x+5=0$; в) $x^2+4x+13=0$; г) $x^3+8=0$; д) $x^4+4=0$; е) $x^3-8=0$; є) $x^6+64=0$; ж) $x^4-81=0$.

VI.13. Комплексні числа зобразити векторами, визначити їх модулі та аргументи і записати в тригонометричній формі:
1) $z=3$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$; 5) $z=2-2i$; 6) $z=1+i\sqrt{3}$; 7) $z=-\sqrt{3}-i$; 8) $z=4+4i$; 9) $z=-1+i\sqrt{3}$; 10) $z=1-i$; 11) $z=5$; 12) $z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; 13) $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 14) $z=\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

VI.14. Побудувати області точок z за умовою:

а) $|z|<3$; б) $|z|>4$; в) $1<|z|<3$; г) $\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{3\pi}{4}$; д) $|z|<2$ і $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$; е) $2<|z|<4$ і $-\pi<\varphi<-\frac{\pi}{2}$.

VI.15. Задано точку $z_0=-2+3i$. Побудувати множину точок z, для яких $|z-z_0|<1$.

VI.16. Задано точку $z_0=3-4i$. Побудувати множину точок z, для яких $|z-z_0|<5$.

VI.17. Обчислити за формулою Муавра:

а) $(1+i)^{10}$; б) $(1-i\sqrt{3})^6$; в) $(-1+i)^5$; г) $(1-i)^6$; д) $\left(2+i\sqrt{12}\right)^5$; е) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$; є) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$; ж) $(\sqrt{3}+i)^3$.

VI.18. Знайти всі значення $z=\sqrt[6]{1}$ і зобразити їх радіус-векторами, побудувавши коло, радіуса 1.

VI.19. Знайти всі значення коренів і зобразити їх радіус-векторами:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[5]{1}$.

VI.20. Знайти:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[6]{-1}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

VI.21. Знайти суму $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx$.

Вказівка. За формулою Ейлера записати $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

VI.22. Знайти суму $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx$.

§3. Числова функція

1°. *Поняття функції.* Якщо кожному числу $x\in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число $y\in Y$, то кажуть, що на множині X задано числову функцію $y=f(x)$. Множину X називають областю визначення функції f і позначають $D_f=X$. Множиною значень функції f називають множину $E_f=\{y\in Y\,|\,\exists x\in X{:}y=f(x)\}$.

Функція $y=f(x)$ називається парною, якщо $f(-x)=f(x)$ і непарною, якщо $f(-x)=$ $=-f(x)$.

Функцію $f(x)$ називають строго монотонно зростаючою (спадною), якщо $f(x_1)>$ $>f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$, коли $x_1>x_2$.

Функцію $f(x)$ називають монотонно зростаючою (спадною), якщо $f(x_1)\geq f(x_2)$ $(f(x_1)\leq f(x_2))$, коли $x_1>x_2$.

2°. *Обернена функція.* Якщо на деякій множині X існує єдиний розв'язок рівняння

$$f(x)=y,$$

де $y\in E_f$, то кажуть, що на цій множині існує обернена до f функція $x=f^{-1}(y)$.

Якщо функція $y=f(x)$ строго монотонна на деякій множині X, то на цій множині існує обернена функція $x=f^{-1}(y)$, яка також є строго монотонною.

3°. *Графічне зображення функції.* Множину точок площини $\{(x,y)\,|\,x\in D_f,\,y=f(x)\}$ називають графіком функції $y=f(x)$.

VI.23. Визначити області визначення таких функцій:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{x}{x-1}$; в) $y=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x+4}{2x-6}$; г) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

д) $y=(4-x)\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$; е) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; є) $y=\ln(x-10)$;

ж) $y=\log_2(x-2)+\log_2(2+x)$; з) $y=\sqrt{\sin 2x}$; и) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$;

і) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$; ї) $y=\arcsin(1-x)+\ln(\ln x)$.

VI.24. На яку множину E_y відображає множину E_x функція $y=f(x)$, якщо:

а) $y=x^2$, $E_x=\{-1\leq x\leq 2\}$;

б) $y=\lg x$, $E_x=\{10<x<100\}$;

в) $y=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$, $E_x=\{-\infty<x<\infty\}$;

г) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}$, $E_x=\{0<|x|\leq 2\}$;

д) $y=|x|$, $E_x=\{1\leq|x|\leq 2\}$.

VI.25. Визначити, які з цих функцій парні, а які непарні:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $\varphi(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$; 3) $F(x) = a^x + \dfrac{1}{a^x}$;

4) $\Phi(x) = a^x - \dfrac{1}{a^x}$; 5) $f(x) = x \sin^2 x - x^3$; 6) $f_1(x) = x + x^2$.

VI.26. Яка з елементарних функцій має властивості $f(1) = 0$; $f(a) = 1$; $f(xy) = f(x) + f(y)$?

VI.27. Яка з елементарних функцій має властивості $f(0) = 1$; $f(1) = a$; $f(x+y) = f(x)f(y)$?

VI.28. Для функції $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ обчислити $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x-1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.

VI.29. Для функції $\varphi(x) = x^3$ обчислити $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{h}$.

VI.30. Для функції $f(x) = 4x - x^2$ обчислити $f(a+1) - f(a-1)$.

VI.31. $f(x) = x^2 - x + 1$. Обчислити $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$.

VI.32. $\varphi(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$. Обчислити $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

VI.33. $F(x;\, y) = x^3 - 3xy - y^2$. Обчислити $F(4;\, 3)$ і $F(3;\, 4)$.

VI.34. Побудувати графік лінійної функції $y = ax$ при $a = 0$; $a = \dfrac{1}{2}$; $a = 1$; $a = 2$; $a = -1$.

VI.35. Побудувати графік лінійної функції $y = x + b$ при $b = 0$; $b = 1$; $b = 2$; $b = -1$.

VI.36. Побудувати графіки лінійних функцій:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = 4 - 2x$; в) $y = -\dfrac{x}{3} + 5$.

VI.37. На відрізку $-3 \le x \le 3$ побудувати графіки функцій:

а) $y = 2x$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = 2x - 2$.

VI.38. Побудувати графіки функцій:

а) $y = x^2$; б) $y = x^2 + 1$; в) $y = (x-1)^2$.

VI.39. Побудувати графік квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$, звівши його до вигляду $y = y_0 + a(x - x_0)^2$.

Розглянути приклади:

а) $y = 4x - 2x^2$; б) $y = x^2 - 3x + 2$; в) $y = -x^2 + 2x - 1$.

VI.40. Побудувати графіки цілих раціональних функцій:

а) $y = x^3$; б) $y = 2x^3$; в) $y = \dfrac{x^3}{2}$;

г) $y = \dfrac{x^3}{3}$; д) $y = \dfrac{x^3}{3} + 1$; е) $y = \dfrac{x^3}{3} - 1$;

є) $y = x^4$; ж) $y = 5x^4 - 3$; з) $y = x^3 + x^4$; и) $y = x^5 - x^3$.

VI.41. Побудувати графік дробово-лінійної функції (гіперболи):

1) $y = \dfrac{6}{x}$; 2) $y = \dfrac{6}{x} + 2$; 3) $y = \dfrac{6}{x-4}$; 4) $y = -\dfrac{6}{x}$.

VI.42. Побудувати графік дробово-лінійної функції $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, (тут $ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$), звівши її до вигляду $y = y_0 + \dfrac{m}{x - x_0}$.

Розглянути приклад $y = \dfrac{3x+2}{2x-3}$.

VI.43. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; б) $y = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

VI.44. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{-x}$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = \log_{1/2} x$.

Яку особливість в розташуванні цих кривих щодо осей координат можна зауважити?

VI.45. Побудувати графіки функцій:

а) $y = |x|$; б) $y = -|x-2|$; в) $y = |x| - x$;

г) $y = x + 4 + |x-2|$ на відрізку $[-2; 5]$.

VI.46. Знайти область визначення функцій і побудувати їхні графіки:

а) $y = \sqrt{x+2}$; б) $y = \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = \sqrt{8x - x^2}$;

г) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$; д) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$;

е) $y = \dfrac{x(2 \pm \sqrt{x})}{4}$; є) $y = \pm x\sqrt{4-x}$;

ж) $y = \sqrt{4 - x^2}$; з) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$;

и) $y = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$; і) $y = \dfrac{4}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}$.

VI.47. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 4 - \dfrac{x^3}{2}$ на відрізку $|x| \leq 2$;

б) $y = 3,5 + 3x - \dfrac{x^2}{2}$ між точками перетину з віссю абсцис.

VI.48. Побудувати графіки тригонометричних функцій:

а) $y = \cos x$; б) $y = \sin x$; в) $y = \cos 2x$;

г) $y = \sin \dfrac{x}{2}$; д) $y = -\sin x$; е) $y = \cos^2 x$;

є) $y = \sin^3 x$; ж) $y = |\cos x|$; з) $y = \operatorname{tg} x$;

и) $y = \operatorname{ctg} x$; і) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; ї) $y = -\operatorname{tg} x$.

VI.49. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 1 - \cos x$ на відрізку $|x| \leq 2\pi$;

б) $y = 3 + 2\cos x$; в) $y = x + \sin x$.

VI.50. Побудувати графіки обернених тригонометричних функцій:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$;

г) $y = \operatorname{arcctg} x$; д) $y = \arcsin(x-1)$; е) $y = 2\arccos x$;

є) $y = \arcsin x + 4$; ж) $y = \arccos^2 x$; з) $y = 3 - \arcsin x$.

VI.51. Побудувати на одному рисунку графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Додаванням ординат цих кривих побудувати на цьому ж рисунку графік функції $y = \sin x + \cos x$.

VI.52. Функція $\operatorname{sgn} x$ визначається формулою

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

Побудувати графік цієї функції.

VI.53. Побудувати графіки гіперболічних функцій:

$$y = \operatorname{ch} x, \text{ де } \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right); \qquad y = \operatorname{sh} x, \text{ де } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right);$$

$$y = \operatorname{th} x, \text{ де } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Дослідити їхні властивості.

VI.54. Побудувати криві, що записані параметричними рівняннями:

1) $x = t^2, \quad y = \frac{1}{2}t^3$; 2) $x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t$;

3) $x = 2t - 1, \quad y = 1 - 4t^2$; 4) $x = t^3, \quad y = t^2 - 2$.

Записати рівняння кожної кривої у вигляді $F(x, y) = 0$.

VI.55. Подати у вигляді $F(x, y) = 0$ (або $y = f(x)$) рівняння кривих, що задані параметрично:

1) $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$; 2) $x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t$;

3) $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$; 4) $x = \operatorname{tg} t, \quad y = \cos^2 t$.

VI.56. Прийнявши $y = xt$, отримати параметричне рівняння "декартового листа" $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ і дослідити рух точки по кривій при монотонній зміні t: 1) від 0 до $+\infty$; 2) від -1 до 0; 3) від $-\infty$ до -1.

§4. Границя послідовності

1°. *Означення границі послідовності.* Числовою послідовністю

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

називають числову функцію, задану на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел.

Кажуть, що послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ збігається до числа a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

У цьому випадку пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Послідовність, яка не має границі, називається розбіжною.

Послідовність називають нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2°. *Властивості границь послідовностей.*

I. Якщо існують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$; 4) якщо $x_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

II. Якщо $y_n \le x_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

III. Будь-яка монотонна й обмежена послідовність має границю.

3°. *Число* e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e ірраціональне і $e \approx 2{,}7182818284$.

4°. *Нескінченна границя.* Запис $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ означає, що

$$\forall E>0\ \exists N=N(E)\ \forall n>N: |x_n|>E.$$

5°. *Часткові границі.* Число ξ називається частковою границею послідовності x_n, якщо існує її підпослідовність $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$ $(1 \le k_1 < k_2 < \dots)$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \xi$.

Кожна обмежена послідовність має хоча б одну скінченну часткову границю.

Найменшу з часткових границь (скінченну або нескінченну) послідовності x_n називають нижньою границею послідовності (позначають $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$), а найбільшу — верхньою границею цієї послідовності (позначають $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$).

Послідовність x_n має границю тоді і тільки тоді, коли $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

VI.57. Записати послідовності значень

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n}, \qquad \beta_n = -\frac{1}{2^n}, \qquad \gamma_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Починаючи з якого n, модуль кожного з значень буде меншим, ніж 0,1; ніж 0,01; ніж 0,001; ніж задане додатне ε?

VI.58. Нехай $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, визначивши для кожного $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ таке, що коли $n > N$, то $|x_n - 1| < \varepsilon$.

VI.59. Довести, що x_n $(n = 1, 2, \dots)$ є нескінченно мала, знайшовши для кожного $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, якщо

1) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; 4) $x_n = (-1)^n \cdot (0,999)^n$.

VI.60. Довести, що послідовності

1) $x_n = (-1)^n n$; 2) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; 3) $x_n = \lg\lg n \quad (n \ge 2)$

є нескінченно великими, визначивши для будь-якого $\mathrm{E} > 0$ таке число $N = N(\mathrm{E})$, що $|x_n| > \mathrm{E}$ при $n > N$.

VI.61. Записати послідовність значень змінних $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Починаючи з якого n, ці значення відрізнятимуться від 1 менше, ніж на 0,01; ніж на задане додатне ε?

VI.62. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність $7/3$, $10/5$, $13/7$, ..., $(3n+$ $+4)/(2n+1), \dots$ збігається до числа $3/2$.

VI.63. Для кожної з послідовностей:

а) $x_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; б) $x_n = -\dfrac{2n-1}{n+1}$; в) $x_n = (-1)^n \dfrac{2n-1}{n+1}$;

г) $x_n = \dfrac{8\sin n\dfrac{\pi}{2}}{n+4}$; д) $x_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{n}$; е) $x_n = 3^{-n}a\sin n\pi$;

є) $x_n = 1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$; ж) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{2^n}$; з) $x_n = (-1)^n(2n+1)$;

и) $x_n = \dfrac{1}{2}n\sin\dfrac{\pi n}{2}$; і) $x_n = \dfrac{1}{2n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$; ї) $x_n = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

знайти границю, якщо вона існує. Знайти часткові границі, верхню і нижню границі кожної з цих послідовностей.

VI.64. Вершина B трикутника ABC рухається вздовж прямої BE паралельно до сторони AC, необмежено віддаляючись вправо. Як будуть при цьому змінюватися сторони трикутника, його площа, внутрішні кути, і зовнішній кут BCD?

VI.65. Нехай α_n – внутрішній кут правильного n-кутника. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \pi$.

VI.66. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{n}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{6n}\right)^n$;

4) $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n+3}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{5n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n}\right)^{n/2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\ln(n+4)-\ln n]$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\ln n-\ln(3+n)]$.

§5. Границя функції

1°. *Границя функції в точці.* Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині X і a — внутрішня точка множини. Кажуть, що число A є границею функції f, коли x прямує до a (пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$), якщо

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\colon 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означає, що

$$\forall E>0\,\exists\delta>0\,\forall x\colon 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E.$$

2°. *Властивості границь*

I. $\lim\limits_{x\to a} C=C$.

II. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} v(x)$, то:

$\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))=\lim\limits_{x\to a} u(x)+\lim\limits_{x\to a} v(x)$;

$\lim\limits_{x\to a}(u(x)v(x))=\lim\limits_{x\to a} u(x)\lim\limits_{x\to a} v(x)$;

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} v(x)\neq 0$.

III. Якщо $u(x)<v(x)$ у деякому околі точки a й існують границі $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} v(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)\leq\lim\limits_{x\to a} v(x)$.

3°. *Односторонні границі.* Кажуть, що число A є границею зліва функції f, коли x прямує до a (пишуть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$), якщо $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\colon 0<a-x<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число A є границею справа функції f, коли x прямує до a (пишуть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$), якщо $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\colon 0<x-a<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$.

Іноді замість $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ пишуть відповідно $f(a-0)$ і $f(a+0)$.

Для існування границі функції $f(x)$ в точці a необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі функції f і $f(a-0)=f(a+0)$.

4°. *Визначні границі.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

VI.67. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4x=-4$.

VI.68. Використовуючи означення границі функції в точці, довести, що $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$.

VI.69. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{x}=3$.

VI.70. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{2x+1}=2$. При яких x значення функції будуть відрізнятися від своєї границі менше, ніж на 0,001?

VI.71. Знайти $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{3}{x-2}$ та $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{3}{x-2}$.

VI.72. Довести, що $\sin\alpha$ – нескінченно мала при $\alpha\to 0$.

VI.73. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{2x}=2,5$, показавши, що різниця $\dfrac{5x+2}{2x}-2,5$ є нескінченно мала при x нескінченно великому.

VI.74. Довести, що

1) $\lim\limits_{x\to 3} x^3=27$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)=3$.

VI.75. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{1/(x-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{1/(x-1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi/4-0} 3^{\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/4+0} 3^{\operatorname{tg}2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$; 9) $\lim\limits_{x\to a+0} e^{1/(x-a)}$;

10) $\lim\limits_{x\to a-0} e^{1/(x-a)}$; 11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$; 12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$; 14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; 15) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$;

16) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-10}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$; 21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$;

22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+6}{2x+4}$; 23) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2-3x-3}{x^2-3}$; 24) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

25) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-6x+8}$; 26) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x^2-8x+15}$; 27) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$;

28) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$; 29) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3+x^2+x-3}$; 30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; 32) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{4+3x}-2}$; 33) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$;

34) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 4x}$; 35) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 36) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$;

37) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$; 38) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$;

39) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$; 40) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64}$; 41) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

42) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-1}{5x^2+4x}$; 43) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; 44) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x-1}{x^2+1}$;

45) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{10x^3-7}{x^2+1}$; 46) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+3x-2}{2x^4+4}$; 47) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^5+3x^2-4}{4x^4+3x+2}$;

48) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-4x+5}{2x-3x^2+6}$; 49) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+5x^2+3x-1}{2x^3+2x^2-4x+5}$;

50) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2-1}}$; 51) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{6x+1}$; 52) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$;

53) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$; 54) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$; 55) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \dfrac{x}{4}}{x}$;

56) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 5x}$; 57) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{tg} 3x}$; 58) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 59) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{3}}{x^2}$;

60) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$; 61) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+9}-3}$; 62) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

63) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$; 64) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{x}$; 65) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$;

66) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$; 67) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; 68) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

69) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos mx}{x^2}$; 70) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$; 71) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

72) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; 73) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\arcsin(x+4)}{x^2+4x}$; 74) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x^2-3x+2}$;

75) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$; 76) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\pi-2x}$; 77) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$;

78) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$; 79) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}\right)$;

80) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 81) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$;

82) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$; 83) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

84) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$; 85) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x+1})$;

86) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$; 87) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

88) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$; 89) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$;

90) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; 91) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$;

92) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$; 93) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$; 94) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{(1-x)/x}$;

95) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; 96) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$; 97) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$;

98) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$; 99) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$; 100) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$;

101) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$; 102) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$;

103) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 104) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 105) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$;

106) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; 107) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

108) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; 109) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$; 110) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{4+6x}$;

111) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 112) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$;

113) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; 114) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$; 115) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sin(x+2)}$;

116) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; 117) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{1/x}\right)$;

118) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 119) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-10^x}{1+10^{x+1}}$;

120) $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$; 121) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

122) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$; 123) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$;

124) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-3x})$; 125) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}$;

126) $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

§6. Порівняння нескінченно малих

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими, коли $x\to a$. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, то $\beta(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ (пишуть $\beta(x)=o(\alpha(x))$, коли $x\to a$);

2) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=k\neq 0$, то $\beta(x)$ називають нескінченно малою того ж порядку, що й $\alpha(x)$ (пишуть $\beta(x)=O(\alpha(x))$, коли $x\to a$); коли ж $k=1$, то $\beta(x)$ і $\alpha(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими (записують це так: $\beta(x)\sim\alpha(x)$);

3) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha^n(x)}=k\neq 0$, то $\beta(x)$ називається нескінченно малою n-го порядку щодо $\alpha(x)$.

Різниця двох еквівалентних нескінченно малих є нескінченно малою вищого порядку щодо кожної з них.

VI.76. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha=5t^2+2t^5$ і $\beta=3t^2+2t^3$ коли $t\to 0$.

VI.77. Визначити порядки нескінченно малих: 1) $1-\cos x$; 2) $\operatorname{tg} x-\sin x$ щодо нескінченно малої x.

VI.78. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha=t\,\sin^2 t$ і $\beta=2t\,\sin t$.

VI.79. Визначити порядки нескінченно малих:

1) $2\sin^4 x-x^5$, 2) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$, 3) $\sqrt{1+x^3}-1$, 4) $\sqrt{1+x^2}-1$,

5) $\sin 2x-2\sin x$, 6) $1-2\cos\left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 7) $y=\sqrt{1+x\sin x}-1$

щодо нескінченно малої x.

VI.80. Порівняти нескінченно малі величини:

1) $\alpha=t\,\ln(1+t)$ і $\beta=t\,\sin t$, якщо $(t\to 0)$;

2) $\alpha=t^2\sin^2 t$ і $\beta=t\operatorname{tg} t$, якщо $t\to 0$;

3) $\alpha=(1+x)^m-1$ і $\beta=mx$, якщо $x\to 0$ і m – раціональне додатне число.

VI.81. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax+x^2}{\operatorname{tg} bx}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+\sin^2 x}{\sin 3x+x^3}$.

§7. Неперервність функції

Функція $f(x)$ називається неперервною у точці $x=a$, якщо вона визначена в деякому околі точки a і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Функцію називають неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці проміжку (a,b), а на його кінцях $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ і $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

Точку, в якій порушується неперервність функції, називають її точкою розриву.

Точки розриву, для яких існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \qquad \text{і} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(x+0),$$

називають точками розриву першого роду, всі інші точки розриву — точками розриву другого роду.

Якщо у точці розриву першого роду виконується рівність $f(a+0)=f(a-0)$, то така точка називається точкою усувного розриву.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x=a$, то функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$ також неперервні, коли $x=a$.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в околі точки $x=a$, а функція $g(y)$ неперервна в околі $y=f(a)$, то функція $g(f(x))$ неперервна, коли $x=a$.

VI.82. Визначити точку розриву функції $y=\dfrac{6}{x+3}$, знайти $\lim\limits_{x\to -3-0} y$, $\lim\limits_{x\to -3+0} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ і побудувати схематично графік функції.

VI.83. Визначити точку розриву функції $y=\dfrac{x}{x+2}$, знайти $\lim\limits_{x\to -2-0} y$, $\lim\limits_{x\to -2+0} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ і побудувати схематично графік функції.

VI.84. Показати, що при $x=4$ функція $y=\dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

VI.85. Знайти точки розриву і побудувати схематично графіки функцій: 1) $y=-\dfrac{2}{x}$; 2) $y=\operatorname{ctg} x$; 3) $y=\dfrac{4}{4-x^2}$.

VI.86. Знайти точки розриву функції $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$, побудувати графік функції.

VI.87. Знайти точки розриву функцій:

1) $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

VI.88. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\dfrac{x+2}{|x+2|}$; 2) $y=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Визначити характер їхніх точок розриву.

VI.89. Побудувати графік функції

$$y=f(x)=\begin{cases} 0,5\,x^2 & \text{при } |x|<2,\\ 2,5 & \text{при } |x|=2,\\ 3 & \text{при } |x|>2. \end{cases}$$

і вказати точки її розриву.

VI.90. Побудувати графік функції

$$y=f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при } x=0 \text{ і } x=\pm 2,\\ 4-x^2 & \text{при } 0<|x|<2,\\ 4 & \text{при } |x|>2. \end{cases}$$

і вказати точки її розриву.

VI.91. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

VI.92. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на проміжках: 1) $[2; 5]$; 2) $[4; 10]$; 3) $[0; 7]$.

VI.93. Визначити точки розриву функцій і дослідити характер цих точок, якщо:

$$1)\ y = \frac{x}{(1+x)^2};\quad 2)\ y = \frac{2+x}{1+x^2};\quad 3)\ y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2};\quad 4)\ y = \frac{x}{\sin x};$$

$$5)\ y = e^{x+1/x};\qquad 6)\ y = \frac{1}{\ln x}.$$

VI.94. Дослідити функції на неперервність і з'ясувати характер точок розриву, якщо

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & \text{при } 1 < x \le 2; \end{cases}\qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } |x| \le 1, \\ 1, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

РОЗДІЛ VII

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§1. Похідна функції

1°. *Означення похідної.* Похідною функції $f(x)$ в точці x називають границю

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну позначають $f'(x)$ або $\frac{d\,f(x)}{dx}$. Знаходження похідної називають диференціюванням функції.

2°. *Основні правила знаходження похідної.* Якщо $C=\text{const}$, а функції $u=u(x)$, $v=v(x)$, мають похідні в точці x, то:

$$(C)'=0;\qquad (C\,u)'=C\,u';\qquad (u\pm v)'=u'\pm v';$$
$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

3°. *Основні формули диференціювання:*

1) $(x^n)'=n\,x^{n-1}$; 2) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(\sin x)'=\cos x$; 4) $(\cos x)'=-\sin x$;

5) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$; 10) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;

11) $(e^x)'=e^x$; 12) $(a^x)'=a^x\,\ln a$;

13) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$; 14) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $(a>0)$;

15) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$; 16) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 18) $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

VII.1. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:
а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=\frac{1}{x}$; г) $y=\sqrt{x}$; д) $y=\sqrt[3]{x}$; е) $y=\operatorname{tg} x$; є) $y=\operatorname{ctg} x$; ж) $y=\frac{1}{x^2}$; з) $y=\sqrt{2x+1}$; и) $y=\frac{1}{3x+2}$.

VII.2. Знайти похідні функцій:

1) $y=\frac{x^3}{3}-4x^2+4x+6$; 2) $y=a^5+5a^3x^2-x^5$;

3) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x^2-4x$; 4) $y=\frac{ax+b}{a+b}$; 5) $y=x+4\sqrt{x}$;

6) $y=\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^2$; 7) $y=(a-bx^2)^4$; 8) $y=(1+\sqrt[3]{x})^2$;

9) $y=\frac{1}{15x^5}-\frac{1}{8x^4}$; 10) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$; 11) $y=(x-a)(x-b)$;

12) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}$; 13) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 14) $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$;

15) $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$; 16) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; 17) $y=x+\cos x$;

18) $y=2x^3+\operatorname{tg} x$; 19) $y=x^6+\sin x$; 20) $y=x^4-\operatorname{tg} x$;

21) $y=\frac{2x}{1-x^2}$; 22) $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$; 23) $y=x\sin x$;

24) $y=x^5\operatorname{tg} x$; 25) $y=\sqrt{x}\sin x$; 26) $y=5x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}$;

27) $y=x\ln x$; 28) $y=\frac{1-\ln x}{x}$; 29) $y=4\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^2}$;

30) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$; 31) $y=4x^3\ln x$; 32) $y=3x^3\ln x-x^3$;

33) $y=x^3\cos x$; 34) $y=6x^5\operatorname{ctg} x$; 35) $y=\frac{\sin x}{x^2}$;

36) $y=\frac{x^2}{x^2+2}$; 37) $y=x^2+3^x$; 38) $y=x^2 2^x$; 39) $y=x^2e^x$;

40) $y=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 41) $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$; 42) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$;

43) $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; 44) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$; 45) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$;

46) $y=x+\operatorname{arcctg} x$; 47) $y=\frac{x^2-9}{x^2+9}$; 48) $y=x-\frac{2}{x+1}$;

49) $y=\frac{\sin x}{1+2\sin x}$; 50) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 51) $y=x-\operatorname{th} x$;

52) $y=\frac{1+\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x}$; 53) $y=\operatorname{th} x+\operatorname{cth} x$; 54) $y=x-\operatorname{cth} x$.

VII.3. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x$; обчислити $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

VII.4. Знайти $f'(1)$, якщо $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

VII.5. $f(x)=\frac{x}{2x-1}$. Знайти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$.

VII.6. $f(x)=x^2+\frac{1}{2x^2}$; обчислити $f'(1)+f'(-1)$.

VII.7. Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $h=4+8t-5t^2$. Знайти швидкість тіла у момент початку руху та в момент падіння. На якій висоті швидкість тіла дорівнюватиме нулю?

VII.8. Залежність між витратами виробництва й об'ємом випуску продукції виражається функцією $y=50x-0,5x^3$. Знайти середні та граничні витрати виробництва, якщо об'єм випущеної продукції дорівнює 10.

VII.9. Залежність між витратами виробництва й об'ємом випуску продукції виражається функцією $y=10x-0,04x^3$. Знайти середні та граничні витрати виробництва, якщо об'єм випущеної продукції дорівнює 5.

VII.10. Обсяг продукції u, випущеної бригадою робітників, задається рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, де $1 \le t \le 8$ — робочий час у годинах. Знайти продуктивність праці через годину після початку роботи і за годину до її завершення.

VII.11. Обсяг продукції u, випущеної бригадою робітників, задається рівнянням $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де t — робочий час у годинах. Знайти продуктивність праці через 2 год після початку роботи.

§2. Похідна складеної функції

Якщо $u=\varphi(x)$ має похідну в точці x, а $y=f(u)$ має похідну в точці $u=\varphi(x)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ також має похідну в точці x і

$$y'(x)=f'(u(x))\cdot u'(x).$$

VII.12. Знайти похідні від функцій:

1) $y = \sin 8x$; 2) $y = \mathrm{tg}\,(ax + b)$; 3) $y = \sin\dfrac{x}{3} + \cos\dfrac{x}{3}$;

4) $y = 8\sin\dfrac{x}{4}$; 5) $y = (1 - 6x)^5$; 6) $y = \sqrt[3]{(4x + 3)^2}$;

7) $y = \dfrac{1}{(1 + x^2)^4}$; 8) $y = \sqrt{2 + x^3}$; 9) $y = \sqrt{\sin 3x}$;

10) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos 6x}}$; 11) $y = \sqrt{2x + \sin 2x}$; 12) $y = \sin^5 x$;

13) $y = \sin^2 x$; 14) $y = \sin x^2$; 15) $y = \cos^3 x$; 16) $y = \cos\sqrt{x}$;

17) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 18) $y = \mathrm{tg}^3 x - 2\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg}\, x$;

19) $y = \sqrt[5]{1 + 2\cos^2 x}$; 20) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$; 21) $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

22) $y = \dfrac{1}{(1 + \sin 3x)^4}$; 23) $y = \mathrm{tg}^5\dfrac{x}{5}$; 24) $y = x^4\sin^3 x$;

25) $y = x^3\sqrt{1 - x^2}$; 26) $y = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$; 27) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}$;

28) $y = (2x^3 + 1)^6$; 29) $y = 5\mathrm{tg}^4 3x$; 30) $y = (3x^2 - 4x + 2)\cos 2x$;

31) $y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$; 32) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$;

33) $y = \mathrm{tg}\,\dfrac{2x + 1}{4}$; 34) $y = \dfrac{1}{3}\sin^3\sqrt{x} - \dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x} + \dfrac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$;

35) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; 36) $y = \sqrt{6x - \sin 6x}$; 37) $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$;

38) $y = \sin^4 x^2$; 39) $y = \sqrt[3]{1 + \sin 9x}$; 40) $y = 2\mathrm{tg}\, x - \dfrac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x + \dfrac{1}{6}\mathrm{tg}^6 x$;

41) $y = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; 42) $y = \dfrac{\sqrt{4x + 1}}{x^2}$; 43) $y = \sqrt{\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}}$.

VII.13. $f(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t}$; знайти $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

VII.14. $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$; знайти $f'(1)$.

VII.15. Знайти похідні від функцій:

1) $y = \ln 6x$; 2) $y = \ln(1 - \sin x)$; 3) $y = \ln(\cos x) - \dfrac{1}{4}\sin^4 x$;

4) $y = \ln \dfrac{x^5}{x^5 + 2}$; 5) $y = \ln \dfrac{x^2}{1 - x^2}$; 6) $y = (x^5 + 3)[\ln(x^5 + 3) - 1]$;

7) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1})$; 8) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$; 9) $y = 4\sqrt{x} - 8\ln(2 + \sqrt{x})$;

10) $y = 4x^2 e^x - 8\ln(\sqrt{x^2 - 1})$; 11) $y = \ln(x^3 - 4x)$; 12) $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$;

13) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$; 14) $y = a^{\cos x}$; 15) $y = e^{-x^3}$;

16) $y = x^2 e^{-2x}$; 18) $y = 4(e^{x/4} - e^{-x/4})$; 19) $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$;

20) $y = e^x(\sin x + \cos x)$; 21) $y = \ln(e^x - xe^x)$; 22) $y = e^{x/b}\sin\dfrac{x}{b}$;

23) $y = \dfrac{e^{-x}}{x^2 + 1}$; 24) $y = (e^{ax} + e^{-ax})^2$; 25) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{2x + 1}{4}\right)$;

26) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; 27) $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$;

28) $y = e^{-x} + \sin(e^{-x})\cos(e^{-x})$; 29) $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x$;

30) $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$; 31) $y = \ln\dfrac{(x - 1)(x - 3)^3}{(x - 2)^3(x - 4)}$;

32) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$; 33) $y = \ln(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2})$;

34) $y = \ln\dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$; 35) $y = \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x})$;

36) $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; 37) $y = \dfrac{1}{2}\ln(\operatorname{ctg} x) + \ln(\sin x)$;

38) $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}$; 39) $y = \dfrac{\sin 3x}{1 + \ln(\sin 3x)}$; 40) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

41) $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$; 42) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{8x}}{e^{8x} + 1}}$; 43) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$;

44) $y = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$; 45) $y = \ln(\sin\sqrt{x}) \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$;

46) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x$; 47) $y = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}$;

48) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$; 49) $y = \arccos\sqrt{1 - 9x}$; 50) $y = \arccos\dfrac{a}{x}$;

51) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 52) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{6x - 1}$; 53) $y = \arcsin(1 - 2x)$;

54) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$; 55) $y = x\sqrt{1 - x^2} - \arccos x$;

56) $y = \arccos e^{5x+1}$; 57) $y = \arcsin e^{5x+1}$; 58) $y = \arccos(1 - x^2)$;

59) $y = \operatorname{arcctg} x + \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 60) $y = \arcsin \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{5}}$;

61) $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$; 62) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{9x^2 - 1}$;

63) $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; 64) $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$;

65) $y = \arccos \dfrac{2x^3}{1 + x^6}$; 66) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 67) $y = \arccos \dfrac{16 - x^2}{16 + x^2}$;

68) $y = \arcsin \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$; 69) $y = \arcsin e^x + \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$;

70) $y = \operatorname{arctg}(1+x) + \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$; 71) $y = \arccos(2e^{2x} - 1)$;

72) $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$; 73) $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x$;

74) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$; 75) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

76) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 77) $y = 2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$; 78) $y = \ln(\operatorname{ch} x)$;

79) $y = \ln(\operatorname{th} x)$; 80) $y = \arcsin(\operatorname{th} x)$; 81) $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$;

82) $y = \operatorname{ch}^3 x$; 83) $y = x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{th}^3 x$; 84) $y = \arccos(\operatorname{sh}^2 x)$;

85) $y = \sqrt{4 + \operatorname{ch}^2 4x}$; 86) $y = x^3 - \ln\ (\operatorname{sh} x)$; 87) $y = \ln\ \operatorname{th} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$;

88) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \arcsin \dfrac{1}{x}$; 89) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x$;

90) $y = \sqrt{4x - 1} + \operatorname{arcctg} \sqrt{4x - 1}$; 91) $y = \ln(e^{2t} + 1) + 2\operatorname{arctg}(e^t)$;

92) $y = 4 \ln \sqrt{x - 4} + \sqrt{x^2 - 4x}$; 93) $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 t - \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t - \ln \cos t$;

94) $y = \dfrac{1}{4a}\ \ln \dfrac{x - a}{x + a} + \dfrac{1}{2a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$; 95) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$;

96) $y = e^{1/2\, \operatorname{tg}^2 x}\ \cos x$; 97) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x^4}{1 - x^8}$; 98) $y = x^2\, e^{x^2}\ \ln x$;

99) $y = \arccos \sqrt{1 - 2^x}$; 100) $y = \ln \left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} \right)$;

101) $y = \dfrac{x^2\, e^{x^2}}{x^2 + 1}$; 102) $y = 2(\operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x})$; 103) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$.

Темпом зміни T_y функції називають відношення похідної функції до її значення $T_y = \dfrac{y'}{y}$.

Еластичністю $E_x(y)$ функції $y = f(x)$ стосовно аргументу x називають границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{xy'}{y}.$$

VII.16. Покажіть, що:

1) $T_y = (\ln y)'$; $\qquad E_x(y) = xT_y$;

2) $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$; $\qquad E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$.

VII.17. Обсяг продукції u, випущеної бригадою робітників, задається рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, де $1 \le t \le 8$ — робочий час у годинах. Знайти швидкість і темп зміни продуктивності праці через 2 год після початку і за 2 год до кінця роботи.

VII.18. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (у тис.грн) і випуском продукції x (млрд. грн) задається функцією $y = -0,5x+$ $+80$. Знайти еластичність собівартості стосовно випуску продукції, якщо випуск продукції становить 60 млрд. грн. Як зміниться собівартість продукції (у %), якщо випуск продукції збільшиться на 1%?

VII.19. Функції попиту q і пропозиції s товару, що купується і пропонується за одиницю часу, залежно від ціни p товару задано рівностями $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ та $s = p + 0,5$. Знайти рівноважну ціну товару та еластичність попиту і пропозиції при цій ціні. Як зміниться прибуток при збільшенні ціни на 2% від рівноважної?

VII.20. Функції попиту q і пропозиції s товару залежно від ціни p задано рівностями $q = 7 - p$ та $s = p + 0,5$. Знайти рівноважну ціну товару та еластичність попиту і пропозиції при цій ціні. Як зміниться прибуток при збільшенні ціни на 5% від рівноважної?

VII.21. Як зв'язані граничні та середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат за об'ємом випуску продукції дорівнює 1?

§3. Похідна оберненої функції. Похідна функції, що задана параметрично. Похідна неявної функції

1°. *Похідна оберненої функції.* Якщо неперервна функція $y=f(x), (a<x<b)$ має похідну в точці $x_0 \in (a,b)$, причому $f'(x_0) \neq 0$, то в околі цієї точки вона має неперервну обернену функцію $x=f^{-1}(y)$, яка теж має похідну, причому

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

2°. *Похідна функції, що задана параметрично.* Якщо функції $x=\varphi(t)$ і $y=\psi(t)$, $(\alpha<t<\beta)$ мають похідні в точці t_0, причому $\varphi'(t_0) \neq 0$, тоді параметрично задана функція $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ має у точці $x_0=\varphi(t_0)$ похідну $\dfrac{dy}{dx}$, яка може бути знайдена за формулою

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

3°. *Похідна неявної функції.* Якщо рівняння $F(x,y)=0$ у деякому околі точки (x_0,y_0), яка є розв'язком цього рівняння, однозначно задає функцію $y=y(x)$, то її похідну $y'(x_0)$ можна знайти з рівняння

$$\left(\frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right]\right)\Bigg|_{x=x_0,y=y_0}=0,$$

де $F(x,y(x))$ розглядають як складену функцію змінної x.

VII.22. Визначити області існування обернених функцій $x=x(y)$ і знайти їхні похідні, якщо:

а) $y=x+\ln x$, $(x>0)$; б) $y=x+e^x$; в) $y=\operatorname{sh}x$; г) $y=\operatorname{th}x$.

VII.23. Визначити однозначні неперервні гілки обернених функцій $x==x(y)$ і знайти їхні похідні, якщо

а) $y=2x^2-x^4$; б) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; в) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

VII.24. Показати, що існує однозначна функція $y=y(x)$, що визначається рівнянням $y^3+3y=x$, і знайти її похідну y'_x.

VII.25. Показати, що існує однозначна функція $y=y(x)$, визначена рівнянням $y-\epsilon\sin y=x$, $(0\le\epsilon<1)$, і знайти її похідну y'_x.

VII.26. Знайти похідні y'_x, якщо

а) $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$; д) $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$;

б) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; е) $x=a\operatorname{ch}t$, $y=b\operatorname{sh}t$;

в) $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$; є) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;

г) $x=e^{2t}\cos^2 t$, $y=e^{2t}\sin^2 t$; ж) $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

VII.27. Знайти y' з рівняння:

а) $x^2+y^2=a^2$; б) $y^2=2px$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;
д) $x^2+y^2-xy=0$; е) $x^2+xy+y^2=6$; є) $x^3+y^3-3axy=0$;
ж) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; з) $x=y+\operatorname{arctg}y$; и) $e^y-e^{-x}+xy=0$;
і) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

VII.28. Знайти $y'(0)$, якщо $e^{xy}-x^2+y^3=0$.

VII.29. Довести, що $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$.

§4. Диференціал функції

Функцію $y=f(x)$ називають диференційовною в точці x, якщо її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

де $A=\text{const}$, а $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Функція є диференційовною в точці x тоді і лише тоді, коли вона має в цій точці похідну, причому в (1) $A=f'(x)$.

Усяка диференційовна в заданій точці функція є неперервною в цій точці.

Головну лінійну щодо Δx частину приросту функції називають диференціалом функції у точці x

$$dy = A\Delta x.$$

Врахувавши, що $A = f'(x)$, а $dx = \Delta x$, можемо записати

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Остання формула не змінюється і тоді, коли x є функцією $x = \varphi(t)$.

На підставі (1) можна стверджувати, що при досить малому Δx приріст функції наближено дорівнює її диференціалу.

VII.30. Для функції $y = x^2$ знайти Δy і dy, якщо x змінюється від 2 до 2,01. Порівняти їх.

VII.31. Для функції $y = x^3$ визначити Δy і dy при зміні x від 2 до 1,98.

VII.32. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайти Δy і dy, якщо x змінюється від 100 до 101.

VII.33. Знайти диференціали функцій:

а) $y = x^n$; б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; в) $y = \sqrt{1 + x^2}$; г) $s = \dfrac{gt^2}{2}$;

д) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; е) $x = \dfrac{1}{t^2}$; є) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; ж) $r = \cos(a - b\varphi)$;

з) $s = \sqrt{1 - t^2}$; и) $y = \ln\cos x$; і) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{4u - 1}$; ї) $s = e^{-2t}$.

VII.34. Знайти:

а) $d(\sqrt{x} + 1)$; б) $d(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)$; в) $d(bt - e^{-bt})$; г) $d(\ln t - e^{-t})$;

д) $d(\sin^2 t)$; е) $d(1 - \cos u)$; є) $d\left(\dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)$; ж) $d(\alpha + \ln\alpha)$;

з) $d\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$; и) $d\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$.

VII.35. Сторона куба $x = 5$ м $\pm 0,01$ м. Визначити абсолютну та відносну похибки при обчисленні об'єму куба.

VII.36. Довжина телеграфного проводу $S = 2b\left(1 + \dfrac{2f^2}{3b^2}\right)$, де $2b$ – відстань між двома точками підвішування, а f – найбільший прогин. Наскільки збільшиться прогин f, якщо довжина провода від нагрівання збільшиться на dS?

VII.37. З якою точністю потрібно взяти абсцису кривої $y = x^2\sqrt{x}$ при $x \le 1$, щоб при обчисленні її ординати допустити похибку не більшу 0,1?

VII.38. З якою точністю потрібно виміряти радіус кулі, щоб при обчисленні її об'єму допустити похибку не більшу 1%?

VII.39. Період коливання маятника $T = 2\pi\sqrt{l/980}$ с, де l – довжина маятника в сантиметрах. Як потрібно змінити довжину маятника $l = 20$ см, щоб період коливань зменшився на 0,1 с?

VII.40. Довести формулу $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$ $(a > 0,\ |x| \ll a)$, та користуючись нею обчислити наближено:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

§5. Похідні і диференціали вищих порядків

1°. *Основні означення.* Похідні вищих порядків від функції $y=f(x)$ визначаються співвідношеннями

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))' \qquad (n=2,3,\dots).$$

Диференціали вищих порядків від функції $y=f(x)$ визначаються послідовно формулами

$$d^n y=d(d^{n-1}y) \qquad (n=2,3,\dots),$$

де $d^1y=dy=y'\,dx$.

Якщо x — незалежна змінна, то

$$d^n y=y^{(n)}dx^n \qquad \text{і} \qquad y^{(n)}=\frac{d^n y}{d x^n}.$$

2°. *Формули Лейбніца.*

$$(u(x)v(x))^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x), \qquad d^n(uv)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k u d^{n-k}v.$$

VII.41. Знайти похідну другого порядку від функції:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\operatorname{tg} x$; в) $y=\sqrt{1+x^2}$; г) $y=e^{-x^2}$;

д) $y=\operatorname{ctg} x$; е) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

VII.42. Знайти похідну третього порядку від функції:

а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\dfrac{1}{x^2}$; в) $y=x\sin x$; г) $y=x\ln x$;

д) $s=t\,e^{-t}$; е) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

VII.43. Знайти похідну n-го порядку від функції:

а) $y=e^{-x/a}$; б) $y=\ln x$; в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=x^n$; д) $y=\sin x$;

е) $y=\cos^2 x$; є) $y=a^x$; ж) $y=\dfrac{1}{1+2x}$; з) $y=\sin^2 x$.

VII.44. Послідовним диференціюванням вивести формули Лейбніца:

$$(u\,v)''=u''v+2u'v'+u\,v'';$$
$$(u\,v)'''=u'''v+3u''v'+3u'\,v''+u\,v''';$$
$$(u\,v)^{(IV)}=u^{(IV)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+u\,v^{(IV)}.$$

VII.45. За формулою Лейбніца знайти похідну другого порядку від функцій:

а) $y=e^x\cos x$; б) $y=a^x x^3$; в) $y=x^2\sin x$.

VII.46. За формулою Лейбніца знайти похідну третього порядку від функцій:

а) $y=e^{-x}\sin x$; б) $y=x^2\ln x$; в) $y=x\cos x$; г) $y=x^3e^x$;

д) $y=x^2\sin\dfrac{x}{a}$; е) $y=x\,f'(a-x)+3f(a-x)$.

VII.47. $f(x)=x\,e^{x/a}$. Знайти $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$.

VII.48. $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x}$. Знайти $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$.

VII.49. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$. Довести, що при $n\geq 2$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}n.$$

VII.50. Довести, що функція $y = e^x \cos x$ задовольняє диференціальне рівняння $y^{IV} + 4y = 0$.

VII.51. Довести, що функція $y = x\,e^{-1/x}$ задовольняє диференціальне рівняння $x^3\,y'' - xy' + y = 0$.

VII.52. $f(x) = x^2\,e^{-x/a}$. Довести, що $f^{(n)}(0) = \dfrac{n(n-1)(-1)^n}{a^{n-2}}$.

VII.53. $f(x) = e^{-x^2}$. Довести, що $f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0)$,

$$f^{(2m-1)}(0) = 0,\ f^{(2m)}(0) = (-2)^m(2m-1)(2m-3)\ldots 3\cdot 1 = (-2)^m(2m-1)!!$$

VII.54. $f(x) = x^n$. Довести, що $f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$.

VII.55. Вважаючи x незалежною змінною, знайти d^2y, якщо:

а) $y = \sqrt{1+x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; в) $y = x^x$.

Як зміниться цей диференціал, якщо $x = at + b$, $x = t^2$?

VII.56. Знайти y'' з рівняння:

а) $x^2 + y^2 = a^2$; б) $ax + by - xy = c$; в) $x^m\,y^n = 1$;
г) $x^2 - y^2 = a^2$; д) $\operatorname{arctg} y = x + y$; е) $x^2 + xy + y^2 = a^2$;
є) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.

VII.57. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Знайти y'' в точці $(0; b)$.

VII.58. $t\,e^{-s/2} + s\,e^{-t/2} = 2$. Знайти $\dfrac{ds}{dt}$ при $t = 0$.

VII.59. $t\,\ln x - x\,\ln t = 1$. Знайти $\dfrac{dx}{dt}$ при $t = 1$.

VII.60. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$. Знайти y' при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

VII.61. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функцій:

а) $x = a\sin t$, $y = a\cos t$; г) $x = t^2$, $y = \dfrac{t^3}{3} - t$;
б) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$; д) $x = t^2$, $y = 1 + t^3$;
в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; е) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.

VII.62. Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} від функції $y = y(x)$, що задана параметрично, якщо:

а) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$; б) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;
в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; г) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

VII.63. Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} функції $y = y(x)$, що задана неявно, якщо:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $y^2 = 2px$; в) $x^2 - xy + y^2 = 1$.

VII.64. Вважаючи x незалежною змінною, знайти диференціали зазначеного порядку, якщо:

а) $y = x^5$, d^4y; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, d^3y; в) $y = x\cos 2x$, $d^{10}y$;

г) $y = e^x \ln x$; d^4y.

§6. Дотична і нормаль до плоскої кривої

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці кривої (x_0,y_0) дорівнює значенню похідної функції f в точці x_0

$$k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0).$$

Рівняння дотичної в точці $M(x_0,y_0)$ до кривої $y=f(x)$ має вигляд

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Рівняння нормалі у цій точці

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

VII.65. Знайти кути нахилу параболи $y = x^2$ в точках $x = \pm 2$.

VII.66. Написати рівняння дотичних до гіперболи $xy = 4$ в точках $x_1 = 1$ і $x_2 = -4$ і знайти кут між дотичними. Побудувати криву і дотичні.

VII.67. Знайти рівняння нормалі до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M(x_0,\, y_0)$.

VII.68. Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{1}{9}x^3$, що проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

VII.69. Написати рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = 4 - x^2$ в точці перетину її з віссю Ox (при $x > 0$) і побудувати параболу, дотичну і нормаль.

VII.70. Який кут утворює з віссю абсцис дотична до параболи $y = x^2 - 3x + 5$, що проведена в точці $M(2;3)$? Написати рівняння цієї дотичної.

VII.71. Написати рівняння дотичних до кривої $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точках перетину її з віссю Oy.

VII.72. Написати рівняння дотичної в точці $(x_0; y_0)$ до кривих:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^2 = 2px$.

VII.73. Знайти довжину піддотичної і піднормалі, написати рівняння дотичної та нормалі до кривих

1) $y = x^2$; 2) $y^2 = x^3$

у точці $x = 1$.

VII.74. Під яким кутом перетинаються криві $x^2 + y^2 = 5$ і $y^2 = 4x$?

VII.75. Написати рівняння дотичних і нормалей до кривих:

а) $y = \dfrac{x^3}{3}$ в точці $x = -1$;

б) $y^2 = x^3$ в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$;
в) $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $x = 1$;
г) $y = 4x - x^2$ в точках перетину з віссю Ox;
д) $y^2 = 4 - x$ в точках перетину з віссю Oy;
е) $y^2 = (4 + x)^3$ в точках перетину з осями Ox і Oy;
є) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ в точці $M(-9; -8)$.

VII.76. Знайти відстань від вершини параболи $y = x^2 - 4x + 5$ до дотичної, що проведена до неї в точці перетину параболи з віссю Oy.

VII.77. Під яким кутом пряма $y = 0,5\,x$ перетинає криву $y = \cos x$?

VII.78. Знайти кут між кривими $y = \sqrt{2}\sin x$ і $y = \sqrt{2}\cos x$.

VII.79. Знайти кут між параболами $y = 8 - x^2$ і $y = x^2$.

VII.80. Написати рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках перетину його з віссю Ox. Побудувати коло та дотичні.

VII.81. Написати рівняння дотичної до еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$ в точці, в якій ділиться навпіл відрізок дотичної, відтятий осями координат, і який лежить у першому координатному куті.

VII.82. Написати рівняння дотичної до циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точках $t = \dfrac{\pi}{2}$ і $t = \dfrac{3\pi}{2}$. Побудувати криву та дотичні.

VII.83. Написати рівняння дотичної до розгортки кола $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ в точці $t = \dfrac{\pi}{4}$.

§7. Теореми про середнє

1°. *Теорема Ролля.*

Якщо функція $y=f(x)$:

1)неперервна на проміжку $[a,b]$, 2) всередині нього має похідну, 3) $f(a)=f(b)$, то між a і b знайдеться така точка c, в якій $f'(c)=0$.

2°. *Теорема Лагранжа.*

Якщо функція $y=f(x)$:

1) неперервна на проміжку $[a,b]$, 2) всередині нього має похідну,

то на $(a;b)$ знайдеться така точка $x=c$, в якій $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$.

3°. *Теорема Коші.*

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$:

1) неперервні на проміжку $[a,b]$, 2) мають похідні на (a,b), причому $\varphi'(x)\neq 0$, то на $(a;b)$ знайдеться така точка $x=c$, в якій $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

VII.84. Перевірити, що між коренями функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$ міститься корінь її похідної. Пояснити графічно.

VII.85. Чи можна застосувати теорему Ролля до функції $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на відрізку $[-1; 1]$?

VII.86. Побудувати дугу $\smile{AB}$ кривої $y = |\sin x|$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Чому на дузі не має дотичної, що паралельна хорді AB? Яка з умов теореми Ролля тут не виконується?
VII.87. Написати формулу Лагранжа для функції $f(x) = x^2$ на відрізку $[a, b]$ і знайти c. Пояснити графічно.
VII.88. Написати формулу Лагранжа $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ для функції $f(x) = x^3$ і знайти c.
VII.89. Написати формулу Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt{x}$ на відрізку $[1; 4]$ і знайти c.
VII.90. Показати, що на відрізку $[-1; 2]$ не можна застосувати теорему Лагранжа до функцій $y_1 = \frac{4}{x}$ і $y_2 = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Пояснити графічно.
VII.91. Побудувати дугу $\smile{AB}$ кривої $y = |\cos x|$ на відрізку $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$. Чому на дузі не має дотичної, що паралельна хорді AB? Яка з умов теореми Лагранжа тут не виконана?
VII.92. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| < 2, \\ 1 & \text{при } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Побудувати графік цієї функції і, взявши на ньому точки $O(0; 0)$ і $B(2; 1)$, показати, що між O і B на цьому графіку немає точки, дотична в якій була б паралельна OB. Які умови теореми Лагранжа для цієї функції на відрізку $[0; 2]$ виконані, а які ні?
VII.93. Відомо, що $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$. Застосувавши теорему Ролля до функції

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix},$$

отримати теорему Лагранжа. З'ясувати геометричне значення $\Phi(x)$.
VII.94. За допомогою формули Коші довести: якщо $f(0) = f'(0) = = f''(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^n(\Theta x)}{n!}$, де $0 < \Theta < 1$.
VII.95. Написати формулу Лагранжа і знайти c для функцій:

а) $f(x) = \text{arctg}x$ на відрізку $[0; 1]$;
б) $f(x) = \text{arcsin}x$ на відрізку $[0; 1]$;
в) $f(x) = \ln x$ на відрізку $[1; 2]$.

VII.96. Написати формулу Коші і знайти c для функцій:

а) $\sin x$ і $\cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) x^2 і $\sqrt{x}$ на відрізку $[1; 4]$.

VII.97. Побудувати графік функції $y = |x-1|$ на відрізку $[0;3]$. Чому не можна провести дотичної, що паралельна хорді? Яка з умов теореми Лагранжа не виконується?

VII.98. В якій точці дотична до кривої $y = 4 - x^2$ паралельна до хорди, що стягує точки $A(-2;0)$ і $B(1;3)$? Пояснити графічно.

§8. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя

1°. *Невизначеність* $\frac{0}{0}$. *Перше правило Лопіталя.*

Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і неперервні в деякому околі точки a, де a — число або символ ∞, і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$;

2) похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ існують в околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a, причому одночасно не перетворюються в нуль при $x\neq a$;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2°. *Невизначеність* $\frac{\infty}{\infty}$. *Друге правило Лопіталя.*

Якщо

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ нескінченно великі при $x\to a$, де a — число або символ ∞;

2) похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ існують в околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a, причому для всіх точок цього околу, крім точки a, виконується співвідношення $f'^2(x)+\varphi'^2(x)\neq 0$;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

VII.99. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{\ln 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin 4x}$;

11) $\lim\limits_{x\to \pi/(2a)}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{\operatorname{tg} x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$; 19) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$;

20) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$; 21) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; 23) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$;

24) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 25) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$; 26) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}$;

27) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; 28) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$; 29) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$;

30) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$; 31) $\lim\limits_{x\to0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg}x$; 32) $\lim\limits_{x\to1}x^{1/(1-x)}$;

33) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; 34) $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}+x)^{1/x}$; 35) $\lim\limits_{x\to0}x^x$;

36) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; 37) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$; 38) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}$;

39) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; 40) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

VII.100. Довести, що при $x\to0$

$$x-\operatorname{arctg}x\sim\frac{x^3}{3};\qquad a^x-b^x\sim x\ln\frac{a}{b};$$
$$e^{2x}-1-2x\sim2x^2;\qquad 2x-\ln(1+2x)\sim2x^2.$$

VII.101. Довести, що $x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$ при $x\to0$ і тому $\sin x\approx x$ з похибкою, яка наближено дорівнює $\dfrac{x^3}{6}$. Обчислити $\sin1^\circ$ і $\sin6^\circ$ і оцінити похибки.

VII.102. Довести, що $\arcsin x-x\sim\dfrac{x^3}{6}$, коли $x\to0$.

§9. Формула Тейлора

Якщо функція $y=f(x)$ визначена і неперервна в околі точки x_0, має неперервні у цьому околі похідні до n-го порядку, а в точці x_0 похідну $n{+}1$-го порядку, то справджується формула Тейлора

$$(1)\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\\+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x).$$

Залишковий член $r_n(x)$ у формулі (1) записують в одному з трьох видів:

залишковий член у формі Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},\qquad(0<\Theta<1);$$

залишковий член у формі Коші

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{n!}(1-\Theta)^n(x-x_0)^{(n+1)},\qquad(0<\Theta<1);$$

залишковий член у формі Пеано

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

Якщо у формулі (1) $x_0=0$, то її називають формулою Маклорена.

На підставі формули (1) можемо записати такі розвинення.

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

IV. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

V. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$.

VII.103. $f(x)$ — многочлен четвертого степеня. Знаючи, що $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$, записати цей многочлен та знайти $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

VII.104. Для многочлена $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ записати три перші члени розвинення за формулою Тейлора в точці $x_0 = 1$. Знайти наближене значення $f(1,03)$.

VII.105. Знайти з точністю до 0,01 значення $f(1,02)$, якщо $f(x) = x^{50} - x^{20} + x$.

VII.106. Записати формулу Маклорена з залишковим членом у формі Пеано для функцій:

а) $f(x) = \operatorname{sh} x$; б) $f(x) = \operatorname{ch} x$; в) $f(x) = e^{-x^3}$; г) $f(x) = \ln(1-x^2)$.

VII.107. Записати формулу Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа для функцій:

а) $f(x) = \sqrt{1+x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$; в) $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$.

VII.108. Функцію $y = \operatorname{tg} x$ розвинути за степенями x до члена з x^5.

VII.109. Функцію $y = x^x - 1$ розвинути за степенями $x - 1$ до члена з $(x-1)^3$.

VII.110. Ланцюг, закріплений на кінцях, під впливом власної ваги провисає по лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Перевірити, що при малих $|x|$ форма ланцюга наближено описується параболою $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

VII.111. На підставі формули Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа або Коші оцінити похибку формул:

а) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, якщо $0 \le x \le 1$;

б) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3$, якщо $|x| \le 0,1$;

в) $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$, якщо $-0,5 \le x \le 0,5$.

VII.112. Користуючись формулою Тейлора, обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{5x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln(1 + 1/x)\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$.

§10. Зростання і спадання функції. Напрям опуклості. Точки перегину

Якщо функція $y=f(x)$ має додатну (від'ємну) похідну $f'(x)$ на інтервалі (a,b), то вона зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Означення. Графік диференційовної функції називають опуклим вниз (опуклим вгору) на відрізку $[a,b]$, якщо крива $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ розташована вище (нижче) дотичної, що проведена в будь-якій точці цього відрізка. Точкою перегину називають точку, в якій змінюється напрям опуклості графіка функції.

Достатньою умовою опуклості графіка двічі диференційовної функції вниз (угору), є виконання нерівності $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, коли $a<x<b$.

VII.113. Дослідити функції на зростання і спадання:

а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=\dfrac{1}{x}$; г) $y=\ln x$; д) $y=\operatorname{tg} x$;

е) $y=e^x$; є) $y=4x-x^2$.

VII.114. Визначити проміжки монотонності таких функцій:

а) $y=2+x-x^2$; б) $y=3+x-x^3$; в) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; г) $y=x+\cos x$;

д) $y=x+|\sin 3x|$; е) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$; є) $y=x^2-\ln x^2$.

VII.115. Довести, що при збільшенні кількості сторін n периметр p_n правильного n-кутника, вписаного в коло, зростає, а периметр P_n правильного n-кутника, описаного навколо цього кола, зменшується. Використовуючи цей факт, довести, що p_n і P_n мають спільну границю при $n\to\infty$.

VII.116. Дослідити на опуклість і побудувати криві:

а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=e^x$; г) $y=\ln x$; д) $y=x^{5/3}$.

VII.117. Визначити проміжки монотонності, точки перегину кривих та побудувати криві:

а) $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2$; б) $y=e^{-x^2}$; в) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; г) $y=2^{1/x}$.

§11. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції

Функція $f(x)$ має локальний максимум (мінімум) у точці x_0, якщо функція визначена в околі точки x_0 і для всіх точок деякої області $|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ $\big(f(x)>f(x_0)\big)$.

Необхідна умова екстремуму.

Точки з області визначення функції, в яких похідна функції не існує або дорівнює нулю, називають критичними точками.

Функція $y=f(x)$ може мати екстремум тільки в тих точках, де $f'(x)=0$ або не існує.

Достатні умови екстремуму.

I. Якщо 1) функція $f(x)$ визначена і неперервна в деякому околі $|x-x_0|<\delta$ критичної точки x_0; 2) $f(x)$ має скінченну похідну $f'(x)$ в області $|x-x_0|<\delta$; 3) похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то в цій точці функція має локальний екстремум (максимум, коли $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–", і мінімум, коли $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+").

II. Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна в околі точки x_0 і в точці x_0 виконуються умови

$$f'(x_0)=0 \qquad \text{і} \qquad f''(x_0)\neq 0,$$

то в цій точці функція $f(x)$ має локальний екстремум (максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$).

III. Нехай функція $f(x)$ має в деякому околі точки x_0 похідні $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n-1)}(x)$ і $f^{(n)}(x)$, причому

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=1,\dots,n-1), \qquad\qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тоді: 1) якщо n — парне число, то в точці x_0 функція $f(x)$ має локальний екстремум (максимум, якщо $f^{n}(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f^{n}(x_0)>0$); 2) якщо n — непарне число, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Абсолютний екстремум.

Найбільше (найменше) на відрізку $[a,b]$ значення неперервної функції $f(x)$ досягається або в критичній точці цієї функції, або в кінцях цього відрізка.

VII.118. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $y = x^2 + 4x + 5$; 2) $y = 2 + x - x^2$; 3) $y = (x + 1)^3$;
4) $y = (x - 1)^4$; 5) $y = |x + 5|$; 6) $y = x^2 + 4x + 5$;
7) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$; 8) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; 9) $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$;
10) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$; 11) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; 12) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;
13) $y = 2x^2 - x^4$; 14) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$; 15) $y = x + \dfrac{1}{x}$;
16) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; 17) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$; 18) $y = \sqrt{2x - x^2}$;
19) $y = xe^x$; 20) $y = \sqrt{x}\ln x$; 21) $y = \dfrac{10}{1 + \sin^2 x}$;
22) $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$; 23) $y = e^x \sin x$.

VII.119. Знайти найменше і найбільше значення таких функцій:

а) $f(x) = 2^x$ на відрізку $[-1; 5]$;
б) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на відрізку $[-3; 10]$;
в) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на відрізку $[-10; 10]$;
г) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на відрізку $[0,01; 100]$;
д) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ на відрізку $[-1; 1]$.

VII.120. Решіткою, довжина якої 180 м, потрібно загородити прямокутну присадибну ділянку найбільшої площі. Визначити розміри прямокутної ділянки.

VII.121. Розкласти число 10 на два доданки так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.

VII.122. У трикутник з основою a і висотою h вписано прямокутник найбільшої площі. Визначити площу прямокутника.

VII.123. Із квадратного листка картону зі стороною a вирізано по кутках однакові квадратики. З тієї частини картону, що залишилася, склеюють прямокутну коробку. Якою повинна бути сторона квадратиків, щоб об'єм коробки був найбільшим?

VII.124. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном, об'єм якого 32 м^2 так, щоб на облицювання стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

VII.125. Бічні сторони і менша основа трапеції дорівнюють 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільша.

VII.126. У півкруг вписано трапецію так, що її основою є діаметр півкруга. Визначити кут при основі трапеції так, щоб площа трапеції була найбільшою.

VII.127. Переріз тунеля має форму прямокутника, що завершується півкругом. Периметр перерізу 18 м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

VII.128. Два літаки летять в одній площині прямолінійно під кутом 120° з однаковою швидкістю v км/год. У деякий момент один літак прилетів в точку перетину ліній руху, а другий не долетів до неї a км. Через який час відстань між літаками буде найменшою і чому вона дорівнює?

VII.129. У скільки разів об'єм кулі більший від об'єму найбільшого циліндра, що вписаний в цю кулю?

VII.130. Два коридори шириною 2,4 м і 1,6 м перетинаються під прямим кутом. Визначити найбільшу довжину драбини, що можна пронести (горизонтально) з одного коридору в інший.

VII.131. У конус з радіусом 4 дм і висотою 6 дм вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти об'єм цього циліндра.

VII.132. У півкруг радіуса R вписано прямокутник найбільшої площі. Обчислити його розміри.

VII.133. На параболі $y = x^2$ знайти найближчу до прямої $y = 2x - 4$ точку.

VII.134. Картина висить на стіні. Нижній її кінець на b см, а верхній на a см вище очей спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стати спостерігач, щоб роздивитися картину під найбільшим кутом?

VII.135. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом 60° вписано прямокутник, основа якого лежить на гіпотенузі. Які повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

VII.136. Задано точки $A(0;3)$ і $B(4;5)$. На осі Ox знайти точку M так, щоб відстань $S = AM + MB$ була найбільшою.

VII.137. З круга вирізається сектор, що містить кут α, а потім сектор згортається в конус. При якому значенні кута α об'єм конуса буде найбільшим?

VII.138. Залежність між витратами виробництва і об'ємом випуску продукції виражається функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Для якого об'єму випуску продукції затрати виробництва будуть максимальними?

VII.139. Обсяг продукції u, випущеної бригадою робітників, задається рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, де t — робочий час у годинах. Через скільки часу після початку робочого дня продуктивність праці буде максимальною?

VII.140. Прогнозна ціна акції має вигляд $C_{\text{пр}} = C_0 \dfrac{gr}{r_e - r + gr}$, де C_0 — початкова ціна, r — відносний прибуток корпорації, g — частка прибутку, виділена на виплату дивідендів, r_e — найефективніша ставка реінвестиції дивідендів. Інвестор продав акцію з характеристиками $r = 0,2$, $r_e = 0,5$ і купив акцію з характеристиками $r = 0,4$, $r_e = 0,5$. При якому значенні g ця операція принесе найбільший очікуваний прибуток?

§12. Побудова графіків функцій

Для побудови графіка функції $y=f(x)$ потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) перевірити її парність, непарність і періодичність;

3) визначати точки перетину з осями Ox і Oy;

4) знайти точки розриву функції і проміжки неперервності та дослідити поведінку функції на кінцях проміжків неперервності;

5) визначити проміжки зростання і спаданння функції, точки екстремуму;

6) визначати напрям опуклості і точки перегину;

8) побудувати графік функції.

При виконанні пункту 4 треба знайти асимптоти графіка, якщо вони існують.

Якщо $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою кривої $y=f(x)$.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k$, і $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-kx]=b$, то пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою кривої графіка функції, коли $x\to+\infty$. Так само знаходять похилу асимптоту, коли $x\to-\infty$.

VII.141. Знайти асимптоти кривих:

1) $y = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2$; 2) $y = -x + \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$;

5) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; 6) $y = \dfrac{2}{|x|} - 1$; 7) $y = \dfrac{x^2-x-1}{x}$; 8) $y = \dfrac{1-4x}{1+2x}$;

9) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; 10) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$; 11) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a-x}$.

12) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$; 13) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;

14) $y=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 15) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; 16) $y^2=x\,e^{-x}$.

VII.142. Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y=4x-x^2$; 2) $y=x^2+2x-3$; 3) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

4) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$; 5) $y=\sqrt[3]{x^2}-1$; 6) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$;

7) $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$; 8) $y=x^2\,(1-x)$; 9) $y=e^{-x^2}$;

10) $y=x+\cos 2x$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$; 11) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$;

12) $y=x-\operatorname{arctg} 2x$; 13) $y=x\,e^{-x/2}$; 14) $y=x\,\ln x$;

15) $y=\sqrt{\sin x^2}$; 16) $y=\sqrt{e^{x^2}-1}$; 17) $y=\sin x^4+\cos^4 x$;

18) $y=x\sqrt{1-x}$; 19) $y=\dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$; 20) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$;

21) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; 22) $y=x+\ln(\cos x)$; 23) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$;

24) $y=|x|\,(x+2)$; 25) $y=x^2e^{-x}$; 26) $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;

27) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; 28) $y=x\,e^{-x^2/2}$; 29) $y=x-\ln x$;

30) $y=\sin 2x-x$ на інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; 31) $y=3x^4-8x^3+6x^2$;

32) $y=x+\operatorname{arcctg} 2x$; 33) $y=2\sin x+\cos 2x$; 34) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

35) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; 36) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 37) $y=\dfrac{(4-x)^3}{9(2-x)}$; 38) $y=a\,e^{-x}$;

39) $y=3x^5-5x^3$; 40) $y=\dfrac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2+8}$; 41) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$;

42) $y=(1-x^2)(1-x^3)$; 43) $y=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$; 44) $y=x+2\sqrt{-x}$;

45) $y=\dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; 46) $y=\sqrt{1-\cos x}$; 47) $y=e^{-2x}\sin^2 x$.

VII.143. Дослідити параметрично задану функцію та побудувати її графік:

1) $x=t^3+3t+1,\quad y=t^3-3t+1$; 2) $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\quad y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$;

3) $x=te^t,\quad y=te^{-t}$.

§13. Наближене розв'язування рівнянь

1°. *Виділення дійсного кореня рівняння* $f(x)=0$.

Якщо $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки, а $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то між a і b міститься корінь рівняння $f(x)=0$. Якщо, крім того, $f'(x)\neq0$ на відрізку $[a,b]$, то цей корінь єдиний.

2°. *Метод хорд наближеного розв'язування рівняння* $f(x)=0$.

Нехай $f(a)f(b)<0$ і $f'(x)\neq0$, коли $x\in(a;b)$, тоді як перше наближення кореня рівняння $f(x)=0$ вибираємо точку x_1 (рис. 15), для якої

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Наступне наближення знаходимо, застосовуючи цю ж формулу до того з проміжків $[a,x_1]$, $[x_1,b]$, на якому функція набуває значень різних знаків. Процес припиняється, коли наступне наближення відрізняється від попереднього менше, ніж задана точність знаходження розв'язку.

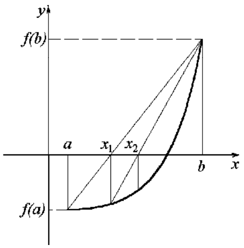


Рис. 15

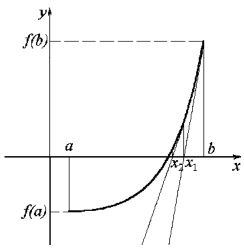


Рис. 16

3°. *Метод дотичних (метод Ньютона).*

Нехай $f(a)f(b)<0$ і $f''(x)\neq0$, коли $x\in(a;b)$ і нехай x_0 — той із кінців відрізка $[a,b]$, на якому $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Тоді послідовними наближеннями кореня x будуть точки x_n перетину з віссю Ox дотичних до кривої $y=f(x)$ в точках $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ (рис. 16), які визначаються за формулою

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n=1,2,3,\dots).$$

4°. *Метод ітерацій.*

Якщо рівняння $f(x)=0$ можна звести до вигляду $x=\varphi(x)$, причому в деякому околі кореня $|\varphi'(x)|\leq\theta<1$ і x_0 – довільне число з цього околу, то збіжна послідовність наближень розв'язків рівняння матиме вигляд $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, $x_3=\varphi(x_2)$,...

VII.144. Задано рівняння $f(x)\equiv x^4-x-10=0$. Скласти таблицю знаків функції $f(x)$ для $x=0,1,2,\dots$, визначити межі розміщення додатного кореня й обчислити його з точністю 0,01 за допомогою методу хорд або дотичних.

VII.145. Побудувавши графіки функції $y=x^4$ та, $y=15-3x$, визначити межі розміщення коренів рівняння $x^4+3x-15=0$ і обчислити їх з точністю 0,01.

VII.146. З точністю 0,01 знайти додатні корені рівнянь:

а) $x^3 + 50x - 60 = 0$;   б) $x^3 + x - 32 = 0$.

VII.147. Методом ітерацій знайти дійсні корені рівняння $x^3+2x-8 = 0$, обчислюючи послідовні наближення за формулою $x = \sqrt[3]{8 - 2x}$.

VII.148. Методом ітерацій знайти дійсні корені рівнянь:

а) $x^3+60x-80 = 0$; б) $2^x = 4x$; в) $x^3+l^2x+l^3 = 0$; г) $x^4-2x-2 = 0$.

РОЗДІЛ VIII
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
§1. Невизначений інтеграл

1°. *Означення невизначеного інтеграла*

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ називається множина всіх первісних функції $f(x)$

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

2°. *Властивості невизначеного інтеграла.*

I. $d\int udx=udx.$ III. $\int Audx=A\int udx.$

II. $\int du=u+C.$ IV. $\int(u+v)dx=\int udx+\int vdx.$

3°. *Таблиця основних інтегралів.*

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n\neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$
3. $\int e^x\,dx=e^x+C.$
4. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$
5. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$
6. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C.$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C.$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{arcsin}x+C.$
11. $\int \frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm1}|+C.$

4°. *Основні методи інтегрування.*

1. *Введення нового аргументу.*

Якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\int f(u)\,du=F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ – неперервно диференційовна функція.

2. *Заміна змінної.*

Якщо $f(x)$ — неперервна, то прийнявши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — неперервна разом зі своєю похідною функція, отримаємо

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

3. *Інтегрування частинами.*

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ — диференційовні функції, то

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

VIII.1. Знайти інтеграли:

1) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$; 3) $\int\frac{x-2}{x^3}dx$; 4) $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$;
5) $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$; 6) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 7) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}dx$; 8) $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$;
9) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$; 10) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; 11) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$;
12) $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 13) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; 14) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$;
15) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 16) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; 17) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

18) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; 19) $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$; 20) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$; 21) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

22) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 23) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$; 24) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

25) $\int \frac{x^4}{1+x^2}$; 26) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right)dx$; 27) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$; 28) $\int \frac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

VIII.2. Знайти інтеграли:

1) $\int \cos 3x\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 3) $\int (e^{x/2}+e^{-x/2})\,dx$; 4) $\int \sqrt{4x-1}\,dx$;
5) $\int (3-2x)^4\,dx$; 6) $\int \sqrt[3]{5-6x}\,dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; 8) $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$;
9) $\int \sin^3 x\,\cos x\,dx$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$; 11) $\int \cos(a-bx)\,dx$;
12) $\int \sin(a-bx)\,dx$; 13) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}\,dx$; 14) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; 15) $\int \frac{dx}{1-10x}$;
16) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1-3e^{2x}}$; 17) $\int \mathrm{ctg}x\,dx$; 18) $\int \mathrm{tg}x\,dx$; 19) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\,dx$;
20) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}\,dx$; 21) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$; 22) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;
23) $\int \sin^2 x\,\cos x\,dx$; 24) $\int \cos^3 x\,\sin x\,dx$; 25) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$;
26) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$; 27) $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\,dx$; 28) $\int \sin x\,\cos x\,dx$;
29) $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx$; 30) $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\,x^2\,dx$; 31) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;
32) $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 33) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; 34) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;
35) $\int e^{-x^2}x\,dx$; 36) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$; 37) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$;
38) $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx$; 39) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 40) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 41) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;
42) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$; 43) $\int \sqrt{1+4\sin x}\,\cos x\,dx$; 44) $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4\,dx$;
45) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$; 46) $\int e^{x^3}x^2\,dx$; 47) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3}$; 48) $\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$.

VIII.3. Довести, що

1) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$, прийнявши $x=a\,\mathrm{tg}\,t$;

2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$, прийнявши $x=a\sin t$;

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C$, прийнявши $\sqrt{x^2+k}=t-x$;

4) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$, врахувавши, що $\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$.

VIII.4. Використовуючи формули попередньої задачі, знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^2-25}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$;
6) $\int\left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$; 7) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$; 8) $\int \frac{4x-5}{x^2+5}\,dx$;
9) $\int \frac{x^2dx}{x^2-2}$; 10) $\int \frac{dx}{x^2+3}$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 12) $\int \frac{x^2\,dx}{4+x^6}$; 13) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$;
14) $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; 16) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}}$; 17) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx$;

18) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$; 19) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; 20) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 21) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;
22) $\int \frac{x^4 dx}{x^2-3}$; 23) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 24) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; 25) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+2}$; 26) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;
27) $\int \frac{x\,dx}{x^4+0{,}25}$; 28) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; 29) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 30) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;
31) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; 32) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; 33) $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$; 34) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;
35) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 36) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; 37) $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; 38) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

Вказівка. У прикладах 21, 22 потрібно в підінтегральному неправильному дробі виділити цілу частину. В прикладах 23 – 38 треба з квадратного тричлена виділити повний квадрат.

VIII.5. Інтегруючи частинами, знайти інтеграли:

1) $\int \ln x\,dx$; 2) $\int x\ln(x-1)\,dx$; 3) $\int x\,e^{2x}\,dx$; 4) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;
5) $\int x^2\cos x\,dx$; 6) $\int e^x\sin x\,dx$; 7) $\int(\ln x)^2\,dx$; 8) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;
9) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$; 10) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; 11) $\int \arcsin x\,dx$; 12) $\int x^3 e^{-x}\,dx$;
13) $\int \ln(x^2+1)\,dx$; 14) $\int \cos(\ln x)\,dx$; 15) $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$;
16) $\int x^2\,e^{-x/2}\,dx$; 17) $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$; 18) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 19) $\int e^x\cos x\,dx$;
20) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$; 21) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$; 22) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$.

§2. Інтегрування раціональних функцій

Якщо підінтегральна функція є неправильним дробом, то треба виділити з нього цілу частину.

Якщо знаменник правильного дробу розкладається на множники вигляду $(x-a)^\alpha$ і $(x^2+px+q)^\beta$, де $p^2<4q$, то правильний дріб так розкладається на суму елементарних дробів:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

Тут $P(x)$ – поліном степеня нижчого, ніж степінь знаменника.

VIII.6. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$; 3) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$; 4) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;
5) $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$; 6) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 7) $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6)}$;
8) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; 9) $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}dx$; 10) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$.

VIII.7. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$; 2) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; 3) $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}dx$;
5) $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$; 6) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}dx$; 7) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$.

VIII.8. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$; 3) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$; 4) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$;
5) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$; 6) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$; 7) $\int \frac{dx}{1+x^4}dx$;
8) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$; 9) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$; 10) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$; 11) $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

VIII.9. Застосовуючи метод Остроградського, обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$; 3) $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

§3.Інтегрування тригонометричних функцій

1°. Інтеграли від парних степенів синуса і косинуса шукають, використовуючи формули пониження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\qquad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

2°. Інтеграли від непарних степенів синуса або косинуса шукають внесенням під диференціал однієї з цих функцій і вираженням її через іншу. Наприклад,

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx=-\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,d\cos x.$$

3°. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, де R — раціональна функція, можуть бути зведеними до інтеграла від раціональної функції підстановкою

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\quad \left(\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right).$$

VIII.10. Знайти інтеграли:

1) $\int \sin^2 3x\,dx$; 2) $\int (1+2\cos x)^2\,dx$; 3) $\int (1-\sin 2x)^2\,dx$; 4) $\int \cos^4 x\,dx$; 5) $\int (1+3\cos 2x)^2 dx$; 6) $\int \sin^4 x\,dx$; 7) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$; 8) $\int \cos^5 x\,dx$; 9) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; 10) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$; 11) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; 12) $\int \sin^5 x\,dx$; 13) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$; 14) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$; 15) $\int \cos^7 x\,dx$; 16) $\int (1+2\cos x)^3\,dx$; 17) $\int (1+2\sin x)^3\,dx$;

18) $\int \frac{\cos^3 x\ dx}{\sin^2 x}$; 19) $\int \frac{\sin^3 x\ dx}{\cos^2 x}$; 20) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$; 21) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

22) $\int \frac{dx}{\cos x}$; 23) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin 2x}$; 24) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$; 25) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

VIII.11. Знайти інтеграли:

1) $\int \sin 3x\sin x\,dx$; 2) $\int \sin 3x\cos x\,dx$; 3) $\int \sin 3x\sin 5x\,dx$;

4) $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x\,dx$; 5) $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx$;

6) $\int \cos mx\cos nx\,dx$; 7) $\int \sin mx\sin nx\,dx$; 8) $\int \sin mx\cos nx\,dx$.

Вказівка. Застосуйте формули

$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\qquad \cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

VIII.12. Інтегруючи частинами, довести формули "пониження степеня"

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\cos x\ \sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx,$$

$$\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\sin x\ \cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

Користуючись цими формулами, знайти

1) $\int \sin^6 x\,dx$; 2) $\int \cos^6 x\,dx$.

VIII.13. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; 3) $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$;
4) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$; 5) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$; 6) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$; 7) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;
8) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; 9) $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$; 10) $\int \frac{dx}{\sin x+2\sec x}$;
11) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$; 12) $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$; 13) $\int \frac{dx}{4+5\sin^2 x-3\cos^2 x}$.

VIII.14. Знайти інтеграли, зробивши підстановку вигляду $x-a=b\operatorname{tg} t$:
1) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+p^2)^3}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 4) $\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$.

§4. Інтегрування деяких ірраціональностей

1°. Інтеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx,$$

де $R(x,y)$ – раціональна функція, зводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $ax+b=t^n$, а інтеграл

$$\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right) x^{m-1}\,dx$$

— заміною $ax^m+b=t^n$.

2°. Інтеграл

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

обчислюється заміною $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

3°. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right) dx \text{ та } \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right) dx$$

обчислюють відповідно замінами $x=a\sin t$ та $x=a\operatorname{tg} t$.

4°. З інтеграла

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

можна виділити алгебричну частину

$$(1)\qquad \int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1})W+A_m\int \frac{dx}{W},$$

де $W=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Невизначені коефіцієнти A_i визначають після диференціювання рівності (1).

5°. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де m,n і p — раціональні числа, зводиться до інтеграла від раціональної функції лише у трьох випадках:

1) заміною $x=t^s$, де s — спільний знаменник m і n, якщо p — ціле число;

2) заміною $a+bx^n=t^s$, де s — знаменник p, коли $\frac{m+1}{n}$ — ціле число;

3) заміною $\frac{a}{x^n}+b=t^s$, де s — знаменник p, коли $\frac{m+1}{n}+p$ — ціле число.

VIII.15. Використовуючи підстановки 1°, знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

4) $\int x\sqrt{a-x}\,dx$; 5) $\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$; 6) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

VIII.16. Використовуючи підстановку 2°, знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$; 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

VIII.17. Використовуючи підстановки 3°, знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 2) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; 3) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$; 6) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.

VIII.18. Знайти інтеграли, використовуючи правило 4°:

1) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 3) $\int \sqrt{x^2+k}\,dx$; 4) $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx$.

VIII.19. Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 4) $\int \frac{x^3\,dx}{(a-bx^2)^{3/2}}$.

VIII.20. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x}-1}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; 3) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; 4) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{a-x}}\,dx$;

5) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; 6) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$; 7) $\int \frac{x\,dx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$; 8) $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$;

9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$; 10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$; 11) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 12) $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$;

13) $\int \sqrt{4x+x^2}\,dx$; 14) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 15) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$; 16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$; 18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 19) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; 20) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

Вказівка. В прикладі 12 зробити заміну $x=2\sin^2 t$.

§5. Інтегрування деяких трансцендентних функцій

Інтеграл $\int R(e^x)\,dx$ обчислюється заміною $e^x=t$, $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$.

Для гіперболічних функцій справджуються такі формули пониження степеня:

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x=\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}, \qquad \operatorname{ch}^2 x=\frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}, \qquad \operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}.$$

VIII.21. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$; 2) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+2}$; 3) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}$; 4) $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$; 5) $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx$.

VIII.22. Знайти інтеграли:

1) $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$; 2) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$; 3) $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$; 4) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$;

5) $\int \operatorname{th} x\,dx$; 6) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$; 7) $\int \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 3x\,dx$; 8) $\int \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x\,dx$;

9) $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$; 10) $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\,dx$; 11) $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\,dx$.

§6. Різні приклади на інтегрування функцій

VIII.23. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{x}$; 2) $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+ax^2}$; 4) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; 6) $\int x\cos^2 x\,dx$; 7) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$; 8) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

9) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$; 10) $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$; 11) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x}$; 12) $\int \frac{\sin x\,dx}{b^2+\cos^2 x}$;
13) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$; 14) $\int \frac{ax-b}{(ax+b)^4}\,dx$; 15) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; 16) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$;
17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+b\ln x}}$; 18) $\int \frac{x^2\,dx}{(a-bx^3)^n}$; 19) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$; 20) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$;
21) $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}\,dx$; 22) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x\,dx}{x^2}$; 23) $\int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}$; 24) $\int \mathrm{ctg}^4 x\,dx$;
25) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$; 26) $\int \frac{\cos x}{\cos 3x}\,dx$; 27) $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}\,dx$; 28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$;
29) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x}$; 30) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\,dx$; 31) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^3}\,dx$; 32) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$;
33) $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}x}$; 34) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 35) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx$; 36) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\,dx$;
37) $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x}$; 38) $\int \frac{dx}{e^{3x}-e^x}\,dx$; 39) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}$; 40) $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{x^2}$;
41) $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx$; 42) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; 43) $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$; 44) $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$;
45) $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; 46) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}\,dx}{\sin 2x}$; 47) $\int \frac{\ln(x^2+1)\,dx}{x^3}$; 48) $\int \frac{a^x\,dx}{a^{2x}+1}$;
49) $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 50) $\int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}\,dx$; 51) $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 52) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;
53) $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$; 54) $\int \frac{4x+1}{2x^3+x^2-x}\,dx$; 55) $\int \frac{\cos^3 x+1}{\sin^2 x}\,dx$; 56) $\int \frac{dx}{x^4+4}$.

§7. Обчислення визначених інтегралів

1°. *Інтеграл в сенсі Рімана.* Нехай на проміжку $[a,b]$ визначена обмежена функція $f(x)$. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n частин точками $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$. На кожному проміжку (x_{i-1},x_i) виберемо довільну точку ξ_i і складемо суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Сума вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називається інтегральною сумою, а її границя при $\max\Delta x_i=\lambda\to 0$, якщо вона існує і скінченна незалежно від способу розбиття та вибору точок на елементах розбиття, називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ у межах від a до b:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функція $f(x)$ в цьому випадку називається інтегровною на проміжку $[a,b]$.

2°. *Формула Ньютона-Лейбніца.* Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$ і $F(x)$ – її первісна. Тоді справджується формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a).$$

3°. *Заміна змінної.* Якщо:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$;

2) функція $\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$, де $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$;

3) складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

4°. *Інтегрування частинами.* Якщо $f(x)$ і $g(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

VIII.24. Склавши інтегральні суми і перейшовши до границі, знайти інтеграли:

1) $\int_0^a x\,dx$; 2) $\int_0^a x^2\,dx$; 3) $\int_0^a e^x\,dx$; 4) $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

VIII.25. Обчислити:

1) $\int_1^3 x^4\,dx$; 2) $\int_1^2 \left(x^4+\dfrac{1}{x^3}\right)dx$; 3) $\int_0^4 |2-x|\,dx$; 4) $\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$; 6) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 7) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$; 8) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{dx}{(11+5x)^3}$;

9) $\int_0^{16} \dfrac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$; 10) $\int_1^{e^3} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 11) $\int_1^e \dfrac{1+\log_{10} x}{x}\,dx$;

12) $\int_0^{2a} \dfrac{3\,dx}{2b-x}$; 13) $\int_a^{a\sqrt{3}} \dfrac{dx}{a^2+x^2}$; 14) $\int_0^5 e^{x/5}\,dx$; 15) $\int_0^a (x^2-ax)\,dx$;

16) $\int_2^3 \dfrac{dx}{x^3}$; 17) $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 18) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \dfrac{dx}{\cos^2 2x}$; 19) $\int_0^{\pi/6} \sin 6x\,dx$;

20) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 21) $\int_9^{16} \dfrac{dx}{\sqrt{x}-1}$; 22) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}\,dx$;

23) $\int_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 24) $\int_0^1 \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 25) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\cos x}$;

26) $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; 27) $\int_0^1 \dfrac{dx}{e^x+1}$; 28) $\int_0^{a/2} \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}\,dx$;

29) $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; 30) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\,dx$; 31) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos^2 x\,dx$;

32) $\int_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}\,dx$; 33) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \dfrac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; 34) $\int_1^2 \dfrac{dx}{x+x^3}$;

35) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; 36) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; 37) $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$; 38) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$;

39) $\int_3^8 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; 40) $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$; 41) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$; 42) $\int_0^\pi x^3 \sin x\,dx$;

43) $\int_1^4 \dfrac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$; 44) $\int_0^1 \dfrac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; 45) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$; 46) $\int_4^9 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$;

47) $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$; 48) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$; 49) $\int\limits_0^{\pi/2} x\,\cos x\,dx$; 50) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x\,dx$;

51) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 52) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$; 53) $\int\limits_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\,dx$; 54) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x\,dx$;

55) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$; 56) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$; 57) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

§8. Середнє значення функції

1°. *Середнє значення функції.* Число

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

називається середнім значенням функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Якщо на проміжку $[a,b]$ функція $f(x)$ неперервна, то існує точка $c\in(a,b)$ така, що

$$M[f]=f(c).$$

2°. *Перша теорема про середнє.* Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ обмежені й інтегровані на проміжку $[a,b]$;

2) функція $\varphi(x)$ зберігає знак при $a<x<b$,

то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\mu\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

де $m\le\mu\le M$ і $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Якщо, крім того, функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то $\mu=f(c)$, де $a\le c\le b$.

3°. *Друга теорема про середнє.* Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ обмежені й інтегровані на проміжку $[a,b]$;

2) функція $\varphi(x)$ монотонна, коли $a<x<b$,

то

$$\exists\xi\in[a,b]:\qquad \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Якщо, крім того, функція $\varphi(x)$ монотонно спадна та невід'ємна, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx;$$

якщо ж функція $\varphi(x)$ монотонно зростаюча і невід'ємна, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

VIII.26. Визначити середнє значення функції:

1) $y = \sin x$ на відрізку $[0, \pi]$;
2) $y = \operatorname{tg} x$ на відрізку $[0, \pi/3]$;
3) $y = \ln x$ на відрізку $[1, e]$;
4) $y = x^2$ на відрізку $[a, b]$;
5) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ на відрізку $[-1, 1]$.

У кожному прикладі позначити на графіку середнє значення функції та точку, в якій воно досягається.

VIII.27. Визначити знаки таких визначених інтегралів:

1) $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x\, dx$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\, dx$; 4) $\int\limits_{1/2}^{1} x^2 \ln x\, dx$.

VIII.28. Порівняти значення інтегралів:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx$ і $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{-x}\, dx$ і $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

VIII.29. Оцінити інтеграли:

1) $\int\limits_{1{,}5}^{3{,}5} \dfrac{x^2 dx}{x-1}$; 2) $\int\limits_0^2 \dfrac{x^2+5}{x^2+2}\, dx$; 3) $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \sin^2 x)\, dx$; 4) $\int\limits_{1/2}^{5/2} \dfrac{x\, dx}{1+x^2}$.

VIII.30. Використовуючи першу теорему про середнє, оцінити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1 + 0{,}5 \cos x}$; 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

VIII.31. Використовуючи другу теорему про середнє, оцінити інтеграли:

1) $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$; 2) $\int\limits_a^b \sin x^2\, dx \quad (a < x < b)$.

§9. Невластиві інтеграли

1°. *Невластивий інтеграл першого роду.* Якщо функція $f(x)$ інтегрована на кожному скінченному проміжку $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx \overset{def}{=} \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Невластивий інтеграл першого роду називається збіжним, якщо границя у правій частині рівності існує та скінченна, і розбіжним — в інших випадках.

2°. *Невластивий інтеграл другого роду.* Якщо функція $f(x)$ необмежена в деякому околі точки b, але інтегрована на кожному проміжку $[a,b-\varepsilon], (\varepsilon>0)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Невластивий інтеграл другого роду називається збіжним, якщо границя у правій частині рівності існує та скінченна, і розбіжним — в інших випадках.

3°. *Ознаки збіжності невластивих інтегралів.*

I. Якщо $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, коли $x \ge a$, то:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, якщо збігається $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$;

$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ розбігається, якщо розбіжний $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

II. Якщо $f(x)\geq 0$ і $f(x)=O^*(\varphi(x))$, коли $x\to+\infty$, то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

III. Якщо $f(x)\geq 0$ і $f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$, коли $x\to+\infty$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, коли $p>1$, і розбігається, коли $p<1$.

Якщо ж $f(x)\geq 0$ і $f(x)=O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$, коли $x\to b-0$, то інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ збігається, коли $p<1$, і розбігається, коли $p>1$.

IV. *Ознака Діріхле.* Якщо $f(x)$ — неперервна на $[a,+\infty)$ і має обмежену на $[a,+\infty)$ первісну $F(x)=\int\limits_a^{x} f(t)\,dt$, а $g(x)$ — монотонно спадна на $[a,+\infty)$, причому $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ збіжний.

Ознака Абеля. Якщо $g(x)$ — монотонна й обмежена на $[a,+\infty)$, а $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ — збіжний.

VIII.32. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$; 5) $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}\,dx$, $(a>0)$;

6) $\int\limits_0^{1} \ln x\,dx$; 7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; 9) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$;

10) $\int\limits_0^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$; 11) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 12) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 13) $\int\limits_0^{\infty} x^2\,e^{-x/2}\,dx$;

14) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$; 15) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 16) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2}$; 17) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; 19) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$; 20) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

21) $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$; 22) $\int\limits_0^{\infty} x\sin x\,dx$; 23) $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$; 24) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin x$;

25) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; 26) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(x+1)^2}\,dx$; 27) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 28) $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

29) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 30) $\int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$; 31) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 32) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

33) $\int\limits_0^1 x\,\ln x\,dx$; 34) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 35) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$; 36) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

VIII.33. Дослідити інтеграли на збіжність:

1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$; 4) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin\,x\,dx}{x^2}$;

5) $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; 7) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$; 8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$;

9) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1}$; 10) $\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$; 11) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$; 12) $\int\limits_1^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$;

13) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$; 14) $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln\ln x}$; 15) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 16) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

§10. Обчислення площ

1°. *Площа криволінійної трапеції в прямокутній системі координат.* Площа S плоскої фігури AA_1B_1B, що обмежена двома неперервними кривими $y{=}y_1(x)$ і $y{=}y_2(x)$ $(y_2(x){\ge}y_1(x))$ і двома прямими $x{=}a$ і $x{=}b$ $(a{<}b)$ (рис.17, а) обчислюється за формулою

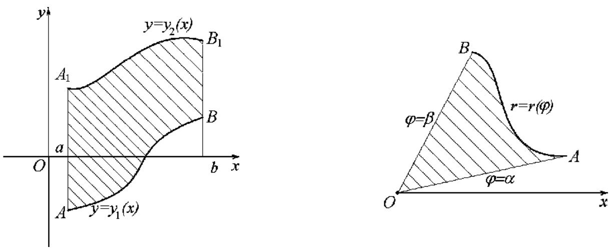
$$S{=}\int\limits_a^b [y_2(x){-}y_1(x)]\,dx.$$

2°. *Площа фігури, обмеженої кривою, що задана параметричним рівнянням.* Якщо $x{=}x(t)$ і $y{=}y(t)$ $(0{\le}t{\le}T)$ – параметричні рівняння кусково гладкої простої замкнутої кривої C, яка при обході проти годинникової стрілки обмежує зліва від себе фігуру з площею S, то

$$S{=}-\int\limits_0^T y(t)x'(t)\,dt{=}\int\limits_0^T x(t)y'(t)\,dt \qquad \text{або} \qquad S{=}\frac{1}{2}\int\limits_0^T [x(t)y'(t){-}x'(t)y(t)]\,dt.$$

3°. *Площа плоскої фігури, заданої в полярних координатах.* Площа S сектора OAB (рис. 17, б), обмеженого неперервною кривою в полярних координатах $r{=}r(\varphi)$ і двома півпрямими $\varphi{=}\alpha$ і $\varphi{=}\beta$, $(\alpha{<}\beta)$, дорівнює

$$S{=}\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$



а *б*

Рис. 17

VIII.34. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані в прямокутній системі координат:

1) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y = 6x - x^2$, $y = 0$;
4) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$; 5) $y^2 = 1 - x$, $x = -3$; 6) $y^2 + x^4 = x^2$;
7) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$; 8) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$; 9) $y = x^2$, $x + y = 0$;
10) $y = |\log_{10} x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$; 11) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$;
12) $y = x^2 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ і мінімальною ординатою;
13) $y^2 = 2px$, $x = h$; 14) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;
15) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 16) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;
17) $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$; 18) $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$;
19) $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$; 20) $y = 4x + x^2$, $y = x + 4$;
21) $a^2y^2 = x^3(2a - x)$; 22) $(y - x)^2 = x^3$, $x = 1$;
23) петлею кривої $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0$;
24) петлею строфоїди $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$;
25) однією півхвилею синусоїди $y = \sin x$ і $y = 0$.

VIII.35. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані параметрично:

1) однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox;
2) астроїдою $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;
3) $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$;
4) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

VIII.36. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані в полярних координатах:

1) лемніскатою Бернулі $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; 2) кардіоїдою $r = a(1 - \cos\varphi)$;
3) $r = a\cos 2\varphi$; 4) $r = a\sin 3\varphi$; 5) $r = a\cos 3\varphi$; 6) $r = a\sin 2\varphi$.

VIII.37. Обчислити площу сектора $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi$.

VIII.38. Обчислити площу фігури, обмеженої лінями:

1) $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$, $r = a$;
2) $\varphi = 4r - r^3$, $\varphi = 0$; 3) $\varphi = r - \sin r$, $\varphi = \pi$.

VIII.39. Обчислити площу фігури, обмеженої замкнутою кривою

$$r = \frac{2at}{1 + t^2}, \qquad \varphi = \frac{\pi t}{1 + t}.$$

VIII.40. Обчислити площу, що міститься між локоном $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ і його асимптотою.

VIII.41. Обчислити площу, що міститься між кривою $y = x\,e^{-x^2/2}$ і асимптотою цієї кривої $(x > 0)$.

VIII.42. Обчислити площу, що міститься між цисоїдою $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ і її асимптотою.

§11. Обчислення довжин дуг кривих

1°. *Довжина дуги плоскої кривої в прямокутних координатах.* Довжина дуги гладкої неперервно диференційованої кривої $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$ дорівнює

$$s=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2°. *Довжина дуги кривої, що задана параметрично.* Якщо крива задана рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_0\le t\le T)$, де $x(t)$, $y(t)$ – неперервно диференційовані функції на відрізку $[t_0,T]$, то довжина дуги кривої дорівнює

$$s=\int\limits_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Для просторової кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(t_0\le t\le T)$ довжина дуги

$$s=\int\limits_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

3°. *Довжина дуги плоскої кривої в полярних координатах.* Якщо $r=r(\varphi)$ $(\alpha\le\le\varphi\le\beta)$, де $r(\varphi)$ — неперервно диференційована функція на відрізку $[\alpha,\beta]$, то довжина дуги кривої дорівнює

$$s=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

VIII.43. Визначити довжини дуг кривих:

1) $y^2=\dfrac{4}{9}(2-x)^3$, відтятої прямою $x=-1$;

2) $y=\ln(\sin x)$ від $x=\dfrac{\pi}{3}$ до $x=\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $y=\ln(1-x^2)$ від $x=-\dfrac{1}{2}$ до $x=\dfrac{1}{2}$;

4) $y^2=2px$, відтятої прямою $x=\dfrac{p}{2}$;

5) $y^2=x^3$, відтятої прямою $x=\dfrac{4}{3}$;

6) $y^2=(x+1)^3$, відтятої прямою $x=4$;

7) $y=\dfrac{x^2}{2}-1$, відтятої віссю Ox;

8) $y=a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ між прямими $x=\pm a$;

9) $y=\ln x$ від $x=\dfrac{3}{4}$ до $x=\dfrac{12}{5}$.

VIII.44. Визначити довжини дуг параметрично заданих плоских кривих:

1) одної арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;

2) кривої $x=t^2$, $y=\dfrac{t^3}{3}-t^2$ між точками перетину з віссю Ox;

3) кривої $x=\dfrac{t^6}{6}$, $y=2-\dfrac{t^4}{4}$ між точками перетину з осями координат.

VIII.45. Визначити довжини дуг плоских кривих, попередньо записавши їх рівняння у параметричній формі:

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; 3) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3}=1$.

VIII.46. Визначити довжини дуг параметрично заданих кривих:

1) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ht,\quad 0\le t\le 2\pi$;

2) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t,\quad -\infty<t\le 0$;

3) $x=at,\ y=\sqrt{3ab}t^2,\ z=2bt^3,\quad 0\le t\le t_0$.

VIII.47. Визначити довжини дуг кривих, заданих у полярних координатах:

1) кардіоїди $r=a(1+\cos\varphi)$;

2) першого завитка спіралі Архімеда $r=a\varphi$;

3) всієї кривої $r=a\ \sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

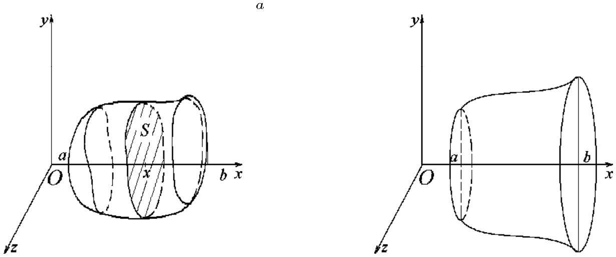
§12. Обчислення об'ємів

1°. *Обчислення об'єму тіла за відомими поперечними перерізами.* Якщо об'єм тіла V існує і $S{=}S(x)$ $(a{\le}x{\le}b)$ — площа перерізу тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox в точці x (рис. 18, а), то

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

2°. *Об'єм тіла обертання.* Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $a{\le}x{\le}b$, $0{\le}y{\le}y(x)$, де $y(x)$ — неперервна на $[a,b]$ функція (рис. 18, б), дорівнює

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx.$$



а *б*

Рис. 18

VIII.48. Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями:

1) $x+y+z=a,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$;

2) $x^2+y^2=z^2,\quad z=h$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2},\quad z=c$; 5) $x^2+4y^2=1,\quad x^2+4y^2=8z,\quad z=0$.

VIII.49. Обчислити об'єм горища, основою якого є прямокутник зі сторонами a і b, верхнє ребро дорівнює c, а висота — h.

VIII.50. Обчислити об'єм зрізаного конуса, основами якого є еліпси з півосями A, B і a, b, а висота дорівнює h.

VIII.51. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm b$ навколо осі Oy;

3) $y^2 = 2px$, $x = h$ навколо осі Ox;

4) $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$ навколо осі Oy;

5) $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ навколо осі Oy;

6) $y = \sin x$ (однією півхвилею) $y = 0$ навколо осі Ox;

7) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі Oy;

8) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x = \pm 1$, $y = 0$ навколо осі Ox;

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Oy;

10) $(y-a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$ навколо осі Ox;

11) $y = \cos x$, $y = -1$ навколо прямої $y = -1$ при $-\pi \le x \le \pi$;

12) $y = x\sqrt{-x}$, $x = -4$, $y = 0$ навколо осі Oy;

13) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x = 0$, $y = 0$ (при $x > 0$) навколо осі Ox;

14) $y = a - \dfrac{x^2}{a}$, $x + y = a$ навколо осі Oy;

15) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ навколо осі Ox;

16) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ навколо осі Oy;

17) $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$ навколо осі Ox;

18) однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі абсцис;

19) $(y-3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$ навколо осі Ox.

VIII.52. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням петлі кривої $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ навколо:

1) осі Ox; 2) осі Oy.

VIII.53. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури в полярних координатах $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ навколо:

1) полярної осі; 2) прямої $r\cos\varphi = -\dfrac{a}{4}$.

VIII.54. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$, навколо полярної осі.

VIII.55. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням цисоїди $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ навколо її асимптоти.

VIII.56. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox нескінченної гілки кривої $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \ge 1$.

§13. Обчислення площ поверхонь обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням дуги гладкої кривої $y=f(x)$, $a\le x\le b$ навколо осі Ox, дорівнює

$$P=2\pi\int_a^b |y|\,ds(x),\quad \text{де } ds(x)=\sqrt{dx^2+dy^2} \text{ — диференціал дуги.}$$

VIII.57. Знайти площі поверхонь, утворених обертанням кривих:

1) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$ навколо осі Ox;

2) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$ $(|x| \le b)$ навколо осі Ox;

3) $y = \operatorname{tg} x$ $(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4})$ навколо осі Ox;

4) $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le x_0)$ навколо:
а) осі Ox; б) осі Oy;

5) $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ навколо:
а) осі Ox; б) осі Oy; в) прямої $y = 2a$;

6) $x = a\,\cos^3 t$, $y = a\,\sin^3 t$ навколо прямої $y = x$;

7) $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ навколо полярної осі;

8) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ навколо:
а) полярної осі; б) осі $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; в) осі $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

§14. Інші задачі на застосування визначеного інтеграла

VIII.58. Гребля має форму трапеції з верхньою основою a, нижньою — b $(b < a)$ і висотою h. Знайти тиск води на греблю.

VIII.59. Визначити тиск води на вертикальний півкруг, діаметр d якого перебуває на поверхні води.

VIII.60. Визначити тиск води на вертикальну трикутну пластину висотою h, основа a якої є на поверхні води.

VIII.61. Визначити тиск води на вертикальну трикутну пластину висотою h, основа a якої паралельна до поверхні води, а протилежна вершина перебуває на поверхні води.

VIII.62. Знайти глибину d, на якій вертикальний прямокутний шлюз висотою h розділяється на дві частини, тиск води на які однаковий.

VIII.63. Яку роботу треба затратити, щоб підняти тіло масою m з поверхні землі на висоту h над землею?

Вказівка. Скористайтесь тим, що сила, з якою Земля притягує тіло, обернено пропорційна квадратові відстані тіла від центра Землі і дорівнює mg на поверхні землі.

VIII.64. Піраміда Хеопса є правильною чотирикутною пірамідою зі стороною основи 200 *м* і висотою 140 *м*. Яку роботу на подолання сили ваги потрібно було виконати при побудові піраміди, якщо питома вага каменю, з якого вона збудована, дорівнює 2500 $кГ/м^3$.

VIII.65. Дерев'яний поплавок циліндричної форми з площею основи $S = 4000$ $см^3$ і висотою $H = 50$ $см$ плаває у воді. Яку роботу потрібно виконати, щоб повністю занурити його у воду? (Густина дерева $0,8$ $г/см^3$).

VIII.66. Яку роботу треба затратити, щоб викачати воду з циліндра радіусом R і висотою h?

VIII.67. Яку роботу потрібно затратити, щоб викачати воду з півсфери радіусом R?

VIII.68. Два електричних заряди $q_1 = 6.67 \cdot 10^{-9}$ K і $q_2 = 10 \cdot 10^{-9}$ K розміщені в повітрі на відстані 10 $см$ один від одного. Яку роботу виконає сила електричної взаємодії, переміщуючи заряд q_2:

а) на відстань 30 $см$ від q_1; б) в нескінченність?

Вказівка. Сила взаємодії двох електричних зарядів визначається законом Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, де q_1, q_2 — величини зарядів, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $ф/м$ — універсальна електрична стала, ε — діелектрична проникність середовища (для повітря $\varepsilon \approx 1$), r — відстань між зарядами.

VIII.69. З якою силою нескінченна пряма рівномірно позитивно заряджена з лінійною густиною σ $K/м$ діє на одиничний позитивний заряд, що перебуває на відстані a $м$ від неї?

VIII.70. Знайти статичні моменти щодо координатних осей і координати центра мас лінії $y = a - x,\ 0 \le x \le a$.

VIII.71. Знайти статичні моменти щодо координатних осей і координати центра мас трикутника, обмеженого лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = a$.

VIII.72. Знайти статичні моменти щодо координатних осей і координати центра мас півкола $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

VIII.73. Знайти статичні моменти щодо координатних осей і координати центра мас півкруга $0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$.

VIII.74. Знайти статичні моменти щодо координатних осей і координати центра мас фігури, обмеженої осями координат та кривою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

VIII.75. Знайти моменти інерції прямокутника з основою a і висотою b щодо його сторін та щодо осей симетрії.

VIII.76. Знайти момент інерції півкола з радіусом R щодо його діаметра.

VIII.77. Знайти момент інерції півкруга з радіусом R щодо його діаметра.

VIII.78. Продуктивність праці протягом восьмигодинного робочого дня визначається рівністю $z(t) = -2,5t^2 + 15t + 100$. Знайти об'єм виробленої за день продукції.

VIII.79. Продуктивність праці протягом восьмигодинного робочого дня визначається рівністю $z(t) = -3t^2 + 10t + 175$. Який відсоток продукції вироблено у першій половині дня?

VIII.80. Знайти середній час, затрачений на освоєння одного виробу, за час освоєння:

а) від 1 до 121 виробу; б) від 100 до 121 виробу,

якщо функція зміни затрат часу на виготовлення виробів задається рівністю $t(x) = \dfrac{600}{\sqrt{x}}$.

VIII.81. Крива Лоренца характеризує залежність відсотка прибутків (x) від частки населення (y), що ними володіє (крива OBA рис. 19). Коефіцієнт Джіні, який характеризує нерівномірність у розподілі доходів населення, обчислюється як відношення площі фігури $OABO$ до площі ΔOAC.

Обчислити коефіцієнт Джіні, якщо крива Лоренца задана рівнянням:

а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

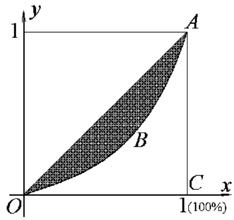


Рис. 19

РОЗДІЛ IX

РЯДИ

§1. Числові ряди

1°. *Загальні поняття.* Числовий ряд
$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
називається збіжним, якщо існує скінченна границя
$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,$$
де $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ — його n-на частинна сума. Число S називається сумою ряду. Ряд, що не збігається, називається розбіжним.

2°. *Необхідна ознака збіжності ряду.* Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

3°. *Ознаки збіжності рядів з додатними членами.*

I. Якщо послідовність частинних сум ряду з додатними членами обмежена, то ряд збігається.

II. Якшо $\forall\, n\geq n_0$: $0\leq u_n\leq v_n$, то:

1) зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

III. Якщо $u_n\sim v_n$ при $n\to\infty$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ з додатними членами збігаються або розбігаються одночасно.

IV. Якщо $u_n\geq 0$ і при $n\to\infty$ $u_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$, то при $p>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а при $p\leq 1$ розбігається.

V. *Ознака Даламбера.* Якщо $u_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а при $q>1$ розбігається.

VI. *Ознака Коші.* Якщо $u_n\geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а при $q>1$ розбігається.

VII. *Інтегральна ознака Коші.* Якщо $f(x)$ $(x\geq 1)$ — невід'ємна незростаюча функція, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

IX.1. Записати формулу загального члена ряду:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$;

3) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$; 4) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$;

5) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}+\ldots$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{3}{8}+\operatorname{arctg}\frac{5}{18}+\operatorname{arctg}\frac{7}{32}+\ldots$.

Чи виконується необхідна умова збіжності для цих рядів?

IX.2. Безпосередньо довести збіжність рядів і знайти їхні суми:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + \dots;$

2) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots;$

3) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots;$

4) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots;$

Вказівка. Розкласти u_n на елементарні дроби.

5) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} + \dots;$

6) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \dots;$

7) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)} + \dots;$

8) $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+5)} + \dots;$

9) $\frac{3}{4} + \frac{3}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots;$

IX.3. Дослідити ряди на збіжність:

1) $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \dots;$

2) $1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots;$

3) $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \dots;$

4) $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots;$

5) $\frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots;$

6) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots;$

7) $1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots;$

8) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots;$

9) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots;$

10) $\frac{2}{1} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \dots;$

11) $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots;$

12) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots;$

13) $1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots;$

14) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots;$

15) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots.$

IX.4. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити збіжність ряду:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots;$ 2) $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots;$

3) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots;$ 4) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots;$

5) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \dots;$

6) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \dots + \sin\frac{\pi}{2^n} + \dots;$

7) $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots;$

8) $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots;$

9) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)} + \dots;$

10) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \dots + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} + \dots;$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5};$ 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}};$

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1});$ 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$

IX.5. За допомогою ознаки Даламбера дослідити збіжність ряду:

1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{2n}{3^n} + \dots;$ 2) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots;$

3) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots;$ 4) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2}9 + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots;$

5) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots;$ 6) $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots + \frac{2n}{n!} + \dots;$

7) $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots;$ 8) $\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot (4n-3)} + \dots;$

9) $1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \dots + \frac{3^n}{2^n \cdot (2n-1)} + \dots;$

10) $\frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{7!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots;$

11) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \dots;$

12) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots;$

13) $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots;$ 14) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \dots + n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}} \dots.$

IX.6. За допомогою ознаки Коші дослідити збіжність ряду:

1) $\dfrac{100}{1!}+\dfrac{100^2}{2!}+\dots+\dfrac{100^n}{n!}+\dots;$

2) $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dots+\dfrac{n!}{n^n}+\dots;$

3) $\dfrac{2\cdot 1!}{1}+\dfrac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\dots+\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}+\dots;$

4) $\dfrac{3\cdot 1!}{1}+\dfrac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\dots+\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}+\dots;$

5) $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln^2 3}+\dots+\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}+\dots;$

6) $\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\dots+\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n+\dots;$

7) $\arcsin 1+\arcsin^2\dfrac{1}{2}+\dots+\arcsin^n\dfrac{1}{n}+\dots.$

IX.7. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити збіжність ряду:

1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+...;$

2) $1+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\dots;$

3) $\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{4^3}+\dots;$

4) $\dfrac{1}{1+1^2}+\dfrac{1}{1+2^2}+\dfrac{1}{1+3^2}+\dots;$

5) $\dfrac{1}{1+1^2}+\dfrac{2}{1+2^2}+\dfrac{3}{1+3^2}+\dots;$

6) $\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{5^2-1}+\dfrac{1}{7^2-1}+\dots;$

7) $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\dots+\dfrac{1}{n\ln n}+\dots;$

8) $\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\dfrac{1}{4\ln^2 4}+...;$

9) $\left(\dfrac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\dfrac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\dots+\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\dots.$

§2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

1°. *Абсолютна збіжність ряду.* Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{2}$$

У цьому випадку ряд (1) також збіжний. Сума абсолютно збіжного ряду не залежить від порядку сумування доданків. Для визначення абсолютної збіжності ряду (1) достатньо застосувати до ряду (2) відомі ознаки збіжності для знакосталих рядів. Якщо ряд (1) збігається, а ряд (2) розбігається, то ряд (1) називається умовно збіжним.

2°. *Ознака Лейбніца.* Знакозмінний ряд

$$v_1-v_2+v_3-v_4+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n \qquad (v_n\geq 0)$$

збігається (загалом не абсолютно), якщо $v_n\geq v_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=0$.

У цьому випадку для залишку ряду $R_n=(-1)^n v_{n+1}+(-1)^{n+1}v_{n+2}+\dots$ справджується оцінка $|R_n|\leq v_{n+1}$.

3°. *Ознака Абеля.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ збіжний, якщо:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний;

2) числа v_n $(n=1,2,\dots)$ утворюють монотонну й обмежену послідовність.

4°. *Ознака Діріхле.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ збіжний, якщо:

1) часткові суми $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ обмежені в сукупності;

2) послідовність v_n монотонно прямує до нуля при $n\to\infty$.

IX.8. Дослідити збіжність знакозмінних рядів, для збіжних рядів знайти їхні суми:

1) $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}+\dots$; 2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dots$;

3) $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dots$; 4) $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}-\dfrac{1}{4^3}+\dots$;

5) $1-\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{3a^4}-\dfrac{1}{4a^6}+\dots$; 6) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dots$;

7) $1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\dots$; 8) $\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4}-\dots$.

IX.9. Дослідити збіжність знакозмінних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100} n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

7) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}-\dots$.

IX.10. Дослідити на абсолютну та умовну збіжності ряди:

1) $1-\dfrac{1}{3}+\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}+\dots$;

2) $1-\dfrac{1}{3^2}+\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\dots$;

3) $2-\dfrac{3}{2}+\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}+\dots$;

4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\dots$;

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1}+\dfrac{\sin 2\alpha}{2}+\dots+\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}+\dots;$

6) $-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dots+(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dots;$

7) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{4}+\dfrac{27}{8}-\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{2^n}+\dots;$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p};$ 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}};$ 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p};$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n+1}]^p};$ 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n};$ 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}.$

§3. Функціональні ряди

1°. *Область збіжності.* Областю збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається сукупність X_0 тих значень x, для яких цей ряд збігається.

Функція $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)$, називається сумою цього ряду, а $R_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$ — залишком ряду.

2°. *Рівномірна збіжність.* Послідовність функцій

$$f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$$

називається рівномірно збіжною на множині X, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall x\in X\ \forall n>N_\varepsilon \quad |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

У цьому випадку пишуть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається рівномірно збіжним на множині X, якщо на цій множині рівномірно збігається послідовність його часткових сум $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}S_i(x)\quad(n=1,2,\dots)$.

3°. *Ознака Вейєштрасса.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається абсолютно та рівномірно на множині X, якщо існує збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ такий, що $\forall x\in X\ \forall n\quad |u_n(x)|\le c_n$.

4°. *Ознака Абеля.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ збіжний рівномірно на множині X, якщо:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ рівномірно збіжний на множині X;

2) функції $v_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ обмежені в сукупності й утворюють при кожному x монотонну послідовність.

5°. *Ознака Діріхле.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ збіжний рівномірно на множині X, якщо:

1) часткові суми $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)$ обмежені в сукупності;

2) послідовність $v_n(x)$ монотонна для кожного x і рівномірно на X прямує до нуля, коли $n\to\infty$.

6°. *Властивості функціональних рядів.*

I. Сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервною.

II. Якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збіжний на кожному $[\alpha,\beta]\in(a,b)$ й існують скінченні границі, $\lim\limits_{x\to a} u_n(x)=U_n$, $(n=1,2,\dots)$, то:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ збіжний;

2) виконується рівність $\lim\limits_{x\to a}\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\lim\limits_{x\to a} u_n(x)\right\}$.

III. Якщо всі члени збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервно диференційовані на $a<x<b$ і ряд з похідних $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збіжний рівномірно на інтервалі (a,b), то

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \qquad \text{при} \quad x\in(a,b).$$

IV. Якщо члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні і цей ряд збіжний рівномірно на скінченному проміжку $[a,b]$, то

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

IX.11. Дослідити функціональні послідовності на рівномірну збіжність на зазначених проміжках:

1) $f_n(x)=x^n$, а) $0\le x\le\frac{1}{2}$; б) $0\le x\le 1$;

2) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $0\le x\le 1$;

3) $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$, $0\le x\le\infty$;

4) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$, $0\le x\le 1$;

5) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $0\le x\le 1$; б) $0\le x\le\infty$;

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$, а) $0\le x\le 1-\varepsilon$; б) $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$; в) $1+\varepsilon\le x\le\infty$.

IX.12. Визначити при $|x|<1$ суму і залишок ряду

$$1+x+x^2+x^3+\dots$$

і показати, що він рівномірно збігається на відрізку $[0,1/2]$. При якому n залишок $|R_n(x)|<0,001$ для будь-якого x з цього відрізка?

IX.13. Показати, що ряд

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+9}-\frac{1}{x^2+16}+\dots$$

рівномірно збіжний на всій числовій осі. При якому n (і довільному x) залишок ряду $|R_n(x)|<0,0001$?

IX.14. Показати, що ряд

$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+x(1-x)^3+\dots$$

збіжний нерівномірно на відрізку $[0,1]$ і рівномірно на відрізку $[\frac{1}{2},1]$. При якому n залишок $|R_n(x)|<0,01$ для будь-якого x з цього відрізка?

IX.15. Показати, що ряд

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}\dots$$

рівномірно збіжний до $\frac{1}{x}$ на інтервалі $0<x<\infty$. При якому n (і довільному $x>0$) залишок ряду $|R_n(x)|<0,1$?

IX.16. Показати, що ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}-\dots$$

рівномірно збіжний на відрізку $[0,1]$. При яких n залишок $|R_n(x)|<0,1$ для будь-якого x з цього відрізка?

IX.17. Показати, що ряд

$$x^3+\frac{x^3}{(1+x^3)}+\frac{x^3}{(1+x^3)^2}+\dots$$

збіжний нерівномірно при $x>0$ і рівномірно при $x\geq 1$. При якому n залишок $|R_n(x)|<0,001$ для будь-якого $x\geq 1$?

IX.18. Показати, що ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{3\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{3^2\sqrt{1+5x}}+\frac{1}{3^3\sqrt{1+7x}}+\dots$$

рівномірно збіжний на інтервалі $0\leq x<\infty$. При якому n (і будь-якому невід'ємному x) залишок $|R_n(x)|<0,01$?

Вказівка. Порівняти цей ряд зі збіжним числовим рядом.

IX.19. Показати, що ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2x}}+\frac{1}{\sqrt{2^4+3x}}+\frac{1}{\sqrt{2^6+4x}}+\dots$$

рівномірно збіжний на інтервалі $0 \le x < \infty$. При якому n залишок ряду $|R_n(x)| < 0,01$?

IX.20. Визначити області збіжності функціональних рядів:

1) $1+x+\dots+x^n+\dots$; 2) $\ln x+\ln^2 x+\dots+\ln^n x+\dots$;

3) $x+x^4+\dots+x^{n^2}+\dots$; 4) $x+\dfrac{x^2}{2^2}\dots+\dfrac{x^n}{n^2}+\dots$;

5) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x^2}\dots+\dfrac{1}{1+x^n}+\dots$;

6) $2x+6x^2+\dots+n(n+1)x^n+\dots$;

7) $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dots+\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}+\dots$;

8) $\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{4}+\dots+\sin\dfrac{x}{2^n}+\dots$;

9) $x\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}+x^2\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{4}+\dots+x^n\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2^n}+\dots$;

10) $\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\dots+\dfrac{\sin nx}{n^2}+\dots$;

11) $\dfrac{\cos x}{e^x}+\dfrac{\cos 2x}{e^x}+\dots+\dfrac{\cos nx}{e^{nx}}+\dots$;

12) $e^{-x}+e^{-4x}+\dots+e^{-n^2x}+\dots$.

IX.21. Визначити області збіжності (абсолютної й умовної) таких функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sin^n x}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 2n}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(x+n)^p}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p\sin nx}{(1+n)^q}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n3^{2n}}{2n}x^n(1-x)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

IX.22. Використовуючи ознаку Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}, |x|<\infty$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+2^n}, |x|<\infty$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}, |x|<\infty$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), x\in[\frac{1}{2},2]$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, |x|<\infty$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}, |x|<\infty$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, |x| < \infty;$ 8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), |x| \le a < \infty.$

IX.23. Показати, що ряд

$$x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$$

рівномірно збіжний на інтервалі $-1+\omega \le x \le 1+\omega$, де ω — будь-яке додатне число, менше одиниці. Інтегруванням цього ряду знайти на інтервалі $(-1;1)$ суму ряду

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots.$$

IX.24. Знайти суми таких рядів:

1) $x + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots;$ 2) $\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots.$

IX.25. Функція $f(x)$ визначена рівністю

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots.$$

Показати, що функція $f(x)$ неперервна на всій додатній півосі Ox. Обчислити $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

IX.26. Функція $f(x)$ визначена рівністю

$$f(x) = 1 + 2\cdot 3x + \dots + n3^{n-1}x^{n-1} + \dots.$$

Показати, що функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Обчислити $\int\limits_{0}^{0{,}125} f(x)\,dx$.

IX.27. Використовуючи співвідношення $\int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, знайти суму таких рядів:

1) $1 - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} + \dots;$ 2) $1 - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3} + \dots.$

IX.28. Використовуючи співвідношення $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n2^n}$, знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} \dots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \dots.$$

IX.29. Використовуючи співвідношення

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4\cdot 2},$$

знайти суму ряду

$$\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}.$$

IX.30. Переконатися в тому, що функція $f(x)$, яка визначається рядом

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \dots$$

задовольняє співвідношення $xy' = y(x+1)$.

§4. Степеневі ряди

1°. *Інтервал збіжності.* Для кожного степеневого ряду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots$$

існує інтервал збіжності, всередині якого цей ряд збігається, а за його межами — розбігається.

Радіус збіжності R ряду визначається за формулою Коші-Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

або за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

якщо ця границя існує.

Якщо R дорівнює ∞, то ряд збігається на всій числовій осі.

Степеневий ряд збіжний не тільки абсолютно, але й рівномірно на будь-якому відрізку $[\alpha,\beta]$, що лежить всередині інтервалу збіжності $(a-R,a+R)$.

2°. *Ряд Тейлора.* Нескінченно диференційовна в точці a функція $f(x)$, всі похідні якої обмежені в деякому околі цієї точки, розкладається в степеневий ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Основні розвинення.

I. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$, — збігається при $x\in(-\infty;\infty)$.

II. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$ — збігається при $x\in(-\infty;\infty)$

III. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$ — збігається при $x\in(-\infty;\infty)$.

IV. $(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\dots$ — збіжний при $|x|<1$.

V. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$ — збігається при $-1<x\le 1$.

VI. $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$ — збігається при $|x|\le 1$.

3°. *Дії над степеневими рядами.* Всередині спільного інтервалу збіжності правильні співвідношення:

I. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n$.

II. $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, де $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

III. $\frac{d}{dx}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$.

IV. $\int\limits_a^x \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$.

IX.31. Визначити радіус та інтервал збіжності і дослідити збіжність на границях інтервалу степеневих рядів:

1) $1 + \dfrac{x}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \dfrac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \ldots$; 2) $1 - \dfrac{x}{5\sqrt{2}} + \dfrac{x^3}{5^2\sqrt{3}} - \dfrac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \ldots$;

3) $1 + \dfrac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \dfrac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \dfrac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-x)^{n-1}}{n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! x^n}{(n+1)^n}$;

9) $(x+1) + \dfrac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \dfrac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \dfrac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \ldots$;

10) $\dfrac{2x-3}{1} - \dfrac{(2x-3)^2}{3} + \dfrac{(2x-3)^3}{5} - \ldots$;

11) $1 + \dfrac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \dfrac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \dfrac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \ldots$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^p}$;

13) $1 - \dfrac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \dfrac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \dfrac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \ldots$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$; 16) $\dfrac{x-1}{1 \cdot 2} + \dfrac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \dfrac{(x-1)^3}{5 \cdot 2^3} + \ldots$;

17) $\dfrac{2x+1}{1} + \dfrac{(2x+1)^2}{4} + \dfrac{(2x+1)^3}{7} + \ldots$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$; 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$; 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

IX.32. Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суми рядів і визначити інтервал їхньої збіжності до своїх сум:

1) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots$; 2) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots$;

3) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$; 4) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$;

5) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$.

IX.33. Застосовуючи почленне інтегрування, обчислити суми рядів і визначити інтервал їхньої збіжності до своїх сум:

1) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$; 2) $x+2x^2+3x^3+\ldots$;

3) $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$; 4) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$;

5) $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots$.

IX.34. Визначити інтервал збіжності ряду і знайти його суму.

1) $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$; 2) $1-4x+7x^2-10x^3+\ldots$.

Вказівка. Позначивши суму ряду через S, записати вирази $S-Sx$ або $S+Sx$.

IX.35. Розкласти в ряд за степенями x функції:

1) $\cos(x-a)$; 2) $\sin^2 x$; 3) xe^x; 4) $\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)$;

5) 2^x; 6) $\cos\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)$.

IX.36. Розкласти в ряд за степенями x функції:

1) $\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2) $\ln(2-3x+x^2)$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

IX.37. Написати перші три члени розвинення в ряд функції $f(x) = \ln(1+e^{kx})$.

IX.38. Використовуючи формулу Маклорена, написати розвинення в ряд за степенями x бінома $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ і показати, що отриманий ряд збігається, коли $|x|<a$.

IX.39. За допомогою біноміального ряду показати, що для $|x|<1$

$$\frac{1}{(1+x)^3}=1-3x+6x^2-10x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}(-x)^{n-1}.$$

IX.40. За допомогою біноміального ряду одержати розвинення в ряд функції $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ для $|x|<1$.

IX.41. Розкласти в ряд функцію $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Вказівка. Проінтегрувати ряд, отриманий у попередній задачі.

IX.42. За допомогою біноміального ряду показати, що для $|x|<1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots.$$

IX.43. Розкласти в ряд функцію $\arcsin x$.

Вказівка. Проінтегрувати ряд, отриманий у попередній задачі.

IX.44. Розкласти $e^{x/a}$ в ряд за степенями $x-a$.

IX.45. Розкласти за степенями $x-1$ функції:

1) $f(x)=x^3-3x$; 2) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$.

IX.46. Розкласти за степенями $x+1$ функції $f(x)=x^4$ та $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Дослідити збіжність отриманих рядів.

IX.47. Розкласти в ряд за степенями $x+2$ функції $f(x)=x^4-4x^2$ та $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Дослідити збіжність рядів.

IX.48. Розкласти в ряди функції:
1) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ за степенями $x-\dfrac{\pi}{2}$; 2) $f(x)=\sin 3x$ за степенями $x+\dfrac{\pi}{3}$.

IX.49. Розкласти в ряд за степенями $x-\dfrac{\pi}{3}$ функцію $f(x)=\cos^2 x$.

IX.50. Розкласти в ряд за степенями $x-4$ функцію $f(x)=\sqrt{x}$ і дослідити збіжність ряду.

§5. Застосування рядів до наближених обчислень

IX.51. Написати біноміальний ряд для $\sqrt{1+x}$ і обчислити

$$\sqrt{1,004},\ \sqrt{0,992},\ \sqrt{90},$$

обмежившись двома членами ряду. Оцінити похибку.

IX.52. Написати біноміальний ряд для $\sqrt[3]{1+x}$ і обчислити

$$\sqrt[3]{1,006},\ \sqrt[3]{0,991},\ \sqrt[3]{130},$$

обмежившись двома членами ряду. Оцінити похибку.

IX.53. Обчислити

$$\sqrt{1,005},\ \sqrt[3]{1,0012},\ \sqrt{0,993},\ \sqrt[3]{0,997},\ \sqrt{110},\ \sqrt[3]{70},\ \sqrt[5]{40},$$

обмежившись двома членами біноміального ряду. Оцінити похибку.

IX.54. Обчислити: 1) $\sin 12^\circ$; 2) $\cos 12^\circ$ обмежившись двома членами ряду $\sin x$ і $\cos x$ відповідно. Оцінити похибку.

Вказівка. Перейти до радіанної міри кута.

IX.55. Отримати розвинення $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ і, проінтегрувавши почленно отриманий ряд, написати розвинення в ряд функції $\operatorname{arctg} x$.

IX.56. Прийнявши $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ в розвиненні в ряд функції $\operatorname{arctg} x$, одержати ряд для обчислення π

$$\pi=2\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}.$$

Обчислити π, взявши перших п'ять членів ряду.

IX.57. Використовуючи розвинення в ряд Тейлора функцій e^x, $\sin x$ і $\cos x$, обчислити:

1) e^2 з точністю 0,001; 2) $\sqrt{e}$ з точністю 0,001;
3) $\dfrac{1}{e}$ з точністю 0,0001; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ з точністю 0,0001;
5) $\sin 1^\circ$ з точністю 0,0001; 6) $\cos 1^\circ$ з точністю 0,001;
7) $\sin 10^\circ$ з точністю 0,00001; 8) $\cos 10^\circ$ з точністю 0,0001.

IX.58. Використовуючи розвинення в ряд Тейлора функції $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, обчислити $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 6$, $\lg e$, $\lg 5$.

IX.59. Записати у вигляді рядів інтеграли, використовуючи розвинення в ряд підінтегральних функцій. Зазначити області збіжності отриманих рядів:

1) $\int \dfrac{\sin x}{x}\,dx$; 2) $\int \dfrac{\cos x}{x}\,dx$; 3) $\int \dfrac{e^x}{x}\,dx$;

4) $\int \dfrac{e^x}{x^2}\,dx$; 5) $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_0^x \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$;

7) $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 8) $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1-x^9}$; 9) $\int\limits_0^x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$;

10) $\int\limits_0^x \cos \dfrac{x^2}{4}\,dx$.

IX.60. Обчислити наближене значення заданих визначених інтегралів, взявши три члени розвинення підінтегральних функцій в ряд. Оцінити похибку:

1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$; 5) $\int\limits_0^{0{,}5} \sqrt{1+x^3}dx$.

IX.61. Знайти у вигляді ряду розв'язок рівняння $y'' = x^2 y$ з початковими умовами $y = 1$, $y' = 1$, коли $x = 0$.

IX.62. Знайти перші чотири члени ряду, що визначає розв'язок рівняння Ріккаті $y' = 1 + x - y^2$ з початковою умовою $y = 1$, коли $x = 0$.

IX.63. Знайти у вигляді ряду розв'язок рівняння Бесселя $xy''+y'+xy = 0$ з початковими умовами $y = 1$, $y' = 0$, коли $x = 0$.

§6. Ряди Фур'є

Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна і має кусково-неперервну похідну $f'(x)$ на інтервалі $(-l;l)$, причому її точки розриву ξ регулярні (тобто $f(\xi)=\frac{1}{2}\left[f(\xi-0)+f(\xi+0)\right]$), то функція $f(x)$ на цьому інтервалі може бути зображена рядом Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l}+b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos \frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin \frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,2,\dots).$$

У часткових випадках:

1) якщо функція $f(x)$ парна, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \qquad \text{де } a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\cos \frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,2,\dots);$$

2) якщо функція $f(x)$ непарна, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad \text{де } b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\sin \frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,2,\dots).$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(0;l)$ і має властивості неперервності, перелічені вище, то її можна зобразити на цьому інтервалі як рядом Фур'є за косинусами, так і рядом Фур'є за синусами, відповідно продовживши її на проміжок $(-l;0)$.

IX.64. Функцію $f(x) = \sin^4 x$ розкласти в ряд Фур'є.

IX.65. Розкласти в ряд Фур'є у зазначених інтервалах функції:

1) $f(x) = \begin{cases} A, & \text{якщо} \quad 0 < x < l, \\ 0, & \text{якщо} \quad l < x < 2l, \end{cases}$ де A – стала, в інтервалі $(0; 2l)$;

2) $f(x) = x$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

3) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в інтервалі $(0; 2\pi)$;

4) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{якщо} \quad -\pi < x < 0, \\ bx, & \text{якщо} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$ де a і b – сталі, в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

5) $f(x) = \pi^2 - x^2$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

6) $f(x) = x^3$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

7) $f(x) = \cos ax$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$ (a – не ціле);

8) $f(x) = \sin ax$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$ (a – не ціле);

9) $f(x) = \operatorname{sh} ax$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

10) $f(x) = e^x - 1$ в інтервалі $(0; 2\pi)$;

11) $f(x) = e^{ax}$ в інтервалі $(-h; h)$;

12) $f(x) = x \sin x$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

13) $f(x) = x \cos x$ в інтервалі $\left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

14) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

IX.66. Функцію $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ на інтервалі $(0; \pi)$ розкласти в ряд Фур'є за:

1) синусами кратних дуг; 2) косинусами кратних дуг.

IX.67. Функцію $f(x) = x^2$ розкласти в ряд Фур'є:

1) в інтервалі $(-\pi; \pi)$ за косинусами кратних дуг;

2) в інтервалі $(0; \pi)$ за синусами кратних дуг;

3) в інтервалі $(0; 2\pi)$ за синусами та косинусами кратних дуг.

Користуючись цими розвиненнями, знайти суми рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

IX.68 Розкласти в ряд Фур'є періодичні функції:

1) $f(x) = |\sin x|$; 2) $f(x) = |\cos x|$; 3) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

4) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 5) $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

РОЗДІЛ X

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ

§1. Функція багатьох змінних. Границя. Неперервність

1°. *Функція багатьох змінних.* Якщо кожній точці $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in X\subset\mathbb{R}^n$ за певним законом ставиться у відповідність єдине число $y\in\mathbb{R}$, то скажемо, що на множині X задано числову функцію n змінних $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Множину точок $X\subset\mathbb{R}^n$, на якій визначено функцію $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, називають областю визначення функції f і позначають $D(f)$ або D_f. Множину значень функції f позначають $E(f)$ або E_f.

Множину $\Gamma(f)=\left\{(x_1,\dots,x_n;f(x_1,\dots,x_n))\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,(x_1,\dots,x_n)\in D_f\right\}$ називають графіком функції $y=f(x_1,\dots,x_n)$. У випадку функції двох змінних $z=f(x,y)$ графіком функції є деяка поверхня у просторі $\mathbb{R}^3$.

Множину точок $M(x,y)\in\mathbb{R}^2$, координати яких задовольняють рівняння $f(x,y)=C$, де $C=\mathrm{const}$ — деяке фіксоване число, називають лінією рівня функції $z=f(x,y)$. У випадку функції $n\geqslant 3$ змінних множину $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,|\,f(x_1,x_2,\dots,x_n)=C\}$ називають поверхнею рівня функції $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

2°. *Границя функції багатьох змінних. Неперервність.* Число A називають границею функції $f(x)$ в точці a (пишуть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$), якщо

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\,\forall x\in X:\quad 0<\rho(x,a)<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

де $\rho(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}$ — відстань між точками x і a.

Як і для функції однієї змінної справджуються арифметичні теореми про границі.

Якщо існують $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x),\ \lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\,\lim_{x\to a}g(x)$$

Якщо, крім того, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$.

Функцію $f(x)$, $x\in D_f$ називають неперервною в точці x°, яка є граничною точкою її області визначення, якщо

$$\lim_{x\to x^\circ}f(x)=f(x^\circ)\qquad\left(\text{або}\ \lim_{\substack{x_1\to x_1^\circ\\ x_2\to x_2^\circ\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to x_n^\circ}}f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_n^\circ)\right).$$

X.1. Знайти і зобразити на координатній площині область визначення функції:

1) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; 2) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}$; 3) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$;
4) $z=\sqrt{(x^2+y)^2-1}$; 5) $z=\sqrt{xy}$; 6) $z=\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt{\cos y}$;
7) $z(m,n)=C_n^m$, де C_n^m — кількість сполучень з n елементів по m;
8) $z=\arccos\frac{x}{x-y}$; 9) $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$; 10) $z=\log_{x+y}(2x-y)$;
11) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}$; 12) $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arccos(2-y)$.

X.2. Знайти область визначення функції:

1) $u = \operatorname{tg} \pi(x + y - z)$; 2) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$;

3) $u = \arccos \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{5z}$; 4) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{\sqrt{y-2}} - \sqrt{1 - z^2}$;

5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$; 6) $u = \sqrt{\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{a_n^2} - 25}$;

7) $u = \sqrt{a_1^2 - x_1^2} + \sqrt{a_2^2 - x_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 - x_n^2}$.

X.3. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{3x + 2y}$. Знайти $f(1, 3)$, $f(3, 1)$, $f(x, x)$, $f(2y, -y)$.

X.4. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 3xy}{3x^2 + 2y^2}$. Знайти $f(2, 3)$, $f(6, 9)$, $f(2x, 3x)$. Чому дорівнює $f(1, \frac{y}{x})$, $f(\frac{x}{y}, 1)$?

X.5. Функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають однорідною функцією виміру k, якщо $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Які з наведених нижче функцій є однорідними?

1) $f(x, y) = \sqrt{x^6 - y^6} + \dfrac{x^3 y}{3x + 2y}$; 2) $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$;

3) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy^2 + y^3}}$; 4) $f(x, y) = \cos(x^2 + xy + y^2)$;

5) $f(a, b, c) = \sqrt{\dfrac{a + b + c}{2} \cdot \dfrac{-a + b + c}{2} \cdot \dfrac{a - b + c}{2} \cdot \dfrac{a + b - c}{2}}$;

6) $f(x, y, z) = \ln \dfrac{x - y}{y + z}$; 7) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x_i}{x_j}\right)^m$.

X.6. Кількість теплоти, яку виділяє провідник із постійним струмом протягом часу t, $Q = UIt$. На підставі закону Ома записати кількість теплоти як функцію U і t за сталого опору R провідника.

X.7. $z = \dfrac{u + v}{uv}$; $u = wt$, $v = \dfrac{w}{t}$; $w = x + y$, $t = x - y$. Виразити z безпосередньо як функцію x і y.

X.8. $z(u, v, w) = u^w + \dfrac{w^v}{u}$; $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Записати вираз, який задає z безпосередньо як функцію x і y.

X.9. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x, y) = xy$. Знайти:

1) $f(y, \varphi(x, y^2))$; 2) $f(f(x, y), \varphi(x, y))$; 3) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

X.10. Відшукати $f(x)$ і $z(x, y)$, якщо $z = x + y + f(x - y)$ і, крім того, $z = x^2$, якщо $y = 0$.

X.11. Знайти $f(x, y)$, якщо $f(x + y, \dfrac{y}{x}) = x^2 - y^2$.

X.12. Рівняння стану ідеального газу має вигляд $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$, де $R = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — універсальна газова стала, m і μ — маса і молярна маса газу відповідно; p, V і T — відповідно, тиск, об'єм і абсолютна температура цього газу. Для 2 *г* водню:

а) побудувати ізотерми $T = 273.16$ К, $T = 150$ К як лінії рівня функції $T = T(p, V)$;

б) побудувати ізобари $p = 101325$ Па, $p = 200$ кПа як лінії рівня функції $p = p(V, T)$;

в) побудувати ізохори $V = 22.4$ *л*, $V = 44.8$ *л* як лінії рівня функції $V = V(p, T)$.

X.13. На площині xOy побудувати лінії рівня таких функцій:

1) $z = x^2 - x - y$; 2) $z = x^2 - y^2$; 3) $z = xy$; 4) $z = y(x^2 + 1)$;

5) $z = \arcsin \dfrac{xy}{2}$; 6) $z = \arccos(1 - x^2 - y^2)$; 7) $z = \ln \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;

8) $z = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$; 9) $z = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2)$.

X.14. На площині xOy побудувати лінії рівня таких неявно заданих функцій:

1) $y^2 = 2^{-z}(x - z)$; 2) $y + z = x \ln z$; 3) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

X.15. Знайти поверхні рівня таких функцій:

1) $u = 2^{x+2y-3z}$; 2) $u = \sin(x^2 + 4y^2 - z^2)$; 3) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{2z}$;

4) $u = \ln \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 5) $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + 4z^2}$.

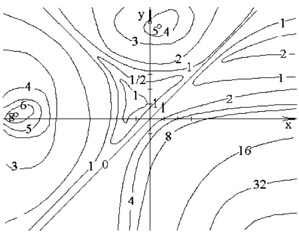


Рис. 20

X.16. На рис. 20 зображено лінії рівня деякої функкції $z = f(x, y)$. Побудувати схематично графіки функцій:

1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(0, y)$;
3) $z = f(x, 2)$; 4) $z = f(1, y)$;
5) $z = f(x, -1)$; 6) $z = f(x, 2x)$;
7) $z = f(x, x)$; 8) $z = f(x, x^2)$.

X.17. Чи існує границя функції $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, коли $x \to 0$, $y \to 0$.

X.18. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\dfrac{x+y}{y^2-2y+x-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x+2y-3}{y^2-2y+x-2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)^{x^2+y^2+x-y-2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \dfrac{\sin xy}{x}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$; 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 12) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{xy^2-2xy-y^2+2y}{(x-1)(y-2)}$;

13) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; 14) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2y}{x+y}}$.

X.19. Знайти повторні границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2-y^2}{y^2+x^4}$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-y^2}{y^2+x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+0} \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^y}{1+x^y}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+12y}$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+12y}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{xy+4}$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{xy+4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 0} \log_x(y+x)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 1} \log_x(y+x)$;

6) $\lim\limits_{x\to+0}\lim\limits_{y\to+\infty} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+0} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin xy}{xy}$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin xy}{xy}$.

X.20. Довести, що границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{y^2-2y+x}$ не існує, відшукуючи повторні границі цієї функції в початку координат.

X.21. Довести, що

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{xy+x-y}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{xy+x-y}.$$

Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{xy+x-y}$?

X.22. Довести, що

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$$

Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$?

X.23. Довести, що функція $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ є обмеженою. Знайти множину значень функції f. Чи існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$?

X.24. Довести, що $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ прямує до нуля вздовж будь-якого променя $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, коли $t\to 0$. Чи існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$?

X.25. Дослідити на неперервність у точці (0; 0) функції:

1) $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1/2, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ 2) $z=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

3) $z=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ 4) $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

5) $z=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ 6) $z=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

X.26. Довести, що функції:

1) $z=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ 2) $z=\begin{cases}\frac{x-y}{(|x|+|y|)^{\frac{1}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

в точці (0; 0) неперервні за кожною змінною зокрема. Чи будуть ці функції неперервними в початку координат?

X.27. Знайти точки розривів функцій:

1) $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+5)^2}$; 2) $z=\dfrac{1}{x-3y}$; 3) $z=\dfrac{x-y}{4x^2-y^2-4}$;

4) $z=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\cos^2\pi y}$; 5) $z=\dfrac{1}{\sin^2\pi x}+\dfrac{1}{\cos^2\pi y}$; 6) $z=\dfrac{1}{\sin\pi x\cos\pi y}$;

7) $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$; 8) $u=\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2-1}$; 9) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$;

10) $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y\cos z}$; 11) $u=\ln\dfrac{9}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

X.28. Знайти точки розривів функції $z=\begin{cases}1, & xy>0,\\ 0, & xy=0,\\ -1, & xy<0\end{cases}$ та зобразити її графік.

§2. Частинні похідні та диференціал першого порядку функції багатьох змінних

1°. *Частинна похідна.* Частинною похідною функції $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в точці x° за змінною x_i називають границю відношення частинного приросту цієї функції за змінною x_i до приросту змінної x_i, коли цей приріст прямує до 0

$$\frac{\partial f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_n^\circ)}{\partial x_i}=\lim_{x_i\to x_i^\circ}\frac{f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_{i-1}^\circ,x_i,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)-f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_{i-1}^\circ,x_i^\circ,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)}{x_i-x_i^\circ}.$$

2°. *Диференціал функції.* Функція $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ називається диференційовною в точці x°, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^\circ,x_2^\circ,\dots,x_n^\circ=A_1(x_1-x_1^\circ)+A_2(x_2-x_2^\circ)+\dots+A_n(x_n-x_n^\circ)+\varepsilon\rho,$$

де $A_1,A_2,\dots,A_n$ — деякі сталі, $\rho=\sqrt{(x_1-x_1^\circ)^2+(x_2-x_2^\circ)^2+\dots+(x_n-x_n^\circ)^2}$, а $\varepsilon\to0$, коли $x\to x^\circ$.

Головна лінійна частина приросту диференційовної в заданій точці функції називається її диференціалом у цій точці.

Якщо частинні похідні по всіх змінних існують і неперервні в околі заданої точки, то її диференціал у цій точці може бути записаний у вигляді

$$df(x^\circ)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^\circ)}{\partial x_i}dx_i.$$

3°. *Похідна складеної функції.* Якщо функції $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $x_i=\varphi(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $(i=1,2,\dots,n)$ диференційовні, то

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j},\quad (j=1,2,\dots,m).$$

4°. *Похідна за напрямом. Градієнт.* Якщо $\vec{l^\circ}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\dots,\cos\alpha_n)$ — одиничний вектор напряму $\vec l$ (α_i — кут, що утворює цей напрям з віссю x_i), а $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — диференційовна функція, то похідна цієї функції за напрямом $\vec l$ обчилсюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos\alpha_i=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\vec{l^\circ}.$$

Тут $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт функції $u=f(x)$.

X.29. Знайти частинні похідні таких функцій:

1) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $z = x^y$; 3) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$;

4) $z = e^{-\frac{x}{y}}$; 5) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; 6) $z = \ln(x + \ln y)$;

7) $z = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$; 8) $z = (1+xy)^y$; 9) $z = x^{xy}$;

10) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$; 11) $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$; 12) $u = x^{\frac{z}{y}}$;

13) $u = x^{yz}$; 14) $u = (\sin x)^{yz}$; 15) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$;

16) $u = e^{-x \operatorname{ctg} \frac{y}{z}}$; 17) $z = \arcsin x\sqrt{y}$; 18) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

X.30. Об'єм газу V є функцією його температури і тиску $V = f(p,T)$. Середнім коефіцієнтом розширення газу при постійному тиску та зміні температури від T_1 до T_2 називають вираз $\frac{V_2 - V_1}{V_1(T_2-T_1)}$. Що треба назвати коефіцієнтом розширення газу при постійному тиску для заданої температури?

X.31. Температура в заданій точці A стрижня OX є функцією абсциси x точки A і часу t : $\varTheta = f(x,t)$. Який фізичний зміст мають частинні похідні $\dfrac{\partial \varTheta}{\partial t}$ і $\dfrac{\partial \varTheta}{\partial x}$?

X.32. Знайти $f'_x(0;0)$ та $f'_y(0;0)$, якщо $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Чи буде ця функція диференційовною в точці $(0;0)$?

X.33. Задана функція $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Чи буде ця функція диференційовною в початку координат?

X.34. Чи буде диференційовною в точці $(0;0)$ функція

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

X.35. Довести, що функція $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ є неперервною в околі точки $(0;0)$, має обмежені частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, однак не диференційовна в точці $(0;0)$.

X.36. Довести, що $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ має в околі точки $(0;0)$ похідні f'_x і f'_y, розривні в точці $(0;0)$ і необмежені в будь-якому її околі, однак сама є диференційовною в цій точці.

X.37. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо:

1)$u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; 2)$u = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$;

3)$u = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$; 4)$u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x = e^{2t}+1$, $y = e^{2t}-1$;

5)$u = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$; 6)$u = \dfrac{yz}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

X.38. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{dz}{dx}$, якщо:

1) $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$; 2) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, $y = e^{(x+1)^2}$.

X.39. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u,v)$ і:

1) $u = \dfrac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$; 2) $u = \ln(x^2 - y^2)$, $v = xy^2$; 3) $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

X.40. Уважаючи, що функції f, φ, ψ диференційовані, перевірити виконання таких рівностей:

1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, якщо $z = \varphi(x^2+y^2)$;

2) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, якщо $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$;

3) $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$, якщо $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$;

4) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, якщо $z = \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$;

5) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta z\dfrac{\partial u}{\partial z} = hu$, якщо $u = x^h\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\right)$;

6) $\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} + \cos y\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cos y$, якщо $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$.

X.41. Знайти похідну функції $u = f(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці M_0 і градієнт заданої функції в цій точці, якщо:

1) $u = x^2y^3z$, $\vec{l} = (2;-3;1)$, $M_0(1;-1;1)$;

2) $u = \sqrt[3]{xzy^2}$, $\vec{l} = (-2;3;5)$, $M_0(1;3;1)$;

3) $u = z\ln(x^2+y^2)$, $\vec{l} = (3;-2;4)$, $M_0(-3;2;4)$;

4) $u = y\sin z + x\cos y$, $\vec{l} = (-3;2;1)$, $M_0(0;0;0)$.

X.42. Знайти напрям максимального зростання функції $u = f(x,y,z)$ в точці M_0, якщо:
1) $u = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_0(1;-1;1)$; 2) $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $M_0(2;-1;1)$;
3) $u = x\cos yz + y\cos xz + z\cos xy$, $M_0(0;0;0)$.

X.43. Знайти похідну функції $z = x^2 - y^2$ в точці $M(1;1)$ у напрямі, що утворює кут 60° з додатним напрямом осі Ox.

X.44. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ в точці $M(1;1)$ у напрямі, що утворює кут α з додатним напрямом осі Ox. В якому напрямі ця похідна має: а) найбільше значення; б) найменше значення; в) дорівнює нулю?

X.45. Знайти похідну функції $z = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ в точці $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}; \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ у напрямі внутрішньої нормалі до кривої $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в цій точці.

X.46. Обчислити значення і відшукати напрям градієнта функції $u = \dfrac{1}{r}$, де $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

X.47. Потенціал поля $\varphi = k\ln\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi x}{a} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\pi y}{a}}$, де a і k — деякі сталі. Знайти напруженість поля $E = -\operatorname{grad}\varphi$.

X.48. Знайти диференціали функцій:

1) $z = \dfrac{y}{x}$; 2) $z = \cos xy$; 3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

4) $z = e^{-\frac{x}{y}}$; 5) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; 6) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

7) $z = \operatorname{tg}\dfrac{x^3}{y}$; 8) $z = \ln\sin\dfrac{y}{x}$; 9) $u = xy + yz + zx$;

10) $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$; 11) $u = x^3y^2z$; 12) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$.

X.49. Знайти диференціали складених функцій:

1) $u = f(t)$, $t = 4x - 3y$;
2) $u = f(t)$, $t = \dfrac{x^2}{y^2}$;
3) $u = f(t)$, $t = \sqrt{x^3+y^3}$;
4) $u = f(x+y, z)$;
5) $u = f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{z}{y}\right)$;
6) $u = f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$;
7) $z = f(u,v)$, $u = ax$, $v = by$;
8) $z = f(u,v)$, $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$;
9) $z = f(u,v)$, $u = 2x - 3y$, $v = 3x + 5y$;
10) $u = f(x,y,z)$, $x = t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$.

X.50. Знайти повний приріст та диференціал функції $z = x^2 + xy + y^2$, коли x змінюється від 3 до 3,1, а y — від 2 до 2,2.

X.51. Знайти повний приріст та диференціал функції $z = \lg(x^2 + y^2)$, коли x змінюється від 3 до 2,9, а y — від 1 до 1,2.

X.52. Обчислити наближено:

$$1)\ \sqrt{(4,07)^2 + (3,02)^2}; \qquad 2)\ (2,01)^{3,03}; \qquad 3)\ \sqrt{(1,01)^3 + (1,98)^3};$$

$$4)\ \sin 29^\circ \cos 61^\circ; \qquad 5)\ \sqrt{(6,01)^2 + (7,98)^2}.$$

X.53. Тіло зважили в повітрі $(4,1 \pm 0,1\,\text{Н})$ і у воді $(1,8 \pm 0,2\,\text{Н})$. Знайти густину тіла та визначити похибку обчислень.

X.54. Радіус основи конуса дорівнює $10,2 \pm 0,1\,\text{см}$, твірна — $44,6 \pm$ $\pm 0,1\,\text{см}$. Знайти об'єм конуса та визначити похибку обчислень.

X.55. Рівняння в деякому околі точки (x_0, y_0) однозначно задає функцію $y = y(x)$. Знайти y' та $y'(x_0)$:

$$1)\ 2y = 1 + xy^3,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1; \quad 2)\ (x+y)^3 = 27(x-y),\ x_0 = 2,\ y_0 = 1;$$

$$3)\ ye^y = e^{x+1},\ x_0 = 0,\ y_0 = 1; \qquad 4)\ y^2 = x + \ln(y/x),\ x_0 = 1,\ y_0 = 1.$$

X.56. Знайти похідну y' заданої рівнянням функції $y = y(x)$:

$$1)\ y^5 + 3y = 2x; \qquad 2)\ y - \varepsilon \sin y = x,\ (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

X.57. Переконатися, що будь-яка функція $y = y(x)$, неявно задана рівнянням

$$\operatorname{arctg} yx = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$x(dy - dx) = y(dy + dx).$$

X.58. Для заданої рівнянням неявної функції $z = z(x, y)$ знайти частинні похідні:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \qquad 2)\ z^3 - 3xyz = a^3;$$

$$3)\ x + y + z = e^z; \qquad 4)\ x + y + z = e^{-(x+y+z)};$$

$$5)\ z = \sqrt{x^2 - y^2}\,\operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

X.59. Знайти диференціал dz заданої рівнянням неявної функції $z =$ $= z(x, y)$:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \qquad 2)\ xyz = x + y + z;$$

$$3)\ z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}; \qquad 4)\ \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

X.60. Знайти du, якщо $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$.

X.61. Нехай $z = z(x, y)$ — функція, визначена рівнянням $z^3 - xz + y =$ $= 0$ і така, що $z(3, -2) = 2$. Знайти $dz(3, -2)$.

§3. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

1°. *Частинні похідні вищих порядків.* Частинні похідні від частинних похідних диференційовної функції називають частинними похідними другого порядку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Так само визначають похідні третього, четвертого і т.д. порядків.

Якщо для заданої функції в точці існують неперервні похідні деякого порядку, то вони рівні, незалежно від порядку диференціювання. Наприклад, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

2°. *Диференціали вищих порядків.* Диференціали вищих порядків визначаються формулами

$$d^2 f=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)df=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^2 f,$$

$$d^3 f=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)d^2 f=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^3 f$$

і т.д. Зокрема для функції $z=f(x,y)$ двох змінних

$$d^2 f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3 f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3, \ldots$$

3°. *Формула Тейлора.* Якщо функція $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ має неперервні в точці x° похідні до $n+1$-го порядку, то

$$f(x)=f(x^\circ)+\sum_{i=1}^{n} d^i f(x^\circ)+o(\rho^n),$$

де $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$.

X.62. Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; 2) $z=xe^{-xy}$; 3) $z=\dfrac{\cos y^2}{x}$;

4) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 5) $z=x^y$; 6) $z=e^{xe^y}$;

7) $z=\arcsin(xy)$; 8) $z=y^{\ln x}$; 9) $z=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

10) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 11) $u=e^{xyz}$; 12) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

13) $u=x^{y/z}$; 14) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$; 15) $u=x^{y^z}$.

X.63. Перевірити, чи виконується рівність $\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y\partial x}$ для функції

$$f(x,y)=\begin{cases}(9x^2-4y^2)\dfrac{6xy}{9x^2+4y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

X.64. Знайти зазначені похідні від заданих функцій:

1) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $u = \ln(x+y)$;
2) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, якщо $u = \ln(x^2+y^2)$;
3) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$;
4) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, якщо $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$;
5) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, якщо $u = \dfrac{x+y}{x-y}$;
6) $\dfrac{\partial^{k+m+n} u}{\partial x^k \partial y^m \partial z^n}$, якщо $u = xyze^{x+y+z}$.

X.65. Довести, що функція $u = A \sin \lambda x \cos a\lambda t$ задовольняє рівняння коливань струни
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

X.66. Довести, що функція $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$ задовольняє рівняння теплопровідності
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

X.67. Довести, що функція $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ задовольняє рівняння Лапласа
$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а функція $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ — рівняння Лапласа
$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

X.68. Нехай $u = xe^y + ye^x$. Довести, що
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}.$$

X.69. Нехай $u = e^{xyz}$. Довести, що
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + u.$$

X.70. Нехай $u = \ln \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$. Довести, що

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right).$$

X.71. Уважаючи, що довільні функції φ, ψ і так далі диференційовні достатню кількість разів, перевірити виконання таких рівностей:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;
2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$;
3) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
4) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$,
якщо $u = x^{1-n}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u = \varphi\left(x + \psi(y)\right)$.

X.72. Знайти повні диференціали другого порядку функцій:

1) $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$; 2) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 3) $z = (x+y)e^{xy}$;
4) $z = x \ln \dfrac{y}{x}$; 5) $z = x \sin^2 y$; 6) $z = \ln(x - y)$;
7) $u = xyz$; 8) $u = e^{xyz}$; 9) $u = xy + yz + zx$.

X.73. Знайти повні диференціали заданого порядку від функцій:

1) $d^3 u$, якщо $u = e^y \sin x$;
2) $d^3 u$, якщо $u = \ln(x + y)$;
3) $d^3 u$, якщо $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;
4) $d^6 u$, якщо $u = \ln(x + y + z)$;
5) $d^4 u$, якщо $u = \ln\left(x^x y^y z^z\right)$.

X.74. Знайти повні диференціали другого порядку від складених функцій:

1) $u = f(t), \quad t = x + y$;
2) $u = f(t), \quad t = \dfrac{y}{x}$;
3) $u = f(t),\ t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
4) $u = f(\xi, \eta), \quad \xi = ax,\ \eta = by$;
5) $u = f(\xi, \eta), \quad \xi = x + y, \eta = x - y$;
6) $u = f(x, y, z), \quad x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$;
7) $z = f(\xi, \eta, \zeta),\ \xi = ax,\ \eta = by,\ \zeta = cz$;
8) $u = f(\xi, \eta, \zeta),\ \xi = x^2 + y^2,$
$\eta = x^2 - y^2,\ \zeta = 2xy$.

X.75. Знайшовши повний диференціал відповідного порядку, обчислити:

1) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ та $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, якщо $u = \sin(2x + y)$;

2) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ та $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, якщо $u = \ln(ax + by)$;

3) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ та $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{x+2y+3z}$.

X.76. Розвинути функцію $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$ за формулою Тейлора в околі точки $A(-1;\, 1)$.

X.77. Розвинути функцію $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 5xyz + x^2 - 3y$ за формулою Тейлора в околі точки $A(1;\, -1;\, 0)$.

X.78. Розвинути функцію $f(x, y) = \sin x \sin y$ за формулою Тейлора до другого порядку в околі точки $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

X.79. Записати розвинення функції $f(x, y) = x^y$ за степенями $(x - 1)$ та $(y - 1)$ до членів третього порядку. Користуючись отриманим розвиненням, наближено обчислити $1,1^{1,02}$.

X.80. Знайти наближене значення $e^{0,1}\cos(0,01\pi)$, розклавши відповідну функцію за формулою Маклорена до третього порядку.

X.81. Записати формули для наближених обчислень значень функцій

1) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; 2) $\cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$

для досить малих значень модулів їхніх аргументів.

§4. Екстремум функції багатьох змінних

Точку x° називатимемо стаціонарною точкою функції $u = f(x)$, якщо в цій точці всі її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю.

Нехай $u = f(x)$ є двічі диференційовною функцією в стаціонарній точці x° і всі її частинні похідні другого порядку неперервні в точці x°. Якщо $d^2u(x^\circ)$ є знаковизначеною квадратичною формою змінних dx_1, $dx_2, \dots, dx_n$, то функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має в точці x° локальний екстремум (максимум, якщо $d^2u(x^\circ) \leqslant 0$, або мінімум, якщо $d^2u(x^\circ) \geqslant 0$). Якщо ж диференціал другого порядку є знакозмінною квадратичною формою в точці x°, то функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не має екстремуму в цій точці.

Зокрема функція двох змінних $z = f(x, y)$ має екстремум у стаціонарній точці, якщо в цій точці $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, причому максимум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ і мунумум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, і не матиме екстремуму, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$.

X.82. Дослідити на екстремум такі функції двох змінних:

1) $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$; 2) $z = x^3 + y^3 - 3axy$;

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by + 1$; 4) $z = xy + \frac{a^2 b}{x} + \frac{ab^2}{y}$;

5) $z = x^3y^2(a - x - y) + b$; 6) $z = xy\sqrt{36 - x^2 - y^2}$;

7) $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 12$; 8) $z = e^{-x^2-y^2}\left(a^2x^2 + b^2y^2\right)$;

9) $z = (x - 4)^4 - (y - 3)^2$; 10) $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

X.83. Дослідити на екстремум функції:

1) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z + 6$;
2) $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;
3) $u(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$;
4) $u(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

X.84. Знайти найбільше та найменше значення функції у заданій області:

1) $z(x, y) = 2x + y - 5, \quad D = \{(x, y)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x + y \leqslant 1\}$;
2) $z(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2, \quad D = \{(x, y)|\ |x| + |y| \leqslant 2\}$;
3) $z(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad D = \{(x, y)|\ |x| + |y| \leqslant 1\}$;
4) $z(x, y) = \sin x + \cos y + cos(x - y), \quad D = \left\{(x, y)|0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

X.85. У півкулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

X.86. Довжину металевого стрижня залежно від температури t описує формула $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$. Методом найменших квадратів знайти коефіцієнт лінійного розширення α та довжину l_0 за такими даними вимірювань.

t, °C	25	50	75	100	125	150	175	200
$l(t)$, см	200,14	200,24	200,33	200,41	200,52	200,61	200,69	200,8

X.87. Вивести формули для визначення методом найменших квадратів параметрів емпіричної функції $y = f(x)$, якщо

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$; б) $f(x) = ae^{bx}$; в) $f(x) = a\ln x + b$.

X.88. Вивести формули для визначення методом найменших квадратів значень параметрів виробничої функції Коби-Дугласа $U(x, y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$, якщо $\alpha + \beta = 1$.

РОЗДІЛ XI

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Подвійні інтеграли

1°. Нехай на деякій області $D\subset\mathbb{R}^2$ задана функція $z=f(x,y)$. Розіб'ємо цю область на підобасті $D_i\subset D$ $(i=\overline{1,n})$ і позначимо $\lambda=\max\limits_i diam D_i$ (максимум діаметрів підобластей), а через ΔD_i — площу області D_i. В кожній області D_i виберемо довільну точку $(x_i,y_i)\in D_i$.

Подвійним інтегралом по області D від функціїі $z=f(x,y)$ називатимемо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta D_i,$$

якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття області D, ні від вибору точок на елементах розбиття.

2°. Якщо $z=f(x,y)$ неперервна в області $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

3°. При переході від декартових до полярних координат $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi)$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

де Δ — область, у яку перейшла область D при переході до полярної системи координат.

XI.1. Записати за допомогою подвійних інтегралів і обчислити площі, обмежені лініями:

1) $xy=4$, $y=x$, $x=4$; 2) $y=x^2$, $4y=x^2$, $y=4$;
3) $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=\pm 2$; 4) $y^2=4+x$, $x+3y=0$;
5) $ay=x^2-2ax$, $y=x$; 6) $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$.

XI.2. Побудувати області, площі яких виражаються інтегралами:

1) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy$; 2) $\int\limits_0^a dy\int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$; 3) $\int\limits_0^a dx\int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$.

Змінити порядок інтегрування.

XI.3. Побудувати області, площі яких виражаються інтегралами:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2} dy$; 2) $\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_{y^2-4}^0 dx$.

Змінити порядок інтегрування й обчислити ці площі.

XI.4. Обчислити площу фігури $a\leq r\leq a(1-\cos\varphi)$.

XI.5. Обчислити площу, обмежену прямою $r\cos\varphi=a$ і колом $r=2a$.

XI.6. Обчислити площі, обмежені лініями:

1) $y=x^2$, $y=x+2$; 2) $ax=y^2-2ay$, $y+x=0$;
3) $y=\sin x$, $y=\cos x$ і $x=0$; 4) $y^2=a^2-ax$, $y=a+x$;
5) $r=4(1+\cos\varphi)$ і $r\cos\varphi=3$ (справа від прямої);
6) $r=a(1-\cos\varphi)$, $r=a$ і розташовану поза кардіоїдою;
7) $xy=1$, $xy=8$, $y^2=x$, $y^2=8x$.

XI.7. Побудувати області, площі яких виражаються інтегралами:

1) $\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x dy$; 2) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx$; 3) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy$.

Змінити порядок інтегрування й обчислити площі.

XI.8. Визначити центр мас площі, обмеженої лініями:

1) $y=0$ і однією півхвилею синусоїди $y=\sin x$;

2) $y=x^2$, $x=4$, $y=0$; 3) $y^2=ax$, $y=x$; 4) $x^2+y^2=a^2$, $y=0$.

XI.9. Визначити моменти інерції J_x, J_y і J_O площі прямокутника, обмеженого лініями $x=0$, $x=a$, $y=0$ і $y=b$.

XI.10. Визначити момент інерції щодо осі Ox площі, обмеженої лініями $y=x/2$, $x=a$, $y=a$.

XI.11. Визначити момент інерції щодо осі Oy площі трикутника з вершинами $A(0;2a)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$.

XI.12. Визначити полярний момент інерції площі, обмеженої лініями:

1) $x+y=a$, $x=0$, $y=0$; 2) $r^2=a^2\cos 2\varphi$; 3) $y^2=ax$, $x=a$.

XI.13. Визначити центр мас:

1) півсегмента параболи $y^2=ax$, $x=a$, $y=0$ (при $y>0$);

2) частини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, відтятого віссю Ox.

XI.14. Визначити момент інерції щодо осі Oy площі, обмеженої лініями $y=a+\dfrac{x^2}{a}$, $y=2x$ і $x=0$.

XI.15. Визначити момент інерції щодо осі Ox площі трикутника з вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(3;3)$.

XI.16. Визначити полярний момент інерції площі, обмеженої лініями:

1) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$; 2) $r=a(1-\cos\varphi)$; 3) $y=4-x^2$, $y=0$.

XI.17. Визначити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $z=x+y+a$, $y^2=ax$, $x=a$, $y=0$, $z=0$ ($y>0$);

3) $(x+y)^2+az=a^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

4) $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$;

5) $z^2=xy$, $x=a$, $x=0$, $y=a$, $y=0$;

6) $az=x^2-y^2$, $z=0$, $x=a$;

7) $z^2=xy$, $x+y=a$, $z=0$;

8) $x+y+z=3a$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

9) $z=mx$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

10) $az=a^2-x^2-y^2$, $z=0$;

11) $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (поза циліндром);

12) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\pm ax=0$ (всередині циліндрів);

13) $z^2=2ax$, $x^2+y^2=ax$.

Вказівка. В задачах 8-13 перейти до полярних координат.

§2. Потрійні інтеграли

1°. Нехай на деякій області $D\subset\mathbb{R}^3$ задана функція $u=f(x,y,z)$. Розіб'ємо цю область на підобасті $D_i\subset D$ $(i=\overline{1,n})$ і позначимо через $\lambda=\max\limits_i diam D_i$, а через ΔD_i — об'єм області D_i. В кожній області D_i виберемо довільну точку $(x_i,y_i,z_i)\in D_i$.

Потрійним інтегралом по області D від функціїі $u=f(x,y,z)$ називатимемо

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i,$$

якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття області D, ні від вибору точок на елементах розбиття.

2°. Якщо $u=f(x,y,z)$ неперервна в області $D=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in S,\varphi(x,y)\leqslant z\leqslant\psi(x,y)\}$, то

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_S dxdy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

3°. При переході до циліндричних координат $(x=r\cos\varphi,\, y=r\sin\varphi,\, z=z)$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)r\,drd\varphi dz,$$

де Δ — область, в яку перейшла область D при переході до циліндричних координат.

4°. При переході до сферичних координат $(x=r\cos\varphi\cos\theta,\, y=r\sin\varphi\cos\theta,\, z=r\sin\theta)$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\theta)r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta,$$

де Δ — область, в яку перейшла область D при переході до сферичних координат.

XI.18. Визначити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$.

XI.19. Визначити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, всередині конуса.

XI.20. Показати, що поверхня конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, ділить об'єм кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ у відношенні 1:3.

XI.21. Визначити масу піраміди, утвореної площинами $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, якщо густина в кожній її точці дорівнює аплікаті z цієї точки.

XI.22. Визначити центр мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; 2) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

XI.23. Визначити момент інерції щодо осі Oz тіла, обмеженого поверхнями (густина $\mu = 1$):

1) $x = 0$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $x + z = a$;

2) $x + y + z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

XI.24. Визначити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $az = x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 = 2a^2$; 2) $x^2+y^2-z^2 = 0$, $z = 6-x^2-y^2$;

3) $az = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.

XI.25. Визначити масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = h$, якщо густина в кожній його точці дорівнює аплікаті z цієї точки.

XI.26. Визначити масу тіла, обмеженого поверхнями $2x+z = 2a$, $x+z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ (при $y > 0$), якщо густина в кожній її точці дорівнює ординаті y цієї точки.

XI.27. Визначити центр мас однорідної півкулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$.

XI.28. Визначити момент інерції щодо осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$.

§3. Криволінійний інтеграл. Формула Гріна

1°. *Криволінійний інтеграл першого роду.* Нехай на дузі AB спрямлюваної кривої визначена неперервна функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо дугу на частини точками $A=M_0(x_0,y_0,z_0),M_1(x_1,y_1,z_1),\ldots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),M_n(x_n,y_n,z_n)=B$. Нехай $(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)$ — деяка точка дуги $M_{i-1}M_i$, а Δl_i — довжина цієї дуги. Тоді криволінійним інтегралом першого роду називатимемо

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl=\lim_{\max \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\,\Delta l_i,$$

якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття дуги, ні від вибору точок на елементах розбиття.

Якщо дуга AB задана рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\theta'^2(t)}\,dt.$$

2°. *Криволінійний інтеграл другого роду.* Нехай на дузі AB спрямлюваної кривої визначена неперервна вектор-функція $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$. Розіб'ємо дугу на частини точками $A=M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $\ldots$, $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$, $M_n(x_n,y_n,z_n)=B$. Нехай $(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)$ — деяка точка дуги $M_{i-1}M_i$. Позначимо $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, $y_i-y_{i-1}=\Delta y_i, z_i-z_{i-1}=\Delta z_i$. Тоді криволінійним інтегралом другого роду називатимемо

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$
$$=\lim_{\max \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}(P(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\Delta x_i+Q(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\Delta y_i+R(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\Delta z_i,$$

якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття дуги, ні від вибору точок на елементах розбиття.

Якщо дуга AB задана рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\theta(t)]\theta'(t))\,dt.$$

3°. *Випадок повного диференціала.* Якщо в області V $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=du$, то $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u_A-u_B$, тобто дорівнює різниці значень функції $u(x,y,z)$ в точках B і A і не залежить від шляху інтегрування, вибраного в області V.

4°. *Формула Гріна*

$$\oint\limits_{C}(P\,dx+Q\,dy)=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

перетворює криволінійний інтеграл від $P\,dx+Q\,dy$, взятий уздовж замкнутого контура C, у подвійний інтеграл по області S, обмеженій цим контуром.

Площа, обмежена контуром C, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{C}(x\,dy-y\,dx).$$

XI.29. Обчислити $\int\limits_{L}\dfrac{dl}{x-y}$, де L — відрізок прямої $y = 0,5x - 2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

XI.30. Обчислити $\int\limits_L xy\,dl$, де

1) L — контур прямокутника з вершинами $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$;

2) L — четвертина еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, що лежить у першому квадранті.

XI.31. Обчислити $\int\limits_L (x-y)\,dl$, де L — коло $x^2+y^2=ax$.

XI.32. Обчислити $\int\limits_L \dfrac{z^2\,dl}{x^2+y^2}$, де L — перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

XI.33. Обчислити $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)\,dl$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$.

XI.34. Знайти масу четвертини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, що лежить у першому квадранті, якщо лінійна густина в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.

XI.35. Знайти масу першого витка гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

XI.36. Знайти координати центра мас першого піввитка гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$, якщо її густина стала.

XI.37. Знайти статичний момент першого витка гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$ щодо площини xOy, якщо її густина в кожній точці пропорційна квадратові відстані від цієї точки до заданої площини.

XI.38. Знайти моменти інерції відносно координатних осей першого витка гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t$, якщо її густина стала.

XI.39. Задано точки $A(2;2)$ і $B(2;0)$. Обчислити $\int\limits_C (x+y)\,dx$:

1) уздовж прямої AO; 2) уздовж параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$; 3) уздовж ламаної OBA.

XI.40. Задано точки $A(4;2)$ і $B(2;0)$. Обчислити $\int\limits_C (x+y)\,dx - x\,dy$:

1) уздовж прямої AO; 2) уздовж ламаної OBA.

XI.41. Задано точки $A(a;0;0)$, $B(a;a;0)$, і $C(a;a;a)$. Обчислити $\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$ уздовж прямої OC і ламаної $OABC$.

XI.42. Поле утворене силою $\overrightarrow{F}(P;Q)$, де $P=x-y$, $Q=x$. Побудувати силу $\overrightarrow{F}$ в кожній вершині квадрата зі сторонами $x=\pm a$ і $y=\pm a$ і обчислити роботу при переміщенні тіла уздовж контура квадрата.

XI.43. Поле утворене силою $\overrightarrow{F}(P;Q)$, де $P=x+y$, $Q=2x$. Побудувати силу $\overrightarrow{F}$ в початку кожної чверті кола $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ і обчислити роботу при переміщенні тіла по колу.

Розв'язати цю задачу за умови $P = x+y, Q = x$. Чому робота дорівнює 0?

XI.44. Поле утворене силою $\overrightarrow{F}(y;a)$. Обчислити роботу при переміщенні тіла вздовж контура, утвореного півосями координат і першою чвертю еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

XI.45. Поле утворене силою $\overrightarrow{F}(x;y;z)$. Визначити роботу при переміщенні тіла вздовж ламаної $OABCO$, яка з'єднує точки $O(0;O;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;a;0)$ і $C(a;a;a)$.

XI.46. Написати та перевірити формулу Гріна для $\int\limits_C (x+y)dx - 2xdy$, де C — контур трикутника зі сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

XI.47. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{AB} 2xy\,dx - 2x\,dy$; 2) $\int\limits_{AB} \cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy$;

3) $\int\limits_{AB} \operatorname{tg} y\,dx + x\,sec^2 y\,dy$.

XI.48. Застосувавши формулу Гріна, обчислити інтеграл
$$\int\limits_C y^2dx + (x+y)^2dy$$
уздовж контура ΔABC з вершинами $A(a;0)$, $B(a;a)$ і $C(0;a)$.

XI.49. За допомогою криволінійного інтеграла визначити площу еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

XI.50. За допомогою криволінійного інтеграла визначити площу петлі кривої $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

Вказівка. Перейти до параметричних рівнянь, прийнявши $y{=}xt$.

XI.51. Задано точки $A(0;1)$, $B(2;5)$ і $C(0;5)$.

Обчислити $\int\limits_L (x+y)\,dx - 2y\,dy$, де:

1) L — відрізок AB;
2) L — дуга AB параболи $y = x^2 + 1$;
3) L — ламана ABC.

XI.52. Задано точки $A(-a;0)$ і $B(0;a)$. Обчислити роботу сили $\overrightarrow{F}(P;Q)$, де $P = y$, $Q = y - x$, при переміщенні тіла:

1) уздовж відрізка AB; 2) уздовж ламаної AOB;

3) уздовж дуги AB параболи $y = a - \dfrac{x^2}{a}$.

XI.53. Показати, що $\int\limits_{(C)} y\,dx+(x+y)\,dy$ уздовж будь-якого контура дорівнює нулю. Перевірити цей факт, обчисливши інтеграл уздовж контура фігури, що обмежена лініями $y = x^2$ і $y = 4$.

XI.54. Написати та перевірити формулу Гріна для інтеграла $\int\limits_C \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, уздовж контура ΔABC з вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$ і $C(2;2)$.

XI.55. За допомогою криволінійного інтеграла визначити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

XI.56. За допомогою криволінійного інтеграла визначити площу, обмежену кривою $y^2+x^4-x^2=0$.

Вказівка. Перейти до параметричних рівнянь, прийнявши $y{=}xt$.

§4. Поверхневі інтеграли. Формули Остроградського і Стокса

1°. *Обчислення поверхневих інтегралів першого і другого роду.* Якщо на поверхні S, заданій співвідношеннями $x{=}x(u,v)$, $y{=}y(u,v)$, $z{=}z(u,v)$, коли $(u,v){\in}\Delta$, де $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ — неперервно диференційовні функції параметрів u і v визначена неперервна функція $f(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds{=}\iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2{+}B^2{+}C^2}dudv,$$

де

$$A{=}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}{=}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v\end{vmatrix},\quad B{=}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}{=}\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v\end{vmatrix},\quad C{=}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}{=}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v\end{vmatrix}.$$

Якщо на поверхні S визначені неперервні функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$,то

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz{+}Q(x,y,z)dzdx{+}R(x,y,z)dxdy{=}$$
$$={\pm}\iint\limits_\Delta(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A{+}Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B{+}$$
$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C)dudv.$$

2°. *Формула Остроградського-Гауса*

$$\iint\limits_S Pdydz{+}Qdzdx{+}Rdxdy{=}\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}{+}\frac{\partial Q}{\partial y}{+}\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

де V — об'єм, обмежений поверхнею S.

3°. *Формула Стокса*

$$\oint\limits_C P\,dx{+}Q\,dy{+}R\,dz{=}\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

де α, β і γ - кути зовнішньої нормалі до поверхні S направленої в ту сторону, з якої обхід контура C видно проти годинникової стрілки.

XI.57. Обчислити $\iint\limits_S\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)ds$, де S — частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+$ $+\frac{z}{4}=1$, що лежить у першому октанті.

XI.58. Обчислити $\iint\limits_S xyz\,ds$, де S — частина площини $x+y+z=1$, що лежить у першому октанті.

XI.59. Обчислити $\iint\limits_S x\,ds$, де S — частина сфери $x^2+y^2+z^2=1$, що лежить у першому октанті.

XI.60. Обчислити $\iint\limits_S x^2y^2ds$, де S — півсфера $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

XI.61. Знайти масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює квадратові відстані цієї точки від деякого фіксованого діаметра сфери.

XI.62. Обчислити $\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$ по верхній поверхні площини $x+y+z=a$, розташованої в першому октанті.

XI.63. Обчислити $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$ по верхній поверхні параболоїда $x^2+y^2+2az=a^2$, розташованого в другому октанті.

Вказівка. Перейти до цилінричних координат. Кут φ буде змінюватися від $\frac{\pi}{2}$ до π.

XI.64. Записати і перевірити формулу Остроградського для інтеграла

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

по зовнішній поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$.

XI.65. Записати та перевірити формулу Остроградського-Гауса для інтеграла

$$\iint\limits_S (x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

по зовнішній поверхні тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+2az=a^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ в першому октанті.

XI.66. Прийнявши в формулі Остроградського-Гауса $P=x$, $Q=y$, $R=z$, отримати формулу для об'єму тіла, обмеженого поверхнею S

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

XI.67. Використовуючи формулу з попередньої задачі, обчислити об'єм

1) кулі $x^2+y^2+z^2=R^2$;

2) еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

XI.68. Замкнута поверхня S, задана співвідношеннями $x=x(u,v)$, $y= =y(u,v)$, $z=z(u,v)$, коли $(u,v)\in\Delta$. Довести, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею S, можна обчислити за формулою

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_\Delta \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv.$$

XI.69. Прийнявши в формулі Остроградського-Гауса $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R=\dfrac{\partial u}{\partial z}$, довести, що

$$\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

де $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$— оператор Лапласа.

XI.70. Перевірити, отриману в попередній задачі формулу для функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ на поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

XI.71. Написати та перевірити формулу Остроградського-Гауса для інтеграла

$$\iint\limits_S (x^3 \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{i}) + y^3 \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{j}) + z^3 \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{k}))\, dS,$$

взятого по поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вказівка. В потрійному інтегралі перейти до сферичних координат.

XI.72. За допомогою формули Остроградського-Гауса обчислити

$$\iint\limits_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dx\, dz + z^3\, dx\, dy,$$

де S — поверхня піраміди, утвореної площинами $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

XI.73. Показати за допомогою формули Стокса, що $\int\limits_{(C)} yzdx + xzdy+$ $+xydz$ уздовж будь-якого замкнутого контура дорівнює нулю. Перевірити це, обчисливши інтеграл уздовж контура ΔOAB з вершинами $O(0;0;0)$, $A(1;1;0)$ і $B(1;1;1)$.

XI.74. Записати та перевірити формулу Стокса для інтеграла $\int\limits_C (z - y)\, dx + (x - z)\, dy + (y - x)\, dz$ уздовж контура ΔABC з вершинами $O(a;0;0)$, $A(0;a;0)$ і $B(0;0;a)$.

Вказівка. Подвійний інтеграл можна взяти по будь-якій поверхні, що проходить через периметр трикутника ABC, наприклад, по площині $x+y+z=a$.

XI.75. Написати та перевірити формулу Стокса для інтеграла

$$\int\limits_C x(z - y)\, dx + y(x - z)\, dy + z(y - x)\, dz$$

уздовж контура ΔABC з вершинами $O(a;0;0)$, $A(0;a;0)$ і $B(0;0;a)$.

РОЗДІЛ XII

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯНННЯ

§1. Поняття про диференціальне рівняння

Рівняння вигляду

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

називається звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку. Будь-яка функція $y=\phi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність, називається розв'язком рівняння (1), а функція $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$, яка залежить від n довільних сталих, називається загальним розв'язком рівняння (1), якщо вона є розв'язком цього рівняння при будь-яких значеннях сталих $C_1,C_2,\ldots,C_n$ і будь-який розв'язок рівняння (1) можна отримати з неї вибором певних значень сталих.

Рівняння вигляду

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{2}$$

називається звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку, розв'язаним відносно старшої похідної. Якщо функція $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$ у деякій області є неперервною по всіх змінних і має неперервні частинні похідні по $y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}$, то в околі точки $(x_0,y_0,y_{0_1},y_{0_2},\ldots,y_{0_{n-1}})$ цієї області існує єдиний розв'язок рівняння (2) з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{0_1},\ y''(x_0)=y_{0_2},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{0_{n-1}}.$$

XII.1. Переконатись, що функція $y=Cx^3$ є розв'язком диференціального рівняння $3y=xy'$. Побудувати інтегральну криву рівняння, яка проходить через точку:

1) $\left(1;\frac{1}{3}\right)$; 2) $(1;1)$; 3) $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$.

XII.2. Переконатись, що

1) розв'язком рівняння $y''+4y=0$ є функція $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

2) розв'язком рівняння $y'''-9y'=0$ є функція $y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}$.

XII.3. Скласти диференціальне рівняння, інтегральними кривими якого є сім'я парабол $y=Cx^2$.

XII.4. Скласти диференціальне рівняння, інтегральними кривими якого є сім'я:

1) парабол $y=x^2+2Cx$; 2) кіл $y^2+x^2=2Cx$.

XII.5. Побудувати поле напрямів інтегральних кривих, заданих рівнянням:

1) $\dfrac{dy}{dx}=x+y$; 2) $\dfrac{dy}{dx}=y-x$; 3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$; 4) $\frac{dy}{dx}=x^2+y$.

§2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння вигляду

$$y'=\varphi(x)\psi(y) \qquad \text{або} \qquad M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$$

називається звичайним диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальним інтегралом такого рівняння буде вираз

$$\int \frac{dy}{\psi(y)}=\int \varphi(x)dx+C \qquad \text{або} \qquad \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C.$$

XII.6. Знайти загальний інтеграл рівняння:

1) $xy' - y = 0$; 2) $xy' + y = 0$;
3) $yy' + x = 0$; 4) $y' = y$;
5) $x^2y' + y = 0$; 6) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;
7) $x^3y' - 2y = 0$; 8) $(x^2 + x)y' - 2y = 1$;
9) $y'\sqrt{a^2 + x^2} = y$; 10) $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$;
11) $\varphi^2dr + (r - a)d\varphi = 0$; 12) $2st^2ds = (1 + t^2)dt$;

XII.7. Знайти загальний інтеграл рівняння і частковий інтеграл, який задовольняє початкову умову:

1) $2y'\sqrt{x} = y, \quad y(4) = 1$;
2) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x, \quad y(\pi/4) = 0,5$;
3) $x^2y' + y^2 = 0, \quad y(-1) = 1$;
4) $dr + r\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = 0, \quad r(\pi) = 2$;
5) $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1$;
6) $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy, \quad y(0) = 1$.

XII.8. Зробивши належну заміну змінних, розв'язати рівняння:

1) $y' = \cos(x-y)$; 2) $y' = 3x-2y+5$; 3) $y'\sqrt{1 + x + y} = x+y-1$.

XII.9. За скільки часу тіло, нагріте до 100°C, охолоне до 25°C в середовищі з температурою 20°C, якщо до 60°C воно охолоджується за 10 хв?

Вказівка. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і середовища.

XII.10. Моторний човен рухається у стоячій воді зі швидкістю 10 км/год. На повній швидкості його мотор вимикають і через 20 с швидкість човна зменшується до 6 км/год. Вважаючи, що сила опору води пропорційна до швидкості човна, знайти швидкість човна через 2 хв після зупинки мотора. Який шлях пройде човен до повної зупинки?

XII.11. Швидкість росту площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна довжині кола, що обмежує листок, і кількості світла, що падає на листок. Кількість світла, що потрапляє на деяку плоску область, як відомо, пропорційна площі області та косинусу кута між нормаллю до площини та напрямом променів світла. Знайти залежність площі листка від часу протягом світлового дня, якщо о 6 год ранку, коли сходило сонце, площа листка дорівнювала 1600 см^2. Вважати, що о 12 год дня сонце перебувало в зеніті, а о 18 год сховалось за горизонт (день рівнодення на екваторі).

XII.12. Визначити кількість речовини, що ще не вступила в хімічну реакцію через t сек після початку реакції, якщо швидкість реакції пропорційна до кількості цієї речовини з коефіцієнтом пропорційності $-k$, а кількість речовини на початку реакції дорівнювала a.

XII.13. У середній зоні інтенсивності відчуттів зміна інтенсивності E відчуття пропорційна відносній зміні інтенсивності I подразнення з коефіцієнтом пропорційності k. Визначити залежність інтенсивності відчуття від інтенсивності подразнення.

XII.14. У моделі росту виробництва в умовах конкурентного ринку вважають, що швидкість випуску продукції пропорційна величині інвестицій, які є фіксованою часткою m прибутку, отриманого від реалізації продукції за ринковою ціною $p(y)$. Вважається, що затримки між випуском і реалізацією продукції немає. Величину $1/l$, обернену до коефіцієнта пропорційності, називають нормою акселерації. Знайти вираз для об'єму реалізованої продукції $y = y(t)$, якщо:

1) норма акселерації $1/l = 2$, норма інвестицій $m = 0,5$, крива попиту задається рівнянням $p = 2 - y$, а при $t = 0$ об'єм випуску $y = 0,5$;

2) норма акселерації $1/l = 1,5$, норма інвестицій $m = 0,6$, крива попиту задається рівнянням $p = 3 - 2y$, а при $t = 0$ об'єм випуску $y = 1$.

§3. Однорідні диференціальні рівняння

Рівняння вигляду
$$y' = f(x,y)$$
називається однорідним, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня (тобто $f(tx,ty) = f(x,y)$).

Рівняння вигляду
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
називається однорідним, якщо $M(x,y)$ і $N(x,y)$ однорідні функції однакового степеня (тобто $M(tx,ty) = t^k M(x,y)$, $N(tx,ty) = t^k N(x,y)$).

Однорідні рівняння заміною $y = xu(x)$, де $u(x)$ — нова невідома функція, зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

XII.15. Знайти загальний інтеграл рівняння:

1) $yy' = 2y - x$; 2) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;

3) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{s}{t} - \dfrac{t}{s}$; 4) $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y \cos\dfrac{y}{x} - x$;

5) $x^2 y' = y^2 + xy$; 6) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

7) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$; 8) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$;

9) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; 10) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$;

11) $xdy - ydx = ydy$; 12) $xdy = y \ln\dfrac{y}{x} dx$;

XII.16. Знайти загальний інтеграл рівняння і частковий інтеграл, який задовольняє початкову умову:

1) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$;

2) $xy' = y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right), \qquad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}};$

3) $(y^2-3x^2)dy + xydx = 0, \qquad y(0) = 1;$

4) $y' = \dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}, \qquad y(1) = -1.$

XII.17. По якій поверхні обертання треба відшліфувати форму дзеркала рефлектора, щоб воно відбивало паралельно до заданого напряму всі промені, що виходять з заданої точки?

Вказівка. Розгляньте осьовий переріз поверхні. Виберіть задану точку за початок координат, а заданий напрям за вісь абсцис, тоді дотична до поверхні у будь-якій точці утворюватиме однакові кути з віссю абсцис і з радіус-вектором точки дотику.

§4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1°. Рівняння вигляду

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

називається *лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку.

Рівняння можна розв'язати *методом варіації сталої*, який полягає в тому, що спочатку розв'язують лінійне однорідне рівняння $p(x)y' + q(x)y = 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними, а потім у його розв'язку $y = Ce^{-\int q(x)/p(x)dx}$ розглядаємо C як функцію від x і знаходимо її, підставляючи цей розв'язок у початкове рівняння.

2°. Рівняння вигляду

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^m$$

називається *рівнянням Бернуллі*. Заміною $z = y^{1-m}$ рівняння зводиться до лінійного.

XII.18. Знайти загальний інтеграл рівняння:

1) $y' = 3\dfrac{y}{x} - x;$ 2) $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{xe^{x^2}};$

3) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x;$ 4) $xy' + y = \ln x + 1;$

5) $(a^2+x^2)y' + xy = 1;$ 6) $(2x+1)y' + y = x;$

7) $y' + y\cos x = \sin 2x;$ 8) $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x;$

9) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$ 10) $x(y'-y) = (1+x^2)e^x;$

11) $t\,ds - 2s\,dt = t^3\ln t\,dt;$ 12) $x^2\,dy + y(1-2x)dx = x^2\,dx;$

13) $y' = \dfrac{1}{2x-y^2};$ 14) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}.$

XII.19. Знайти загальний інтеграл рівняння:

1) $xy' + y + xy^2 = 0;$ 2) $y' - xy = -y^3e^{-x^2};$

3) $x^2y' - xy - y^2 = 0;$ 4) $y' + xy = xy^3;$

5) $y' + 2xy = 2x^3y^3;$ 6) $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$

XII.20. Знайти загальний інтеграл рівняння і частковий інтеграл, який задовольняє початкову умову:

1) $t^2\dfrac{ds}{dt} = 2ts - 3, \qquad s(-1) = 1;$

2) $y' - y\operatorname{tg} x = \sec x, \qquad y(0) = 0;$

3) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \qquad y(1) = 0;$

4) $t(1+t^2)dx = (x + xt^2 - t^2)dt, \qquad x(1) = -\frac{\pi}{4};$

5) $3y^2y' + y^3 = x + 1, \qquad y(1) = -1;$

6) $(1 - x^2)y' - xy = xy^2, \qquad y(0) = 0,5;$

7) $(1 + e^x)yy' = e^y, \qquad y(0) = 0.$

XII.21. Сила тертя, що сповільнює рух диска, який обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання ω. Знайти кутову швидкість обертання диска через t с, якщо протягом 1 хв швидкість зменшилась від 3 об/с до 2 об/с.

XII.22. Сила струму I у колі з електрорушійною силою E, активним опором R і самоіндукцією L визначається рівнянням

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Знайти залежність струму від часу, якщо $E = kt$, і $I = 0$, коли $t = 0$.

XII.23. Дохід $Y(t)$, отриманий деякою галуззю, є сумою інвестицій $I(t)$ і споживання $C(t)$. В моделі природного зростання виробництва вважають, що швидкість збільшення доходу пропорційна величині інвестицій $bY'(t) = I(t)$, де b — коефіцієнт капіталоємності приросту доходу. Знайти функцію доходу $Y = Y(t)$, якщо споживання $C = 2t$, $b = 0,5$, а $Y(0) = 2$.

§5. Рівняння у повних диференціалах

1°. Рівняння вигляду
$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$
називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах, якщо
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл цього рівняння матиме вигляд $u(x,u)=C$, де u — функція, повний диференціал якої $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

2°. Якщо $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, то іноді вдається знайти функцію $\mu(x,y)$, таку що $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy$ є повним диференціалом. Цю функцію називають *інтегруючим множником*.

Інтегруючий множник легко знаходиться у випадках:

1) якщо $\dfrac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}=\Phi(x)$, то $\ln\mu=\int\Phi(x)\,dx$;

2) якщо $\dfrac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)}=\Psi(y)$, то $\ln\mu=-\int\Psi(y)\,dy$.

XII.24. Знайти загальний інтеграл рівняння:

1) $\left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + 2\dfrac{y}{x}dy = 0;$ 2) $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2y\,dy = 0;$

3) $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0;$ 4) $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0;$

5) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0;$ 6) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0;$

7) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0;$ 8) $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx;$

9) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$; 10) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\,dy = 0$.

XII.25. Знайти інтегруючий множник і розв'язати рівняння:

1) $(x^2 - y)dx + x\,dy = 0$; 2) $2x \operatorname{tg} y\,dx + (x^2 - 2\sin y)dy = 0$;
3) $(e^{2x} - y^2)dx + y\,dy = 0$; 4) $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \operatorname{ctg} y\,dy = 0$;
5) $y^2 dx + (yx - 1)dy = 0$; 6) $(\sin x + e^y)dx + \cos x\,dy = 0$.

§6. Рівняння, не розв'язані відносно похідної

1°. Якщо рівняння вигляду $F(x,y,y')=0$ в деякій області можна розв'язати відносно y', так що $y'=f_1(x,y),\ldots,y'=f_k(x,y)$, то це рівняння матиме k загальних інтегралів, які задають у кожній точці області k інтегральних кривих.

Особливий розв'язок цього рівняння, якщо він існує, можна знайти, виключивши y' із системи рівнянь $F(x,y,y')=0$, $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0$.

2°. Рівняння вигляду $y=f(y')$ або $x=f(y')$ можуть бути розв'язані шляхом введення параметра $p=y'$.

3°. Рівняння Лагранжа $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ введенням параметра $p=y'$ зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку щодо фунції $x(p)$.

4°. Рівняння Клеро $y=xy'+\psi(y')$, яке є частковим випадком рівняння Лагранжа, має загальний розв'язок $y=Cx+\psi(C)$ і особливий розв'язок $\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$.

XII.26. Побудувати інтегральні криві рівняння ${y'}^2 = 4y$, які проходять через точку $M(1,4)$.

XII.27. Побудувати інтегральні криві рівняння ${y'}^2 + y = 1$, які проходять через точку $M(1,3/4)$.

XII.28. Зобразити інтегральні криві рівняння $x{y'}^2 - 2yy' + 4x = 0$.

XII.29. Розв'язати рівняння:

1) $x{y'}^2 + 2xy' - y = 0$; 2) $y{y'}^2 + (x-y)y' - x = 0$;
3) ${y'}^2 + y^2 - 1 = 0$; 4) $xy{y'}^2 + (x^2 - 2xy + y^2)y' + 2xy = 4y^2$;
5) $x{y'}^2 - 2yy' + 4x = 0$; 6) $x^2{y'}^2 - 2xyy' + y^2 = x^2y^2 + x^4$;
7) ${y'}^2 + yy' - xy - x^2 = 0$; 8) ${y'}^3 - x{y'}^2 - y^2y' + xy^2 = 0$.

XII.30. Розв'язати рівняння методом введення параметра:

1) $y = 1 + {y'}^2$; 2) $y = y' + \ln y'$;
3) $x = y' + e^{y'}$; 4) $x{y'}^3 = 1 + y'$;
5) $y = {y'}^2 e^{{y'}^3}$; 6) $y^2(y'-1) = (2-y')^2$;
7) $y' = \ln(xy' - y)$; 8) $y(1 + {y'}^2) = 2$.

XII.31. Розв'язати рівняння Лагранжа або Клеро:

1) $y = x{y'}^2 + {y'}^2$; 2) $y = 2xy' + \dfrac{1}{{y'}^2}$;
3) $y = xy' - {y'}^2$; 4) $y = xy' + \dfrac{1}{{y'}^2}$;

5) $2y = \dfrac{xy'^2}{y'+2}$; 6) $y = xy' - \sqrt{1+y'^2}$;

7) $y = xy' - 3y'^3$; 8) $y = x(1+y') + y'^2$.

XII.32. Знайти криву, дотичні до якої утворюють з осями координат трикутник площею $2a^2$.

§7. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

1°. У рівнянні вигляду $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$ понизити порядок можна заміною $y^{(k)}=z(x)$.

2°. У рівнянні вигляду $F(y,y',\dots,y^{(n)})=0$ понизити порядок можна заміною $y'=p(y)$. Тоді $y''=p'p$, $y'''=p''p^2+p'^2p$ і т.д.

XII.33. Розв'язати такі задачі Коші:

1) $y''' = \dfrac{6}{y^2}$, $y(1)=2,\ y'(1)=1,\ y''(1)=1$;

2) $y'' = 4\cos 2x$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$;

3) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0)=5,\ y'(0)=0$;

4) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,5\ln 2,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

XII.34. Розв'язати рівняння:

1) $x^3y'' + x^2y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$;

3) $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$; 4) $y'' + 2yy'^3 = 0$;

5) $y''x\ln x = y'$; 6) $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2$;

7) $xy'' - y' = e^x x^2$; 8) $y'' + 2xy'^2 = 0$;

9) $y''y^3 = 1$; 10) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$;

11) $2yy'' = y'^2$; 12) $t\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0$;

13) $2yy'' = 1 + y'^2$; 14) $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$.

§8. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

1°. Рівняння вигляду $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами, а рівняння $y^{(n)}+$ $+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ — відповідним лінійним однорідним рівнянням.

2°. Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння n-го порядку записують у вигляді

$$y=y^*+C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n,$$

де y^* — частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, а $C_1y_1+C_2y_2+\dots+$ $+C_ny_n$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Лінійно незалежні розв'язки y_1, $y_2,\dots$, y_n знаходять за допомогою характеристичного рівняння

$$k^n+a_1k^{n-1}+\dots+a_{n-1}k+a_n=0.$$

Кожному дійсному кореню $k=\alpha$ кратності m характеристичного рівняння відповідає m розв'язків $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, ..., $x^{m-1}e^{\alpha x}$, а кожній парі комплексних коренів $k=\alpha\pm i\beta$ — $2m$ розв'язків $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, ..., $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^{m-1}\times$ $\times e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Частковий розв'язок y^* може бути знайдений методом варіації сталих.

3°. *Метод неозначених коефіцієнтів.* Якщо права частина лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд $P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ або $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, де $P_m(x)$ — деякий многочлен m-го степеня, то частковий розв'язок y^* може бути знайдений у вигляді

$$y^*=x^r(Q1_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q2_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x) —$$

де r — кратність кореня $\alpha+i\beta$ (якщо він є коренем характеристичного рівняння) або 0, а $Q1_m(x)$, $Q2_m(x)$ — загальні многочлени m-го степеня, коефіцієнти яких знаходять після підстановки y^* в рівняння.

XII.35. Розв'язати рівняння:

1) $y''-2y'+y=e^{2x}$;
2) $y''-4y=8x^3$;
3) $y''+y=x+2e^x$;
4) $y''+3y'=9x$;
5) $y''-3y'+2y=e^x$;
6) $\ddot{x}+k^2\dot{x}=2k\sin kt$;
7) $y''-2y=xe^{-x}$;
8) $y''-2y'=x^2-x$;
9) $y'''+y''=6x+e^{-x}$;
10) $y^{IV}-81y=27e^{-3x}$;
11) $\dddot{x}+\dot{x}=3t^2$;
12) $y'''+8y=e^{-2x}$;
13) $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=e^{-2t}$;
14) $a^3\ddot{x}+ax=1$;
15) $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$;
16) $y^{IV}+5y''+4y=3\sin x$;
17) $y''+y'-2y=6x^2$;
18) $y''+y'+2,5y=25\cos 2x$;
19) $y''+2y'+y=e^x$;
20) $y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

XII.35. Розв'язати рівняння:

1) $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$;
2) $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;
3) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$;
4) $y''+y=\operatorname{tg} x$;
5) $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^x}$;
6) $y''+4y'+4y=\dfrac{1}{x^3e^{2x}}$;
7) $y''+4y'+4y=\dfrac{\ln x}{e^{2x}}$;
8) $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$;
9) $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
10) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

§9. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

1°. *Метод виключення невідомих.* Шляхом виключення невідомих систему здебільшого можна звести до рівняння вищого порядку з однією невідомою функцією.

2°. *Розв'язування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами.* Для розв'язання системи вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

(або в векторному записі $\dot{x}=Ax$) треба знайти корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Кожному простому дійсному кореню λ_i характеристичного рівняння відповідає розв'язок $C_i v^i e^{l_i t}$, де C_i — довільна стала, v^i — власний вектор матриці A, що відповідає цьому власному значенню λ_i.

Якщо для кратного кореня λ є стільки лінійно незалежних власних векторів $v^1,\dots,v^k$, яка його кратність, то йому відповідає розв'язок $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \dots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

Якщо для кореня λ кратності k є лише m лінійно незалежних власних векторів, і $m<k$, то ще один розв'язок, що відповідає цьому λ, можна шукати у вигляді добутку многочлена степеня $k-m-1$ на $e^{\lambda t}$ з неозначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невідомі коефіцієнти треба підставити цей розв'язок у систему. Прирівнявши коефіцієнти подібних членів у лівій і правій частинах рівнянь, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь щодо цих коефіцієнтів та знайдемо її загальний розв'язок, який залежатиме від $k-m$ довільних сталих.

Простим комплексним кореням $\lambda=\alpha+i\beta$ характеристичного рівняння відповідає дійсна й уявна частини вектора $ve^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$, де v — власний вектор, що відповідає цьому власному значенню.

3°. *Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами.* Якщо праві частини лінійних неоднорідних систем зі сталими коефіцієнтами є квазімногочленами, то частковий розв'язок системи можна шукати методом невизначених коефіцієнтів. Це робиться за тими самими правилами, що й для одного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Якщо $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, де $P_{m_i}(t)$ – многочлен степеня m_i, то частковий розв'язок системи шукається у вигляді

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \qquad i=1,\dots,n,$$

де $Q^i_{m+s}(t)$ – многочлен степеня $m+s$ з невідомими коефіцієнтами, $m=\max m_i$, а s дорівнює кратності кореня γ характеристичного рівняння (або нуль, якщо γ не є його коренем). Невідомі коефіцієнти многочленів визначають, підставляючи вирази для невідомих функцій у систему.

Розв'язок неоднорідної системи можна також знайти методом варіації сталих.

XII.36. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{x} - \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + e^t \\ \dot{y} = x - y + e^t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5\dot{x} - 2\dot{y} + 4x - y = e^{-t}, \\ \dot{x} + 8x - 3y = 5e^{-t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0, \\ \dot{y} - x + y = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + 2\operatorname{sh} t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = y - 7x, \\ \dot{y} + 2x + 5y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + e^{t} + e^{-t}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 24x = 16e^{t}. \end{cases}$

XII.37. Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} + x - y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$

8) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$

9) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$

10) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$

11) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z; \end{cases}$ $(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$

12) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5)$

13) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y; \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

14) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$

XII.38. Розв'язати лінійні неоднорідні системи:

1) $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^{t}\sin t. \end{cases}$

XII.39. Розв'язати системи рівнянь методом варіації сталих:

1) $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

РОЗДІЛ XIII

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§1. Елементи комбінаторики

Нехай множина A має n елементів.

Впорядковані множини, утворені з усіх елементів множини A, називають *перестановками.* Кількість усіх перестановок позначають P_n і обчислюють за формулою $P_n = n!$.

Різні k-елементні підмножини множини A $(0 \le k \le n)$ називають *комбінаціями* з n елементів по k елементів. Кількість комбінацій з n елементів по k елементів позначають C_k^n і обчислюють за формулою $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Різні впорядковані k-елементні підмножини множини A $(0 \le k \le n)$ називають *розміщеннями* з n елементів по k елементів. Кількість розміщень з n елементів по k елементів позначають A_k^n і обчислюють за формулою $A_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

XIII.1. З міста A в місто B веде k доріг, у місто C – s доріг. Із міста B у місто D веде p доріг, з міста C в місто D – n доріг. Міста B і C не можна з'єднати дорогами. Скільки різних автобусних маршрутів можна прокласти між містами A і D?

XIII.2. У хокейному клубі є 10 форвардів, 8 захисників і 3 воротарі. Скільки різних варіантів команди може скласти тренер, якщо на майданчик виходять один воротар, два захисники і три форварди?

XIII.3. У маршрутному таксі є 12 пасажирів. Таксі робить 15 зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири, якщо: а) всі вони виходять на різних зупинках; б) пасажири виходять як завгодно?

XIII.4. Скількома способами можна розмістити n різних предметів у k різних ящиках?

XIII.5. Скількома способами можна з 10 осіб вибрати комісію, яка складається з 4 осіб?

XIII.6. У кімнаті є n лампочок. Скільки є різних способів освітлення кімнати?

XIII.7. Скількома способами можна впорядкувати множину $1, 2, \ldots, n$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

XIII.8. Скількома способами можна впорядкувати множину, яка складається з n елементів так, щоб два фіксовані елементи не стояли поряд?

XIII.9. Скількома способами можна розмістити n гостей за круглим столом?

XIII.10. П'ять авіакомпаній подали заявку на експлуатацію нового маршруту, на якому можуть працювати лише дві компанії. Скількома способами можна їх вибрати?

XIII.11. Банк випускає кредитні картки, які мають дві букви англійського алфавіту і чотири цифри. Скільки можна випустити кредитних карток, у яких: а) всі букви є різними? б) всі цифри є різними?

§2. Випадкові події та їхні ймовірності

1°. *Випадкові події та операції над ними.* Дві події називаються *несумісними*, якщо поява в експерименті однієї з них виключає появу іншої. Множину всіх можливих наслідків експерименту, кожні два з яких попарно несумісні, називають простором *елементарних випадкових подій* і позначають Ω. Будь-яка випадкова подія є підмножиною Ω.

Подія називається *неможливою*, якщо в випадковому експерименті немає жодної елементарної події, яка їй належить. Подія називається *достовірною*, якщо їй сприяє кожна елементарна подія, тобто вона збігається з простором елементарних подій.

Сумою (об'єднанням) подій A та B називається подія $A+B$ (або $A\cup B$), яка складається з елементарних подій, що належать A або B.

Добутком (перерізом) подій A та B називається подія AB (або $A\cap B$), яка складається з елементарних подій, що належать і A і B.

Різницею двох подій A та B називається така подія $A\backslash B$, яка містить ті елементарні події, які належать A і не належать B.

Подію $\overline{A}$, яка є *протилежною* до події A, можна записати у вигляді $\overline{A}=\Omega\backslash A$.

Якщо події A та B — несумісні, то $A\cap B=\varnothing$.

Події $A_1,A_2,...A_n$ утворюють *повну групу (повну систему)* попарно несумісних подій, якщо $A_i\cap A_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, і $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$.

2°. *Класичне означення ймовірності.* Нехай множина результатів експерименту складається з n рівноможливих елементарних подій, тобто $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$. Нехай події A сприяють k з цих елементарних подій. Ймовірністю події A називається відношення кількості рівноможливих елементарних подій, які сприяють події A, до кількості всіх можливих результатів експерименту, тобто

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

3°. *Статистична оцінка невідомої ймовірності.* Розглянемо послідовність n незалежних випробувань. Нехай подія A в цих випробуваннях з'явилася m разів. За числове значення ймовірності статистично стійкої події A приймають відносну частоту появи цієї події, тобто

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

4°. *Геометричне означення ймовірності.* Якщо множина можливих результатів експерименту Ω є неперервною, то розглядатимемо цю множину як область G у деякому координатному просторі. Точками цієї області є елементарні події. Елементарні події, з яких складається подія A, утворюють деяку область g, причому $g\subset G$. Ймовірністю події A називатимемо відношення міри області сприятливих подій g до міри області всіх можливих результатів експерименту G, тобто

$$P(A)=\frac{\mathrm{mes}\, g}{\mathrm{mes}\, G}.$$

5°. *Ймовірність суми та добутку подій.* Ймовірність події A за умови, що подія B відбулася, обчислюється за формулою $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$. З цієї формули отримаємо формулу для обчислення ймовірності добутку двох подій

$$P(AB)=P(B)P(A/B)=P(A)P(A/B).$$

Якщо події A і B — незалежні, то $P(AB)=P(A)P(B)$.

Якщо події A та B несумісні, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Для двох довільних подій $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

XIII.12. Гральний кубик підкидають двічі. Опишіть простір елементарних подій. Опишіть такі випадкові події: $A=\{$сума очок, які з'явились дорівнює 7$\}$; $B=\{$під час другого підкидання з'явилося 5 очок $\}$; $A\cup B$; $A\cap B$; $\overline{B}$; $A\backslash B$; $C=\{$обидва рази випала кількість очок, кратна 6$\}$; $D=\{$жодного разу не випало 6 очок$\}$; $E=\{$обидва рази випало більше, ніж 3 очка$\}$; $F=\{$обидва рази випала однакова кількість очок$\}$.

XIII.13. Монету підкидають тричі. Спостережуваний результат: поява герба (Г) або цифри (Р) на верхньому боці монети. Опишіть простір елементарних подій і такі події: $A=\{$герб випав тільки один раз$\}$; $B=\{$жодного разу не випала цифра$\}$; $C=\{$випало більше гербів, ніж цифр$\}$; $D=\{$ герб випав не менше, ніж двічі підряд$\}$.

XIII.14. Проводять спостереження за групою, яка складається з чотирьох однорідних об'єктів. Кожен з них за час спостереження може бути виявлений або невиявлений. Розглядають такі події: $A=\{$виявлений тільки один з чотирьох об'єктів$\}$; $B=\{$виявлений хоча б один об'єкт$\}$; $C=\{$виявлено не менше, ніж два об'єкти$\}$; $D=\{$виявлено саме два об'єкти$\}$; $E=\{$виявлено тільки три об'єкти$\}$; $F=\{$виявлено всі чотири об'єкти$\}$. З'ясувати, яким подіям рівносильні такі події: $A\cap B$; $A\cup B$; $B\cup C$; $B\cap C$; $D\cup E\cup F$; $B\cap F$? Чи збігаються події $B\cap F$ і $C\cap F$ та $B\cap C$ і D?

XIII.15. Дослід полягає в підкиданні двох монет. Розглядають такі події: $A=\{$на першій монеті випав герб$\}$; $B=\{$на першій монеті випала цифра$\}$; $C=\{$на другій монеті випав герб$\}$; $D=\{$на другій монеті випала цифра$\}$; $E=\{$випав хоча б один герб$\}$; $F=\{$випала хоча б одна цифра$\}$; $G=\{$випав один герб і одна цифра$\}$; $H=\{$не випало жодного герба$\}$; $K=\{$випало два герби$\}$. З'ясувати, яким подіям відповідають такі події: $A\cup C$; $A\cap C$; $E\cup F$; $G\cup E$; $G\cap E$; $B\cap D$; $E\cup K$.

XIII.16. У ліфті, який зупиняється на семи поверхах, є три пасажири. Які ймовірності таких подій: 1) усі пасажири вийдуть на різних поверхах; 2) усі пасажири вийдуть на п'ятому поверсі; 3) усі пасажири вийдуть на одному поверсі?

XIII.17. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що абонент набрав потрібний йому номер?

XIII.18. Обчисліть ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

XIII.19. У скриньці є 20 ламп, три з них браковані. Навмання вибирають чотири лампи. Яка ймовірність того, що всі лампи будуть якісними?

XIII.20. Робітник за зміну виготовив 20 деталей вищого і 10 деталей першого гатунку. Яка ймовірність того, що з двох навмання вибраних деталей: 1) обидві будуть вищого гатунку; 2) одна буде вищого, а друга першого гатунку; 3) обидві будуть одного гатунку.

XIII.21. У скриньці міститься 10 ламп потужністю 100 Вт і 5 ламп потужністю 60 Вт, які зовні не відрізняються між собою. Яка ймовірність того, що дві навмання вибрані електролампи будуть: 1) по 100 Вт; 2) по 60 Вт; 3) одна 100 Вт і одна 60 Вт; 4) обидві однакової потужності?

XIII.22. У партії з 20 деталей є 16 стандартних. Навмання вибирають шість деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних буде чотири стандартні деталі.

XIII.23. У цеху працюють 20 мужчин і 10 жінок. Навмання за табельними номерами відбирають 15 осіб. Яка ймовірність того, що серед відібраних буде п'ять жінок?

XIII.24. Видавництво відправило газети у два поштові відділення. Ймовірність своєчасного отримання газет кожним поштовим відділенням дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що: 1) обидва відділення вчасно отримають газети; 2) обидва отримають газети з запізненням; 3) одне отримає газети вчасно, а друге з запізненням?

XIII.25. Із партії, в якій є 25 якісних і 5 дефектних деталей, навмання беруть три деталі. Яка ймовірність того, що: 1) всі три деталі будуть якісні; 2) хоча б одна деталь буде якісна?

XIII.26. У цеху є три резервні двигуни. Ймовірність того, що двигун працює, однакова для всіх двигунів і становить 0,2. Яка ймовірність того, що в конкретний момент часу працює хоча б один двигун?

XIII.27. У цеху є три верстати-автомати. Ймовірність того, що протягом зміни верстат буде зупинений для заміни деталей, становить 0,1. Яка ймовірність того, що: 1) жоден верстат не буде зупинений; 2) два верстати будуть зупинені?

XIII.28. Ймовірність того, що протягом однієї зміни верстат вийде з ладу, становить 0,05. Яка ймовірність того, що верстат відпрацює три зміни?

XIII.29. Студент прийшов на залік, знаючи 24 питання з 30, які є в програмі. Яка ймовірність того, що у випадку, якщо він не знає відповіді на перше питання, студент відповість на друге?

XIII.30. Абонент забув останню цифру номера телефону тому набирає її навмання. Яка ймовірність того, що йому доведеться зробити не більше, ніж три спроби?

XIII.31. Студент підготував 20 питань з 25, які є в програмі іспиту. Яка ймовірність того, що з трьох питань, які є в білеті, студент знає відповідь: 1) тільки на одне питання; 2) тільки на два питання; 3) на всі три питання; 4) хоча б на одне питання; 5) хоча б на два питання?

XIII.32. В екзаменаційному білеті є три питання. Ймовірності того, що студент знає відповідь на перше, друге і третє питання, відповідно становлять 0,9; 0,9; 0,8. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього потрібно відповісти: 1) на всі питання; 2) хоча б на два питання?

XIII.33. Три дослідники незалежно один від одного виконують деякі вимірювання. Ймовірність того, що перший дослідник допустить помилку, становить 0,1; другий – 0,15; третій – 0,2. Яка ймовірність того, що хоча б один з них помилиться?

XIII.34. У лабораторії є два комп'ютери. Ймовірність того, що в заданий час комп'ютер використовують, дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що: 1) обидва комп'ютери використовують; 2) тільки один використовують; 3) хоча б один використовують; 4) жоден не використовують?

XIII.35. Ймовірності того, що кожна з трьох деталей механізму працюватиме один рік, відповідно становлять 0,5; 0,6; 0,7. Яка ймовірність того, що механізм у цілому пропрацює один рік?

XIII.36. Гравці A та B грають за такими правилами. В результаті першого ходу, який завжди робить гравець A, він може виграти з імовірністю 0,3; якщо ж за першим ходом A не виграє, то хід робить гравець B і може виграти з імовірністю 0,5. Якщо ж B не виграє, то A робить другий хід, який може привести його до виграшу з імовірністю 0,4. Які ймовірності виграшу для гравців A та B?

XIII.37. Для контролю за якістю продукції з кожної партії готових виробів беруть 100 штук. Перевірку не витримують у середньому 12 виробів. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб буде небракованим? Скільки буде бракованих виробів серед 10 000 відібраних?

XIII.38. Серед 11 000 дітей, які народилися протягом року в деякому місті, зареєстровано 6452 хлопчики. Обчисліть відносну частоту народження хлопчиків.

XIII.39. Протягом деякого періоду часу відносна частота сонячних днів становила 0,8. Скільки було похмурих днів, якщо всього було 72 сонячні дні?

XIII.40. Після бурі на ділянці між 40 і 70 кілометрами телефонної мережі розірвався провід. Яка ймовірність того, що він розірвався між 45 і 50 кілометрами мережі?

XIII.41. Площина розграфлена паралельними прямими, відстань між якими дорівнює a. На площину навмання кидають монету, радіус якої дорівнює r $\left(r < \dfrac{a}{2}\right)$. Яка ймовірність того, що: 1) монета не перетне жодну з прямих; 2) монета перетне не більше, ніж одну сторону квадрата?

XIII.42. (Задача Бюффона). Площина розграфлена паралельними прямими, відстань між якими – $2a$. На цю площину навмання кидають голку довжиною $2l$ $(l < a)$. Яка ймовірність того, що голка перетне якусь пряму?

XIII.43. (Задача про зустріч.) Два студенти домовилися про зустріч. Вважають, що кожен з них може прийти на місце зустрічі в інтервалі часу $[0; T]$. Студент, який прийшов на місце зустрічі першим, чекає протягом часу t, $t \leq T$ і йде з місця зустрічі. Яка ймовірність того, що зустріч відбулася?

§3. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Нехай подія A може відбуватися з однією з подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій (гіпотез). Нехай відомі ймовірності $P(H_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ та ймовірності появи події A в умовах подій H_i, тобто $P(A/H_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Тоді ймовірність появи події A обчислюють за формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Якщо подія A відбулася, то ймовірність того, що вона відбулася через гіпотезу H_j, $j=1,2,\ldots,n$, обчислюють за формулами Байєса

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Цю формулу називають формулою переоцінки ймовірностей гіпотез.

XIII.44. У групі спортсменів є 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму для лижника, велосипедиста та бігуна відповідно становить 0,9; 0,8; 0,75. Яка ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає кваліфікаційну норму. Відомо, що спортсмен виконав кваліфікаційну норму. Яка ймовірність того, що це був велосипедист?

XIII.45. Відомо, що 5% усіх мужчин і 0,25% всіх жінок є дальтоніками. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це мужчина, якщо мужчин і жінок було порівну?

XIII.46. Три сигналізатори працюють незалежно один від одного. Ймовірності того, що під час аварії спрацює перший, другий і третій сигналізатори, відповідно становлять 0,7; 0,8; 0,75 Відомо, що під час аварії два сигналізатори не спрацювали. Яка ймовірність того, що не спрацювали другий і третій сигналізатори?

XIII.47. Три верстати-автомати виробляють однакові деталі, які йдуть на спільний конвеєр. Перший виробляє 25%, другий – 35%, третій – 40% усієї продукції. У їхній продукції брак становить відповідно 5%, 4%, 2%.

Навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті?

XIII.48. На двох верстатах виробляють однакові деталі, які йдуть на спільний конвеєр. Ймовірність того, що перший виготовить якісну деталь, становить 0,9, другий – 0,8. Продуктивність першого верстата вдвічі більша, ніж продуктивність другого. Деталь, навмання взята із конвеєра, виявилась якісною. Яка ймовірність того, що вона вироблена на першому верстаті?

XIII.49. Ту саму операцію можуть виконати робітники третього, четвертого і п'ятого розрядів. У бригаді з 10 робітників двоє мають п'ятий розряд, п'ятеро – четвертий і троє – третій. Робітники п'ятого розряду допускають 1% браку, четвертого – 2%, третього – 4%. Під час перевірки виявилось, що деталь якісна. Яка ймовірність того, що її виготовив робітник п'ятого розряду?

XIII.50. Агентство зі страхування автомобілів поділяє водіїв на три групи: група H_1 (мало ризикує), група H_2 (не дуже часто ризикує) і група H_3 (дуже часто ризикує). Агентство вважає, що з усіх водіїв, які застрахували автомобілі, 30% належить до групи H_1, 50% – до групи H_2 і 20% – до групи H_3. Ймовірність того, що протягом року водій з групи H_1 хоча б один раз потрапить в аварію, становить 0,01, водій з групи H_2 – 0,02, а водій з групи H_4 – 0,08. Водій A застрахував свою автомашину і протягом року потрапив в аварію. Яка ймовірність того, що він належить: 1) до групи H_1; 2) до групи H_2; 3) до групи H_3?

§4. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі

1°. *Схема Бернуллі.* Нехай виконують серію з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю p. Позначимо через $P_n(k)$ ймовірність того, що в цих n незалежних випробуваннях подія A відбулася k разів. Цю ймовірність можна обчислити за формулою Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \text{де} \quad q=1-p.$$

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться не менше, ніж k_1, і не більше, ніж k_2 разів, обчислюють за формулою

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюють за формулою $P_n(1\le k\le n)=1-q^n$.

Найбільш ймовірна кількість k_0 появ події A в схемі Бернуллі є в інтервалі $np-q\le$ $\le k_0\le np+p$.

2°. *Апроксимаційні формули Муавра-Лапласа.* У разі великої кількості випробувань

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \qquad \text{де } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Інтегральна формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad \text{де } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}.$$

Використовуючи інтегральну формулу Муавра-Лапласа, можна визначити ймовірність того, що відносна частота появи події A в n незалежних дослідах відхилиться від ймовірності p появи цієї події в одному досліді не більше, ніж на $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наближені локальну та інтегральну формули Муавра-Лапласа застосовують у випадку, коли p не дуже мале, при $npq\geq 9$. Якщо p дуже мале, то використовують наближену формулу Пуассона, яка дає краще наближення шуканої ймовірності

$$P_n(k)\approx\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad \text{де}\quad \lambda=np;\qquad P_n(k_1\leq k\leq k_2)\approx e^{-\lambda}\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

XIII.51. За даними технічного контролю 2% виготовлених верстатів-автоматів потребують додаткового регулювання. Яка ймовірність того, що з шести виготовлених верстатів для чотирьох потрібне додаткове регулювання?

XIII.52. Ймовірність того, що верстат-автомат зробить стандартну деталь, становить 0,9. Яка ймовірність того, що з восьми деталей шість будуть стандартними?

XIII.53. Зроблено 20 пострілів у ціль. Ймовірність влучання в ціль з одного пострілу становить 0,7. Визначте: 1) ймовірність того, що буде хоча б одне влучення; 2) ймовірність того, що буде не більше двох влучань; 3) найімовірнішу кількість влучань.

XIII.54. Імовірність того, що в чотирьох незалежних дослідах подія A відбудеться хоча б один раз, дорівнює 0,9919. Яка ймовірність появи події A в одному досліді?

XIII.55. Велика партія виробів містить 1% браку. Скільки потрібно взяти виробів з цієї партії, щоби ймовірність наявності серед них хоча б одного бракованого виробу була не меншою, ніж 0,95?

XIII.56. Під час виготовлення штампованих деталей є 5% браку. Скільки потрібно взяти заготовок, щоб найімовірніше було 380 якісних деталей?

XIII.57. За даними відділу технічного контролю в середньому 3% виготовлених виробів є нестандартними. Визначте найімовірнішу кількість стандартних виробів у партії зі 150 деталей і її ймовірність.

XIII.58. Імовірність виготовлення стандартної деталі становить 0,95. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніше було 55 нестандартних деталей?

XIII.59. Відомо, що 60% робітників деякого заводу мають середню освіту. Яка ймовірність того, що з 500 робітників 280 будуть мати середню освіту?

XIII.60. Нехай імовірність народження хлопчика становить 0,5. Яка ймовірність того, що серед 200 немовлят буде: 1) 100 хлопчиків; 2) 90 хлопчиків; 3) 110 хлопчиків; 4) не менше, ніж 90 і не більше, ніж 100 хлопчиків?

XIII.61. Завод відправив споживачеві 5000 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі становить 0,0002. Яка ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: 1) три вироби; 2) тільки один виріб; 3) не більше, ніж три вироби; 4) більше ніж три вироби?

XIII.62. Завод відправив споживачеві 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що в дорозі пляшка буде розбита, становить 0,003. Яка ймовірність того, що споживач отримає: 1) дві розбиті пляшки; 2) менше ніж дві розбиті пляшки; 3) хоча б одну розбиту пляшку?

XIII.63. У випадку масового випуску деякої продукції є 4% браку. Яка ймовірність того, що в партії з 625 виробів відхилення відносної частоти бракованих виробів від ймовірності браку за абсолютною величиною буде не більшою, ніж 0,02?

XIII.64. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Ймовірність того, що виріб є бракованим, становить 0,05. Визначте з ймовірністю 0,9425 межі, в яких буде міститися кількість бракованих виробів серед перевірених.

XIII.65. Для визначення відносної частоти бракованої продукції взяли 2500 виробів, серед яких виявилось 250 бракованих. З імовірністю 0,9545 обчислити можливі межі відхилення відносної частоти бракованих виробів від імовірності браку в одному досліді.

XIII.66. Відомо, що завод випускає 5% бракованих виробів. Скільки потрібно перевірити виробів, щоб з імовірністю 0,954 відхилення відносної частоти бракованих виробів від ймовірності браку за абсолютною величиною не перевищувало 4%?

§5. Випадкові величини

1°. *Основні поняття.* Нехай Ω – простір елементарних подій. Випадковою величиною X називають числову функцію $X(\omega)$, визначену на множині Ω.

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію $F(x)$, $x \in R$, яку визначає формула $F(x)=P(X<x)$.

Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $[a;b)$, обчислюється за формулою

$$P(a \le x < b)=F(b)-F(a).$$

Випадкова величина X називається дискретною, якщо вона набуває скінченну або зліченну кількість значень. Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна записати у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

,

де $p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots=1$.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини визначають рівністю

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{k,x_k<x} p_k.$$

Випадкову величину X називають неперервною, якщо існує невід'ємна функція $p(x)$ (щільність розподілу) така, що для всіх $x\in R$ її функцію розподілу можна записати у вигляді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

2°. *Числові характеристики.*

Математичним сподіванням випадкової величини X називають дійсне число, яке визначають за такими формулами:

$$MX=\sum_k p_k x_k \text{ — для дискретної випадкової величини,}$$

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \text{ — для неперервної випадкової величини.}$$

Дисперсією випадкової величини X називають число

$$DX=M(X-MX)^2.$$

Часто дисперсію випадкової величини шукають за формулою

$$DX=MX^2-(MX)^2.$$

Якщо $X_1,X_2,\ldots,X_n$ – послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин, які мають математичне сподівання $MX_k=a$ і дисперсію $DX_k=\sigma^2$, то

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=a, \qquad D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Як міру розсіяння випадкової величини поряд з дисперсією використовують середнє квадратичне відхилення випадкової величини

$$\sigma_X=\sqrt{DX}.$$

Випадкову величину Y називають нормованою, якщо $MY=0$, $DY=1$. Випадкова величина

$$Y=\frac{X-MX}{\sigma_x}$$

є нормованою випадковою величиною.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають число $\alpha_k=\alpha_k(X)$, яке дорівнює математичному сподіванню випадкової величини X^k

$$\alpha_k=M(X^k).$$

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають число $\mu_k=\mu_k(X)$, яке дорівнює математичному сподіванню k-го степеня відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання

$$\mu_k=M(X-MX)^k.$$

Центральні моменти μ_k вищих порядків можна виразити через початкові моменти $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$. Наприклад,

$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2, \quad \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3, \quad \mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4.$$

Коефіцієнтом асиметрії випадкової величини X називають число

$$\beta=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Ексцесом випадкової величини X називається число

$$\gamma=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3.$$

XIII.67. У партії з шести деталей є чотири стандартні. Навмання вибрали три деталі. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед вибраних. Побудувати функцію розподілу та її графік, многокутник розподілу.

XIII.68. Після відповіді студента на питання екзаменаційного білета екзаменатор задає йому додаткові запитання. Викладач припиняє опитування, як тільки студент не знає відповіді на задане питання. Ймовірність того, що студент дасть відповідь на будь-яке додаткове питання становить 0,9. Потрібно: 1) скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості додаткових питань, які викладач задасть студентові; 2) визначити найімовірнішу кількість додаткових питань, заданих студентові.

XIII.69. Ймовірність того, що автомат під час опускання монети спрацює, становить 0,97. Скласти закон розподілу кількості монет, опущених в автомат до першого спрацювання.

XIII.70. Функція розподілу випадкової величини X має такий вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0,3, & 2 < x \le 3, \\ 0,5, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Обчислити: 1) $P(X \ge 3,5)$; 2) $P(|X| < 2,5)$; 3) $P(1 \le X \le 3)$.

Побудувати закон розподілу випадкової величини X.

XIII.71. Задана функція розподілу дискретної випадкової величини X

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,25, & 1 < x \le 3, \\ 0,4, & 3 < x \le 4, \\ 0,8, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини. Визначити: 1) $P(X = 2)$; 2) $P(2 < X \le 4)$.

XIII.72. Випадкова величина має закон розподілу

x_i	-2	-1	0	2	3
p_i	$0,1$	$0,2$	$0,2$	$0,3$	$0,2$

Визначити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

XIII.73. Випадкова величина X має закон розподілу

x_i	-5	2	3	4
p_i	$0,4$	$0,3$	$0,1$	$0,2$

Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

XIII.74. Визначити дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, яка має такий закон розподілу:

1)

x_i	$4,3$	$5,1$	$10,6$
p_i	$0,2$	$0,3$	$0,5$

2)

x_i	131	140	160	180
p_i	$0,05$	$0,1$	$0,25$	$0,6$

3)

x_i	-1	1	3
p_i	$0,2$	$0,5$	$0,3$

4)

x_i	-2	1	2	5
p_i	$0,1$	$0,3$	$0,2$	$0,4$

XIII.75. Обчислити математичне сподівання випадкової величини Z, якщо відомі математичні сподівання X та Y:

1) $Z = X - 2Y$, $MX = 2$, $MY = 3$.

2) $Z = 2X + 5Y$, $MX = 3$, $MY = 2$.

3) $Z = 2X - 3Y$, $MX = -2$, $MY = 4$.

4) $Z = 2X - 5Y$, $MX = 2$, $MY = -3$.

XIII.76. Дискретна випадкова величина X набуває три можливі значення. $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ з імовірностями $p_1 = 0,5$ та $p_2 = 0,3$ відповідно. Визначити x_3 та p_3, якщо $MX = 8$.

XIII.77. Дискретна випадкова величина набуває три можливі значення: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Відомо, що $MX = 0,9$, $MX^2 = 1,9$. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини.

XIII.78. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу. Визначити початкові моменти першого, другого і третього порядків

1)

x_i	1	3
p_i	$0,4$	$0,6$

2)

x_i	1	2	3
p_i	$0,2$	$0,5$	$0,3$

3)

x_i	-1	0	1
p_i	$0,3$	$0,5$	$0,2$

4)

x_i	1	3	4
p_i	$0,1$	$0,3$	$0,6$

5)

x_i	2	3	5
p_i	$0,1$	$0,4$	$0,5$

XIII.79. При якому значенні параметра a функція $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, $x \in R$ буде щільністю розподілу випадкової величини X? Визначити:

а) функцію розподілу випадкової величини X;

б) імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(-1; 1)$.

XIII.80. При якому значенні a функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ a \sin x, \quad 0 < x \le \pi, \\ 0, \quad x > \pi \end{cases}$$

буде щільністю розподілу випадкової величини X? Визначити:

а) ймовірність, що X набуде значення з проміжку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

XIII.81. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \dfrac{1 - \cos x}{2}, \quad 0 < x \le \pi, \\ 0, \quad x > \pi. \end{cases}$$

Визначити:

1) щільність розподілу $p(x)$; 2) $P\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

XIII.82. Випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 2, \\ (x-2)^2, \quad 2 < x \le 3, \\ 1, \quad x > 3. \end{cases}$$

Визначити:

1) щільність розподілу $p(x)$; 2) $P\,(2,5 < x < 4)$.

XIII.83. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, яка задається функцією розподілу:

1) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{16}, \quad 0 < x \le 4, \\ 1, \quad x > 4; \end{cases}$ 2) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, \quad 0 < x \le 5, \\ 1, \quad x > 5; \end{cases}$

3) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \sin x, \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \quad x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 4) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, \quad \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, \quad x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

§6. Закони розподілу деяких випадкових величин

1°. *Біноміальний закон розподілу.* Випадкова величина X, яка набуває значення $0,1,2,\ldots,k,\ldots,n$ з ймовірностями

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q=1-p$$

називається розподіленою за біноміальним законом. Для випадкової величини X, яка розподілена за біноміальним законом

$$MX=np, \qquad DX=npq, \qquad \sigma_x=\sqrt{npq},$$

коефіцієнт асиметрії та ексцес мають вигляд

$$\beta=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \qquad \gamma=\frac{1-6pq}{npq}.$$

2°. *Закон розподілу Пуассона.* Випадкова величина X, яка набуває значення $0,1,2,\ldots$ з ймовірностями

$$P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda>0,$$

називається розподіленою за законом Пуассона з параметром λ.

Для випадкової величини X, яка розподілена за законом Пуассона

$$MX=\lambda, \qquad DX=\lambda, \qquad \sigma_x=\sqrt{\lambda}, \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

3°. *Рівномірний закон розподілу.* Неперервна випадкова величина X, яка набуває значення на відрізку $[a;b]$, має рівномірний розподіл, якщо щільність розподілу $p(x)$ має вигляд

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[a;b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]. \end{cases}$$

Функція розподілу цієї випадкової величини

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

Для випадкової величини X, яка має рівномірний розподіл на $[a;b]$

$$MX=\frac{a+b}{2}, \qquad DX=\frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

4°. *Показниковий закон розподілу.* Неперервна випадкова величина X, яка набуває невід'ємних значень, має показниковий розподіл з параметром λ, якщо щільність її розподілу

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Функція розподілу цієї випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Для випадкової величини X, яка має показниковий розподіл

$$MX=\frac{1}{\lambda}, \qquad DX=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma_x=\frac{1}{\lambda}, \qquad \beta=2, \qquad \gamma=6.$$

5°. *Нормальний розподіл.* Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами a та $\sigma>0$, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Те, що X має нормальний розподіл, коротко записуватимемо у вигляді $X\in N(a,\sigma)$.

Для випадкової величини, яка має нормальний розподіл,

$$MX=a, \qquad DX=\sigma^2, \qquad \sigma_X=\sigma, \qquad \beta=0, \qquad \gamma=0, \qquad M_oX=M_eX=a.$$

Функція розподілу випадкової величини $X\in N(a,\sigma)$ має вигляд

$$F(x)=\Phi^*\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt, \qquad \Phi^*(-x)=1-\Phi^*(x).$$

Ймовірність того, що випадкова величина $X\in N(a,\sigma)$ набуде значення з заданого відрізка $[x_1;x_2]$, обчислюють за формулою

$$P(x_1\le X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\Phi^*\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність того, що нормальна випадкова величина X відхиляється від свого математичного сподівання менше, ніж на ε, обчислюють за формулою

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1.$$

Деколи замість функції $\Phi^*(x)$ використовують функцію

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Очевидно, що $\Phi^*(x)=\Phi(x)+0{,}5$. Тоді

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5, \quad P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right); \quad P(x_1\le X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Нехай $\varepsilon=3\sigma$. Тоді $P(|X-a|<3\sigma)=P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)=2\Phi(3)\approx0{,}9973$. Отже, розподілена за нормальним законом випадкова величина X з імовірністю 0,9973 набуває своїх значень у проміжку $(a-3\sigma;a+3\sigma)$. Це твердження називається правилом "трьох сигм".

XIII.84. Визначити математичне сподівання дискретної випадкової величини X – кількості такого викидання п'яти гральних кубиків, у кожному з яких на двох кубиках з'явиться по одному очку, якщо зроблено двадцять кидань.

XIII.85. Обчислити математичне сподівання та дисперсію кількості лотерейних квитків, на які випадуть виграші, якщо куплено 40 з імовірністю виграшу кожного з них, яка становить 0,05.

XIII.86. Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появ події A в двох незалежних дослідах, якщо ймовірності появи події в цих дослідах однакові і $MX = 0,9$.

XIII.87. Автобуси рухаються з інтервалом 5 хв. Вважаючи, що випадкова величина X – час очікування автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на цьому інтервалі, обчислити середній час очікування і дисперсію часу очікування. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X та обчислити ймовірність того, що час очікування перевищить 3 хв.

XIII.88. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на $[a; b]$. Визначити MX, DX, σ_X. Побудувати функцію розподілу.

XIII.89. Випадкова величина X має показниковий закон розподілу:

1) схематично побудувати графік функції розподілу;

2) визначити MX, DX;

3) обчислити ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення меншого, ніж її математичне сподівання;

4) відшукати $P(|X - MX| < 3\sigma_X$.

XIII.90. Обчислити ймовірність того, що неперервна випадкова величина, яка має показниковий закон розподілу, набуде значення з інтервалу $(a; b)$.

XIII.91. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:

1) $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$; 2) $F(x) = 1 - e^{-2x}$.

XIII.92. Випадкова величина має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Порівняйте ймовірності $P(-0,5 \le X \le -0,5)$ та $P(1 \le X \le 2)$.

XIII.93. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Обчислити $P(15 < X < 25)$.

XIII.94. Випадкова величина має нормальний закон розподілу $N(10; 5)$. Обчислити симетричний щодо MX інтервал, у який з імовірністю p потрапить значення цієї випадкової величини. Розглянути випадки:

1) $p = 0,9974$; 2) $p = 0,9544$; 3) $p = 0,5$.

XIII.95. У нормально розподіленій сукупності 15% значень X є менші, ніж 12 і 40% значень X більші, ніж 16,2. Обчислити середнє значення та середнє квадратичне відхилення розподілу.

XIII.96. Деталь, виготовлену автоматом, вважають якісною, якщо відхилення X контрольованого розміру від заданого не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується стандартним відхиленням σ. Вважаючи, що для цієї технології $\sigma = 5$ і X має нормальний розподіл, з'ясувати, скільки відсотків якісних деталей виробляє автомат. Якою повинна бути точність виготовлення, щоб відсоток якісних деталей підвищився до 98?

XIII.97. Коробки з шоколадом пакує автомат. Їхня середня маса дорівнює 1,06 кг. Відомо, що 5% коробок мають масу меншу, ніж 1 кг. Обчислити середнє квадратичне відхилення, якщо маса коробок розподілена за нормальним законом. Який їх відсоток має масу більшу, ніж 940 г?

§7. Випадкові вектори

Нехай у деякому експерименті визначено випадкові величини $X_1{=}X_1(\omega)$, $X_2{=}$ $=X_2(\omega)$, ..., $X_n{=}X_n(\omega)$, $\omega{\in}\Omega$. Кожній елементарній події можна поставити у відповідність $n-$вимірний випадковий вектор ($n-$вимірну випадкову величину) $X(\omega){=}(X_1,$ $X_2,...,X_n)$.

Функцією розподілу $n-$вимірного випадкового вектора називають функцію n дійсних змінних $x_1,x_2,...,x_n$, яка є ймовірністю того, що одночасно виконуються n нерівностей $X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n$

$$F_X(x)=P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n).$$

Для двовимірного випадкового вектора $Z=(X,Y)$

$$F(x,y)=F_Z(x,y)=P(X<x,Y<y)=P((X<x)\cap(Y<y)).$$

Ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) потрапить у прямокутник $x_1\leq X\leq x_2$, $y_1\leq Y\leq y_2$, можна обчислити за формулою

$$P(x_1\leq X\leq x_2,y_1\leq Y\leq y_2)=F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1).$$

Двовимірний випадковий вектор (X,Y) називається *дискретним*, якщо множина його можливих значень $G(x,y)$ є скінченною або зліченною. Закон розподілу дискретного випадкового вектора (X,Y) можна зобразити у вигляді таблиці, в якій перелічені можливі значення $(x_i,y_j)\in G$, $X=x_i$, $Y=y_j$ і відповідні їм ймовірності $p_{ij}=P(X==x_i,Y=y_j)$, що задовольняють умову

$$\sum_i\sum_j p_{ij}=1.$$

Якщо відомий закон розподілу двовимірного дискретного вектора (X,Y), то можна вивести закони розподілу складових X та Y

$$p_i=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}; \qquad p_j=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}.$$

Нехай (X,Y) – двовимірний дискретний випадковий вектор. *Умовним законом розподілу* випадкової складової X за умови, що складова Y набула певного значення y_j, називають сукупність усіх можливих значень X і умовних ймовірностей, які відповідають цим значенням

$$P(X=x_i/Y=y_j)=\frac{P((X=x_i)\cap(Y=y_j))}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогічно

$$P(Y=y_j/X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Умовним математичним сподіванням випадкової складової X за умови, що Y набула певного значення y_j, називають число

$$M(X/Y=y_j)=\frac{1}{p_j}\sum_i x_i p_{ij}.$$

Аналогічно

$$M(Y/X=x_i)=\frac{1}{p_i}\sum_j x_j p_{ij}.$$

Якщо G – деяка область на площині, то

$$P((X,Y)\in G)=\sum_{\substack{i \quad j\\(x_i,y_j)\in G}}\sum p_{ij}.$$

Двовимірний випадковий вектор (X,Y) називають *неперервним*, якщо існує така невід'ємна, інтегрована за кожною з координат функція $p(x,y)$, що

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv.$$

Функцію $p(x,y)\geq 0$ називають *щільністю розподілу* ймовірностей випадкового вектора (X,Y).

Якщо відома щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (X,Y), то можна знайти щільності розподілу складових

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \qquad p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx.$$

Ймовірність того, що випадкова точка потрапить у задану область G, можна обчислити за формулою

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G p(x,y)dxdy.$$

Умовну щільність розподілу ймовірностей випадкової компоненти X за умови, що компонента Y набула певного значення y такого, що $p_Y(y)>0$, визначають за формулою

$$p_X(x/y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}.$$

Аналогічно

$$p_Y(y/x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

Умовним математичним сподіванням випадкової компоненти X за умови, що Y набула певного значення y, є число

$$M(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x,y)dx.$$

Аналогічно

$$M(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(x,y)dy.$$

Функцію $f(y)=M(X/y)$ називають функцією регресії X на Y, а функцію $\varphi(x)=M(Y/x)$ - функцією регресії Y на X.

Початковим моментом порядку $m+n$ випадкового вектора (X,Y) називають дійсне число

$$\alpha_{m,n}=M(X^mY^n)=\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j x_i^m y_j^n p_{ij}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m y^n p(x,y)dxdy. \end{cases}$$

Числа $\alpha_{m,0}=M(X^m)$ і $\alpha_{0,n}=M(Y^n)$ є відповідними початковими моментами складових X та Y. Вектор $(MX,MY)=(\alpha_{1,0},\alpha_{0,1})$ називається *математичним сподіванням*, або центром розсіяння випадкового вектора (X,Y).

Центральним моментом порядку $m+n$ випадкового вектора (X,Y) називають дійсне число

$$\mu_{m,n}=M((X-MX)^m(Y-MY)^n)=\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j (x_i-MX)^m(y_j-MY)^n p_{ij}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-MX)^m(y-MY)^n p(x,y)dxdy. \end{cases}$$

Зокрема, $\mu_{2,0}=DX$, $\mu_{0,2}=DY$.

Центральний момент $\mu_{1,1}$ називають *коваріацією* і позначають

$$\sigma_{XY}=\operatorname{cov}(X,Y)=M((X-MX)(Y-MY))=M(XY)-(MX)(MY).$$

Коефіцієнтом кореляції компонент двовимірного випадкового вектора (X,Y) називають число

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Коваріаційною матрицею $n-$вимірного випадкового вектора $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ називають симетричну дійсну матрицю, елементами якої є коваріації

$$\sum=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{pmatrix},$$

де $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, $\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)=M((X_i-MX_i)(Y_j-MY_j))$, $\sigma_{ii}=DX_i$.

Кореляційною матрицею $n-$вимірного випадкового вектора $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ називається симетрична дійсна матриця, елементами якої є коефіцієнти кореляції

$$R=\begin{pmatrix}1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n}\\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1\end{pmatrix},$$

де

$$\rho_{ij}=\frac{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{DX_i}\sqrt{DX_j}} \text{ —}$$

коефіцієнти кореляції складових X_i та X_j, $\rho_{ij}=\rho_{ji}$. Для двох випадкових величин X_1 і X_2 коефіцієнт кореляції

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}.$$

Для незалежних випадкових величин $\rho_{X_1X_2}=0$. Обернене твердження загалом неправильне.

Коли відома коваріаційна матриця, дисперсію випадкової величини $U=\sum_{k=1}^{n}c_kX_k$ обчислюють за формулою

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}c_kX_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j\sigma_{ij},$$

де σ_{ij} — коваріації.

XIII.98. Заданий закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини

X\ Y	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Написати закони розподілу складових.

XIII.99. Заданий розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини

X\ Y	5	10	15
7	0,17	0,13	0,25
9	0,10	0,30	0,05

Написати закони розподілу складових.

XIII.100. Задана дискретна двовимірна випадкова величина. Вивести:

а) безумовні закони розподілу складових;

б) умовний закон розподілу X за умови, що $Y = 10$;

в) умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 6$.

Y\ X	3	6
10	0,25	0,1
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

XIII.101. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини

Y\ X	4	7	10
1,4	0,15	0,30	0,35
1,8	0,05	0,12	0,03

Написати:

а) безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y;

б) умовний закон розподілу X за умови, що $Y = 1,4$;

в) умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 7$.

XIII.102. Заданий розподіл дискретного випадкового вектора (X, Y)

X\ Y	-2	0	1
-1	0,30	0,15	0,35
2	0,12	0,05	0,03

Написати закони розподілу випадкових величин:

а) $X + Y$; б) $X - Y$; в) XY.

XIII.103. Заданий розподіл дискретного випадкового вектора (X, Y)

X\ Y	-1	0	1
-2	0,01	0,03	0,06
-1	0,02	0,24	0,09
0	0,05	0,15	0,16
1	0,03	0,06	0,10

Написати закони розподілу випадкових величин $X + Y$, XY.

XIII.104. Заданий розподіл двовимірного випадкового вектора (X, Y)

X\ Y	-2	-1	0	1
-1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,10

Написати закони розподілу випадкових величин

$$X + Y,\ X - Y,\ 2X - 3Y,\ |X| - Y.$$

XIII.105. У цеху виготовляють деталі, які сортують на чотири групи за відхиленням їхнього внутрішнього діаметра від стандарту зі значенням 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм та за відхиленням їхнього зовнішнього діаметра від стандарту із значенням 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм відповідно. Розподіл відхилень внутрішнього діаметра X і зовнішнього Y заданий таблицею

X\ Y	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06
0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

Обчислити математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення X та Y і коефіцієнт кореляції між ними.

XIII.106. Випадковий вектор (X, Y) заданий законом розподілу:

X\ Y	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

а) написати безумовні закони розподілу складових X та Y;

б) з'ясувати, чи залежні складові X та Y;

в) обчислити ймовірності $P(X = 2,\ Y \geq 0)$ і $P(X > Y)$.

XIII.107. Побудувати функцію розподілу випадкового вектора, який заданий у задачі XIII.106.

XIII.108. Обчислити коваріаційну матрицю випадкового вектора (X, Y) із задачі XIII.106.

XIII.109. Для випадкового вектора (X, Y) із задачі XIII.106 написати умовний закон розподілу випадкової величини Y за умови $X = 1$ і обчислити умовне математичне сподівання $M(Y/X = 1)$.

XIII.110. Задана функція розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, \text{ якщо } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0, \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$. Обчислити щільність розподілу.

XIII.111. Задана функція розподілу випадкового вектора

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), \text{ якщо } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0, \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Обчислити щільність розподілу.

XIII.112. Задана щільність розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$p(x, y) = \frac{C}{(x^2 + 9)(y^2 + 16)}.$$

Обчислити C.

XIII.113. Задана щільність розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$p(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Обчислити C.

XIII.114. Задана щільність розподілу неперервного випадкового вектора (X, Y)

$$p(x, y) = Ce^{-x^2 - 2xy - 4y^2}.$$

Обчислити:

а) сталий множник C;

б) щільності розподілу складових;

в) умовні щільності розподілу складових.

XIII.115. Задана щільність розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$p(x, y) = \begin{cases} xye^{-x^2 - y^2}, \text{ якщо } x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0, \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Обчислити математичне сподівання та дисперсію складових X та Y.

XIII.116. Задана щільність розподілу неперервного випадкового вектора

$$p(x, y) = \begin{cases} 2\cos x \cos y, \text{ якщо } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ 0, \text{ якщо } x \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ y \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Обчислити математичні сподівання та дисперсію складових, коваріацію.

XIII.117. Задана щільність розподілу випадкового вектора

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x + y), \text{ якщо } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, \text{ якщо } x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ y \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Обчислити математичні сподівання та дисперсію складових, коваріацію.

§8. Закон великих чисел. Граничні теореми

Наведені нижче твердження та теореми — це суть групи законів, які об'єднані загальною назвою *закон великих чисел.*

Теорема (нерівність Маркова). Якщо випадкова величина X може набувати лише невід'ємних значень і вона має скінченне математичне сподівання, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}.$$

З останньої нерівності отримаємо, що

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}.$$

Якщо випадкова величина X має $M(|X|)$, то

$$P(|X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(|X|)}{\varepsilon}, \qquad P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(|X|)}{\varepsilon}.$$

Теорема (нерівність Чебишова). Якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

З цієї нерівності отримаємо, що

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Нехай $\varepsilon = 3\sigma$. Тоді отримаємо

$$P(|X - MX| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9} \approx 0{,}8888.$$

Аналогічно

$$P(|X - MX| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9} \approx 0{,}1111.$$

Наслідки з нерівності Чебишова.

1. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, $MX_k = a_k$, $DX_k = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \ldots,$, причому дисперсії рівномірно обмежені числом M, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

2. Якщо $MX_k = a$, $DX_k = \sigma^2$, $k = 1, 2, \ldots,$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

3. Нехай $\frac{m}{n}$ — відносна частота появ події A в n незалежних випробуваннях, p — ймовірність появ події A в кожному з цих випробувань. Тоді

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова (закон великих чисел). Якщо випадкові величини в послідовності $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні, а їхні дисперсії обмежені згори тим самим числом C, тобто $DX_i \leq C$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Наслідок. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $MX_k = a$, $DX_k = \sigma^2$, $k = 1, 2, \ldots,$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Бернуллі. Відносна частота успіхів у n незалежних випробуваннях Бернуллі збігається за ймовірністю при $n \to \infty$ до ймовірності успіху в одному випробуванні, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Центральна гранична теорема (у формулюванні Ляпунова). Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ випадкові величини незалежні, однаково розподілені, мають скінченні математичне сподівання MX та дисперсію σ_x^2, то для довільного дійсного x

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - MX}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Теорема Ляпунова твердить, що при досить великих n розподіл стандартизованого середнього арифметичного n випадкових величин $Y_n = \dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - MX}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$ прямує до нормального нормованого розподілу $N(0,1)$.

XIII.118. Сума всіх вкладів у деякому банку становить 20 млн грн, а ймовірність того, що випадково вибраний вклад не перевищує 10000 грн, дорівнює 0,8. Оцінити кількість вкладників.

XIII.119. Підстанція обслуговує сітку із 18000 ламп. Ймовірність вмикання кожної з ламп становить 0,9. Оцінити ймовірність того, що кількість увімкнутих ламп відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 200.

XIII.120. Випадкова величина має закон розподілу

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Визначити $P(|X - MX|) \le 2)$. Оцінити цю ймовірність, використовуючи нерівність Чебишова.

XIII.121. Оцінити ймовірність того, що кількість осіб, які мають вищу освіту серед 800 осіб відрізняється від свого математичного сподівання менше, ніж на 30.

XIII.122. Для визначення середнього часу горіння електролампи з партії, яка складається з 200 однакових ящиків, узяли по одній лампі з кожного ящика. Оцінити знизу ймовірність того, що середній час горіння відібраних 200 електроламп відрізняється від середнього часу горіння в усій партії за абсолютною величиною менше, ніж на 5 год, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення часу горіння довільної лампи в кожному ящику менше, ніж 7 год.

XIII.123. Скільки разів потрібно вимірювати деяку величину, істинне значення якої дорівнює a, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0,95 можна було твердити, що середнє арифметичне значення цих вимірювань відрізняється від a за абсолютною величиною менше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення кожного з вимірювань менше, ніж 10?

XIII.124. Нехай ймовірність того, що покупцю взуттєвого магазину потрібні черевики 40 розміру становить 0,15. Оцінити межі відсотка покупців серед 2000 відвідувачів магазину, яким потрібні черевики, якщо ці межі потрібно гарантувати з ймовірністю 0,98.

XIII.125. Дисперсія кожної з 4500 незалежних однаково розподілених випадкових величин дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне цих випадкових величин відхиляється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04:

а) за допомогою нерівності Чебишова;

б) за допомогою центральної граничної теореми.

XIII.126. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менше, ніж на три середні квадратичні відхилення.

XIII.127. Довести нерівність Чебишова у вигляді

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

XIII.128. Нехай $P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 0,9$, $DX = 0,009$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ε знизу.

XIII.129. В освітлювальну мережу ввімкнуто паралельно 20 ламп. Імовірність того, що за час T лампа буде ввімкнута становить 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнутих ламп і середньою кількістю ввімкнутих ламп за час T виявиться: а) меншою, ніж 3; б) не меншою, ніж 3.

XIII.130. Ймовірність появи події в кожному досліді становить 0,25. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що кількість X появ події A міститься в межах від 150 до 250, якщо зроблено 800 дослідів.

XIII.131. Ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює 0,5. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що кількість X появ події A міститься в межах від 40 до 60, якщо зроблено 100 незалежних дослідів.

XIII.132. Середня кількість споживання води в населеному пункті становить 50 000 л на день. Оцінити ймовірність того, що у цьому населеному пункті споживання води у вівторок не перевищить 150 000 л.

XIII.133. Середнє споживання електроенергії за липень у деякому місті становило 360 000 кВт·год:

а) оцінити імовірність того, що споживання електроенергії у липні наступного року перевищить 1 000 000 кВт год;

б) оцінити ту саму ймовірність, якщо середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії в місті за липень становило 40 000 кВт·год.

XIII.134. Ймовірність деякої події A в кожному випробуванні з серії n незалежних дослідів $p = \dfrac{1}{3}$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що відносна частота цієї події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,01, якщо буде проведено:

а) n=9 000 дослідів;

б) n=75 000 дослідів.

Порівняти отримані оцінки з результатами застосування інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

XIII.135. За умови попередньої задачі знайти найменшу кількість дослідів так, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0,99, відносна частота події A відхилялась за абсолютною величиною від її ймовірності не більше, ніж на 0,01, використовуючи:

а) нерівність Чебишова;

б) інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

XIII.136. За умови задачі XIII.134 визначити границю абсолютної величини відхилення відносної частоти події A від її ймовірності, якої можна сподіватися з ймовірністю, не меншою, ніж 0,99, зробивши 12 100 дослідів:

а) за допомогою нерівності Чебишова;

б) застосувавши інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

XIII.137. Для визначення середнього часу горіння електролампочок у партії зі 100 однакових ящиків узяли по одній лампочці з кожного ящика. Оцінити імовірність того, що відхилення середнього часу горіння лампочки в вибраній сукупності від середнього часу горіння лампочки в усій партії не перевищить 8 год, якщо середнє квадратичне відхилення часу горіння електролампочки в партії не перевищить 10 год.

У задачах XIII.138 – XIII.141 задано закони розподілу попарно незалежних випадкових величин. Чи можна застосувати до цих випадкових величин теорему Чебишова?

XIII.138.

x_{n_i}	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$P(X_n = x_{n_i})$	$1/n$	$1-2/n$	$1/n$

XIII.139.

x_{n_i}	$-na$	0	na
$P(X_n = x_{n_i})$	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

XIII.140.

x_{n_i}	$-na$	0	na
$P(X_n = x_{n_i})$	$1/2^n$	$1-1/2^{n-1}$	$1/2^n$

XIII.141.

x_{n_i}	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
$P(X_n = x_{n_i})$	$0,5$	$0,5$

XIII.142. У деякому автопарку середня кількість автобусів, які відправляють у ремонт після місяця експлуатації на міських маршрутах, становить 5. Оцінити ймовірність події $A = \{$після місяця експлуатації в ремонт відправляють менше, ніж 15 автобусів$\}$, якщо немає інформації про дисперсію.

XIII.143. Оцінити ймовірність події A з попередньої задачі, якщо дисперсія дорівнює 4.

XIII.144. У результаті медичного огляду 900 студентів першого курсу виявили, що середня маса студентів на 1,2 кг більша, ніж середня маса студентів минулого року. Чи можна пояснити це відхилення випадковістю, якщо середнє квадратичне відхилення маси студентів становить 8 кг?

XIII.145. Випадкова величина X є середнім арифметичним незалежних і однаково розподілених випадкових величин, дисперсія кожної з яких становить 5. Скільки потрібно взяти таких величин, щоб випадкова величина X з ймовірністю не меншою, ніж 0,9973 відхилялася від свого математичного сподівання не більше, ніж на 0,01?

XIII.146. Випадкова величина X є середнім арифметичним 10 000 незалежних, однаково розподілених випадкових величин, середнє квадратичне відхилення кожної з них становить 2. Яке максимальне відхилення величини X від її математичного сподівання можна сподіватися з ймовірністю не меншою, ніж 0,9544?

XIII.147. Для визначення середнього часу горіння досліджують партію електролампочок. Яким повинен бути обсяг вибірки, щоб з імовірністю, не меншою, ніж 0,9876 можна було твердити, що середній час горіння лампочки у всій партії відхилиться від середнього часу, отриманого в вибірці, не більше, ніж на 10 год, якщо середнє квадратичне відхилення часу горіння лампочки становить 80 год?

XIII.148. За умови попередньої задачі визначити найменшу кількість електролампочок, які треба взяти для дослідження, щоб з імовірністю 0,9973 твердити, що середній час горіння лампочок в усій партії відхилиться від часу, отриманого в вибірці, не більше, ніж на 5 год.

РОЗДІЛ XIV

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

§1. Варіаційні ряди та їхні характеристики

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант x_i варіаційного ряду і частот n_i, які їм відповідають

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Емпіричною функцією розподілу вибірки називають функцію

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

де n_x – кількість варіант, що менші, ніж x, $n=\sum_i n_i$ — об'єм вибірки.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_1,n_1), (x_2,n_2), ..., (x_k,n_k), де x_i – варіанти вибірки і n_i – відповідні їм частоти. Аналогічно будується полігон відносних частот $\omega_i=\frac{n_i}{n}$.

При великому об'ємі вибірки, що характеризує неперервну випадкову величину, її елементи об'єднують у групи, представляючи результати дослідів у вигляді згрупованого статистичного ряду. Для цього інтервал, в якому міститься варіаційний ряд, розбивають на $k\approx\sqrt{n}$ інтервалів, що не перетинаються. *Гістограмою розподілу* називають східчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжиною $h\approx\frac{x_{\max}-x_{\min}}{n}$, а висоти дорівнюють $\frac{\omega_i}{h}$.

Нехай $F(x,\Theta)$ — функція розподілу випадкової величини X, яка характеризується одним параметром Θ, а $x_1,x_2,...,x_n$ — вибірка цієї випадкової величини. Точковою оцінкою Θ^* невідомого параметра Θ випадкової величини X (генеральної сукупності) називають наближене значення цього параметра, яке одержали за вибіркою.

Оцінка Θ^* параметра Θ називається *незміщеною*, якщо $M\Theta^*=\Theta$, *спроможною*, якщо $\forall\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\Theta^*-\Theta|<\varepsilon)=1$ і *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію серед усіх незміщених оцінок параметра Θ.

Нехай генеральна сукупність X має математичне сподівання MX, дисперсію DX, середнє квадратичне відхилення σ, початкові та центральні моменти α_m, μ_m. Оцінками цих параметрів будуть відповідно вибіркове середнє $\overline{x}_в$, вибіркова дисперсія $D_в$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$ та вибіркові моменти α_m^* і μ_m^*, які визначаються рівностями

$$\overline{x}_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \quad D_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x}_b)^2 n_i, \quad \sigma_в=\sqrt{D_в},$$

$$\alpha_m^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^m n_i, \quad \mu_m^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x}_b)^m n_i.$$

Незміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності є виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x}_в)^2 n_i.$$

Уявлення про точність оцінки дає інтервал надійності, тобто такий інтервал $(\Theta^*-\delta,\Theta^*+\delta)$, який з імовірністю γ, близькою до 1, накриває невідомий параметр Θ

$$P(\Theta^*-\delta<\Theta<\Theta^*+\delta)=\gamma.$$

Інтервал $(\Theta^*-\delta,\Theta^*+\delta)$ називають інтервалом довіри, число γ — надійністю, δ — точністю оцінки.

Нехай генеральна сукупність X розподілена за нормальним законом. Інтервальною оцінкою з надійністю γ математичного сподівання a за вибірковою середньою $\overline{x}_в$ є такий інтервал довіри:

1) при відомому середньому квадратичному відхиленні σ генеральної сукупності

$$\overline{x}_в-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_в+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ — точність оцінки, n – об'єм вибірки, t — розв'язок рівняння $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$;

2) при невідомому σ

$$\overline{x}_в-\frac{t_{\gamma,\nu}s}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_в+\frac{t_{\gamma,\nu}s}{\sqrt{n}},$$

де s — виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, $t_{\gamma,\nu}$ знаходять з таблиць розподілу Стьюдента для заданого γ і $\nu=n-1$ ступеня вільності.

Інтервальною оцінкою з надійністю γ середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності X за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s є інтервал

$$\max\{s(1-q),0\}<\sigma<s(1+q),$$

де q — визначають за таблицями (табл. 4 додатку 1) для заданих γ і n.

XIV.1. Річний прибуток 28 фермерів району становив 2,0, 2,3, 2,7, 2,6, 2,6, 2,5, 2,6, 2,7, 2,8, 2,8, 2,7, 2,7, 2,6, 2,6, 2,6, 2,6, 2,6, 2,7, 2,6, 2,6, 2,5, 2,4, 2,4, 2,3 тис. грн. Визначити середній прибуток, медіану, моду, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт асиметрії.

XIV.2. З генеральної сукупності зроблено вибірку. Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу. Знайти незміщену оцінку генеральної середньої

1)

x_i	−2	4	7	9
n_i	3	8	15	4

2)

x_i	1	3	5	7	9
n_i	8	12	15	19	6

3)

x_i	25	26	27	28	29
n_i	1	4	5	4	2

4)

x_i	32	33	34	35	36	37	38
n_i	1	3	4	6	5	2	1

XIV.3. За розподілом вибірки знайти вибіркову дисперсію та незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності

1)

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

2)

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

3)

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

4)

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

5)

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

6)

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

XIV.4. За розподілом вибірки побудувати емпіричну функцію та гістограму розподілу

1)

$[x_i; x_{i+1})$	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)
n_i	1	2	7	18	12	8	2

2)

$[x_i; x_{i+1})$	[18;20)	[20;22)	[22;24)	[24;26)	[26;28)	[28;30)	[30;32)	[32;34)
n_i	4	3	3	2	4	7	12	5

XIV.5. Річний прибуток сорока підприємств становить 17, 21, 8, 20, 23, 18, 22, 20, 17, 12, 20, 11, 9, 19, 20, 9, 19, 17, 21, 13, 17, 22, 22, 10, 20, 20, 15, 19, 20, 20, 13, 21, 21, 9, 14, 11, 19, 18, 23, 19 тис. грн. Обчислити середній прибуток і дисперсію: 1) для незгрупованої вибірки; 2) для згрупованої вибірки з довжиною інтервалу $h = 2$.

XIV.6. Знайти вибіркове середнє та незміщену оцінку дисперсії за вибіркою 69, 73, 70, 68, 61, 73, 70, 72, 67, 70, 66, 70, 76, 68, 71, 71, 68, 70, 64, 65, 72, 70, 70, 69, 66, 70, 77, 69, 71, 74, 72, ,72, 72, 68, 70, 67, 72, 69, 66, 75, 76, 69, 71, 67, 70, 73, 71, 74, попередньо згрупувавши її.

XIV.7. Визначити вибіркове середнє, дисперсію, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Побудувати гістограму та емпіричну функцію розподілу

1)

$[x_i; x_{i+1})$	[61;65)	[65;69)	[69;73)	[73;77)	[77;81)
n_i	1	4	5	8	14
$[x_i; x_{i+1})$	[81;85)	[85;89)	[89;93)	[93;97)	[97;101)
n_i	9	6	1	1	1

2)

$[x_i; x_{i+1})$	[49;52)	[52;55)	[55;58)	[58;61)	[61;64)	[64;67)	[67;70)
n_i	3	6	11	19	30	21	10

XIV.8. X — кількість угод, укладених на фондовій біржі протягом кварталу, n — кількість таких бірж. Визначити вибіркове середнє, медіану, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, початкові та центральні моменти до четвертого порядку, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу бірж за кількістю угод

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

XIV.9. Розподіл підприємців за середньомісячним доходом задано таблицею.

$[x_i; x_{i+1})$	[0;500)	[500;1000)	[1000;1500)	[1500;2000	[2000;2500)	[2500;3000)
n_i	58	96	239	328	147	132

Визначити вибіркове середнє, медіану, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, початкові та центральні моменти до четвертого порядку, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Побудувати гістограму, емпіричну функцію розподілу.

XIV.10. Знайти інтервал довіри для оцінки з надійністю 0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркове середнє $\overline{x}_в$ і об'єм вибірки n:

1) $\sigma = 4$; $\overline{x}_в = 10,2$; $n = 16$; 2) $\sigma = 5$; $\overline{x}_в = 16,8$; $n = 25$.

XIV.11. З великої партії електроламп зробили вибірку у 100 ламп. Середній час горіння цих ламп становив 1000 год. Визначити з надійністю 0,95 інтервал довіри для середнього часу горіння ламп в усій партії, якщо середнє квадратичне відхилення часу горіння лампи $\sigma = 40$ год, і час горіння ламп розподілений за нормальним законом.

XIV.12. Визначити мінімальний обсяг вибірки, за яким з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a генеральної сукупності за вибірковою середньою становить Δ, якщо відоме середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності:

1) $\gamma = 0,975,\ \Delta = 0,3,\ \sigma = 1,2$; 2) $\gamma = 0,925,\ \Delta = 0,2,\ \sigma = 1,5$.

XIV.13. З генеральної сукупності зроблено вибірку. Знайти інтервал довіри з надійністю 0,95 для математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності

1)

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2)

x_i	$-0,5$	$-0,4$	$-0,2$	0	$0,2$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,5$
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

XIV.14. У результаті дослідження стажу роботи співробітників підприємства отримали такі дані

Стаж (роки)	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30
Кількість	1	2	6	33	12	9	3

Побудувати гістограму та емпіричну функцію розподілу. Знайти:

а) середній стаж роботи і середнє квадратичне відхилення;

б) інтервал довіри, в якому з надійністю 0,9975 міститься середній стаж роботи робітників.

в) інтервал довіри, в якому з надійністю 0,95 міститься дисперсія стажу роботи робітників, якщо стаж має нормальний розподіл.

XIV.15. За вибіркою обсягом n з нормально розподіленої генеральної сукупності знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення s. Знайти інтервал довіри, в якому з надійністю 0,999 міститься середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності, якщо:

1) $n = 10, \quad s = 5,1;$ 2) $n = 50, \quad s = 14.$

XIV.16. Річний дохід 12 фермерів району становив 4,6, 6,1, 10,3, 9,8, 6,7, 12,3, 14,5, 8,7, 9,0, 7,3, 8,8 та 11,2 тис. грн. Вважаючи, що дохід розподілений за нормальним законом, з надійністю 0,99 визначити інтервал довіри для генеральної дисперсії.

XIV.17. Під час психологічних досліджень на вибірці з 52 чоловік за опитувальником Кеттела (фактор О) одержали такі значення стенів:

6 7 4 4 4 5 4 4 6 3 5 4 4 4 7 6 4 5 5 4 4 4 6 3 2 3
4 4 4 4 3 6 4 7 5 4 7 4 5 6 4 2 4 5 3 4 6 3 4 5 6 4

За цими даними побудувати полігон частот, емпіричну функцію розподілу. Визначити моду, медіану та квартилі варіаційного ряду. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання, дисперсії та виправлене середньоквадратичне відхилення досліджуваної випадкової величини. Визначити з надійністю 0,95 інтервал довіри для математичного сподівання.

XIV.18. У досліді з вивчення амплітудно-частотної характеристики усталених коливань руки людини-оператора одержали такі значення амплітуд (у мм)

64 72 60 67 63 65 60 75 51 80 65 62 73 62 71 63 75 66 67 61
55 56 64 61 65 69 65 68 58 62 52 68 72 63 66 62 70 64 71 57
67 60 68 60 60 58 57 60 64 59 64 65 60 59 60 68 66 53 73 63
58 62 63 55 61 45 46 64 72 70 70 63 63 62 62 68 63 67 62 62
69 71 58 60 64 70 73 52 59 54 64 65 70 65 58 52 66 58 66 72
56 55 60 54 59 71 63 55 55 58 66 62 82 54 74 58 71 65 62 65
55 62 75 62 70 64 63 65 70 65 56 58 56 65 62 73 66 55 68 62
62 60 63 68 64 60 71 61 62 55 51 44 73 52 66 60 67 57 62 62
62 60 57 60 58 62 58 52 62 61 61 67 60 53 50 49 59 48 52 54
42 57 51 66 51 56 55 56 54 53 41 55 54 58 51 58 62 62 51 62

За цими даними побудувати гістограму розподілу, емпіричну функцію розподілу. Визначити медіану та квартилі інтервального варіаційного ряду. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання, дисперсії та виправлене середньоквадратичне відхилення досліджуваної випадкової величини. Визначити з надійністю 0,95 інтервал довіри для математичного сподівання та дисперсії.

XIV.19. Для дослідження доходів населення великого міста відібрано 1000 сімей. Отримано такий розподіл сімей за місячним доходом (у грн.)

< 500	$500 - 1000$	$1000 - 1500$	$1500 - 2000$	$2000 - 2500$	> 2500
58	96	239	328	147	132

1) визначити ймовірність того, що середній місячний дохід сім'ї у місті відрізняється за модулем від вибіркового середнього не більше, ніж на 45 грн.; 2) визначити межі, в яких з надійністю 0,99 міститься середній місячний дохід сімей міста; яким повинен бути обсяг вибірки, щоб ці межі гарантувати з надійністю 0,9973? 3) визначити ймовірність того, що частка малозабезпечених сімей у місті (до 500 грн.) відрізняється за модулем від частки таких самих сімей у вибірці не більше, ніж на 1%; 4) визначити межі, в яких з надійністю 0,98 перебуває частка малозабезпечених сімей; яким повинен бути обсяг вибірки, щоб ці межі гарантувати з надійністю 0,9973?

XIV.20. Для галузі, яка складається з 1200 підприємств, зроблено випадкову вибірку, що містить 45 підприємств. За вибіркою з'ясувалось, що на підприємстві в середньому працює 77,5 осіб з середнім квадратичним відхиленням 20 працівників: 1) користуючись 90% інтервалом довіри, оцінити кількість працівників на одному підприємстві і кількість працівників галузі; 2) користуючись 95% інтервалом довіри, оцінити дисперсію працівників підприємства у всій галузі.

XIV.21. Працівники відділу маркетингу деякої фірми, оцінюючи поінформованість про її продукцію, опитали на кожній з п'яти вулиць по 40 осіб. Кількість осіб, знайомих з продукцією фірми, виявилась відповідно 20, 10, 30, 10 та 15 осіб: 1) методами моментів і максимальної правдоподібності оцінити, наскільки відома продукція фірми; 2) побудувати 90% та 95% інтервали довіри для рівня інформованості про продукцію фірми; 3) користуючись 95% інтервалом довіри, оцінити кількість людей, які знають продукцію фірми серед 2000 жителів кварталу.

XIV.22. Серед 200 працівників банку випадково вибрали 20 осіб. Їх середня місячна зарплата становить 600 грн., а її середнє квадратичне відхилення — 100 грн. Вважаючи, що заробітна плата розподілена нормально, з надійністю 0,95 оцінити середню зарплату працівників банку та фонд заробітної плати банку.

XIV.23. З партії, що складається з 8000 телевізорів, випадково відібрали 800. Серед них 10% виявились неякісними. Визначити межі, у яких з імовірністю 0,95 міститься частка якісних телевізорів.

XIV.24. За результатами соціологічного опитування серед 1500 респондентів рейтинг міського голови становив 30%. Визначити межі, у яких з надійністю 0,95 міститься рейтинг міського голови. Скільки респондентів потрібно опитати, щоб помилка соціологічного опитування не перевищувала 1% з надійністю 0,99?

XIV.25. Проводять незалежні випробування за схемою Бернуллі. Визначити з надійністю 0,95 інтервал довіри для оцінки ймовірності появи події в одному експерименті, якщо в 60 випробуваннях подія з'явилась 15 разів.

§2. Перевірка статистичних гіпотез

Статистичними гіпотезами називають припущення про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів.

Поряд з основною гіпотезою H_0, яку називають нульовою, розглядають одну з альтернативних (конкурентних) гіпотез H_1. Вибір конкурентної гіпотези визначається конкретним формулюванням задачі. Правило, за яким вирішують прийняти або відхилити гіпотезу H_0, називають статистичним критерієм.

Розглянемо дві генеральні сукупності, які мають нормальний розподіл. Вибірки з них позначимо відповідно $X=(X_1,X_2,\ldots,X_{n_1})$ та $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2})$.

1°. *Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей.* Нехай за незалежними вибірками, об'єми яких n_1 і n_2, взятими з нормальних генеральних сукупностей, знайдені виправлені вибіркові дисперсії. При рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій $H_0\colon DX=DY$. Критерієм перевірки нульової гіпотези є статистика $F_{\text{емп}}=\frac{s_1^2}{s_2^2}$, яка при правильності основної гіпотези H_0 має розподіл Фішера з $k_1=n_1-1$ і $k_2=n_2-1$ ступенями вільності. Тут k_1 — кількість ступенів вільності вибірки, яка має більшу виправлену дисперсію. Критичні точки знаходять залежно від вигляду конкурентної гіпотези.

H_1: більшу дисперсію має сукупність, вибірка з якої має більше значення s^2.

З таблиць розподілу Фішера знаходимо критичну точку $F_{\text{кр}}=F(\alpha,k_1,k_2)$. Якщо $F_{\text{емп}}<F_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу приймають, якщо $F_{\text{емп}}>F_{\text{кр}}$ — нульову гіпотезу відкидають (приймають альтернативну гіпотезу H_1).

$H_2{:}DX\neq DY$.

У цьому випадку $F_{\text{кр}}=F\left(\frac{\alpha}{2},k_1,k_2\right)$. Якщо $F_{\text{емп}}<F_{\text{кр}}$, то H_0 приймають, якщо ж $F_{\text{емп}}>F_{\text{кр}}$ — H_0 відкидають (тобто приймають H_2).

2°. *Порівняння двох середніх нормальних генеральних сукупностей при відомих дисперсіях (великі незалежні вибірки).* Нехай за незалежними вибірками, об'єми яких n_1 і n_2, взятими з нормальних незалежних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\overline{x}$ і $\overline{y}$. Вважається, що генеральні дисперсії DX і DY відомі. При рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу $H_0\colon MX=MY$ про рівність математичних сподівань цих генеральних сукупностей.

Критерієм перевірки нульової гіпотези слугує величина

$$Z_{\text{емп}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{DX}{n_1}+\frac{DY}{n_2}}},$$

яка за умови правильності основної гіпотези має стандартний нормальний розподіл. Критичні точки шукають залежно від вигляду конкурентної гіпотези.

H_1: $MX\neq MY$.

В цьому випадку критичну точку $Z_{\text{кр}}$ шукаємо з умови $\Phi(Z_{\text{кр}})=\frac{1-\alpha}{2}$. Гіпотезу H_0 приймають, якщо $|Z_{\text{емп}}|<Z_{\text{кр}}$, і відхиляють в іншому випадку.

H_2: $MX>MY$.

Критичну точку $Z_{\text{кр}}$ шукаємо з умови $\Phi(Z_{\text{кр}})=\frac{1-2\alpha}{2}$. Гіпотезу H_0 приймають, якщо $Z_{\text{емп}}<Z_{\text{кр}}$, і відхиляють в іншому випадку.

H_3: $MX<MY$.

Критичну точку $Z_{\text{кр}}$ шукаємо з умови $\Phi(Z_{\text{кр}})=\frac{1-2\alpha}{2}$. Гіпотезу H_0 приймають, якщо $Z_{\text{емп}}>-Z_{\text{кр}}$, і відхиляють в іншому випадку.

3°. *Порівняння двох середніх нормальних генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі й однакові (малі незалежні вибірки).* Нехай за незалежними вибірками, об'єми яких n_1 і n_2, взятими з нормальних незалежних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\overline{x}$ і $\overline{y}$ та виправлені вибіркові дисперсії s_X^2, s_Y^2. Генеральні дисперсії невідомі, але вважається, що вони рівні. При рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу H_0:$MX=MY$. Як критерій перевірки нульової гіпотези розглядається величина

$$T_{\text{емп}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_X^2+(n_2-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}},$$

яка за умови правильності нульової гіпотези має розподіл Стьюдента з $k=n_1+n_2-2$ ступенями вільності. Критичну область шукаємо залежно від вигляду конкурентної гіпотези.

H_1: $MX\neq MY$.

З таблиці критичних точок розподілу Стьюдента шукаємо $t_{\text{дв.кр}}(\alpha,k)$. Якщо $|T_{\text{емп}}|<t_{\text{дв.кр}}(\alpha,k)$, то нульову гіпотезу H_0 приймають. В іншому випадку приймають альтернативну гіпотезу.

H_2: $MX>MY$.

З таблиці критичних точок розподілу Стьюдента знаходимо $t_{\text{пр.кр}}(\alpha,k)$. Якщо $T_{\text{емп}}<t_{\text{пр.кр}}(\alpha,k)$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше приймаємо альтернативну гіпотезу.

H_3: $MX<MY$.

Якщо $T_{\text{емп}}>-t_{\text{пр.кр}}(\alpha,k)$, то нульову гіпотезу приймаємо, інакше приймаємо альтернативну гіпотезу.

4°. *Критерій Пірсона.* Для статистичної перевірки гіпотези про те, що генеральна сукупність має функцію розподілу $F(x)$, часто використовують критерій χ^2 Пірсона. Вибіркове значення статистики критерію χ^2 обчислюється за формулою

$$\chi^2_{\text{емп}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}.$$

Якщо правильна нульова гіпотеза H_0, то при $n\to\infty$ випадкова величина $\chi^2_{\text{емп}}$ збігається до розподілу χ^2 з $k-1$ ступенями вільності. Якщо за вибіркою шукають оцінки невідомих параметрів функції розподілу $F(x)$, то кількість ступенів свободи $m=k-1-s$, де s — кількість параметрів, які оцінюють за вибіркою.

При заданому рівні значущості α і кількості ступенів вільності $m=k-s-1$ з таблиць критичних точок розподілу χ^2 знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha,m)$. Якщо $\chi^2_{\text{емп}}<\chi^2_{\text{кр}}$, то гіпотезу H_0 приймаємо, інакше приймаємо альтернативну гіпотезу.

XIV.26. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1=9$, $n_2=16$, які зроблено з нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдено виправлені вибіркові дисперсії $S_x^2 = 34,02$; $S_y^2 = 12,15$. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, при конкурентній гіпотезі $K: DX > DY$.

XIV.27. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 14$, $n_2 = 10$, які зроблено з нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдено виправлені вибіркові дисперсії $S_x^2 = 0,84$; $S_y^2 = 2,52$. При рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, при конкурентній гіпотезі $H_1: DX \neq DY$.

XIV.28. Вимірюючи ту саму величину двома методами, одержали такі результати:

$x_1 = 9,6$, $x_2 = 10,0$, $x_3 = 9,8$, $x_4 = 10,2$, $x_5 = 10,6$;

$y_1 = 10,4$, $y_2 = 9,7$, $y_3 = 10,0$, $y_4 = 10,3$.

Чи можна при рівні значущості 0,1 вважати, що обидва методи мають однакову точність, якщо результати обох вимірювань розподілені нормально і вибірки незалежні?

XIV.29. Для порівняння точності двох верстатів-автоматів взято дві вибірки

x_i	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42

y_i	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38

При рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити гіпотезу про те, що верстати мають однакову точність, при конкурентній гіпотезі, що точність неоднакова.

XIV.30. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 45$, $m = 60$, які зроблено з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\overline{x} = 150$, $\overline{y} = 160$. Відомі генеральні дисперсії $DX = 90$, $DY = 120$. Потрібно при рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу при конкурентній $H_1: MX \neq MY$.

XIV.31. За двома незалежними малими вибірками, об'єми яких $n = 12$, $m = 18$, зробленими з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдено вибіркові середні $\overline{x} = 31,2$, $\overline{y} = 29,2$ і виправлені дисперсії $s_X^2 = 0,84$; $s_Y^2 = 0,4$. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: MX = MY$ при конкурентній $H_1: MX \neq MY$.

XIV.32. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх нормальних сукупностей X і Y при конкурентній гіпотезі $H_1: MX > MY$ за такими вибірками

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5
n_i	1	2	4	2	1

y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	6	8	2

XIV.33. Щоденний виторг (у тис. грн.) двох магазинів фірми наведено в таблицях

Перший магазин

x_i	3,4	3,5	3,7	3,9
n_i	2	3	4	1

Другий магазин

y_i	3,2	3,4	3,6
n_i	2	2	8

Чи можна стверджувати з рівнем значущості 0,02, що їх сердні щоденні виторги рівні.

XIV.34. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості 0,05, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про рівноймовірний розподіл генеральної сукупності X з заданим емпіричним розподілом

1)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	24	25	13	8	15	10	9	8

2)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	98	113	116	87	91	112	97	86

XIV.35. Оператор, зчитуючи показники вимірювального приладу, десяті частки поділки зчитує навмання. У таблиці наведено кількість цифр, які записано оператором як десяті частки. Чи узгоджуються ці дані при рівні значущості 0,01 з гіпотезою про те, що кожна цифра може з'явитися з однаковою ймовірнітю?

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Її появи	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

XIV.36. У кожну зі 100 мішеней зроблено по 10 пострілів. Результати стрільби наведено в таблиці

Кількість попадань	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість мішеней	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Чи узгоджуються ці дані з гіпотезою про біномний закон розподілу при рівні значущості 0,01?

XIV.37. Дані про кількість квіток на кожній з 200 рослин наведено в таблиці

Кількість квіток	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість рослин	5	2	10	19	20	48	27	25	23	11	5	6	5

Чи узгоджуються ці дані з гіпотезою про розподіл за законом Пуассона з параметром $\lambda = 9$ при рівні значущості 0,01?

XIV.38. Протягом рівних проміжків часу в тонкому шарі розчину золота реєстрували кількість частинок золота, які потрапили в поле зору мікроскопа. Результати спостережень наведено в таблиці

Кількість частинок	0	1	2	3	4	5	6	7
Кількість проміжків	112	168	130	68	32	5	1	1

Перевірити при рівні значущості 0,05 гіпотезу про розподіл кількості частинок за законом Пуассона.

XIV.39. Чи узгоджуються при рівні значущості 0,05 наведені в таблиці результати спостережень за середньою температурою у місті в квітні протягом 100 років з гіпотезою про нормальний закон розподілу середньомісячної температури у квітні?

$T\,^\circ C$	<12,5	[12,5;13,0)	[13,0;13,5)	[13,5;14,0	[14,0;14,5)
n_i	10	12	9	10	19
$T\,^\circ C$	[14,5;15,0)	[15,0;15,5)	[15,5;16,0)	[16,0;16,5)	≥16,5
n_i	10	9	6	7	8

XIV.40. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості 0,05, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний закон розподілу генеральної сукупності X з заданим емпіричним розподілом

а)

$[x_i;x_{i+1})$	n_i
$[10;30)$	2
$[30;50)$	4
$[50;70)$	6
$[70;90)$	10
$[90;110)$	18
$[110;130)$	20
$[130;150)$	16
$[150;170)$	11
$[170;190)$	7
$[190;210)$	5
$[210;230)$	1

б)

$[x_i;x_{i+1})$	n_i
$[9;19)$	8
$[19;29)$	7
$[29;39)$	16
$[39;49)$	35
$[49;59)$	15
$[59;69)$	8
$[69;79)$	6
$[79;89)$	5

в)

$(x_i;x_{i+1}]$	n_i
$(-30;-20]$	20
$(-20;-10]$	47
$(-10;0]$	80
$(0;10]$	98
$(10;20]$	40
$(20;30]$	16
$(30;40]$	8

XIV.41. Чи узгоджуються при рівні значущості 0,05 з гіпотезою про нормальний закон розподілу дані про масу новонароджених у пологовому будинку?

Маса, кг	[2,0;2,6)	[2,6;3,2)	[3,2;3,8)	[3,8;4,4)	[4,4;5,0)	[5,0;5,6)	[5,6;6,2)
Кількість	5	8	35	43	22	15	2

XIV.42. Дані про зміну кількості вироблених деталей на одного робітника в поточному році порівняно з попереднім наведено в таблиці

Зміна к-сті дет.	[2,0;2,6)	[2,6;3,2)	[3,2;3,8)	[3,8;4,4)	[4,4;5,0)	[5,0;5,6)	[5,6;6,2)
К-сть робітників	5	8	35	43	22	15	2

Перевірити гіпотезу про нормальний характер розподілу цієї зміни.

XIV.43. За вибіркою з прикладу XIV.18 перевірити гіпотезу про нормальний характер розподілу генеральної сукупності.

§3. Лінійна регресія та кореляція

Розглянемо дві випадкові величини X та Y. Залежність

$$\overline{y}_x = f(x),$$

яка виражає умовне середнє величини Y як функцію від значень величини X, називають *вибірковим рівнянням регресії* Y на X.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд

$$\overline{y}_x = \overline{y} + r_{\text{в}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}),$$

де $\overline{y}_x$ — умовна середня; $\overline{x}$, $\overline{y}$ — вибіркові середні ознак X та Y; σ_x і σ_y — вибіркові середні квадратичні відхилення, $r_в$ — вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_в=\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij} - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y має вигляд

$$\overline{x}_y=\overline{x}+r_в\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}).$$

Параметри рівняння криволінійної регресії можна знайти методом найменших квадратів або шляхом перетворення змінних Y та X. Наприклад, регресія $\overline{y}_x=ax^b$ може бути зведена до лінійної регресії $\overline{\ln y_x}=b\ln x+\ln a$ змінної $\ln Y$ на $\ln X$.

XIV.44. Написати вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними

1)

x_i	1	3	4	5
y_i	2	4	4	6

2)

x_i	2	3	5	6
y_i	3	3	4	7

XIV.45. У результаті аналізу рівня механізації робіт $X(\%)$ і продуктивності праці Y(т/год) для 14 підприємств отримали

x_i	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Побудувати рівняння прямих ліній регресій.

XIV.46. За вибіркою, зробленою з двовимірної генеральної сукупності (X, Y), складено кореляційну таблицю. Знайти вибіркові рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y та зобразити їх на координатній площині

1)

	X			
Y	-1	0	1	2
0	3	1		
1	2	6		
2		2	6	1
3			2	9

2)

	Y			
X	-1	0	3	6
0	2	1		
4	3	5		
6		2	3	4
9			3	5

3)

	X					
Y	2	7	12	17	22	27
110	2	4				
120		6	2			
130			3	50	2	
140			1	10	6	
150				4	7	3

4)

	X						
Y	12	22	32	42	52	62	72
65		1			10	6	2
70						4	1
75			2	7	4	2	
80			1	25			
85		4	6		1		
90	1	5	8	2			
95	1	2	6				

XIV.47. За вибіркою, зробленою з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y), складено кореляційну таблицю. Знайти вибіркові рівняння прямої лінії регресії Y на X та прямої лінії регресії X на Y та зобразити їх на координатній площині

1)

Y	X					
	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
10–20	5	7				
20–30		20	23			
30–40			30	47		
40–50			10	11	20	6
50–60				9	7	3

2)

Y	X				
	7,0–7,2	7,2–7,4	7,4–7,6	7,6–7,8	7,8–8,0
2,15–2,45	5	4			
2,45–2,75		12	8	1	
2,75–3,05			5	5	
3,05–3,35			4	7	
3,35–3,65				12	1
3,65–3,95					1

XIV.48. Розподіл 60 підприємств хімічної промисловості за енергозабезпеченістю праці Y(кВт·год) і фондозабезпеченістю X(млн. грн) заданий таблицею. Знайти вибіркові рівняння прямої лінії регресії Y на X

Y	X				
	0–4,5	4,5–9	9–13,5	13,5–18	18–22,5
0–1,4	4	1			
1,4–2,8	4	2			
2,8–4,2	2	8	1		
4,2–5,6		1	20	4	
5,6–7,0			3	3	3
7,0–8,4				1	3

XIV.49. У таблиці наведено результати спостережень над генеральними сукупностями X та Y. Згрупувати дані спостережень у кореляційну таблицю. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X

(57,8) (17,2) (53,8) (16,3) (48,8) (16,4) (50,7) (21,5) (15,5) (49,3)
(54,6) (17,9) (53,6) (17,2) (53,5) (15,9) (53,1) (21,3) (13,2) (50,4)
(54,8) (18,8) (51,5) (15,8) (52,8) (15,9) (52,9) (20,3) (20,2) (50,6)
(51,7) (19,9) (54,0) (15,0) (52,9) (14,8) (51,3) (20,1) (54,0) (18,9)
(61,1) (16,0) (50,4) (14,4) (52,1) (19,8) (52,7) (17,2) (48,8) (18,6)
(62,3) (17,8) (53,0) (15,3) (47,3) (18,7) (46,6) (15,6) (46,2) (19,1)
(52,2) (18,8) (53,3) (16,6) (49,8) (20,2) (46,5) (16,0) (49,2) (15,7)
(49,2) (19,3) (51,6) (14,9) (49,3) (17,6) (51,3) (15,5) (57,9) (17,1)
(53,9) (16,1) (50,9) (14,7) (50,1) (19,2) (51,0) (19,2) (49,4) (16,0)
(60,0) (14,8) (52,2) (19,5) (54,4) (18,2) (47,5) (18,5) (51,6) (19,6)
(56,2) (17,0) (50,5) (15,6) (49,0) (16,8) (47,7) (19,0) (52,2) (19,5)
(55,2) (17,8) (51,1) (18,1) (48,9) (18,2) (44,9) (16,6) (53,3) (19,9)

XIV.50. Використовуючи метод найменших квадратів, записати рівняння параболічної регресії $y = a + bx + cx^2$ за такими даними

1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-10	0	4	5	4	2	-2

2)

x_i	5	10	15	20	25
y_i	$59,3$	$59,8$	$60,1$	$64,9$	$70,2$

3)

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	5	-1	$-0,5$	$1,5$	$4,5$	$8,5$

XIV.51. Використовуючи метод найменших квадратів, записати рівняння гіперболічної регресії $y = a + \dfrac{b}{x}$ за такими даними

1)

x_i	2	4	6	12
y_i	8	5,25	3,5	3,25

2)

x_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y_i	15	11	12	12	9	10

XIV.52. За даними залежності інтенсивності реакції U досліджуваного при стеженні за об'єктом від швидкості X об'єкта визначити параметри регресії $\overline{u}_x = ax^b$

(0,1; 1,05) (0,2; 1,08) (0,4; 0,57) (0,6; 0,56) (0,8; 0,52)
(2; 0,22) (4; 0,24) (6; 0,26) (8; 0,15) (10; 0,16)
(15; 0,08) (20; 0,1) (25; 0,07) (30; 0,03) (35; 0,08)
(40; 0,08) (45; 0,05) (50; 0,12) (100; 0,06) (200; 0,03)

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

РОЗДІЛ I

I.1. 1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 3 & 4 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 6 & -6 & 12 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix}$. **I.2.** 1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 15 & -8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -17 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. **I.3.** 1) $\begin{pmatrix} -9 & -12 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 8 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 14 & 0 \\ 6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 40 & 10 & -15 \\ 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} -8 & -6 & -14 \\ -10 & 6 & -8 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **I.4.** 1) $\begin{pmatrix} -1 & 25 & -1 & -42 \\ 2 & -16 & -3 & 17 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 17 & 10 & 11 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 9 & 27 & -2 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -10 \\ -16 & 16 \end{pmatrix}$. **I.5.** 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 21 & 34 \\ 34 & 55 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 12 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$. 9) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -1 \\ -5 & -1 & 12 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 33 & 1 & -10 \\ 23 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 16 & 16 & 16 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **I.6.** 1) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. **I.7.** 1) 3. 2) -6. 3) $37{,}5$. 4) $-1/6$. 5) 2. 6) 11. 7) 16. 8) -42. 9) 1. 10) $\mathrm{tg}^2 x + 1$. 11) -10. 12) $2x^3 + 1$. 13) 0. **I.8.** 1) -53. 2) 3. 3) 0. 4) -31. 5) 0. 6) 0. 7) -192. 8) 32. 9) 0. **I.9.** 1) -5. 2) 1. 3) 3. **I.10.** 1) -1. 2) 19. 3) 6. **I.11.** 1) $-a^3 - a^2$. 2) b^2. 3) $x^3 - 1$. 4) z^2. **I.12.** 1) $4a^3$. 2) -21. 3) -66. 4) $x^2y - x^2z - y^2x + y^2z + z^2x - z^2y$. 5) 1. 6) amn. 7) $2\sin x - \sin 2x$. **I.13.** 1) $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}5$. 2) $x_1 = 1$; $x_2 = 4$. 3) $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}5$. 4)

$x_1=-1$; $x_2=\dfrac{2}{3}$. **I.14.** 1) -70. 2) 38. 3) -36. 4) 900. 5) 12. 6) 96. 7) 640. 8) $(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)$. 9) a^2b^2. 10) $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$. 11) $(a+1)^n-a^n$. **I.15.** 1) $\begin{pmatrix}-3&2\\-5&3\end{pmatrix}$. 2) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}5&1\\-4&2\end{pmatrix}$. 3) $-\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}2&-2\\-4&-3\end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3,5\end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix}2&-3\\-5&8\end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$.
7) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-38&41&34\\27&-29&-24\end{pmatrix}$. 8) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-5\\1&-1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$. 9) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}$.
10) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-14&-5&13\\10&4&-8\\2&-1&-1\end{pmatrix}$. 11) $\dfrac{1}{40}\begin{pmatrix}1&17&5\\9&-7&5\\-7&1&5\end{pmatrix}$. 12) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-1&-4\\-1&1&-1\\-8&3&7\end{pmatrix}$.
13) $\dfrac{\begin{pmatrix}12&-16&1\\3&-4&1\\-7&10&-1\end{pmatrix}}{2}$. 14) $\dfrac{\begin{pmatrix}-53&5&27\\40&13&-6\\-2&-7&13\end{pmatrix}}{127}$. 15) $\dfrac{\begin{pmatrix}5&3&-1\\3&-1&5\\-1&5&3\end{pmatrix}}{14}$.
16) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$. 17) $\dfrac{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}}{4}$. 18) $\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\-1&0&1&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$.

I.16. 1) $\begin{pmatrix}-1&2\\3&-1\end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$.
5) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$. **I.17** 1) $(1;4)$. 2) $\left(-\dfrac{7}{13};1\dfrac{4}{13}\right)$. 3) $(3;2)$. 4) $(4;3)$. 5) $\left(\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{4}\right)$. 6) 7) $(2;1;-1)$. 8) $(-2;-1;5)$. 9) $(2;3;1)$. 10) $(-2;-1;0)$. 11) $\emptyset$. 12) $(-z+3;z+5;z)$. 13) $\emptyset$. 14) $\emptyset$. **I.18** 1) $(0;-1;2)$. 2) $(2;3;1)$. 3) $(1;-2;2)$. 4) $(-2;3;-1)$. 5) $\left(-z+\dfrac{4}{7};-\dfrac{1}{2}z-\dfrac{5}{14};z\right)$. 6) $(0,5;0;-1)$. 7) $(-3y-1;y;4y+3)$. 8) $\left(-\dfrac{5}{7};\dfrac{3}{2};\dfrac{15}{14}\right)$. 9) $(\dfrac{5}{2}-3z;\dfrac{3}{4};z)$. 10) $\emptyset$. 11) $\emptyset$. 12) $(5-10z;8-15z;z)$. 13) $(1;0;2;1)$. **I.19.** 1) 2. 2) 2. 3) 1. 4) 3. 5) 3. 6) 3. 7) 2. 8) 2. 9) 3. 10) 3. 11) 3. 12) 3. **I.20.** 1) $(-1;1;0;1)$. 2) $\emptyset$. 3) $(0;-2;1;-1)$. 4) $\left(-\dfrac{1}{5}x_3+\dfrac{9}{5};\dfrac{1}{3}x_3-\dfrac{1}{3};x_3;\dfrac{26}{15}x_3+\dfrac{1}{15}\right)$. **I.21.** 1) Енергетика: ≈ 179; машинобудування: $\approx 160,5$. 2) Галузь1: 945,6; галузь2: 691,2. **I.22** 1) $(2;2x_3;x_3)$. 2) $(2x_2-3x_3+4;x_2;x_3)$. 3) $(1;2;-1;1)$.

4) $\emptyset$. 5) $\emptyset$. 6) $(3;1;-1;1)$. 7) $\left(-\frac{9}{2}x_4+\frac{11}{2};8x_4-9;-\frac{17}{2}x_4+\frac{21}{2};x_4\right)$. 8) $\left(x_1;\frac{3}{2}x_1-\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2};x_3;-\frac{11}{4}x_1+\frac{7}{4}x_3+\frac{1}{4}\right)$. 9) $\left(-x_2+x_3+\frac{8}{7};x_2;x_3;-x_2 +2x_3-\frac{2}{7}\right)$. 10) $(3x_2-4x_3+2x_4+2;x_2;x_3;x_4)$. 11) $\left(x_2+\frac{3}{2};x_2;\frac{1}{2};0\right)$. 12) $\left(3;-\frac{11}{4};-\frac{11}{4};\frac{3}{2}\right)$. 13) $(6x_5-20x_2+3;x_2;x_5-4x_2+1;-9x_5+29x_2-2;x_5)$. 14) $\left(-\frac{9}{4}x_2+\frac{7}{4}x_3+2x_5-\frac{7}{4};x_2;x_3;\frac{11}{4}x_2-\frac{13}{4}x_3-4x_5+\frac{13}{4};x_5\right)$. 15) $\left(-\frac{37}{30}x_2-\frac{77}{15}x_4-\frac{2}{3};\ x_2;\ \frac{26}{15}x_2+\frac{107}{15}x_4+\frac{5}{3};\ x_4;\ -\frac{1}{10}x_2-\frac{4}{5}x_4-1\right)$. 16) $\left(x_1;x_1;\frac{2}{3}x_1;-x_1+2;-\frac{4}{3}x_1+1\right)$. 17) $\left(\frac{17}{4}x_5+\frac{3}{4};\frac{3}{4}x_5+\frac{1}{4};-\frac{11}{4}x_5-\frac{1}{4};0;x_5\right)$. 18) $\left(\frac{27}{7}x_3+2x_4-\frac{13}{7};-\frac{10}{7}x_3-2x_4+\frac{10}{7};x_3;x_4;\frac{29}{7}x_3+2x_4-\frac{15}{7}\right)$. 19) $(8x_3;-2x_3;x_3;6x_3)$. 20) $(-x_3;2x_3;x_3;0)$. 21) $(0;0;2x_5;-x_5;x_5)$. 22) $(-x_3+x_4;0;x_3;x_4;-2x_3)$. **I.23** 1) Так. Розмірність простору $k=1$, за базу можна взяти будь-який ненульовий вектор, який паралельний заданій прямій; 2) Так. $k=2$, за базу можна взяти будь-які два неколінеарні вектори, що перпендикулярні до заданої прямої; 3) Ні; 4) Так. $k=2$, $\vec{e}_1=(1;0)$, $\vec{e}_2=(0;1)$; 5) Так. $k=3$, $\vec{e}_1=(1;0;0)$, $\vec{e}_2=(0;1;0)$, $\vec{e}_3=(0;0;1)$; 6) Так. $k=n$, $\vec{e}_1=(1;0;0;\ldots;0)$, $\vec{e}_2=(0;1;0;\ldots;0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n=(0;0;0;\ldots;1)$; 7) Так. $k=n^2$, $E_{ij}=[\delta_{ij}]$, де δ_{ij} — символ Кронекера; 8) Так. $k=n$, за базу можна взяти матриці такого вигляду $\begin{pmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$, $\ldots$ $\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1\end{pmatrix}$; 9) Так. $k=mn$, E_{ij} — матриці, в яких $a_{ij}=1$, а решта елементів — нулі; 10) Так. $k=2$, за базу можна взяти такі вектори $\vec{a}_1=(0;1;1;0)$, $\vec{a}_2=(-1;0;0;1)$. **I.24** Так, $3\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}+4\vec{d}=\vec{0}$. **I.25** $x=-1$, $y=-1$. **I.26** $x=1$, $y=0$, $z=-1$. **I.27** 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; 2) $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$; 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно незалежні. **I.28** За базу можна взяти, наприклад, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. **I.29** $\vec{s}=\frac{2}{5}\vec{m}+\frac{3}{5}\vec{n}+\frac{3}{5}\vec{p}$. **I.30** $(1;1;1)$. **I.31** $\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$. **I.32** $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. **I.33** $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

I.34 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **I.35** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **I.36** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
I.37 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **I.38** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **I.39** $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
I.40 а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. **I.41** а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{x}_1 = (-1;1)$, $\vec{x}_2 = (1;1)$; б) $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$, $\vec{x}_1 = (1; \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21})$, $\vec{x}_2 = (1; \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{21})$; в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\vec{x}_1 = (1;2)$, $\vec{x}_2 = (-1;1)$; г) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\vec{x}_1 = (1;1)$, $\vec{x}_2 = (2;1)$; д) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\vec{x}_1 = (-1;1;1)$, $\vec{x}_2 = (0;1;1)$, $\vec{x}_3 = (1;-1;0)$; е) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$, $\vec{x}_1 = (-2;1;1)$, $\vec{x}_2 = (0;1;1)$, $\vec{x}_3 = (6;-7;5)$; є) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\vec{x} = (1;1;1)$; ж) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\vec{x}_1 = (2;1;0)$, $\vec{x}_2 = (0;0;1)$; з) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\vec{x}_1 = (1;1;1)$, $\vec{x}_2 = (1;2;3)$; и) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\vec{x}_1 = (-2;-1;1)$, $\vec{x}_2 = (-1;0;1)$, $\vec{x}_3 = (2;1;3)$; і) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{x}_1 = (9;-3;1)$, $\vec{x}_2 = (8;-2;1)$, $\vec{x}_3 = (1;0;0)$; ї) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\vec{x}_1 = (0;0;1)$, $\vec{x}_2 = (5;5;-8)$; й) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 9$, $\vec{x}_1 = (1;0;0)$, $\vec{x}_2 = (7;-1;1)$, $\vec{x}_3 = (27;15;25)$; **I.42** Матриця A зводиться до діагонального вигляду. В новій базі $\vec{x}_1 = (1;1;1)$, $\vec{x}_2 = (1;1;0)$, $\vec{x}_3 = (1;0;-3)$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$) вона має вигляд $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Матриця B до діагонального вигляду не зводиться. **I.44** 1) $3 : 4 : 2$; 2) $2 : 4 : 3$. **I.45** а) $Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{3}x_1^2 - df13x_2^2 + \frac{2}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{2}{3}x_1x_3 + \frac{4}{3}x_2x_3$; б) $Q(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$; в) $Q(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$. **I.46** а) $Q(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}z_1^2 - 8z_2^2 + \frac{1}{17}z_3^2$; б) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$; в) $Q(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 6z_3^2$. **I.47** а) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$; б) $Q(z_1, z_2, z_3) = -z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$; в) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - 3z_3^2$; г) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$; **I.48** а) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{5}{6}z_3$, $x_2 = \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{6}z_3$, $x_3 = \frac{1}{6}z_3$; б) $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, $x_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_2$, $x_2 = z_2 + z_3$, $x_3 = -z_2 + z_3$; в) $Q(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^2$. **I.49** а) $Q(z_1, z_2, z_3) = 4z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2$, $z_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $z_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3$, $z_3 =$

$\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3$; б) $Q(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-z_2^2+5z_3^2$, $z_1=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $z_2=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$, $z_3=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3$; в) $Q(z_1,z_2,z_3)=7z_1^2+4z_2^2+z_3^2$, $z_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $z_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$, $z_3=-\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$; **I.50** а) $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&-2&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$. $Q(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-z_2^2+5z_3^2$, $x_1=\frac{2}{3}z_1+\frac{1}{3}z_2+\frac{2}{3}z_3$, $x_2=-\frac{1}{3}z_1-\frac{2}{3}z_2+\frac{2}{3}z_3$, $x_3=-\frac{2}{3}z_1+\frac{2}{3}z_2+\frac{1}{3}z_3$; б) $T=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6\sqrt{5}&2\sqrt{5}&4\\0&5\sqrt{5}&-10\\3\sqrt{5}&-4\sqrt{5}&-10\end{pmatrix}$. $Q(z_1,z_2,z_3)=7z_1^2+7z_2^2-2z_3^2$. **I.52** а) $\lambda>0$; б) $-0,8<\lambda<0$; в) $\lambda\in$; г) $|\lambda|<\sqrt{\frac{5}{3}}$.

РОЗДІЛ II

II.1. 1) $A_1(-4)$; 2) $B_1(-6)$; 3) $C_1(8)$. **II.2.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **II.3.** 1) $M_1(1;2)$, $M_2(-1;-2)$, $M_0(-1;2)$; 2) $M_1(-3;0)$, $M_2(3;0)$, $M_0(3;0)$; 3) $M_1(1;\ -2;4)$, $M_2(-1;2;4)$, $M_3(-1;-2;-4)$, $M_0(-1;-2;4)$. **II.4.** $(a;0)$, $\left(\frac{1}{2}a;\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a;\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $(-a;0)$, $\left(-\frac{1}{2}a;-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\left(\frac{1}{2}a;-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$. **II.5.** $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;a\right)$, $\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;a\right)$, $\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right)$. **II.6.** $(0;0;0)$, $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$, $(a;a;0)$, $(a;0;a)$, $(0;a;a)$, $(a;a;a)$. **II.7.** $(0;0;0)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}h;0;0\right)$, $\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}h;0\right)$, $\left(0;0;\sqrt{\frac{3}{2}}h\right)$ або $(0;0;0)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}h;0;0\right)$, $\left(0;-\sqrt{\frac{3}{2}}h;0\right)$, $\left(0;0;-\sqrt{\frac{3}{2}}h\right)$. **II.8.** 1) на площині, яка ділить двогранний кут між площинами Oxy і Oyz навпіл; 2) на площині, яка ділить двогранний кут між площинами Oxy і Oyz навпіл; 3) на перетині площин, які ділять навпіл двогранні кути Oxz і Oyz та Oxy і Oxz. **II.9.** 1) $M_1(-x;y)$; 2) $M_2(x;-y)$; 3) $M_0(-x;-y)$; 4) $M_3(y;x)$. **II.11.** 1) $(a;b;c)$; 2) $(a;-b;-c)$; 3) $(-a;b;-c)$; 4) $(-a;-b;-c)$. **II.13.** $|AB|=9$, $|BC|=6$, $|AC|=3$. **II.14.** $|AB|=5$, $|BC|=9$, $|AC|=4$. **II.15.** $|AB|=3$, $|BC|=1$, $|AC|=4$. **II.16.** $5\sqrt{2}$. **II.17.** 1) $(21;0)$; 2) $(0;-3)$. **II.18.** $5(2+\sqrt{2})$, $90°$, $45°$, $45°$. **II.20.** 20. **II.21.** $18\sqrt{2}$. **II.22.** $(5;5)$, $(5;-3)$. **II.23.** $(0;2,9)$. **II.24.** $(4;0)$, $(-8;0)$. **II.25.** $(0;2)$, $(0;-4)$. **II.26.** $x=a\pm\sqrt{c^2-b^2}$ при $c>|b|$ дві точки; при $c=|b|$ одна; при $c<|b|$ ні одної. **II.27.** $(5;0)$. **II.28.** 1) $(1;-1)$, $R=5$; 2) $(2;-1)$, $R=5$. **II.29.** $M(1;4)$. **II.30.** $(0;3,6)$. **II.31.** $(0;0)$, $(3;1)$, $(1;2)$, $\sqrt{5}(2+\sqrt{2})$. **II.32.** 1) $(16;7)$; 2) $\left(11;\frac{11}{3}\right)$, $\left(21;\frac{31}{3}\right)$; 3) $\left(6;\frac{1}{3}\right)$, $\left(11;\frac{11}{3}\right)$, $(16;7)$, $\left(21;\frac{31}{3}\right)$,

$\left(26; \dfrac{41}{3}\right)$. **II.33.** 1) $(0;-2)$, $(4;0)$; 2) $(0;8)$, $(6;0)$. **II.34.** $\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$. **II.36.** 26 см від центру кулі масою 100 г. **II.37.** $(1;3)$. **II.38.** $(1;2,5)$. **II.39.** $(1;-1)$. **II.40.** $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$. **II.41.** $OC = 5$, $OD = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}$. **II.42.** $x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **II.43.** 1) $(10;9)$; 2) $(4;-4)$. **II.44.** $(3;3)$. **II.45.** 1) в точці A можна помістити масу вигляду $7k$, а в точці B — $3k$, де $k = 1,2,\ldots$; 2) в точці A можна помістити масу вигляду k, а в точці B — $7k$, де $k = 1,2,\ldots$. **II.46.** $\left(\dfrac{37}{27}; \dfrac{13}{27}\right)$. **II.48.** 9. **II.50.** 13. **II.51.** $C_1(3;0)$, $C_2(-7;0)$. **II.53.** $x^2+y^2-6x-8y=0$. A і O лежать на колі. **II.54.** $x-y-2=0$. D і E лежать на лінії. **II.55.** $2x-y+5=0$. B і D лежать на лінії. **II.56.** $x^2+y^2=9$. **II.57.** 1) $x^2+y^2=8$; 2) $x^2+y^2=4$. **II.58.** $y=\pm x$. **II.59.** $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$. **II.60.** $y=\dfrac{x^2}{4}-x+2$. **II.61.** $y=\pm 2x$. **II.63.** 1) $(4;0)$, $(0;-6)$; 2) $(-5;0)$, $(0;-2)$; 3) $(0;0)$, $(-4;0)$; 4) $(0;3)$, $(-3;0)$, $(1;0)$; 5) $(-2;0)$, $(0;\pm 2)$; 6) $(4;0)$, $(0;\pm 2)$. **II.64.** $y^2=8(x-2)$. **II.65.** $y=\dfrac{x^2}{4}+1$. **II.66.** $xy=2$. **II.72.** 1) $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$; 2) $r=\dfrac{a\sin\varphi}{\sin\varphi}$. **II.73.** $r=\dfrac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\varphi)}$. **II.74.** $r=2a\cos\varphi$. **II.77.** 1) $r^2=\dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$; 2) $r=a$; 3) $r=\dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$; 4) $\operatorname{tg}\varphi=1$; 5) $r=\alpha\cos\varphi$; 6) $r^2=a^2\cos 2\varphi$. **II.78.** 1) $x=a$; 2) $x^2+y^2=2ay$; 3) $xy=a^2$; 4) $x+y=2a$; 5) $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$.

РОЗДІЛ III

III.1. $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{AC}=4\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=-3\vec{i}$, $\overrightarrow{BO}=-4\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{BA}=4\vec{j}-3\vec{i}$. **III.2.** $X=\sum X_i=8$, $Y=\sum Y_i=-2$, $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}$. **III.3.** $X=\sum X_i=-3$, $Y=\sum Y_i=6$, $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$. **III.5.** 1) $\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; 2) $\vec{a}=2\vec{c}-\vec{b}$. **III.6.** $6\sqrt{3}$. **III.7.** $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$. **III.8.** $\vec{c}=2,1\vec{a}+0,075\vec{b}$. **III.9.** $\overrightarrow{AC}=2(\vec{n}-\vec{m})$, $\overrightarrow{OM}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{ON}=3\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{MN}=2\vec{m}-\vec{n}$. **III.10.** $\vec{c}=\dfrac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$. **III.11.** $|\overrightarrow{OM}|=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=0,4\sqrt{2}$, $\cos\beta=0,3\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0,5\sqrt{2}$. **III.12.** $|\overrightarrow{AB}|=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=-0,5\sqrt{2}$, $\cos\beta=0,4\sqrt{2}$, $\cos\gamma=-0,3\sqrt{2}$. **III.13.** $\vec{a}_0=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3;1;-2)$. **III.14.** $\text{пр}_X\overrightarrow{AB}=-2$, $\text{пр}_Y\overrightarrow{AB}=-4$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$. **III.15.** $(5;8)$, $3\sqrt{2}$. **III.16.** $(4;-3)$. **III.18.** 90°. **III.19.** $M(3\sqrt{2};3;-3)$, $\vec{r}=3(\sqrt{2}\,\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$. **III.20.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **III.21.** 45° або 135°. **III.22.** $|\vec{u}|=9$,

$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$. **III.23.** $|\vec{u}| = 3\sqrt{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$, $\cos\beta = -\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$, $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **III.24.** $90°$. **III.25.** $\vec{d}_1 = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{d}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $|\vec{d}_1| = \sqrt{21}$; $|\vec{d}_2| = 3$. **III.26.** $(0;-2;6)$ або $(0;-2;-6)$. **III.27.** $D(4;0;6)$. **III.28.** 1) $135°$; 2) $60°$. **III.29.** $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$. **III.30.** $\arccos 0,8$. **III.31.** $90°$. **III.32.** 2. **III.33.** 1) $2+\sqrt{3}$; 2) 40. **III.34.** 1) -15; 2) -16. **III.35.** 1) 1; 2) 5,6. **III.36.** 1) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{13}$; 2) $2\sqrt{21}$ і $2\sqrt{31}$. **III.37.** $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{m}}) = \dfrac{(2\vec{m}-\vec{n})\vec{n}}{\sqrt{(2\vec{m}-\vec{n})^2}\cdot 1} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$; $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{n}}) = -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **III.38.** 1) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}\cos\varphi$ (теорема косинусів); 2) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2 = 2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$ (властивість діагоналей паралелограма). **III.39.** 7. **III.40.** $\dfrac{5}{6}$. **III.41.** $\overrightarrow{OM} = 2(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; $\overrightarrow{ON} = 2(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$; $\cos\Theta = \dfrac{5}{6}$. **III.42.** $D(-1;1;1)$; $120°$. **III.43.** $120°$. **III.45.** $\cos\varphi = 0,26\sqrt{10}$. **III.46.** $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|} = -6$. **III.47.** $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(\vec{m}+2\vec{n})^2} = \sqrt{7}$; $|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{(3\vec{m}+\vec{n})^2} = \sqrt{13}$; $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{On}|} = \dfrac{17\sqrt{91}}{182} \approx 0,891$. **III.48.** 1) $\vec{c} = -6\vec{j}$, $S = 6$; 2) $\vec{c} = -2\vec{k}$, $S = 2$; 3) $\vec{c} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $S = 2\sqrt{22}$. **III.49.** 24,5. **III.50.** 1) $2\vec{j}$; 2) $2\vec{a}\times\vec{c}$; 3) $\vec{a}\times\vec{c}$; 4) $\vec{b}\times\vec{c}$. **III.51.** $0,5\sqrt{30}$. **III.52.** $50\sqrt{2}$. **III.53.** 1) $58\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$; 4) 1,5. **III.55.** $1,5\sqrt{2}$. **III.56.** $3\sqrt{17}$, $S_\Delta = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$. **III.57.** $S_\Delta = 7\sqrt{5}$, $BD = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. **III.58.** 1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0;2;-1)$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1;-0,2;1,4)$. **III.60.** $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$. **III.61.** $V = 51$, ліва. **III.62.** 1) $V = 14$, $H = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$; 2) $V = 14$, $H = \sqrt{14}$. **III.63.** 15. **III.65.** 1) $\vec{c} = 5\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c} = -3\vec{a} + \dfrac{5}{2}\vec{b}$. **III.67.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **III.68.** $\vec{c} = \vec{a}+2\vec{b}$. **III.69.** 52.

РОЗДІЛ IV

IV.1 1) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$; 2) $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$. **IV.2.** $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 3 = \sqrt{2}$. **IV.3.** 1) $y = x+3$; 2) $y = -x+3$. **IV.4.** 1) $y = \sqrt{3}x - 3$; 2) $y = -\sqrt{3}x - 3$. **IV.5.** 1) $y = x$; 2) $y = \sqrt{3}x$; 3) $x = 0$; 4) $y = -\sqrt{3}x$; 5) $y = -x$. **IV.6.** $y = -1,5x$. **IV.7.** 1) $k = \dfrac{2}{3}$, $b = -2$; 2) $k = -\dfrac{2}{3}$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -3$; 4) $k = -\dfrac{3}{4}$, $b = 3$. **IV.9.** $k = 1$, $b = 1$, $y = x+1$. **IV.10.** 1) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} = 1$; 2)

$\dfrac{x}{-4/3}+\dfrac{y}{2}=1$. **IV.11.** $y=0$, $4x-3y=0$, $y-4=0$, $4x-3y-12=0$. **IV.12.** 1) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1$; 2) $-\dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=1$. **IV.13.** $|\overrightarrow{AB}|=10$, $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB}=8$, $\text{пр}_{OY}\overrightarrow{AB}=6$. **IV.14.** Точки A і C — на прямій, B — "вище", D — "нижче" прямої. **IV.15.** $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{5}$, $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB}=4$, $\text{пр}_{OY}\overrightarrow{AB}=8$. **IV.16.** $x+y-4=0$, $x-y+4=0$, $y-3=0$, $y=0$. **IV.17.** $\dfrac{x}{5}\pm\dfrac{y}{3}=\pm1$. **IV.18.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\pm1$ або $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-6}=\pm1$. **IV.19.** $y=\pm2(x+3)$. **IV.20.** 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$; 2) $45°$; 3) $90°$; 4) $45°$; 5) $0°$; 6) $\operatorname{arctg}\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$. **IV.22.** 1) $y=x+7$; 2) $y=\sqrt{3}x+5+2\sqrt{3}$; 3) $y=-x+3$; 4) $y=5$. **IV.23.** AB: $4x+3y-21=0$, BC: $x+2y-4=0$, AC: $3x+y-7=0$, $A=18°26'$, $B=26°34'$. **IV.24.** AB: $x-y+2=0$, BC: $2x+y-8=0$, AC: $y=0$, AE: $2x-5y+4=0$, AD: $x-2y+2=0$, $|AD|=\sqrt{29}$. **IV.25.** 1) $y=2x+9$; 2) $y=-0,5x+4$. **IV.26.** $5x+2y+4=0$, $5x+2y-25=0$. **IV.27.** $x+2y-11=0$. **IV.28.** $x+y-2=0$. **IV.29.** AC: $x-3y+2=0$, BE: $5x-y-4=0$, BD: $3x+y-12=0$. **IV.30.** $28°$, $12°30'$. **IV.31.** $\operatorname{tg}A=\dfrac{3}{4}$, $\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C=2$, $S=16$. **IV.32.** $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x$. **IV.33.** $x-5y+6=0$, $5x+y+4=0$. **IV.34.** $(3;-1)$, $(3;3)$, $(-\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{5})$, $45°$, $71°34'$. **IV.35.** $(1;-1)$, $(\dfrac{8}{3};-2)$. **IV.37.** 1) $\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y-4=0$, 2) $-\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y-4=0$, 3) $\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y+4=0$, 4) $\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y-4=0$. **IV.38.** $2,8$; 0; $1,4$. **IV.39.** 3. **IV.40.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **IV.41.** $k=\pm2$. **IV.42.** $\sqrt{10}$. **IV.43.** $3x-4y+10=0$, $x-2=0$. **IV.44.** $4x-3y\pm20=0$. **IV.45.** $8x-15y+6=0$, $8x-15y-130=0$. **IV.46.** $h=\dfrac{18}{\sqrt{34}}$. **IV.47.** $x+y=0$, $x-3y=0$, $d_1=2\sqrt{2}$, $d_2=0,4\sqrt{10}$. **IV.48.** $x-y=0$, $x+y-4=0$. **IV.49.** $3x-y-12=0$, $x+3y-4=0$. **IV.50.** $x+2y=0$, $x+2y-10=0$. **IV.51.** $2x-3y-4=0$; $6x-y-12=0$. **IV.52.** $31x+26y+21=0$. **IV.53.** $x+3y=2$. **IV.54.** $x+3y=0$, $3x+y=0$. **IV.55.** $x+2y=0$, $3x+2y=0$. **IV.56.** $x+2y-4=0$. **IV.57.** $y=0$, $2x+3y+4=0$, $y+4=0$, $2x+3y=0$, $x+2y+2=0$, $x+y=0$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{8}$. **IV.58.** $18°26'$, $108°27'$, $S=26\dfrac{2}{3}$. **IV.59.** $9\dfrac{2}{5}$. **IV.60.** $36°52'$, $127°52'$. **IV.61.** $4(\sqrt{10}+\sqrt{5})$, 20. **IV.62.** $2x-y+6=0$, $x-4y-4=0$, $2x-3y-2=0$. **IV.63.** $x^2+y^2+8x-6y=0$. **IV.64.** $x^2+y^2+8x-6y=0$. **IV.65.** $x^2+y^2-6x-9=0$. **IV.66.** 1) $(3;-2)$, $R=6$; 2) $(-2,5;3,5)$, $R=4$; 3) $(0;-3,5)$, $R=3,5$. **IV.68.** $(0;0)$, $(-2,5;2,5)$. **IV.69.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **IV.70.** $\operatorname{tg}\alpha=-2,4$. **IV.71.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. **IV.72.** $x^2+y^2-8x=0$. **IV.73.** $y=\dfrac{4}{3}x$, $y=0$. **IV.74.** $y^2=x(a-x)$.

IV.75. $x^2+\left(y\dfrac{a}{3}\right)^2=\dfrac{a^2}{9}$. **IV.76.** $x^2+y^2+4y=0$, $(0;0)$, $(2;-2)$, $(-2;-2)$. **IV.77.** $x^2+y^2+ax+ay=0$. **IV.78.** $y=0$, $15x+8y=0$. **IV.79.** $90°$. **IV.80.** $x^2+y^2+ax=0$. **IV.81.** $a=4$, $b=2$, $c=2\sqrt{3}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **IV.82.** 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$. **IV.83.** 1) $b=1,4$, $\varepsilon=0,96$; 2) $b=3$, $\varepsilon=0,8$; 3) $b=4$, $\varepsilon=0,6$; 4) $b=4,8$, $\varepsilon=0,28$; 5) $b=5$, $\varepsilon=0$. **IV.84.** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1=3$, $r_2=9$. **IV.85.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ або $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$. **IV.86.** $a=150$млн.км, $\varepsilon=\dfrac{1}{60}$. **IV.87.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1=4-\sqrt{3}$, $r_2=4+\sqrt{3}$. **IV.88.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$, $r_1=11$, $r_2=5$. **IV.89.** $4\sqrt{3}$. **IV.90.** $\sqrt{0,4}$. **IV.91.** $\left(-\dfrac{15}{4};\pm\dfrac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **IV.92.** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$. **IV.93.** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. **IV.94.** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **IV.95.** $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $(0;-1)$. **IV.96.** $(-5;7)$. **IV.97.** $x^2+4y^2=16$. **IV.98.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$. **IV.99.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **IV.100.** $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $53°08'$, $F_1(-2\sqrt{5};0)$, $F_1(2\sqrt{5};0)$. **IV.101.** $r_1=1$, $r_2=9$. **IV.102.** 1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{4}=1$. **IV.103.** $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $r_1=2\sqrt{3}$, $r_2=6\sqrt{3}$. **IV.104.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **IV.105.** $x^2-y^2=a^2$. **IV.106.** $(0;\pm\sqrt{2})$. **IV.107.** $y=\pm\dfrac{4}{3}(x+5)$. **IV.108.** b, $2\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. **IV.109.** 1) $\varepsilon=2$; 2) $\varepsilon=\sec\alpha$. **IV.110.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. **IV.111.** $\left(-9,6;\pm\dfrac{3\sqrt{119}}{5}\right)$. **IV.112.** $(-4;3)$, $\left(-\dfrac{4}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$. **IV.113.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1$. **IV.114.** $y=3-\dfrac{x^2}{4}$. **IV.115.** $y^2=8(2-x)$. **IV.116.** $y^2=8(x+2)$. **IV.117.** $y=x-\dfrac{x^2}{4}$. **IV.119.** 1) $y^2=9x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $y=-x^2$; 4) $y=x^2$. **IV.120.** $\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2=p^2$, $\left(\dfrac{p}{2};\pm p\right)$. **IV.121.** $y=-\dfrac{x^2}{2}$. **IV.122.** $(3;\pm3\sqrt{2})$. **IV.123.** $y^2=-3x$.

РОЗДІЛ V

V.2. 1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{7}$; 2) $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$. **V.3.** $x-2y-3z+14=0$. **V.4.** $x+4y-2z-2=0$. **V.5.**

$2y-3z+7=0$. **V.6.** $x+y-4=0$. **V.7.** $2x+y=0$. **V.8.** $x+y+z-4=0$. **V.9.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$. **V.10.** $2x-y+z-5=0$. **V.11.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. **V.12.** $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$. **V.13.** 1) $45°$; 2) $78°30'$. **V.14.** $x-2y-3z-4=0$. **V.15.** $x+2y+z-5=0$. **V.16.** $-4x+3y+z+7=0$. **V.17.** 3. **V.18.** $\sqrt{6}$. **V.19.** $2\sqrt{2}$. **V.20.** $x-2y+2z-11=0$, $x-2y+2z+1=0$. **V.21.** $x-8y+9z-21=0$. **V.22.** $3x-4y+z-11=0$. **V.23.** $7x-11y-z-15=0$. **V.24.** $\frac{13}{\sqrt{29}}$. **V.25.** $\frac{7\sqrt{5}}{3}$. **V.26.** $2x-y+z=0$, $x+y+z-1=0$. **V.27.** $2x+2y+z-20=0$, $2x+2y+z+4=0$. **V.28.** $\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}$. **V.29.** $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$. **V.30.** $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{3}$. **V.31.** 1) $\vec{P}=\vec{i}$; 2) $\vec{P}=\vec{i}+\vec{k}$; 3) $\vec{P}=\vec{j}+\vec{k}$. **V.32.** $\frac{x-6}{-3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{1}$. **V.33.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$, $\cos\alpha=0,3\sqrt{2}$, $\cos\beta=-0,5\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0,4\sqrt{2}$. **V.34.** $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{-22}$. **V.35.** $x=2$, $z=3$. **V.36.** 1) $x=-2+t$, $y=1-2t$, $z=-1+3t$; 2) $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$. **V.37.** 1) $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{1}$, можна записати $x=a$, $y=b$; 2) $z=c$ і $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}$. **V.38.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **V.39.** 1) $\cos\varphi=\frac{11}{26}$; 2) $\cos\varphi=\frac{20}{21}$. **V.41.** $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$. **V.42.** $3x+2y=0$, $z=4$. **V.43.** $d=0,3\sqrt{38}$. **V.44.** $d=\sqrt{17}$. **V.45.** $\frac{x-3}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$; $\cos\alpha=\cos\gamma=0$, $\cos\beta=1$. **V.46.** 1) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{261}{\sqrt{29}}$. **V.47.** $n=1$. **V.48.** $\frac{1}{x}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-2}$, $(1;1;2)$, $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **V.49.** $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **V.50.** Для обидвох прямих $Am+Bn+Cp=0$, але точка першої прямої $(-1;-1;3)$ не належить площині, а точка другої $(-2;3;-1)$ — належить. **V.51.** $x-2y+z+5=0$. **V.52.** $y+z+1=0$ або у вигляді $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. **V.53.** $8x-5y+z-11=0$. **V.54.** $x+2y-2z-1=0$. **V.55.** $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, $17°33'$. **V.56.** $(5;5;-2)$. **V.57.** $(6;4;5)$. **V.58.** $d=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **V.59.** $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{8}=\frac{z}{11}$. **V.60.** $x+2y-5z=0$. **V.61.** $x-y-z=0$. **V.62.** $d=\frac{1}{5}$. **V.63.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{-7}$. **V.64.** $8x-7y-22z-58=0$. **V.65.** 1) $(-1;2;2)$; 2) $30°$. **V.66.** $(-1;3;1)$. **V.67.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}$. **V.68.**

$\left(\frac{279}{83}, -\frac{184}{83}, \frac{290}{83}\right)$. **V.69.** $\left(-\frac{5}{14}, \frac{3}{7}, \frac{3}{14}\right)$. **V.70.** 1) $\left(-\frac{29}{9}, -\frac{38}{9}, -\frac{8}{9}\right)$. 2) $\left(-\frac{17}{7}, \frac{36}{7}, -\frac{26}{7}\right)$.

РОЗДІЛ VI

VI.1. $A \cup B = \{x \in R | -1 < x \leq 4\}$, $A \cap B = \{x \in R | 1 \leq x \leq 2\}$, $A \setminus B = \{x \in R | -1 < x < 1\}$, $B \setminus A = \{x \in R | 2 < x \leq 4\}$. **VI.2.** 1) B; 2) C; 3) C; 4) A; 5) $\{(i;2), i = 2, \dots, 6\}$; 6) $\{(2;i), i = 2, \dots, 6\}$. **VI.6.** $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $2\frac{431}{990}$, $\frac{3}{10}$, $3\frac{1313}{9900}$. **VI.10.** 1) $[-1,05; -0,95]$; 2) $(-\infty; -8] \cup [12; +\infty)$; 3) $(-\infty; -0,5)$; 4) $(0; 2/3)$; 5) $[-6; 6]$; 6) $(0,5; +\infty)$; 7) $(-0,5; 0,5)$; 8) $[0,5 - \sqrt{0,3}; 0,5 - \sqrt{0,2}] \cup [0,5 + \sqrt{0,2}; 0,5 + \sqrt{0,3}]$. **VI.11.** а) $12 + 5i$; б) $a^2 + b^2$; в) $5 - 12i$; г) $-2 + 2i$; д) i; е) $1 + i$; є) $\frac{7 - 24i}{25}$; ж) $2b(3a^2 - b^2)i$. **VI.12.** а) $\pm 5i$; б) $-1 \pm 2i$; в) $-2 \pm 3i$; г) -2; $1 \pm i\sqrt{3}$; д) $\pm 1 \pm i$; е) 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$; є) ± 2, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$; ж) ± 3, $\pm 3i$. **VI.13.** 1) $r = 3$, $\varphi = 0$; 2) $r = 2$, $\varphi = \pi$; 3) $r = 3$, $\varphi = \pi/2$; 4) $r = 2$, $\varphi = 3\pi/2$; 5) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = 7\pi/4$; 6) $r = 2$, $\varphi = \pi/3$; 7) $r = 2$, $\varphi = 7\pi/6$; 8) $r = 4\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$; 9) $r = 2$, $\varphi = 2\pi/3$; 10) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 7\pi/4$; 11) $r = 5$, $\varphi = 0$; 12) $r = 2$, $\varphi = 5\pi/4$; 13) $r = 2$, $\varphi = 3\pi/4$; 14) $r = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. **VI.17.** а) $32i$; б) 64; в) $4(1 - i)$; г) $8i$; д) $512(1 - i\sqrt{3})$; е) $2(3 + 2\sqrt{2})i$; є) 27; ж) $8i$. **VI.18.** $\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, \dots, 5$. **VI.19.** а) $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$; б) $\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$. **VI.20.** а) 1, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, б) $-i$, $\frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; в) $\pm i$, $\frac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2}$; г) $1 + i$, $-1,36 + 0,365i$, $0,365 - 1,36i$. **VI.21.** $\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. **VI.22.** $\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. **VI.23.** а) $x \neq 0$; б) $x \neq 1$; в) $x \neq -2$, $x \neq 3$; г) $x \in [0; 4]$; д) $x \in [-2; 2)$; е) $x \in [-1; 2]$; є) $x > 10$; ж) $x > 2$; з) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, $k \in Z$; и) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; і) $x \in R_+ \setminus Z_+$; ї) $(1; 2]$. **VI.24.** а) $[0; 4]$; б) $[1; 2]$; в) $[-0,5; 0,5]$; г) R; д) $[1; 2]$. **VI.25.** 1) парна; 2) непарна; 3) парна; 4) непарна; 5) непарна; 6) ні парна ні непарна. **VI.26.** $y = \log_a x$. **VI.27.** $y = a^x$. **VI.28.** $f(0) = 1$, $f(-2) = 0,6$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(x - 1) = \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 2}$, $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{4(x + 1)}{x^2 + 4}$. **VI.29.** $2(3x^2 + h^2)$. **VI.30.** $4(2 - a)$. **VI.31.** $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(a + 1) = a^2 + a + 1$. **VI.32.** $\varphi(0) = -3$, $\varphi(-1) = -2,5$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x(2 - 3x)}{x^2 + 1}$, $\frac{1}{\varphi(x)} =$

$\dfrac{x^2+1}{2x-3}$. **VI.33.** $F(4;3)=19$, $F(3;4)=-25$. **VI.46.** а) $[-2;+\infty)$; б) $[-3;3]$; в) $[0;8]$; г) $[-4;0]$; д) $[-1;3]$, е) $[0;+\infty)$; є) $(-\infty;4]$; ж) $[-2;2]$; з) $[-1;3]$; и) $\left[-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$, і) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **VI.55.** 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3}=1$; 3) $x^2-y^2=1$; 4) $(x^2+1)y=1$. **VI.57.** $|\alpha_n|<0,1$, $|\beta_n|<0,1$, $|\gamma_n|<0,1$ при $n>\dfrac{1}{\lg 2}$, $|\alpha_n|<0,01$, $|\beta_n|<0,01$, $|\gamma_n|<0,01$ при $n\geq 7$, $|\alpha_n|<0,001$, $|\beta_n|<0,001$, $|\gamma_n|<0,001$ при $n\geq 11$, $|\alpha_n|<\varepsilon$, $|\beta_n|<\varepsilon$, $|\gamma_n|<\varepsilon$ при $n>\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$. **VI.58.** $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. **VI.59.** 1) $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$; 2) $n\geq\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$; 3) $n\geq\dfrac{\lg 1/\varepsilon}{\lg 2}+1$; 4) $n\geq\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 0,999}$. **VI.60.** 1) $N\geq E$; 2) $N\geq\left(\dfrac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; 3) $N\geq 10^{10}$. **VI.61.** $|x-1|<0,01$ при $n\geq 50$, $|x-1|<\varepsilon$ при $n>\dfrac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$. **VI.63.** а) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$; в) $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-2$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=2$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$; е) $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=0$; є) $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$; ж) $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$; з) $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=+\infty$; и) $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=+\infty$; і) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; ї) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. **VI.64.** $AB\to\infty$, $CB\to\infty$, $BCD\to 0^\circ$, $ACB\to 180^\circ$. **VI.66.** 1) e^2; 2) e^{-7}; 3) $e^{-1/6}$; 4) e^5; 5) e^{15}; 6) e^{-2}; 7) e^{-2}; 8) 4; 9) -3; 10) e^2. **VI.70.** При $|x|>7,036$. **VI.71.** $\lim\limits_{n\to 2+0}\dfrac{3}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to 2-0}\dfrac{3}{x-2}=-\infty$. **VI.75.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) 0; 6) 2; 7) 0; 8) $\dfrac{1}{3}$; 9) $+\infty$; 10) 0; 11) $-0,6$; 12) -2; 13) 2; 14) $0,5$; 15) -8; 16) 2; 17) $\dfrac{1}{7}$; 18) 0; 19) ∞; 20) $\dfrac{6}{7}$; 21) $0,2$; 22) $1,5$; 23) 7; 24) $\dfrac{1}{6}$; 25) $3,5$; 26) 5; 27) $0,75$; 28) -2; 29) $0,5$; 30) -3; 31) $0,25$; 32) $1\dfrac{1}{3}$; 33) $-0,5$; 34) $0,25$; 35) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 36) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 37) $-0,5$; 38) -1; 39) $-0,25$; 40) $-\dfrac{1}{64}$; 41) 3; 42) $0,4$; 43) $-2,5$; 44) 0; 45) ∞; 46) 0; 47) ∞; 48) -1; 49) 2; 50) $\sqrt{3}$; 51) -1; 52) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 53) $\dfrac{1}{6}$; 54) 5; 55) $0,25$; 56) $0,2$; 57) $\dfrac{2}{3}$; 58) 1; 59) $\dfrac{1}{9}$; 60) 8; 61) 24; 62) $\sqrt{2}$; 63) $0,5$; 64) m; 65) $12,5$; 66) $\dfrac{m}{n}$; 67) $0,5$; 68) $0,5$; 69) $\dfrac{m^2}{2}$; 70) 3; 71) 1; 72) $-0,5$; 73) $-0,25$; 74) -1; 75) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 76) $0,5$; 77) $1,5$; 78) 2; 79) $-\dfrac{1}{3}$; 80) $0,5$; 81) 2; 82) $\dfrac{a-c}{2}$; 83)

$\frac{1}{6}$; 84) $0,25$; 85) $1,5$; 86) 2; 87) $-0,25$; 88) $0,5$; 89) $0,5$; 90) $-0,5$; 91) -1; 92) $\frac{2}{\pi}$; 93) e^2; 94) e^{-4}; 95) $e^{-1/2}$; 96) e^2; 97) e^{-2}; 98) 0; 99) -3; 100) $0,5$; 101) e^{16}; 102) e; 103) $e^{-1/2}$; 104) e^3; 105) e^{-2}; 106) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 107) $1\frac{1}{3}$; 108) $\frac{1}{20}$; 109) 2; 110) $\frac{1}{6}$; 111) $-\frac{1}{16}$; 112) $0,5$; 113) $-0,5$; 114) $1,5$; 115) 12; 116) 2; 117) $-2,5$; 118) 4; 119) $-0,1$; 120) $-\sqrt{2\pi}$; 121) $0,25$; 122) $1\frac{1}{3}$; 123) 4; 124) 2; 125) -24; 126) -3. **VI.76.** $\alpha(t) = O(\beta(t))$. **VI.77.** 1) 2; 2) 3. **VI.78.** $\alpha(t) = o(\beta(t))$. **VI.79.** 1) 4; 2) 1; 3) 3; 4) 2; 5) 3; 6) 1; 7) 2. **VI.80.** 1) $\alpha(t) \sim \beta(t)$; 2) $\alpha(t) = o(\beta(t))$; 3) $\alpha(t) \sim \beta(t)$. **VI.81.** а) 3; б) $\frac{a}{b}$; в) $1\frac{1}{3}$. **VI.82.** $x = -3$ — точка розриву другого роду; $\lim\limits_{x\to-3-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$. **VI.83.** $x = -2$ — точка розриву другого роду; $\lim\limits_{x\to-2-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$. **VI.85.** 1) $x = 0$ — точка розриву другого роду; 2) $x = \pi k$, $k \in Z$ — точка розриву другого роду; 3) $x \pm 2$ — точка розриву другого роду. **VI.86.** $x = 4$ — точка розриву першого роду, $\lim\limits_{x\to4-0} y = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to4+0} y = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$. **VI.87.** 1) $x = 5$ — точка усувного розриву; 2) $x = 1$, $x = 5$ — точки розриву другого роду. **VI.88.** 1) $x = -2$ — точка розриву першого роду; 2) $x = -2$ — точка розриву першого роду. **VI.89.** $x = \pm 2$ — точки розриву першого роду. **VI.90.** $x = 0$, $x = \pm 2$. **VI.91.** $x = -3$, $x = -2$ — точки розриву другого роду, $x = -1$ — точка усувного розриву. **VI.92.** 1) неперервна; 2) $x = 6$ — точка розриву другого роду; $x = 1$, $x = 6$ — точки розриву другого роду. **VI.93.** 1) $x = -1$ — точка розриву другого роду; 2) неперервна; 3) $x = -2$, $x = 1$ — точки розриву другого роду; 4) $x = \pi k$, $k \in Z$ — точки розриву другого роду; 5) $x = 0$ — точка розриву другого роду; 6) $x = 0$ — точка розриву другого роду. **VI.94.** 1) неперервна; 2) неперервна.

РОЗДІЛ VII

VII.1. а) $2x$; б) $3x^2$; в) $-\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; е) $\frac{1}{\cos^2 x}$; є) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; ж) $-\frac{2}{x^3}$; з) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; и) $-\frac{3}{(3x+2)^2}$. **VII.2.** 1) $x^2 - 8x + 4$; 2) $10a^3x - 5x^4$; 3) $x^4 - 2x^2 + 2x - 4$; 4) $\frac{a}{a+b}$; 5) $1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$; 6) $2x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$; 7) $-8bx(a - bx^2)^3$; 8) $\frac{2(1+\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $-\frac{1}{3x^6} + \frac{1}{2x^5}$; 10) $-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$; 11) $2x - a - b$; 12) $-\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{18}{x^4}$; 13) $1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 14) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$; 15) $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$;

16) $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$; 17) $1-\sin x$; 18) $6x^2+\frac{1}{\cos^2 x}$; 19) $6x^5+\cos x$; 20) $4x^3-\frac{1}{\cos^2 x}$; 21) $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$; 22) $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$; 23) $\sin x+\cos x$; 24) $5x^4\operatorname{tg} x+\frac{x^5}{\cos^2 x}$; 25) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$; 26) $5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}$; 27) $\ln x+1$; 28) $\frac{\ln x-2}{x^2}$; 29) $\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3x^4}$; 30) $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$; 31) $4x^2(3\ln x+1)$; 32) $9x^2\ln x$; 33) $x^2(3\cos x-x\sin x)$; 34) $6x^4\left(5\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}\right)$; 35) $\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$; 36) $\frac{4x}{(x^2+2)^2}$; 37) $2x+3^x\ln 3$; 38) $x2^x(2+x\ln 2)$; 39) $xe^2(2+x)$; 40) $-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$; 41) $x^2\sin x$; 42) $\frac{2x-\sin x\cos x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x}$; 43) $-\frac{1}{(1+\sin x)^2}$; 44) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$; 45) 0; 46) $\frac{x^2}{1+x^2}$; 47) $\frac{36x}{(x^2+9)^2}$; 48) $1+\frac{2}{(1+x)^2}$; 49) $\frac{\cos x}{(1+2\sin x)^2}$; 50) $\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$; 51) $\operatorname{sh}^2 x$; 52) $\frac{2\operatorname{ch} x}{(1-\operatorname{sh} x)^2}$; 53) $-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}$; 54) $\operatorname{cth}^2 x$. **VII.3.** $f'(0)=2$, $f'(1)=-5$, $f'(-1)=11$. **VII.4.** $\frac{2}{3}$. **VII.5.** $f'(0)=-1$, $f'(2)=-\frac{1}{9}$, $f'(-2)=-\frac{1}{25}$. **VII.6.** 0. **VII.7.** $v_0=h'(0)=8$, $v_n=h'(2)=-16$, $h_{\max}=h(0,8)=7,2$. **VII.8.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, $y'=-100$. **VII.9.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=9$, $y'=7$. **VII.10.** $u'(1)=112,5$, $u'(7)=327,5$. **VII.11.** $u'(2)=43$. **VII.12.** 1) $8\cos 8x$; 2) $\frac{a}{cos^2(ax+b)}$; 3) $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)$; 4) $2\cos\frac{x}{4}$; 5) $-30(1-6x)^4$; 6) $\frac{8}{3\sqrt[3]{4x+3}}$; 7) $-\frac{8x}{(1+x^2)^5}$; 8) $\frac{3x^2}{2\sqrt{2+x^3}}$; 9) $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$; 10) $\frac{2\sin 6x}{(\cos 6x)^{4/3}}$; 11) $\frac{1+\cos 2x}{\sqrt{2x+\sin 2x}}$; 12) $2\sin^4 x\cos x$; 13) $\sin 2x$; 14) $2x\cos x^2$; 15) $-3\sin x\cos^2 x$; 16) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$; 17) $-\sin 4x$; 18) $\frac{1}{\cos^2 x}(3\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+4)$; 19) $-\frac{2\sin 2x}{5\sqrt[5]{(1+2\cos^2 x)^4}}$; 20) $\frac{\sin x^2\sin 2x-2x\sin^2 x\cos x^2}{(\sin x^2)^2}$; 21) $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$; 22) $-\frac{12\cos 3x}{(1+\sin 3x)^5}$; 23) $\operatorname{tg}^6\frac{x}{5}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{5}$; 24) $x^3\sin^2 x(4\sin x+3x^4\cos x)$; 25) $\frac{x^2(3-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$; 26) $\frac{\sin^2 x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 x}$; 27) $-\frac{8x+3}{2(4x^2+3x+2)^{2/3}}$; 28) $36x^2(2x^3+1)^5$; 29) $60\operatorname{tg}^4 3x(1+\operatorname{tg}^2 3x)$; 30) $2(3x-2)\cos 2x-2(3x^2-4x+2)\sin 2x$; 31) $x^2\cos x$; 32) $-\cos x$; 33) $\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{2x+1}{4}\right)$; 34) $\frac{\sin^2\sqrt{x}\,\cos^5\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$; 35)

$-\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\dfrac{1}{(1+x)^2}$; 36) $\dfrac{6\sin^2 3x}{\sqrt{6x-\sin 6x}}$; 37) $\dfrac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$; 38) $8x\sin^3 x^2\cos x^2$; 39) $\dfrac{3\cos 9x}{\sqrt[3]{(1+\sin 9x)^2}}$; 40) $2(1+\operatorname{tg}^2 x)$; 41) $\dfrac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$; 42) $-\dfrac{2(1+3x)}{x^3\sqrt{1+4x}}$; 43) $\dfrac{1-\cos t/2}{2\sqrt{2t-4\sin t/2}}$. **VII.13.** -1. **VII.14.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **VII.15.** 1) $\dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$; 3) $-\operatorname{tg} x-\sin^3 x\cos x$; 4) $\dfrac{10}{x(x^5+2)}$; 5) $\dfrac{2}{x(1-x^2)}$; 6) $5x^4\ln(x^5+3)$; 7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$; 8) $\dfrac{2x+3}{1-4x^2}$; 9) $\dfrac{2}{2+\sqrt{x}}$; 10) $4xe^x(2+x)+\dfrac{8x}{x(x^2-1)}$; 11) $\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}$; 12) $\dfrac{2}{x(1-ax^4)}$; 13) $-\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$; 14) $-a^{\cos x}\ln a\,\sin x$; 15) $-3x^2e^{-x^3}$; 16) $2xe^{-2x}(1-x)$; 17) 18) $e^{x/4}+e^{-x/4}$; 19) $\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; 20) $2e^x\cos x$; 21) $\dfrac{x}{x-1}$; 22) $\dfrac{1}{b}e^{x/b}\left(\sin\dfrac{x}{b}+\cos\dfrac{x}{b}\right)$; 23) $-\dfrac{e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$; 24) $2ae^{2ax}(1-e^{-4ax})$; 25) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{2x+1}{4}}{2\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}}$; 26) $\dfrac{1}{\cos x}$; 27) $\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$; 28) $-2e^{-x}\cos^2(e^{-x})$; 29) $3\sin 6x\sin^2 3x\,e^{-\sin^2 3x}$; 30) $\frac{e^{\sqrt{2x}}(2\sqrt{x}+\sqrt{2})}{2\sqrt{x}}$; 31) $\frac{6}{(x-3)(x-1)(x-4)(2-x)}$; 32) $\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$; 33) $-\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}$; 34) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$; 35) $-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; 36) $\frac{1}{x(1-x^2)}$; 37) $\frac{2\cos^2 x-1}{\sin 2x}$; 38) $\frac{\cos 2x}{\sin 2x-\sin^2 x}$; 39) $\frac{3\cos 3x\ \ln(\sin 3x)}{(1+\ln(\sin 3x))^2}$; 40) $\frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$; 41) $\frac{e^{\frac{x}{a}}}{2}\left(1+e^{\frac{-2x}{a}}\right)$;

42) $\frac{4}{e^{8x}+1}$; 43) $\frac{2}{x\sqrt{x^2+1}}$; 44) $\ln^3 x$; 45) $\frac{\ln(\sin\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\,\cos^2\sqrt{x}}$; 46) $\frac{\cos^4 x}{\sin x}$; 47) $\frac{1}{x^2(x-1)}$; 48) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$; 49) $\frac{3}{2\sqrt{x(1-9x)}}$; 50) $\frac{a}{2\sqrt{x^2-a^2}}$; 51) $\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; 52) $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$; 53) $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; 54) $\frac{1}{1+x^2}$; 55) $2\sqrt{1-x^2}$; 56) $\frac{-5e^{5x+1}}{\sqrt{1-e^{2(5x+1)}}}$; 57) $\frac{5e^{5x+1}}{\sqrt{1-e^{2(5x+1)}}}$; 58) $\frac{2\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2-x^2}}$; 59) $-\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)\sqrt{x}}$; 60) $-\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{5-x^2}}$; 61) $\frac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; 62) $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$; 63) $\frac{2x^2-a^2}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$; 64) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$; 65) $\frac{6x^2}{1+x^6}$; 66) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; 67) $\frac{8\operatorname{sgn}(x)}{x^2+16}$; 68) $\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$; 69) 0; 70) $\frac{2}{(x^2+2x+2)^2}$; 71) $-\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}(e^{2x}-1)}}$; 72) $\arccos x$; 73) $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$; 74) $\frac{3}{x^2+1}$; 75) $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$; 76) $\operatorname{sh} 2x$; 77) $\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}$; 78) $\operatorname{th} x$; 79) $\frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x}$; 80) $\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}$; 81) $4\operatorname{sh} 4x$; 82) $3\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} x$; 83) $\operatorname{sh}^2 x+x\operatorname{sh} 2x+3\operatorname{th}^2 x(1-\operatorname{th}^2 x)$; 84) $-\frac{2\operatorname{sh} x}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2 x}}$; 85) $\frac{2\operatorname{sh} 8x}{\sqrt{4+\operatorname{ch}^2 4x}}$; 86) $3x^2-\operatorname{cth} x$; 84) $\frac{x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$; 88) $-\frac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 89) $\operatorname{tg}^3 x$; 90) $\frac{4x+1}{2x\sqrt{4x-1}}$; 91) $\frac{2e^t(e^t+1)}{e^{2t}+1}$; 92) $\frac{2}{x-4}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x(x-4)}}$; 93) $\operatorname{tg}^5 t$; 94) $\frac{x^2}{x^4-a^4}$; 95) $-\frac{4x}{\sqrt{x^4+1}}$; 96) $e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\sin x\operatorname{tg}^2 x$; 97) $\frac{8x^3}{x^8+1}$; 98) $xe^{x^2}(2\ln x+2x^2\ln x+1)$;

99) $\frac{2^{x/2-1}\ln 2}{\sqrt{1-2^x}}$; 100) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$; 101) $\frac{2xe^{x^2}(1+x^2+x^4)}{(x^2+1)^2}$; 102) $\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 103) $\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; **VII.17.** $T_v(2)=0,25$; $E_t(v)(2)=0,5$; $T_v(6)=-0,15$; $E_t(v)(6)=-0,9$. **VII.18.** $E_x(y)=-0,6$; зменшиться на 0,6%. **VII.19.** $p=2$; $E_p(q)=-0,3$; $E_p(s)=0,8$; зросте на 1,4%. **VII.20.** $p=3,25$; $E_p(q)=-\frac{13}{15}$; $E_p(s)=\frac{13}{15}$; зросте на 0,67%. **VII.21.** Вони рівні. **VII.22.** а) $(-\infty;\infty)$; $x'=\frac{x}{x+1}$; б) $(-\infty;\infty)$; $x'=\frac{1}{e^x+1}$; в) $(-\infty;\infty)$; $x'=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; г) $(-1;1)$; $x'=\operatorname{ch}^2 x$; **VII.23.** а) $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(y\le 1)$; $x=\pm\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\le y\le 1)$; $x'_y=\frac{1}{4x(x^2-1)}$; б) $x=\pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0\le y<1)$; $x'_y=\frac{(1+x^2)}{2x}$; в) $x=\ln(1\pm\sqrt{1-y})-\ln y$ $(0<y\le 1)$; $x=\ln(\sqrt{1-y}-1)-\ln(-y)$ $(y<0)$; $x'_y=\frac{e^{2x}}{2(1-e^x)}$. **VII.24.** $y'=\frac{x}{3(1+y^2)}$. **VII.25.** $y'=\frac{x}{1-\varepsilon\cos y}$. **VII.26.** а) -1; б) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; в) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$; г) $\dfrac{\sin t+2\cos t-2\cos^3 t}{\cos t(2\cos^2 t-1)}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$; е) $\dfrac{b}{a}\operatorname{cth} t$; є) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; ж) -1. **VII.27.** а) $-\dfrac{x}{y}$; б) $\dfrac{p}{y}$; в) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\dfrac{x}{y}$; г) $-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\dfrac{x}{y}$; д) $\dfrac{2x-y}{x-2y}$; е) $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$; є) $\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$; ж) $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$; з) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$; и) $-\dfrac{1+ye^x}{e^x(e^y+x)}$; і) $-\dfrac{e^{x+y}\sin y+\sin x}{e^{x+y}\cos y+\cos x}$ **VII.28.** $\dfrac{1}{3}$. **VII.33.** а) $nx^{n-1}dx$; б) $(3x^2-6x+3)dx$; в) $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $gtdt$; д) $2(1-\cos\varphi)d\varphi$; е) $-\dfrac{2dt}{t^3}$; є) $\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)dx$; ж) $b\sin(a-b\varphi)d\varphi$; з) $-\dfrac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$; и) $-\operatorname{tg} x dx$; і) $\dfrac{du}{2u\sqrt{4u-1}}$; ї) $-2e^{-2t}dt$. **VII.34.** а) $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha\, d\alpha$; в) $b(1+e^{-bt})dt$; г) $\left(\dfrac{1}{t}+e^{-t}\right)dt$; д) $\sin 2t\,dt$; е) $\sin u\,du$; є) $-\dfrac{a^3dx}{x^2(a^2+x^2)}$; ж) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)d\alpha$; з) $-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}d\varphi$; и) $-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **VII.35.** 0,75 (м^3); 0,006. **VII.36.** $df=\frac{3b}{8f_0}dS$. **VII.37.** 0,04. **VII.38.** $\Delta R<\frac{1}{4\pi R^2}$. **VII.39.** зменшити на 4б46 см. **VII.40.** а) 2,083; б) 2,991; в) 1,9375; г) 1,9953. **VII.41.** а) $4\cos^2 x-2$; б) $2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)$; в) $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$; г) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; д) $2\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x}$; е) $\dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$. **VII.42.** а) $4\sin 2x$; б) $-\dfrac{24}{x^4}$; в) $-3\sin x-x\cos x$; г) $-\dfrac{1}{x^2}$; д) $e^{-t}(3-t)$; е) $\dfrac{2a(3x^2-a^2)}{a^2+x^2}$. **VII.43.** а) $\left(-\frac{1}{a}\right)^n e^{-x/a}$; б) $(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$; в) $(-1)^{n-1}(2n-3)!!2^{-n}x^{-n+\frac{1}{2}}$; г) $n!$; д) $\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$; е) $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$; є) $a^x\ln^n a$; ж) $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **VII.45.** а) $-2e^{-x}\sin x$; б) $xa^x(x^2\ln^2 a+6x\ln a+6)$; в) $2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$. **VII.46.** а) $2e^{-x}(\sin x+\cos x)$; б) $\dfrac{1}{x}$; в) $-3\cos x+x\sin x$; г) $e^x(x^3+$

$9x^2+18x+6)$; д) $\frac{1}{a^3}\left(6x\sin\frac{x}{a}+(x^2-6a^2)\cos\frac{x}{a}\right)$; **VII.47.** $\frac{1}{a^3}e^{x/a}(3a+x)$. **VII.48.** $30°$, $-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{7\sqrt{3}}{36}$. **VII.55.** а) $\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; б) $\frac{(2\ln x-3)dx}{x^3}$; в) $x^x\left(\ln^2 x+2\ln x+1+\frac{1}{x}\right)$. **VII.56.** а) $-\frac{x^2+y^2}{y^2}$; б) $2\frac{y-a}{(b-x)^2}$; в) $\frac{my(n+m)}{n^2x^2}$; г) $\frac{y^2-x^2}{y^3}$; д) $-2\frac{1+y^2}{y^5}$; е) $-\frac{x^2+y^2}{y^3}$; є) $-\frac{(y-b)^2}{(y-b)^3}+\frac{(x-a)^2}{(y-b)^3}$. **VII.57.** $-\frac{b}{a^2}$. **VII.58.** $1-\frac{1}{e}$. **VII.59.** $-e^2-e$. **VII.60.** 0. **VII.61.** а) $\frac{-1}{a\cos^3 t}$; б) $\frac{-1}{4\sin^3 t}$; в) $\frac{-1}{4a\sin 4\frac{t}{2}}$; г) $\frac{t^2+1}{4t^3}$; д) $\frac{3}{4t}$; е) $\frac{3}{4e^t}$. **VII.62.** а) $\frac{3}{2}(1+t)$; $\frac{3}{4(1-t)}$; $\frac{3}{8(1-t)^3}$; б) $-\operatorname{ctg} t$; $\frac{-1}{a\sin^3 t}$; $\frac{-3\cos t}{a^2\sin^5 t}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; $\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$; г) $\frac{1+\sin 2t}{\cos 2t}$; $\frac{2(\cos t+\sin t)^3}{e^t\cos^3 2t}$; $\frac{2(1+\sin 2t)}{e^{2t}\cos^5 2t}(4,5-\cos 2t+6\sin 2t-1,5\cos 4t-0,5\sin 4t)$; **VII.63.** а) $-\frac{x}{y}$, $-\frac{x^2+y^2}{y^3}$, $-3\frac{x(x^2+y^2)}{y^5}$; б) $\frac{p}{y}$, $-\frac{p^2}{y^3}$, $\frac{3p^3}{y^5}$; в) $\frac{2x-y}{x-2y}$, $6\frac{x^2-xy+y^2}{(x-2y)^2}$, $\frac{54x(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^5}$. **VII.64.** а) $120x dx^4$; б) $-\frac{15dx^3}{8x^{7/2}}$; в) $-(5120\sin 2x-1024x\cos 2x)dx^{10}$; г) $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$. **VII.65.** $\operatorname{arctg} 4$, $\pi-\operatorname{arctg} 4$. **VII.66.** $4x+y=8$, $x+4y+8=0$. **VII.67.** $p(y-y_0)=y_0(x_0-x)$. **VII.68.** $\operatorname{arctg} 3$. **VII.69.** $4x+y=8$, $x-4y-2=0$. **VII.70.** $45°$, $x-y+1=0$. **VII.71.** $x+y=3$, $x-y=1$. **VII.72.** 1) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$; 2) $yy_0=p(x+x_0)$. **VII.73.** 1) $\sqrt{5}/2$, $\sqrt{5}$, $2x-y=1$, $x+2y=3$; 2) $\sqrt{13}/3$, $\sqrt{13}/2$, $3x-2y=1$, $2x+3y=5$ або $3x+2y=1$, $2x-3y=5$. **VII.74.** $45°$. **VII.75.** а) $3x-3y=2$, $3x+3y+4=0$; б) $y=0$ і $x=0$, $3x-2y=1$ і $2x+3y=5$, $3x-2y=5$ і $2x+3y=-1$; в) $x+4y=5$ і $4x-y=3$, $x-4y=5$ і $4x+y=3$; г) $y=4x$ і $x+4y=0$, $4x+y=16$ і $x-4y=4$; д) $4y+x=8$ і $4x-y+2=0$, $4y-x+8=0$ і $4x+y+2=0$; е) $y=0$ і $x+4=0$, $y-3x=8$ і $3y+x=24$, $y+3x+8=0$ і $3y-x+24=0$; є) $y-x=1$ і $x+y+17=0$. **VII.76.** $4/\sqrt{17}$. **VII.77.** $y'_-=-\frac{1}{2}$, $y'_+=\frac{1}{2}$. **VII.78.** $90°$. **VII.79.** $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. **VII.80.** $2y-x=1$, $2y+x+3=0$. **VII.81.** $x+2y=4\sqrt{2}$. **VII.82.** $y=x+\frac{a(4-\pi)}{2}$, $y=-x+a\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)$. **VII.83.** $y=x-\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}$. **VII.85.** Не можна, бо при $x=0$ немає похідної. **VII.86.** Тому, що точка $x=0$ кутова (дві дотичні). **VII.87.** $f(b)=b^2$, $f(a)=a^2$, $f'(c)=2c$, $c=\frac{a+b}{2}$. **VII.88.** $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. **VII.89.** $c=2,25$. **VII.91.** На дузі є кутова точка при $x=\frac{\pi}{2}$, в якій функція немає похідної. **VII.92.** Функція неперервна і має похідну всередині відрізка $[0;2]$, але розривна на його правому кінці. **VII.93.** Геометричний зміст функції Φ полягає в тому, що це подвоєна площа ΔAMB, де M – довільна точка на дузі

AB. **VII.95.** а) $\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$; б) $\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$; в) $\frac{1}{\ln 2}$. **VII.96.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\left(\frac{15}{4}\right)^{2/3}$. **VII.97.** Функція $y=|x-1|$ немає похідної при $x=1$. **VII.98.** $x=-0,5$. **VII.99.** 1) 7; 2) 0,25; 3) $\frac{a}{na^n}$; 4) $-\frac{1}{\ln 5}$; 5) $\frac{a}{b}$; 6) 1; 7) $a-b$; 8) $\frac{1}{3}$; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 0; 11) $\frac{1}{8}$; 12) $\ln a-\ln b$; 13) 0,5; 14) 1; 15) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; 16) 0,5; 17) 1/6; 18) 3; 19) ∞; 20) 0; 21) 0; 22) 0; 23) 3; 24) 0; 25) 0; 26) 0; 27) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 28) 1; 29) 1; 30) $-\frac{1}{3}$; 31) -2; 32) $\frac{1}{e}$; 33) $\frac{1}{6}$; 34) e^3; 35) 1; 36) 1; 37) e^3; 38) 1; 39) $\frac{1}{e}$; 40) 1. **VII.103.** $f(x)=-1+(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4$, 143, -60, 26. **VII.104.** $f(x)\approx 1-6(x-1)+(x-1)^2+60(x-1)^3$, 0,823. **VII.105.** 2,23. **VII.106.** а) $f(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$; б) $f(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$; в) $f(x)=1-x^3+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^9}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}+o(x^{3n})$; г) $f(x)=-x^2-\frac{x^4}{2}-\dots-\frac{x^{2n}}{n}+o(x^{2n})$. **VII.107.** а) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{32}x^3-\dots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}x^n+o(x^n)$; б) $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\dots+\frac{(-1)^{n-1}2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^n+o(x^n)$; в) $a+\frac{1}{ma^{m-1}}x-\frac{m-1}{m^2 2! a^{2m-1}}x^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{m^3 3! a^{3m-1}}x^3-\dots+\frac{(-1)^{n-1}(m-1)(2m-1)\dots((n-1)m-1)}{m^n n! a^{nm-1}}x^n+o(x^n)$. **VII.108.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$. **VII.109.** $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. **VII.111.** а) $<0,013$; б) $<2\cdot10^{-6}$; в) $<0,00043$. **VII.112.** а) $-\frac{1}{60}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; г) $\ln^2 a$; д) 0,5; е) $\frac{1}{3}$. **VII.114.** а) при $x\in(-\infty;0,5)$ функція зростає, при $x\in(0,5;+\infty)$ функція спадає; б) при $x\in(-\infty;-1)$ і $x\in(1;+\infty)$ функція спадає, при $x\in(-1;1)$ функція зростає; в) при $x\in(-\infty;-1)$ і $x\in(1;+\infty)$ функція спадає, при $x\in(-1;1)$ функція зростає; г) функція зростає при $x\in\mathbb{R}$; е) при $x\in(-\infty;0)$ і $x\in(2;+\infty)$ функція спадає, при $x\in(0;2)$ функція зростає; є) при $x\in(-\infty;-1)$ і $x\in(0;1)$ функція спадає, при $x\in(-1;0)$ і $x\in(1;+\infty)$ функція зростає. **VII.116.** а) крива опукла вниз на $\mathbb{R}$; б) при $x>0$ крива опукла вниз і при $x<0$ крива опукла вгору, $x=0$ – точка перегину; в) крива опукла вниз на $\mathbb{R}$; г) крива опукла вгору на $\mathbb{R}$; д) $(0;0)$ – точка перегину. **VII.117.** а) при $x\in(-\infty;0)$ і $x\in(4;+\infty)$ функція зростає, при $x\in(0;4)$ функція спадає, $\left(2;-\frac{8}{3}\right)$ – точка перегину; б) при $x>0$ функція спадає, при $x<0$ функція зростає, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-1/2}\right)$ – точка перегину; в) при $x\in(-\infty;-1)$ і $x\in(1;+\infty)$ функція спадає, при $x\in(-1;1)$ функція зростає, $\left(\pm\sqrt{3};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0;0)$ – точки перегину; г) функція спадає при $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x=-\dfrac{\ln 2}{2}$ – точка перегину. **VII.118.** 1) при $x=-2$ $y_{min}=1$; 2) при $x=0,5$ $y_{max}=1,25$; 3) $x=-1$ – точка перегину; 4) при $x=1$ $y_{min}=0$; 5) при $x=-5$ $y_{min}=0$; 6) при $x=-2$ $y_{min}=3$; 7) при $x=-2$ $y_{min}=-\dfrac{16}{3}$, при $x=2$ $y_{max}=\dfrac{16}{3}$; 8) при $x=-1$ $y_{max}=\dfrac{5}{3}$, при $x=3$ $y_{min}=-9$; 9) при $x=\pm 2$ $y_{max}=5$, при $x=0$ $y_{min}=1$; 10) $(0;0)$ – точка перегину; 11) при $x=2$ $y_{min}=2$, при $x=-2$ $y_{max}=-2$; 12) при $x=-1$ $y_{min}=-4$, при $x=-3$ $y_{max}=0$; 13) при $x=0$ $y_{min}=0$, при $x=\pm 1$ $y_{max}=1$; 14) при $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$ $y_{min}\approx -0,76$, при $x=1$ $y_{max}=0$, при $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$ $y_{min}\approx -0,05$, $x=2$ екстремуму немає; 15) при $x=1$ $y_{min}=2$, при $x=-1$ $y_{max}=-2$; 16) при $x=-1$ $y_{min}=-1$, при $x=1$ $y_{max}=1$; 17) при $x=\dfrac{7}{5}$ $y_{min}=-\dfrac{1}{24}$; 18) при $x=0$ і $x=2$ $y_{min}=0$, при $x=1$ $y_{max}=1$; 19) при $x=1$ $y_{max}=\dfrac{1}{e}$; 20) при $x=\dfrac{1}{e^2}$ $y_{min}=-\dfrac{2}{e}$, при $x=0_+$ $y_{max}=0$; 21) при $x=\pi(k+0,5)$ $y_{min}=5$, при $x=\pi k$ $y_{max}=10$; 22) при $x=1$ $y_{max}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$; 23) при $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ $y_{min}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4+2\pi k}$, при $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k$ $y_{max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4+\pi k}$. **VII.119.** а) $\dfrac{1}{2}$; 32; б) 2; 66; в) 0; 132; г) 2; 100,01; д) 1; 3. **VII.120.** 30 м $\times$ 60 м. **VII.121.** 5 і 5. **VII.122.** $\dfrac{ah}{4}$. **VII.123.** $\dfrac{a}{6}$. **VII.124.** 4 м $\times$ 4 м $\times$ 2 м. **VII.125.** 20 см. **VII.126.** 60°. **VII.127.** $\dfrac{18}{4+\pi}$. **VII.128.** Через $\dfrac{a}{2v}$ годин найменша відстань дорівнюватиме $\dfrac{a}{2}$ км. **VII.129.** В $\sqrt{3}\approx 1,7$ рази. **VII.130.** $l\approx 5,6$ м; визначається як максимум $l=\dfrac{2,4}{\sin\alpha}+\dfrac{1,6}{\cos\alpha}$. **VII.131.** $V_{max}=\dfrac{128\pi}{9}$ дм^3 при висоті $x=2$ дм. **VII.132.** $S_{max}=R^2$ при висоті $x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. **VII.133.** $(1;1)$. **VII.134.** $\sqrt{ab}$. **VII.135.** 4 см і $\sqrt{3}$ см. **VII.136.** $x=1,5$. **VII.137.** $\alpha=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **VII.138.** 9,129. **VII.139.** 3. **VII.140.** 0,612. **VII.141.** 1) $x=0$ і $y=1$; 2) $x=0$ і $y=-x$; 3) $x=0$ і $y=x$; 4) $x=-1$ і $y=x-1$; 5) $y=1$; 6) $x=0$ і $y=-1$; 7) $x=0$ і $y=x-1$; 8) $x=-0,5$ і $y=-2$; 9) $y=x$; 10) $y=x\pm\pi$; 11)

$y=-\dfrac{\pi}{4}$; 12) $y=0$; 13) $y=\pm 2x$; 14) $x=0$ і $y=x$; 15) $x=1$, $x=-1$ і $y=1$; 16) $y=0$. **VII.142.** 1) при $x=2$ $y_{max}=4$, при $y=0$ $x_1=0$, $x_2=4$; 2) при $x=-1$ $y_{min}=-4$, при $y=0$ $x_1=1$, $x_2=-3$; 4) при $x=\pm 2$ $y_{min}=-4$, при $x=0$ $y_{max}=0$, при $y=0$ $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{8}$; 5) при $x=0$ $y_{min}=-1$, точки перетину з віссю Ox $x=\pm 1$; 6) при $x=0$ $y_{max}=1$, $y=0$ – асимптота, крива симетрична відносно осі OY; 7) при $x=5$ $y_{min}=4$, при $x=1$ $y_{max}=-4$, $x=3$, $y=x-3$ – асимптоти; 8) при $x=0$ $y_{min}=0$, при $x=\dfrac{2}{3}$ $y_{max}=\dfrac{4}{27}$; 9) при $x=0$ $y_{max}=1$, $y=0$ – асимптота; 10) при $x=\dfrac{5\pi}{2}$ $y_{min}\approx 0,4$, при $x=\dfrac{\pi}{2}$ $y_{max}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 11) при $x=1$ $y_{max}=1$, $x=0$, $y=0$ – асимптоти, при $y=0$ $x=e^{-1}$; 12) при $x=0,5$ $y_{min}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$, при $x=-0,5$ $y_{max}\approx 0,28$, $y=x\pm\dfrac{\pi}{2}$ – асимптоти; 13) при $x=2$ $y_{max}=\dfrac{2}{e}$, $y=0$ – асимптота; 14) при $x=\dfrac{1}{e}$ $y_{min}=-\dfrac{1}{e}$; 15) при $x=0$ $y_{min}=0$, при $x=\pm\sqrt{\dfrac{4n+1}{2}}\pi$ $y_{max}=1$; 16) при $x=0$ $y_{min}=0$; 17) при $x_k=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in N\setminus\{0\}$, $y_{min}=\dfrac{1}{2}$, при $x_k=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in N\setminus\{0\}$, $y_{max}=1$; 18) при $x=\dfrac{1}{2}$ $y_{max}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, при $y=0$ $x_1=0$, $x_2=1$; 19) при $x=-2$ $y_{min}=-\dfrac{1}{9}$, при $x=2$ $y_{max}=-1$, $x=1$, $x_1=4$ – асимптоти; 20) при $x=1$ $y_{min}=1,5$, крива асимптотично наближається до параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$ і до осі Oy; 21) при $x=-3$ $y_{max}=-4,5$, при $x=3$ $y_{min}=4,5$, $(0;0)$ – точка перегину; $x=\pm\sqrt{3}$, $y=x$ – асимптоти; 22) при $x_k=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $y_{max}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k-\dfrac{1}{2}\ln 2$; 23) при $x=1$ $y_{min}=\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$ 24) при $x=-1$ $y_{max}=1$, при $x=0$ $y_{min}=0$; 25) при $x=0$ $y_{min}=0$, при $x=2$ $y_{max}=\dfrac{4}{e^2}$, $y=0$ – асимптота; 26) при $x=1$ $y_{min}=-1$, при $x=0$ $y_{max}=0$, при $y=0$ $x_1=0$, $x_2=\dfrac{27}{8}$; 27) при $x=-1$ $y_{max}=2$, при $x=1$ $y_{min}=0$, при $x=0$ $y=1$, $y=1$ – асимптота; 28) при $x=1$ $y_{max}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, при $x=-1$ $y_{min}=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 29) при $x=2$ $y_{min}=2(1-\ln 2)$, $x=0$ – асимптота; 30) при $x=\dfrac{\pi}{6}$ $y_{max}\approx 0,34$, при $x=-\dfrac{\pi}{6}$ $y_{min}\approx -0,34$; 31) при $x=0$ $y_{min}=0$, при $x=1$ $y_{перег.}=1$; 32) при $x=-\dfrac{1}{2}$ $y_{max}\approx 1,85$, при $x=\dfrac{1}{2}$ $y_{min}\approx 1,28$, при $x=0$ $y=\dfrac{\pi}{2}$; $y=x$ – асимптота; 33) при

$x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{5\pi}{6}$ $y_{max} = 1,5$, при $x = \frac{\pi}{2}$ $y_{min} = 1$; 34) при $x = e$ $y_{max} = \frac{1}{e}$, при $y = 0$ $x = 1$; $x = 0$ і $y = 0$ – асимптоти; 35) при $x = -3$ $y_{min} = 6$, при $x = -1$ $y_{max} = 2$; при $y = 0$ $x = \pm\sqrt{3}$; при $x = 0$ $y = 1,5$; $x = -2$ і $y = 2-x$ – асимптоти; 36) при $x = 1$ $y_{min} = 2$, при $x = -1$ $y_{max} = -2$; 37) при $x = 1$ $y_{min} = 3$, при $x = 4$ $y_{перег.} = 0$; при $x = 0$ $y \approx 3,6$; 38) при $x = 1$ $y_{min} = -2$, при $x = -1$ $y_{max} = 2$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1,3$; $(0;0)$ – точка перегину; 39) при $x = -2$ $y_{min} = 0$, при $x = -4$ $y_{max} \approx 0,8$; при $x = 1$, $y_{max} \approx 2,8$; Ox – асимптота; 40) при $x = \pm 1$ $y_{max} = 1$, при $y = 0$ $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = 0$ і $y = 0$ – асимптоти; 41) при $x = 0$ $y_{max} = 1$, при $x = 1$ $y_{min} = 0$; при $y = 0$ $x = \pm 1$; 42) при $x = -1$ $y_{min} = \frac{1}{3}$, при $x = 1$ $y_{max} = 3$; при $x = 0$ $y = 1$; $y = 1$ – асимптота; 43) при $x = -1$ $y_{max} = 1$, при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -4$; 44) при $x = -3$ $y_{перег.} = 0$, при $x = 0$ $y_{min} \approx \frac{27}{4}$; $x = -2$ і $y = x + 5$ – асимптоти; 45) при $x_n = 2\pi n$, $n \in Z$, $y_{min} = 0$, при $x_n = (2n+1)\pi$, $n \in Z$, $y_{max} = \sqrt{2}$; 46) при $x_n = \pi n$, $n \in Z$, $y_{min} = 0$, при $x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$, $y_{max} = \frac{1}{2}e^{-(2n+1/2)\pi}$; $x_n = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ – точки перегину. **VII.144.** 1,86. **VII.145.** –2,15; 1,77. **VII.146.** а) 1,17; б) 3,07. **VII.147.** 1,67. **VII.148.** а) 1,297; б) 0,310; в) $-0,682l$; г) –0,798; 1,495.

РОЗДІЛ VIII

VIII.1. 1) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln|x| + C$; 2) $2x^5 - x^{-3} + C$; 3) $x^{-2} - x^{-1} + C$; 4) $\frac{1}{2}(x^2 - x^{-2}) + 2\ln|x| + C$; 5) $\frac{1}{2}(x^2 - x^{-2}) - 2\ln|x| + C$; 6) $3\sqrt[3]{x} + 2/\sqrt{x} + C$; 7) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$; 8) $4\ln x - 8/\sqrt{x} - 1/x + C$; 9) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$; 10) $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$; 11) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln x + C$; 12) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x} + C$; 13) $e^x + 1/x + C$; 14) $a^x/\ln a - 2/\sqrt{x} + C$; 15) $-2/\sin 2x + C$; 16) $\ln|x| - x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + C$; 17) $1 + \cos x + C$; 18) $e^x + \operatorname{tg} x + C$; 19) $-\operatorname{ctg} x - x + C$; 20) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; 21) $\operatorname{tg} x - x + C$; 22) $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$; 23) $\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$; 24) $2\operatorname{arctg} x - 3\arcsin x + C$; 25) $\frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x + C$; 26) $a^x/\ln a - \frac{1}{4}x^{-4} + C$; 27) $\cos x - \operatorname{ctg} x + C$; 28) $3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + C$. **VIII.2.** 1) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$; 2) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 3) $2e^{x/2} - 2e^{-x/2} + C$; 4) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-1)^3} + C$; 5) $-0,1(3-2x)^5 + C$; 6) $-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(5-6x)^4} + C$; 7) $-\sqrt{3-2x} + C$; 8) $\operatorname{sh} 2x + 2x + C$; 9) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$; 10) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x} + C$; 11) $-\frac{1}{b}\sin(a - bx) + C$; 12) $\frac{1}{b}\cos(a - bx) + C$; 13) $\ln(x^2 - 5x + 7) + C$; 14) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$; 15) $-0,1\ln(1-10x) + C$; 16) $-\frac{1}{6}\ln\left(1 - 3e^{2x}\right) + C$; 17) $\ln\sin x + C$; 18) $-\ln\cos x + C$; 19) $\ln\sin 2x + C$; 20) $-\frac{1}{3}\ln(1 + 3\cos x) + C$; 21) $\frac{1}{2}\ln(1 + 2\sin x) + C$; 22) $\ln(1 + \ln x) + C$; 23) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$; 24) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$; 25) $-\frac{1}{3}\sin^{-3} x + C$; 26) $\frac{1}{2}\cos^{-2} x + C$; 27) $(2 - \cos x)/\sin x + C$; 28) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; 29) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+3x)^4} + C$; 30) $-\frac{1}{7}\sqrt[6]{(1-2x^3)^7} + C$; 31) $\sqrt{1+x^2} + C$; 32) $(\sin x - 2)/\cos x + C$; 33) $-e^{\cos x} + C$; 34) $e^{\sin x} + C$;

35) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 36) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 37) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$; 38) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-8)^4}+C$; 39) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+C$; 40) $-\sqrt{1-x^2}+C$; 41) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$; 42) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$; 43) $\frac{1}{6}\sqrt{(1+4\sin x)^3}+C$; 44) $-\frac{1}{40}\sqrt[3]{(1-6x^5)^4}+C$; 45) $2\ln|\sin x|+C$; 46) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$; 47) $-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|+C$; 48) $\frac{1}{2b(a-bx)^2}+C$. **VIII.4.** 1) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$; 2) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}+C$; 3) $\arcsin\frac{x}{2}+C$; 4) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C$; 5) $\ln\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)+C$; 6) $\sqrt{3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+C$; 7) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+C$; 8) $2\ln(x^2+5)-\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C$; 9) $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$; 10) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 11) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$; 12) $\frac{1}{6}\arcsin\frac{x^3}{2}+C$; 13) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$; 14) $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|+C$; 15) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$; 16) $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+\sqrt{x^8-1}\right)+C$; 17) $\frac{5}{2}\ln(x^2+4)-\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$; 18) $\frac{3}{2}\ln|x^2-4|-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 19) $\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$; 20) $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; 21) $x-\mathrm{arctg}\,x+C$; 22) $\frac{1}{3}x^3+3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$; 23) $\mathrm{arctg}\,(x+2)+C$; 24) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2}+C$; 25) $\frac{1}{3}x^3-2x+2\sqrt{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 26) $\arcsin e^x+C$; 27) $\mathrm{arctg}\,(2x^2)+C$; 28) $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{5}+C$; 29) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}+C$; 30) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)+C$; 31) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 32) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; 33) $\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$; 34) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$; 35) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}\right)+C$; 36) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; 37) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 38) $\frac{1}{2}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right)+C$. **VIII.5.** 1) $x\ln|x|-x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)+C$; 3) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$; 4) $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C$; 5) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$; 6) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$; 7) $x[(\ln|x|-1)^2+1]+C$; 8) $-x\,\mathrm{ctg}\,x+\ln|\sin x|+C$; 9) $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$; 10) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x^2}+C$; 11) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 12) $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C$; 13) $x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}\,x+C$; 14) $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$; 15) $\frac{2}{5}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$; 16) $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C$; 17) $x\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 18) $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C$; 19) $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$; 20) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$; 21) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}\,x\right)+C$; 22) $x\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$; **VIII.6.** 1) $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$; 2) $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C$; 3) $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$; 4) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$; 5) $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$; 6) $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|]+C$; 8) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; 9) $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$; 10) $\frac{x^2}{2}+\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|$. **VIII.7.** 1) $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$; 2) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 3) $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$; 4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 5) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-$

$1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| + C$; 6) $\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C$; 7) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)}$. **VIII.8.** 1) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; 3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$; 4) $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} + \operatorname{arctg}x - \frac{7}{(x-1)^2}\right] + C$; 5) $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg}x + C$; 6) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2} + C$; 7) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$; 8) $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \ln\frac{x^2+2}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$; 9) $\frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 10) $\frac{40x^3+15x^2+33x}{48(1+x^2)^2} + \frac{15}{48}\operatorname{arctg}x + C$; 11) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right) + C$. **VIII.9.** 1) $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. 2) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)$. 3) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)$. 4) $\frac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$. **VIII.15.** 1) $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$; 2) $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3) + C$; 3) $6\left[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1+\sqrt[6]{x})\right] + C$; 4) $\frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x} + C$; 5) $\frac{3\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{8} - \frac{3\sqrt[3]{x^4+1}}{4} + \frac{3}{4}\ln\left(\sqrt[3]{x^4+1}+1\right) + C$; 6) $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3} + C$. **VIII.16.** 1) $\mp\arcsin\frac{1}{x} + C$, - при $x > 0$, + при $x < 0$; 2) $\ln\frac{Cx}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}$; 3) $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$; 4) $\ln\frac{C(x+1)}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **VIII.17.** 1) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right] + C$; 2) $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2} + C$; 3) $2\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2} + C$; 4) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$; 5) $\frac{x^3}{3a^2\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + C$; 6) $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$. **VIII.18.** 1) $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C$; 2) $-\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin\frac{x+1}{2} + C$; 3) 4) $\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a} + C$. **VIII.19.** 1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right| + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3} + C$; 2) $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C$; 3) $-\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} + C$; 4) $\frac{2a-bx^2}{b^2\sqrt{a-bx^2}} + C$; **VIII.20.** 1) $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{+}C$; 2) $\frac{(3x+1)^{2/3}}{2} + (3x+1)^{1/3} + \ln|(3x+1)^{1/3}-1| + C$; 3) $x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$; 4) $-0,3(2x+3a)\sqrt[3]{(a-x)^2} + C$; 5) $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$; 6) $\frac{3(x^2+1)}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{5} + \right.$ $\left. + \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{4} + \frac{1}{3}\right) + C$; 7) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) + C$; 8) $x^2 + \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3} + C$; 6) $\mp\sqrt{\frac{x+2}{x}} + C$ (- при $x > 0$ і + при $x < -2$); 10) $\arccos\frac{1}{x-1} + C$; 11) $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$; 12) $2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}$; 13) $\frac{2+x}{2}\sqrt{4x+x^2} - 2\ln|x+2+\sqrt{4x+x^2}| + C$; 14) $-\frac{x+6}{2}\sqrt{5+4x-x^2} + \frac{17}{2}\arcsin\frac{x-2}{3} + C$; 15) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|} + C$; 16) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$; 17) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right| + C$; 18) $\arccos\frac{x+1}{2x} + C$; 19) $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{2} + C$; 20) $\left(\frac{x^2-14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}| + C$; **VIII.21.** 1) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg}e^x + C$; 2) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + C$; 3) $e^x +$

$\ln|e^x-1|+C$; 4) $2\ln|e^x-1|-x+C$; 5) $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120$, де $t=\sqrt{x}$. **VIII.22.** 1) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch} x+C$; 2) $\frac{1}{5}\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^4 x-\frac{1}{15}\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^2 x-\frac{2}{15}\operatorname{sh} x+C$; 3) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x+C$; 4) $\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x-\frac{1}{8}x+C$; 5) $\ln|\operatorname{ch}x|+C$; 6) $x-\operatorname{cth}x+C$; 7) $\frac{1}{10}\operatorname{ch}5x-\frac{1}{2}\operatorname{ch}x+C$; 8) $\frac{1}{10}\operatorname{sh}5x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}x+C$; 9) $\frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\arcsin(e^{-2x})\right]+C$; 10) $\frac{a\operatorname{ch}ax\sin bx-b\operatorname{sh}ax\cos bx}{a^2+b^2}+C$; 11) $\frac{a\operatorname{ch}ax\cos bx+b\operatorname{sh}ax\sin bx}{a^2+b^2}+C$. **VIII.23.** 1) $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{x+1}}{x}\right|+C$; 2) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$; 3) $\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x+a}{x}\right|-\frac{1}{ax}+C$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 5) $2\arcsin\sqrt{x}+C$; 6) $\frac{1}{4}\left(x^2+x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$; 7) $\ln C\,(e^x+1)-x-e^{-x}+C$; 8) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 9) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; 10) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$; 11) $\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 12) $-\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{b}+C$; 13) $3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}+24\ln(\sqrt[6]{x}+2)+C$; 14) $\frac{b-3ax}{6a(ax+b)^3}+C$; 15) $-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C$; 16) $-\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+C$; 17) $\frac{2}{b}\sqrt{a+b\ln x}+C$; 18) $\frac{1}{3b(n-1)(a-bx^3)^{n-1}}+C$ при $n\neq 1$ і $-\frac{1}{3b}\ln|a-bx^3|+C$ при $n=1$; 19) $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 20) $-\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)^2}+C$; 21) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln(4+e^{2x})+C$; 22) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+C$; 23) $\ln\left|\frac{C\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\right|$; 24) $x+\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; 25) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C$; 26) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{ctg}x}\right|$; 27) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|$; 28) $\frac{2}{8a}\left[(x+a)^{3/2}-x^{3/2}\right]$; 29) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^2\right]+C$; 30) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{C(x-1)^2}{x}$; 31) $-\frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3/2}+C$; 32) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x^3-1}+C$; 33) $\frac{1}{2}\left[x+\ln|\sin x+\cos x|\right]+C$; 34) $2\left[\sqrt{x}\arcsin x+\sqrt{1-x}\right]+C$; 35) $\operatorname{tg}^2 x+C$; 36) $\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; 37) $-\operatorname{ctg}x\ln|\cos x|-x+C$; 38) $e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$; 39) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$; 40) $\ln|x|-\frac{x+1}{x}\ln|x+1|+C$; 41) $\pm 2\sqrt{1+\sin x}$, + при $\cos x>0$, - при $\cos x<0$; 42) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$; 43) $\frac{1}{6}\ln\frac{|x^2-2|}{x^2+1}+C$; 44) $-2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)+C$; 45) $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln|x+1|+C$; 46) $\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$; 47) $\ln|x|-\frac{x^2+1}{2x^2}\ln(x^2+1)+C$; 48) $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)+C$; 49) $2(\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C$; 50) $\frac{2(x+7)}{3}\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}\ln\frac{|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}+C$; 51) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; 52) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$; 53) $-\frac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^2}+C$; 54) $\ln\frac{(2x-1)^2}{|x^2+x|}+C$; 55) $-\frac{1+\cos x+\sin^2 x}{\sin x}+C$; 56) $\frac{1}{16}\ln\frac{C(x^2+2x+2)}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}+C$. **VIII.25.** 1) $\frac{242}{5}$; 2) $\frac{263}{40}$; 3) 4; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) 42; 8) $\frac{7}{72}$; 9) 12; 10) –; 11) 1,5; 12) $-3\ln\left|\frac{b-a}{b}\right|$; 13) $\frac{\pi}{12a}$; 14) $5(e-1)$; 15) $-\frac{1}{6}a^3$; 16) $\frac{5}{72}$; 17) 1; 18) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 19) $\frac{1}{3}$; 20) $\frac{\pi}{2}$; 21) $2(1+\ln 3-\ln 2)$; 22) $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}$; 23) $2-\ln 2$; 24) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 25) 2; 26) $\frac{1}{4}$; 27) $1+\ln\frac{2}{1+e}$; 28) –; 29) $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; 30) $\frac{2}{7}$; 31) $\frac{1}{3}$; 32) –; 33) 1,125; 34) $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$; 35) $1-\frac{2}{e}$; 36) $\frac{\pi}{2}-1$; 37) $2\ln 2-1$; 38) $\frac{\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}$; 39) $\frac{32}{3}$; 40) $\frac{5}{3}-2\ln 2$; 41) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$; 42) $\pi^3-6\pi$; 43) $-\frac{1}{3}+2\ln\frac{3}{2}$; 44) $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$; 45) $\frac{e^\pi-2}{5}$; 46) $7+2\ln 2$; 47) $\frac{17}{6}$; 48) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 49) $\frac{\pi}{2}-1$; 50) $\frac{1-\ln 2}{2}$;

51) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 52) $\ln\frac{3}{2}$; 53) $\frac{5\pi}{16}$; 54) $\frac{8}{35}$; 55) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 56) $\frac{13}{8}-15\ln 2+8\ln 3$; 57) $\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$. **VIII.26.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $3\ln\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{1}{e-1}$; 4) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$. **VIII.30.** 1) $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\Theta$, $\quad|\Theta|<1$; 2) міститься між $\frac{1}{12\sqrt{2}}$ і $\frac{1}{10}$. **VIII.31.** 1) $\frac{2}{3}\ln 2$; 2) $\frac{\Theta}{a}$, $\quad|\Theta|<1$. **VIII.32.** 1) 1; 2) розбіжний; 3) розбіжний; 4) $\frac{1}{n-1}$ при $n>1$ і розбіжний при $n\le 1$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) -1; 7) π; 8) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) 1; 13) 16; 14) $\ln 2$; 15) $\frac{\pi}{6}$; 16) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; 17) $\frac{\pi-2}{8}$; 18) $-$; 19) $-$; 20) $-$; 26) $-$; 27) $\frac{\pi}{2}$; 28) $-$; 29) розбіжний; 30) $\frac{8}{3}$; 31) розбіжний; 32) 6; 33) $-\frac{1}{4}$; 34) 1; 35) розбіжний; 36) 2. **VIII.33.** 1) збіжний; 2) розбіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) розбіжний; 8) розбіжний; 9) збіжний; 10) розбіжний; 11) розбіжний; 12) збіжний; 13) розбіжний; 14) розбіжний; 15) збіжний; 16) розбіжний. **VIII.34.** 1) $\frac{32}{3}$; 2) πab; 3) 36; 4) 12; 5) $\frac{32}{3}$; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{16}{3}$; 8) $17{,}5-6\ln 6$; 9) $\frac{1}{6}$; 10) $9{,}9-8{,}1\lg e$; 11) $\frac{32}{3}$; 12) $\frac{14}{3}$; 13) $\frac{2}{3}$; 14) $\frac{8}{3}$; 15) $2\ln 2$; 16) 1; 17) $\frac{16}{3}$; 18) $19{,}2$; 19) $0{,}8$; 20) $\frac{125}{6}$; 21) πa^2; 22) $0{,}8$; 23) $\frac{128}{15}$; 24) $\frac{(4-\pi)a^2}{2}$; 25) 2. **VIII.35.** 1) $3\pi a^2$; 2) $\frac{3\pi a^2}{8}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) $6\pi a^2$. **VIII.36.** 1) a^2; 2) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 3) $\frac{\pi a^2}{2}$; 4) $\frac{\pi a^2}{4}$; 5) $\frac{\pi a^2}{4}$; 6) $\frac{\pi a^2}{2}$. **VIII.37.** 1) $\frac{11}{8}\pi a^2$; 2) $4\frac{4}{15}$; 3) $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. **VIII.38.** 1) $\frac{11}{8}\pi a^2$; 2) $4\frac{4}{15}$; 3) $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. **VIII.39.** $\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. **VIII.40.** π. **VIII.41.** 2. **VIII.42.** $3\pi a^2$. **VIII.43.** 1) $\frac{28}{3}$; 2) $\ln 3$; 3) $2\ln 3-1$; 4) $p\,[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$; 5) $\frac{112}{27}$; 6) $\frac{670}{27}$; 7) $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 8) $2a\operatorname{sh}1$; 9) $1{,}35+\ln 2$. **VIII.44.** 1) $8a$; 2) $4\sqrt{3}$; 3) точки перетину з осями при $t_1=0$ і $t_2=\sqrt[4]{8}$, $S=\frac{13}{3}$. **VIII.45.** 1) $2\pi a$; 2) $6a$; 3) $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **VIII.46.** 1) $2\pi\sqrt{a^2+h^2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $at_0+2bt_0^3$. **VIII.47.** 1) $8a$; 2) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$; 3) $\frac{3}{2}\pi a$. **VIII.48.** 1) $\frac{a^3}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}h^3$; 3) $\frac{4}{3}\pi abc$; 4) $\frac{\pi}{3}abc$; 5) $\frac{\pi}{32}$. **VIII.49.** $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **VIII.50.** $\frac{bh}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **VIII.51.** 1) 12π; 2) $\frac{8\pi a^2b}{3}$; 3) πph^2; 4) $58{,}5\pi$; 5) $\frac{512\pi}{15}$; 6) $\frac{\pi^2}{6}$; 7) $\frac{64\pi}{3}$; 8) $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$; 9) $\frac{4}{3}\pi a^2b$; 10) $\frac{7}{6}\pi a^3$; 11) $3\pi^2$; 12) $\frac{512\pi}{7}$; 13) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 14) $\frac{4\pi a^3}{6}$; 15) $\frac{32\pi a^3}{105}$; 16) $19{,}2\pi$; 17) $\frac{8\pi a^3}{3}$; 18) $5\pi^2a^3$; 19) 72π. **VIII.52.** 1) $\frac{64\pi}{35}$; 2) $\frac{64\pi}{105}$. **VIII.53.** 1) $\frac{8\pi a^3}{3}$; 2) $\frac{13\pi^2a^3}{4}$. **VIII.54.** $\frac{2\pi}{3}$. **VIII.55.** $2\pi^2a^3$. Прийняти $x=2a\sin^2 t$ і перейти до параметричного рівняння. **VIII.56.** $\frac{4\pi}{3}$. **VIII.57.** 1) $\frac{4\pi a^2}{243}(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 2) $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}\right)$; 3) $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$; 4) а) $\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2]$, б) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$; 5) а) $\frac{64\pi a^2}{3}$, б) $16\pi^2a^2$, в) $\frac{32\pi a^2}{3}$. 6) $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$; 7) $\frac{32\pi a^2}{5}$; 8) а) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$, б) $2\sqrt{2}\pi a^2$, в) $4\pi a^2$. **VIII.58.** $\frac{1}{6}(a+2b)\rho gh^2$. **VIII.59.** $\rho gd^3/12$. **VIII.60.** $\rho g\frac{ah^2}{6}$. **VIII.61.** $\frac{\rho gah^2}{3}$. **VIII.62.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **VIII.63.** $\frac{mgRh}{R+h}$. **VIII.64.** $16{,}33\cdot 10^{10}$ кГ. **VIII.65.** $\frac{1}{2}gSH^2(1-\rho)^2$. **VIII.66.** $\frac{\pi gR^2h^2}{2}$. **VIII.67.** $\frac{\pi gR^4}{4}$. **VIII.68.** а) $4\cdot 10^{-6}$; б)

$6 \cdot 10^{-6}$. **VIII.69.** $\frac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$. **VIII.70.** $M_x = M_y = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$, $x_c = y_c = \frac{a}{2}$. **VIII.71.** $M_x = M_y = \frac{a^3}{6}$, $x_c = y_c = \frac{a}{3}$. **VIII.72.** $x_c = 0$, $y_c = \frac{2a}{\pi}$. **VIII.73.** $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$. **VIII.74.** $x_c = y_c = \frac{a}{5}$. **VIII.75.** $M_a = \frac{ab^3}{3}$. **VIII.76.** $\frac{\pi R^3}{2}$. **VIII.77.** $\frac{\pi R^4}{8}$. **VIII.78.** 853,3. **VIII.79.** 59,3%. **VIII.80.** а) 100; б) 57,14. **VIII.81.** а) 0; б) 1/3; в) $(\pi - 2)/2 \approx 0,57$.

РОЗДІЛ IX

IX.1. 1) $\frac{2n-1}{2n}$; 2) $\frac{1}{2n-1}$; 3) $\frac{2n}{3^n}$; 4) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 5) $\sin\frac{\pi}{2^n}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{2n-1}{2n^2}$. **IX.2.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 3; 4) 0,1; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 0,5; 7) $\frac{11}{18}$; 8) $\frac{23}{90}$; 9) 1. **IX.3.** 1) розб.; 2) зб.; 3) зб.; 4) зб.; 5) зб.; 6) зб.; 7) розб.; 8) розб.; 9) зб.; 10) зб.; 11) розб.; 12) розб.; 13) зб.; 14) зб.; 15) зб. **IX.4.** 1) зб.; 2) зб.; 3) розб.; 4) розб.; 5) зб.; 6) зб.; 7) зб.; 8) розб.; 9) зб.; 10) розб.; 11) зб.; 12) розб.; 13) розб.; 14) зб. **IX.5.** 1) зб.; 2) зб.; 3) зб.; 4) зб.; 5) зб.; 6) зб.; 7) зб.; 8) зб.; 9) розб.; 10) розб.; 11) зб.; 12) зб.; 13) зб.; 14) зб. **IX.6.** 1) зб.; 2) зб.; 3) зб.; 4) розб.; 5) зб.; 6) зб.; 7) зб. **IX.7.** 1) розб.; 2) розб.; 3) зб.; 4) зб.; 5) розб.; 6) зб.; 7) зб.; 8) зб.; 9) зб. **IX.8.** 1) зб., $-\frac{4}{9}$; 2) зб., $\frac{2}{3}$; 3) зб., $\approx 0,668$; 4) зб., $\approx 0,901$; 5) розб., якщо $|a| < 1$, зб., якщо $|a| \geq 1$, $\ln\left(1 + 1/a^2\right)$; 6) зб., $\approx 0,605$; 7) зб., $\approx 0,916$; 8) зб., $\approx -0,526$. **IX.9.** 1) зб.; 2) зб.; 3) розб.; 4) розб.; 5) зб.; 6) зб.; 7) зб. **IX.10.** 1) ум. зб.; 2) абс. зб.; 3) розб.; 4) ум. зб.; 5) абс. зб.; 6) ум. зб.; 7) абс. зб.; 8) абс. зб., коли $p > 1$, ум. зб., коли $0 < p \leq 1$; 9) абс. зб., коли $p > 1$, ум. зб., коли $0 < p \leq 1$; 10) абс. зб., коли $p > 1$, ум. зб., коли $0 < p \leq 1$; 11) абс. зб., коли $p > 2$, ум. зб., коли $1 < p \leq 2$; 12) ум. зб.; 13) розб. **IX.11.** 1) а) зб. рівн., б) зб. нерівн.; 2) зб. рівн.; 3) зб. рівн; 4) зб. рівн.; 5) а) зб.нерівн., б) зб. рівн.; 6) а) зб. рівн., б) зб. нерівн., в) зб.рівн. **IX.12.** $1/(1-x)$, $x^n/(1-x)$, при $n \geq 11$. **IX.13.** $|r_n| < 1/n^2$, $n \geq 100$. **IX.15.** $|r_n| < 1/n$, $n \geq 10$. **IX.16.** $|r_n| < 1/(n+1)$, $n \geq 9$. **IX.17.** $|r_n| < 1/2^{n-1}$, $n \geq 1 - \log_2 \varepsilon$. **IX.18.** $|r_n| < 1/(2 \cdot 3^{n-1})$, $n \geq 1 + \log_3 50$. **IX.19.** $n \geq 1 + \log_2 100$; **IX.20.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $1/e < x < e$; 3) $-1 < x < 1$; 4) $-1 \leq x \leq 1$; 5) $x < -1$ і $x > 1$; 6) $-1 < x < 1$; 7) $x \neq \pm 1$; 8) $-\infty < x < +\infty$; 9) $-2 < x < 2$; 10) $-\infty < x < +\infty$; 11) $x > 0$; 12) $x > 0$. **IX.21.** 1) зб. абс., коли $|x| > 1$; 2) зб. абс., коли $|x| \leq 1$; 3) зб. абс., коли $x < -1$ і $x > -1/3$; 4) зб. абс., коли $|x| \neq 1$; 5) зб. абс., коли $|x - \pi k| \leq \pi/6, k \in \mathbb{Z}$; 6) зб. абс., коли $|x| \neq 1$, і умовно, коли $x = -1$; 7) зб. абс., коли $p > 1$, $x \neq k (k = -1, -2, \dots)$, і умовно, коли $0 < p \leq 1$, $x \neq k (k = -1, -2, \dots)$; 8) зб. абс., коли $q > p + 1$, і умовно, коли $p < q \leq p + 1$; 9) зб. абс., коли $\left(3 - \sqrt{17}\right)/6 < x < 1/3$ і $2/3 < p < \left(3 + \sqrt{17}\right)/6$; 10) зб. абс., коли $x > 0$; 11) зб. абс., коли $x > 1$; 12) зб. абс., коли $x > 0$, і умовно, коли $x = 0$. **IX.23.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **IX.24.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$; 2) $(x+1)\ln(x+1) - x$. **IX.25.** 1/2. **IX.26.** 0,2. **IX.27.** 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2 + \pi/\sqrt{3}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(1+\sqrt{2}) + \pi/2\right)$. **IX.28.** $\ln 2$. **IX.29.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **IX.31.** 1) $[-3; 3)$; 2) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$; 3) $[-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2]$; 4)

$(-\infty;+\infty)$; 5) $(-1;1]$; 6) $(-\sqrt{2}/3;\sqrt{2}/3)$; 7) $\{0\}$; 8) $\{0\}$; 9) $[-5;3)$; 10) $(1;2]$; 11) $(-\sqrt{5}/2;\sqrt{5}/2]$; 12) $(-1;1)$; 13) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$; 14) $[-0,1;1)$; 15) $[-1;1]$; 16) $[-1;3)$; 17) $[-1;0)$; 18) $(-4;4)$; 19) $(-4/3;-2/3)$; 20) $(-1/e;1/e)$; 21) $(-1/4;1/4)$; 22) $[-2^p;2^p]$, $p>0$. **IX.32.** 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$; 2) $\operatorname{arctg} x$, $|x|\le 1$; 3) $\operatorname{ch} x$, $|x|<\infty$; 4) $-\ln(1-x)$, $-1\le x<1$; 5) $1+(1/x-1)\ln(1-x)$, $-1\le x<1$. **IX.33.** 1) $1/(1-x)^2$, $|x|<1$; 2) $x/(1-x)^2$, $|x|<1$; 3) $x(1-x)/(1+x)^3$, $|x|<1$; 4) $2x/(1-x)^3$, $|x|<1$; 5) $(1-x^2)/(1+x^2)^2$, $|x|<1$. **IX.34.** 1) $(1+x)/(1-x)^2$, $|x|<1$; 2) $(1-2x)/(1+x)^2$, $|x|<1$. **IX.35.** 1) $\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)\sin a+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)\cos a$; 2) $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots$; 3) $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mx}{1!}-\frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}-\ldots\right)$; 5) $1+\frac{x\ln 2}{1!}+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\ldots$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(mx)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}$. **IX.36.** 1) $2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$; 2) $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+1)\frac{x^n}{n}$; 3) $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3}n\frac{x^n}{n}$. **IX.37.** $\ln 2+\frac{kx}{2}+\frac{k^2x^2}{2^2 2!}-\frac{k^4x^4}{2^3 4!}+\ldots$. **IX.41.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. **IX.43.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. **IX.44.** $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{a^n n!}$. **IX.45.** 1) $-2+3(x-1)^2+(x-1)^3$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n(x-1)^n}{3^n n!}\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)$. **IX.46.** 1) $1-4(x+1)+6(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$; 2) $-1+\frac{x+1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1}$. **IX.47.** 1) $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$; 2) $(x+2)^4-8(x+2)^3+20(x+2)^2-16(x+2)$. **IX.48.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\pi/2)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$. **IX.49.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n(x-\pi/3)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n-1}(x-\pi/3)^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{4}$. **IX.50.** $2\left[1+\frac{x-4}{2^3\cdot 1!}-\frac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3(x-4)^3}{2^9\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!}+\ldots\right]$. **IX.51.** 1,002; 0,996; 9,5. **IX.52.** 1,002; 0,997; 5,067. **IX.53.** 1,0025; 1,0004; 0,9965; 0,999; 10,5; 4,125; 2,1. **IX.54.** 1) 0,208; 2) 0,978. **IX.55.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$. **IX.57.** 1) 7,389; 2) 1,649; 3) 0,3679; 4) 0,7788; 5) 0,0175; 6) 1,000; 7) 0,9848. **IX.58.** 0,693; 1,099; 1,386; 1,792; 0,4343; 0,6990. **IX.59.** 1) $C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $C+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n(2n)!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 3) $C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 4) $C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 5) $x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}$; 6) $x-\frac{x^3}{3^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots$, $-1\le x\le 1$; 7) $x+\frac{x^5}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^{4n-3}}{2^{n-1}(n-1)!(4n-3)}+\ldots$, $-1\le x\le 1$; 8) $x+\frac{x^{10}}{10}+\cdots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}+\ldots$, $-1\le x\le 1$; 9) $x+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\cdots+(-1)^n\frac{(2n-5)!!x^{3n-2}}{2^{n-1}(n-1)!(3n-2)}+$

$\ldots,\ -1 \le x \le 1$; 10) $x-\frac{x^5}{2!\cdot 4^2\cdot 5}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-3}}{(2n-2)!4^{2n-2}(4n-3)}+\ldots,\ x\in\mathbb{R}$. **IX.60.** 1) 0,3230; 2) 0,24488; 3) 0,4971; 4) 0,012; 5) 0,508. **IX.61.** $y = 1+x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}+\ldots$. **IX.62.** $y = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{6}-\ldots$. **IX.63.** $I_0(x) = 1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$. **IX.64.** $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$. **IX.65.** 1) $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi x}{l}(2k+1)$; 2) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$; 4) $\frac{(a-b)\pi}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}+(a+b)\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$; 5) $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$; 7) $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right)$; 8) $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}$; 9) $\frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2}$; 10) $-1+(e^{2\pi}-1)/\pi\left(\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-n\sin nx}{n^2+1}\right)$; 11) $\frac{\operatorname{sh} ah}{ah}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\operatorname{sh} ha}{a^2h^2+n^2\pi^2}\left(ha\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}\right)$; 12) $1-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$; 13) $\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}$; 14) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **IX.66.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$; 2) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **IX.67.** 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $\frac{2}{\pi}\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2-\pi^2n^2)-2}{n^3}\sin nx$; 3) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. **IX.68.** 1) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$; 2) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1}$; 3) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\times\cos(2n+1)x$; 4) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$; 5) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

РОЗДІЛ X

X.1. 1) $\{(x,y)|\,x^2+y^2\le R^2\}$; 2) $\{(x,y)|\,x^2+y^2>R^2\}$; 3) $\{(x,y)|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$; 4) $\{(x,y)|\,y\le -x^2-1$ або $y\ge 1-x^2\}$; 5) $\{(x,y)|\,xy\ge 0\}$; 6) $\{(x,y)|\,2\pi n\le x\le \pi+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi k\le y\le \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k,n\in\mathbb{Z}\}$; 7) $\{(m,n)|\,m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 0\le m\le n\}$; 8) $\{(x,y)|\,y\ge 0, x\le\frac{y}{2}$ або $y\le 0, x\ge\frac{y}{2}\}\setminus\{(0;0)\}$ 9) $\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 4\}$; 10) $\{(x,y)|\,x>0, y<2x\}$; 11) $\{(x,y)|\,r^2<x^2+y^2\le R^2\}$; 12) $\{(x,y)|\,y\in[1;3], -y^2\le x\le y^2\}$. **X.2.** 1) $\{(x,y,z)\mid x+y-z\ne\frac{1}{2}+n, n\in\mathbb{Z}\}$; 2) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$; 3) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 5|z|\}$; 4) $\{(x,y,z)\mid x>1, y>2, -1\le z\le 1\}$; 5) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\ge z^2\}$; 6) $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid \frac{x_1^2}{5a_1^2}+\frac{x_2^2}{5a_2^2}+\dots+\frac{x_n^2}{5a_n^2}\le 1\}$; 7) $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid |x_1|\le|a_1|, |x_2|\le|a_2|,\dots,|x_n|\le|a_n|\}$. **X.3.** $-\frac{2}{9}$; $\frac{2}{11}$; 0, $x\ne 0$; $\frac{3}{4}$, $y\ne 0$. **X.4.** $-\frac{7}{15}$; $-\frac{7}{15}$; $-\frac{7}{15}$, $x\ne 0$. **X.6.** $Q(U,t)=\frac{U^2t}{R}$. **X.7.** $z=\frac{x^2+y^2-2xy+1}{x^2-y^2}$. **X.8.** $z=\frac{(x+y)^{xy+1}+(xy)^{x-y}}{x+y}$. **X.9.** 1) $y^2-x^2y^4$; 2) $x^4-3x^2y^2+y^4$; 3) x^3y-xy^3. **X.10.** $f(x)=x^2-x$; $z(x,y)=2y+(x-y)^2$. **X.11.** $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$. **X.18.** 1) 0; 2) – 2; 3) 2; 4) – 6; 5) 0; 6) e; 7)

5; 8) 1; 9) ∞; 10) 0; 11) 1; 12) 2; 13) 0; 14) e^3. **X.19.** 1) – 1; 0; 2) $\frac{1}{2}$; 1; 3) 0; 1; 4) 0; $\frac{1}{4}$; 5) 1; ∞; 6) 1; e; 7) 1; 0. **X.27.** 1) $(1;-5)$; 2) точки прямої $y = x/3$; 3) точки гіперболи $x^2 - y^2/4 = 1$; 4) $\{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$; 5) сітка ліній $x = n$, $y = m$, де $m,n \in \mathbb{Z}$; 6) сітка ліній $x = n$, $y = m$, де $m,n \in \mathbb{Z}$; 7) точки прямої $y = x$ (в усіх, крім початку координат, точках цієї прямої функція може бути довизначена по неперервності); 8) точки одиничної сфери з центром в початку координат; 9) точки конуса $x^2 + y^2 = z^2$; 10) сітка площин $x = \pi n$, $y = \pi m$, $z = \pi/2 + \pi k$, де $m,n,k \in \mathbb{Z}$; 11) (a,b,c). **X.28.** 1) $z'_x = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$; 3) $z'_x = \frac{2}{y\sin(2x/y)}$, $z'_y = \frac{-2x}{y^2\sin(2x/y)}$; 4) $z'_x = -\frac{e^{-x/y}}{y}$, $z'_y = \frac{xe^{-x/y}}{y^2}$; 5) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$; 6) $z'_x = \frac{1}{x+\ln y}$, $z'_y = \frac{1}{y(x+\ln y)}$; 7) $z'_x = \frac{y}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2(y/x)}$, $z'_y = -\frac{x}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2(y/x)}$; 8) $z'_x = y^2(1+xy)^{y-1}$, $z'_y = (1+xy)^y\left(\frac{xy}{1+xy} + \ln(1+xy)\right)$; 9) $z'_x = x^{xy}y(\ln x + 1))$, $z'_y = x^{xy+1}\ln x$; 10) $z'_x = \frac{yx^{y-1}}{1+x^y}$, $z'_x = \frac{x^y \ln x}{1+x^y}$; 11) $u'_x = 2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $u'_y = 2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $u'_z = 2z\cos(x^2+y^2+z^2)$; 12) $u'_x = \frac{z}{y}x^{z/y-1}$, $u'_y = -\frac{z}{y^2}x^{z/y}\ln x$, $u'_y = \frac{1}{y}x^{z/y}\ln x$; 13) $u'_x = yzx^{yz-1}$, $u'_y = zx^{yz}\ln x$, $u'_z = yx^{yz}\ln x$; 14) $u'_x = yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$, $u'_y = z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$, $u'_z = y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$; 15) $z'_x = = \frac{1}{1+x^2}$, $z'_y = \frac{1}{1+y^2}$; 16) $u'_x = -e^{-x\operatorname{ctg} y/z}\operatorname{ctg} y/z$, $u'_y = e^{-x\operatorname{ctg} y/z}\frac{x}{z\sin^2(y/z)}$, $u'_y = -e^{-x\operatorname{ctg} y/z}\frac{xy}{z^2\sin^2(y/z)}$; 17) $z'_x = \sqrt{\frac{y}{1-x^2y}}$, $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y-x^2y^2}}$; 18) $z'_x = = \frac{-2y}{x^2\sin(2y/x)}$, $z'_y = \frac{2}{x\sin(2y/x)}$. **X.29.** $\frac{\partial \ln f(p,T)}{\partial T}$. **X.30.** $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$; ні. **X.37.** 1) $e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$; 2) $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$; 3) $e^{2\operatorname{tg} t - 3t^2 + 3t}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 3(2t-1)\right)$; 4) $\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$; 5) $\frac{1}{t}(\ln t)^{\sin t - 1} \times \sin t + \cos t \ln\ln t(\ln t)^{\sin t}$; 6) $\frac{1}{e^t}((1-t^2)\ln t + t - \frac{1}{t} + 2t\ln t)$. **X.38.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x+(x^2+1)e^{x^3/3+x}}{e^x+e^{x^3/3+x}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^{(x+1)^2}}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2}(1 - 2(x+1)^2)$. **X.39.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}\frac{\partial f}{\partial u} - 3\frac{\partial f}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2-y^2}\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$. **X.41.** 1) $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (-2;3;-1)$, $\frac{\partial u}{\partial l} = -\sqrt{14}$; 2) $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (3;6;3)$, $\frac{\partial u}{\partial l} = 21/\sqrt{38}$; 3) $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (-24/13;16/13;\ln 13)$, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{52}{\sqrt{29}}(\ln 13 - 2)$; 4) $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (1;0;0)$, $\frac{\partial u}{\partial l} = -3/\sqrt{14}$. **X.42.** 1) $(-1;-1;3)$; 2) $(2/3;-1/3;1/3)$; 3) $(1;1;1)$. **X.43.** $1 - \sqrt{3}$. **X.44.** $\cos\alpha + \sin\alpha$, а) $\alpha = \pi/4$; б) $\alpha = 5\pi/4$; в) $\alpha = 3\pi/4$. **X.45.** $\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$. **X.46.** $\left|\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right| = \frac{1}{r_0^2}$; $\cos\alpha = -\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta = -\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\gamma = -\frac{z_0}{r_0}$. **X.47.** $\vec{E} = \frac{k\pi}{a}\frac{\vec{\imath}\sin(2\pi x/a)+\vec{\jmath}\operatorname{sh}(2\pi y/a)}{\cos(2\pi x/a)+\operatorname{ch}(2\pi y/a)}$. **X.48.** 1) $-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy$; 2) $-(ydx+xdy)\sin xy$; 3) 0;

4) $\frac{xdy-ydx}{y^2}e^{-x/y}$; 5) $\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$; 6) $\frac{xdx+ydy}{y^2+x^2}$; 7) $\frac{3x^2ydx-x^3dy}{y^2\cos^2(x^3/y)}$; 8) $\frac{xdy-ydx}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$; 9) $(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$; 10) $\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$; 11) $3x^2y^2zdx+2x^3yzdy+x^3y^2dz$; 12) $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}- \ -\frac{y}{z^2}\right)dz$. **X.49.** 1) $f'(t)(4dx-3dy)$; 2) $\frac{2}{y^3}f'(t)(xydx-x^2dy)$; 3) $\frac{3f'(t)}{2\sqrt{x^3+y^3}}\times\ \times(x^2dx+y^2dy)$; 4) $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(dx+dy)+\frac{\partial f}{\partial z}dz$; 5) $\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{zdx-xdz}{z^2}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{ydz-zdy}{y^2}$; 6) $2\frac{\partial f}{\partial\alpha}(xdx+ydy)+2\frac{\partial f}{\partial\beta}(xdx-ydy)+2\frac{\partial f}{\partial\gamma}(xdy+ydx)$; 7) $a\frac{\partial f}{\partial u}dx+b\frac{\partial f}{\partial v}dy$; 8) $\frac{\partial f}{\partial u}(xdy+ydx)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{xdy-ydx}{x^2}$; 9) $\frac{\partial f}{\partial u}(2dx-3dy)+\frac{\partial f}{\partial v}(3dx+5dy)$; 10) $\left(3t^2\frac{\partial f}{\partial x}+2t\frac{\partial f}{\partial y}+2\frac{\partial f}{\partial z}\right)dt$. **X.50.** $\Delta z=2.27$, $dz=2.2$. **X.51.** $\Delta z=-0.0066$, $dz=-0.0087$. **X.52.** 1) 5.068; 2) 8.286; 3) 2.965; 4) 0.235; 5) 9.99. **X.53.** 1780 ± 190 *кг/м*^{3}; **X.54.** 14.2 ± 0.3 *дм*^{3}. **X.55.** 1) $\frac{y^3}{2-3xy^2}$, -1; 2) $\frac{e^{x-y+1}}{1+y}$, 0,5; 3) $\frac{9-(x+y)^2}{9+(x+y)^2}$, 0; 4) $\frac{(x-1)y}{(2y^2-1)x}$, 0. **X.56.** 1) $\frac{2}{5y^4+3}$; 2) $\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **X.58.** 1) $z'_x=-\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{y}{z}$; 2) $z'_x=z'_y=\frac{1}{x+y+z-1}$; 3) $z'_x=-\frac{yz}{z^2-xy}$, $z'_y=-\frac{xz}{z^2-xy}$; 4) $z'_x=z'_y=-1$; 5) $z'_x=\frac{xz}{x^2-y^2}$, $z'_y=-\frac{yz}{x^2-y^2}$. **X.59.** 1) $dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)$; 2) $dz=dx-\frac{(x-z)dy}{(x-z)^2+y^2+y}$; 3) $dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}$; 4) $dz=\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}$. **X.60.** $du=-\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u(2(x+y)-u)}$. **X.61.** $dz=\frac{1}{9}(2dx-dy)$. **X.62.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(xy^2-2y)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x^2y-2x)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2y\sin y^2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\sin y^2+4y^2\cos y^2}{x}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}==\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$; 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{2y}e^{xe^y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^ye^{xe^y}(1+xe^y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=xe^ye^{xe^y}(1+xe^y)$; 7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}==\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; 8) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}==\ln y(\ln y-1)x^{\ln y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{\ln x}\frac{1+\ln x\ln y}{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ln x(\ln x-1)y^{\ln x-2}$; 9) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn} x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$; 10) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}==-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$; 11) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2z^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2z^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ze^{xyz}(1+xyz)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=ye^{xyz}(1+xyz)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xe^{xyz}(1+xyz)$; 12) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{-xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{-yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$; 13) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)}{x^2z^2}x^{y/z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln^2 x}{z^2}x^{y/z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{y\ln x(2z+y\ln x)}{z^4}x^{y/z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{z+y\ln x}{xz^2}x^{y/z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{-y(z+y\ln x)}{xz^3}x^{y/z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

$= \frac{-(z+y\ln x)\ln x}{z^3}x^{y/z}$; 14) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{1}{y}\times\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$; 15) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^z(y^z-1)}{x^2}x^{y^z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zy^{z-2}(z-1+zy^z\ln x)x^{y^z}\times \ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^z(1+y^z\ln x)x^{y^z}\ln x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{z}{x}y^{z-1}x^{y^z}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\ln y}{x}y^z x^{y^z}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = y^{z-1}x^{y^z}(1+z\ln y(1+y^z\ln x))\ln x$. **X.64.** 1) $\frac{2}{(x+y)^3}$; 2) $12\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^4}$; 3) $e^{xyz}(1+3xyz+ +x^2y^2z^2)$; 4) $\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^4} - \frac{6}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^2}$; 5) $\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x+y)^{m+n+1}}$; 6) $(x+k)(y+m)(z+n)e^{x+y+z}$. **X.72.** 1) $\frac{2y}{x^3}dx^2+2\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)dxdy-\frac{2x}{y^3}dy^2$; 2) $\frac{2x^2y-y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}dx^2+2\frac{2xy^2-x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\times dxdy-\frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}dy^2$; 3) $e^{xy}((2y+xy^2+y^3)dx^2+2(x+y)(xy+2)dxdy+(2x+x^2y+x^3)dy^2)$; 4) $-\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2$; 5) $2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$; 6) $-\frac{1}{(x-y)^2}(dx^2-2dxdy+ +dy^2)$; 7) $2(zdxdy+ydzdx+xdydz)$; 8) $e^{xyz}(y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2+2(1+xyz)(zdxdy+ydxdz+xdydz))$; 9) $2(dxdy+dxdz+dydz)$. **X.73.** 1) $e^y(\sin xdy^3+3\cos xdxdy^2-3\sin xdx^2dy-\cos xdx^3)$; 2) $\frac{2}{(x+y)^3}(dx^3+3dx^2dy+3dxdy^2+dy^3)$; 3) $6(dx^3+dy^3+dz^3-3dxdydz)$; 4) $-120\frac{(dx+dy+dz)^6}{(x+y+z)^6}$; 5) $\frac{2}{x^3}dx^4+\frac{2}{y^3}dy^4+\frac{2}{z^3}dz^4$. **X.74.** 1) $f''(t)(dx^2+2dxdy+dy^2)$; 2) $\frac{f''(t)}{x^4}(xdy-ydx)^2-2\frac{f'(t)}{x^3}(xdxdy-ydx^2)$; 3) $\frac{f''(t)}{x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)^2+\frac{f'(t)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}((y^2+z^2)dx^2+(x^2+z^2)dy^2+(x^2+y^2)dz^2-2xydxdy-2xzdxdz-2yzdydz)$; 4) $a^2f''_{\xi\xi}dx^2+2abf''_{\xi\eta}dxdy+b^2f''_{\eta\eta}dy^2$; 5) $f''_{\xi\xi}(dx+dy)^2+2f''_{\xi\eta}(dx^2-dy^2)+f''_{\eta\eta}(dx-dy)^2$; 6) $(f''_{xx}+4t^2f''_{yy}+9t^4f''_{zz}+4tf''_{xy}+6t^2f''_{xz}+12t^3f''_{yz}+2f'_y+6tf'_z)dt^2$; 7) $a^2f''_{\xi\xi}dx^2+b^2f''_{\eta\eta}dy^2+c^2f''_{\zeta\zeta}dz^2+2abf''_{\xi\eta}dxdy+2acf''_{\xi\zeta}dxdz+2bcf''_{\eta\zeta}dydz$; 8) $4f''_{\xi\xi}(xdx+ydy)^2+4f''_{\eta\eta}(xdx-ydy)^2+4f''_{\zeta\zeta}(xdy+ydx)^2+8f''_{\xi\eta}(x^2dx^2-y^2dy^2)+8f''_{\xi\zeta}(xdx+ydy)(ydx+xdy)+8f''_{\eta\zeta}(xdx-ydy)(xdy+ydx)+2f'_\xi(dx^2+dy^2)+2f'_\eta(dx^2-dy^2)+4f'_\zeta dxdy$. **X.75.** 1) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -8\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} = -2\cos(2x+y)$; 2) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{6a^4}{(ax+by)^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = -\frac{6a^2b^2}{(ax+by)^4}$; 3) $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 27e^{x+2y+3z}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = 6e^{x+2y+3z}$. **X.76.** $2+2(x+1)+7(y-1)-3(x+1)^2-(x+1)(y-1)+6(y-1)^2+(x+1)^3+2(y-1)^3$. **X.77.** $3+5(x-1)+3(y+1)+5z+4(x-1)^2-6(y+1)^2+5(x-1)z-5(y+1)z+(x-1)^3+2(y+1)^3+z^3-5(x-1)(y+1)z$. **X.78.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left.\left\{\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3\sin x\sin y\right\}\right|_{\left(\frac{\pi}{4}+\Theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\frac{\pi}{4}+\Theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$ **X.79.** $1,1^{1,02}\approx 1+0,1+0,1\cdot 0,02+\frac{1}{2}0,1^2\cdot 0,02 = 1,1021$, $|\Delta|\le 1,2\cdot 10^{-6}$. **X.80.** 1,10462, $|\Delta|\le 5\cdot 10^{-6}$. **X.81.** 1) $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; 2) $-xy-xz-yz$. **X.82.** 1) $z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$; 2) $z_{\min} = z(2a-b;2b-a) = 1+$

$3ab - 3a^2 - 3b^2$; 3) $z_{\max} = z\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{3}\right) = \frac{a^6}{432} + b$; 4) $z_{\min} = z\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) = 4$, $z_{\min} = z\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) = 4$; 5) екстремумів немає; 6) якщо $a > 0$, то $z_{\min} = z(a, a) = -a^3$, якщо $a < 0$, то $z_{\max} = z(a, a) = -a^3$; 7) $z_{\min} = z(a, b) = 3ab$; 8) $z_{\max} = z\left(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right) = z\left(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3}$, $z_{\min} = z\left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right) = z\left(2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right) = -24\sqrt{3}$; 9) $z_{\min} = z(0, 0) = 1$, якщо $|a| > |b|$, то $z_{\max} = z(\pm 1, 0) = |a|/e$, якщо $|a| < |b|$, то $z_{\max} = z(\pm 1, 0) = |b|/e$, якщо $|a| = |b|$, то $z_{\max} = |a|/e$ на колі $x^2 + y^2 = 1$; 10) екстремуми $z = \pi m + (-1)^{m+1}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) + (-1)^n \cdot 2$ в точках $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi(m+n)}{2}$, $y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi(m-n)}{2}$, коли $m, n \in \mathbb{Z}$, m та n — різної парності. **X.83.** 1) $u_{\min} = u\,(-2; 4; 1) = -15$; 2) $u_{\min} = u\,(24; -144; -1) = -6913$; 3) $u_{\max} = u\,(a; a; a) = a^4$; 4) $u_{\min} = u\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) = 4$, $u_{\max} = u\left(-\frac{1}{2}; -1; -1\right) = -4$. **X.84.** 1) $\min\limits_D z = -5$; $\max\limits_D z = -3$; 2) $\min\limits_D z = -20$; $\max\limits_D z = 4{,}5$; 3) $\min\limits_D z = 0$; $\max\limits_D z = 3$; 4) $\min\limits_D z = 0$; $\max\limits_D z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **X.85.** $a = b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{R}{\sqrt{3}}$. **X.86.** $l = 999{,}804 + 0{,}0212t$. **X.87.** а) $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $c = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i \end{vmatrix}$; б) $b = \left(\sum x_i \ln y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum \ln y_i\right) / \left(\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right)$, $a = e^{\left(\frac{1}{n}\left(\sum y_i - b\sum x_i\right)\right)}$; в) $a = \left(\sum y_i \times \ln x_i - \frac{1}{n}\sum \ln x_i \sum y_i\right) / \left(\sum \ln^2 x_i - \frac{1}{n}\left(\sum \ln x_i\right)^2\right)$, $b = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - b\sum \ln x_i\right)$. **X.88.** $\alpha = \Delta_1/\Delta$, $\beta = 1 - \alpha$, $a = e^{\Delta_2/\Delta}$, де $\Delta = n\sum \ln^2 \frac{x_i}{y_i} - \left(\sum \ln \frac{x_i}{y_i}\right)^2$, $\Delta_1 = n\sum \ln\frac{x_i}{y_i}\ln\frac{U_i}{y_i} - \left(\sum \ln\frac{x_i}{y_i}\right)\left(\sum \ln\frac{U_i}{y_i}\right)$, $\Delta_2 = \sum \ln^2\frac{x_i}{y_i}\ln\frac{U_i}{y_i} - \left(\sum \ln\frac{x_i}{y_i}\right) \times \left(\sum \ln\frac{x_i}{y_i}\ln\frac{U_i}{y_i}\right)$.

РОЗДІЛ XI

XI.1. 1) $2 + 4\ln 2$; 2) $32/3$; 3) 4; 4) $125/6$; 5) $\frac{9}{2}a^2$; 6) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. **XI.3.** 1) $7/6$; 2) $16/3$. **XI.4.** $a^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\right)$. **XI.5.** $a^2\left(\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$. **XI.6.** 1) $9/2$; 2) $a^2/6$; 3) $2 - \sqrt{2}$; 4) $4{,}5a^2$; 5) $8\pi + 9\sqrt{3}$; 6) $(2 - \pi/4)a^2$; 7) $7\ln 2$. **XI.7.** 1) $(b-a)^2/2$; 2) $(\pi/4 - 1/6)a^2$; 3) $40/3$. **XI.8.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 2) $(3; 4{,}8)$; 3) $\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{2}\right)$; 4) $\left(0; \frac{4a}{3\pi}\right)$. **XI.9.** $J_x = ab^3/3$, $J_y = a^3b/3$, $J_O = \frac{ab}{3}\left(a^2 + b^2\right)$. **XI.10.** $17a^4/96$. **XI.11.** $7a^4/12$. **XI.12.** 1) $\frac{a^4}{6}$; 2) $\frac{\pi a^4}{8}$; 3) $\frac{88a^4}{105}$. **XI.13.** 1) $\left(\frac{3a}{5}; \frac{3a}{8}\right)$; 2) $\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$. **XI.14.** $a^4/30$. **XI.15.** 3. **XI.16.** 1) $\frac{ab}{12}\left(a^2 + b^2\right)$; 2) $\frac{35\pi a^4}{16}$; 3) $\frac{704}{27}$. **XI.17.** 1) $\frac{128}{3}$; 2) $\frac{79}{60}a^3$; 3) $\frac{a^3}{4}$; 4) $\frac{16}{3}a^3$; 5) $\frac{4}{9}a^3$; 6) $\frac{a^3}{3}$; 7) $\frac{\pi a^3}{24}$; 8) $3\pi a^3$; 9) $\frac{2}{3}ma^3$; 10) $\frac{\pi}{2}a^3$; 11) $2\sqrt{3}\pi a^3$; 12) $\frac{4}{9}a^3(3\pi - 4)$; 13) $\frac{16\sqrt{2}}{15}a^3$. **XI.18.** $\frac{\pi a^3}{12}$. **XI.19.** $\frac{2\pi a^3}{3}(2 - \sqrt{2})$. **XI.21.** $\frac{a^4}{24}$. **XI.22.** 1) $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$; 2) $\left(0; 0; \frac{a}{3}\right)$. **XI.23.** 1)

$\frac{a^5}{4}$; 2) $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. **XI.24.** 1) $\frac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 2) $\frac{32\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi a^3}{6}$. **XI.25.** $\frac{\pi h^4}{4}$. **XI.26.** $\frac{a^4}{12}$. **XI.27.** $\left(0;0;\frac{3a}{8}\right)$. **XI.28.** $\frac{32\sqrt{2a^5}}{135}$. **XI.29.** $\sqrt{5}\ln 2$. **XI.30.** 1) 24; 2) $\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}$. **XI.31.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **XI.32.** $\frac{8\sqrt{2}\pi^3 a}{3}$. **XI.33.** $\frac{2}{3}\left((4\pi^2+1)^{3/2}-1\right)$. **XI.34.** $\frac{b^2}{2}+\frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. **XI.35.** $2\sqrt{2}\pi a$. **XI.36.** $\left(0;\frac{2}{\pi}a;\frac{\pi}{2}a\right)$. **XI.37.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi^3 a^3$. **XI.38.** $\sqrt{4\pi^2 a^2+h^2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3};\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3};a^2\right)$. **XI.39.** 1) 4; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2. **XI.40.** 1) 8; 2) 4. **XI.41.** $1,5a^2$; a^2. **XI.42.** $8a^2$. **XI.43.** πa^2. **XI.44.** $\frac{\pi mab}{8}$. **XI.45.** 0. **XI.47.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **XI.48.** $\frac{2}{3}a^3$. **XI.49.** πab. **XI.50.** $\frac{8}{15}$. **XI.51.** 1) -16; 2) $-\frac{52}{3}$; 3) -12. **XI.52.** 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) $\frac{a^2}{2}$; 3) $\frac{11a^2}{6}$. **XI.55.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **XI.56.** $\frac{4}{3}$. **XI.57.** $4\sqrt{61}$. **XI.58.** $\frac{\sqrt{3}}{120}$. **XI.59.** $\frac{\pi}{4}$. **XI.60.** $\frac{8192\pi}{15}$. **XI.61.** $\frac{8}{3}\pi R^4$. **XI.62.** $\frac{a^3}{2}$. **XI.63.** $\frac{\pi a^4}{48}$. **XI.67.** 1) $\frac{4}{3}\pi R^3$; 2) $\frac{4}{3}\pi abc$. **XI.72.** $0,15a^5$.

РОЗДІЛ XII

XII.1. 1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 2) $y=x^3$; 3) $y=-\frac{1}{3}x^3$. **XII.3.** $xy'=2y$. **XII.4.** 1) $y^2-x^2=2xyy'$; 2) $x^2+y=xy'$. **XII.6.** 1) $y=Cx$; 2) $xy=C$; 3) $x^2+y^2=C^2$; 4) $y=Ce^x$; 5) $y=Ce^{1/x}$; 6) $x+y=\ln C(x+1)(y+1)$; 7) $y=Ce^{-1/x^2}$; 8) $2y=\frac{Cx^2}{(1+x)^2}-1$; 9) $y=C(x+\sqrt{x^2+a^2})$; 10) $y=\frac{C-x}{1+Cx}$; 11) $r=Ce^{1/\varphi}+a$; 12) $s^2=\frac{t^2-1+Ct}{t}$. **XII.7.** 1) $y=Ce^{\sqrt{x}}$, $y=Ce^{\sqrt{x}-2}$; 2) $y=\frac{C\sin^2 x-1}{2}$, $y=2\sin^2 x-0,5$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=C$, $y=-x$; 4) $r=C\cos\varphi$, $r=-2\cos\varphi$; 5) $\sqrt{y}=x\ln x-x+C$, $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$; 6) $y=\frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$. **XII.8.** 1) $y-\sin(x-y)=C$; 2) $y=Ce^{-2x}+1,5x+1,75$; 3) $x-2\sqrt{1+x+y}-\frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{1+x+y}-1\right)+\frac{8}{3}\ln\left(\sqrt{1+x+y}+2\right)=C$ **XII.9.** 40 хв. **XII.10.** 0,47 км/год; 108,76 м. **XII.15.** 1) $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$; 2) $x^2-y^2=Cx$; 3) $s^2=2t^2\ln Ct$; 4) $\sin\frac{y}{x}+\ln x=C$; 5) $y=C\frac{x}{C-\ln x}$; 6) $y^2=Cxe^{-y/x}$; 7) при $x>0$ $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x}$, при $x<0$ $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln Cx$; 8) $y=\frac{2x}{1-Cx^2}$; 9) $x^2=C^2+2Cy$; 10) $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$; 11) $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$; 12) $y=xe^{1+C^x}$. **XII.16.** 1) $y=xe^{Cx}$, $y=xe^{-x/2}$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 3) $y^3=y^2-x^2$; 4) $y=-x$. **XII.17.** $y=\frac{x^2-C^2}{2C}$. Дзеркало повинно бути параболоїдом обертання. **XII.18.** 1) $y=Cx^3-x^2$; 2) $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$; 3) $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$; 4) $y=\ln x\frac{C}{x}$; 5) $y=\frac{\ln C(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}$; 6) $y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$; 7) $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$; 8) $y=\frac{\ln C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}$; 9) $y=(x+C)(1+x^2)$; 10) $y=e^x\left(\ln|x|+\frac{x^2}{2}\right)+Ce^x$; 11) $s=t^2(\ln t-1)+Ct^2$; 12) $y=Cx^2e^{1/x}+x^2$; 13) $x=Ce^{2y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$; 14) $x=y\ln y+\frac{C}{y}$. **XII.19.** 1) $s=Ct^2+\frac{1}{t}$, $s=2t^2+\frac{1}{t}$; 2) $y=\frac{x}{\cos x}$; 3) $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$; 4) $x=-t\operatorname{arctg} t$; 5) $y^3=x+Ce^{-x}$, $y^3=x-2e^{1-x}$; 6) $y=\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}$. **XII.24.** 1)

$4x^2+y^2=Cx$; 2) $\frac{x^2\cos 2y}{2}+x=C$; 3) $y+xe^{-y}=C$; 4) $x^2\cos^2 y+y^2=C$; 5) $x^3e^y-y=C$; 6) $x^3+2xy-3y=C$; 7) $xe^y-y^2=C$; 8) $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; 9) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$; 10) $x^y=C$. **XII.25.** 1) $\mu=\frac{1}{x^2}$, $x+\frac{y}{x}=C$; 2) $\ln\mu=\ln\cos y$, $x^2\sin y+0,5\cos 2y=C$; 3) $\mu=e^{-2x}$, $y^2=(C-2x)e^{2x}$; 4) $\mu=\frac{1}{\sin y}$, $\frac{x}{\sin y}+x^3=C$; 5) $\mu=\frac{1}{y}$, $xy-\ln y=C$; 6) $\mu=e^{-y}$, $e^{-y}\cos x=C+x$. **XII.26.** $y=(C\pm x)^2$. Через точку $M(1;4)$ проходять криві $y=(1+x)^2$ і $y=(3-x)^2$. **XII.27.** $y=1-\frac{(x+C)^2}{4}$. Через точку $M\left(1;\frac{3}{4}\right)$ проходять криві $y=1-\frac{x^2}{4}$ і $y=x-\frac{x^2}{4}$. **XII.28.** $y=Cx^2+\frac{1}{C}$, особливий інтеграл $y=\pm 2x$. **XII.29.** 1) $x\left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}\pm 1\right)^2=C$, особливі інтеграли $x=0$, $y=-x$. 2) $y=x+C$ і $x^2+y^2=C^2$. **XII.30.** 1) $y=1+\frac{(x-C)^2}{4}$, особливий інтеграл $y=1$; 7) $y=Cx-e^C$, особливий інтеграл $y=x(\ln x-1)$. **XII.31.** 1) $y=(C+\sqrt{x+1})^2$, особливий інтеграл $y=0$; 2) $x=Ct^2-2t^3$, $y=2Ct-3t^2$, де $t=\frac{1}{p}$; 3) $y=Cx-C^2$, особливий інтеграл $y=\frac{x^2}{4}$; 4) $y=Cx+\frac{1}{C}$, особливий інтеграл $y^2=4x$; 5) $Cy=(x-C)^2$, особливі інтеграли $y=0$ і $y=-4x$; 6) $y=Cx-\sqrt{1+C^2}$, особливий інтеграл $x^2+y^2=1$; 7) $y=Cx-3C^3$, особливий інтеграл $9y\pm 2x\sqrt{x}=0$; 8) $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$. **XII.32.** Відрізки дотичної $Y-y=y'(X-x)$ на осях координат: $X_A=x-\frac{y}{y'}$, $Y_B=y-xy'$. За умовою $\frac{X_A\cdot Y_B}{2}=2a^2$; $(y-xy')^2=-4a^2y'$; $y=xy'\pm\sqrt{-4a^2y'}$ – рівняння Клеро. Будь-яка пряма сім'ї $y=-Cx\pm 2a\sqrt{C}$, а також крива, визначена особливим інтегралом $xy=a^2$, дає розв'язок задачі. **XII.33.** 1) $y=3\ln x+2x^2-6x+6$; 2) $y=1-\cos 2x$; 3) $y=C_1x+x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$; 4) $y=C_1x+C_2-\ln\cos x$, $y=-\ln\cos x$. **XII.34.** 1) $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$; 2) $y^2=-C_1x+C_2$; 3) $y=C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$; 4) $y^3+C_1y+C_2=3x$; 5) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$; 6) $\operatorname{ctg}y=C_2-C_1x$; 7) $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$ при $C_1>0$, $y=\frac{1}{2\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$ при $C_1<0$, $y=C_2-\frac{1}{x}$ при $C_1=0$; 9) $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$; 10) $y=\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+C_1\operatorname{arctg}x+C_2$; 11) $y=(C_1x+C_2)^2$; 12) $s=-\frac{t^2}{4}+C_1\ln t+C_2$; 13) $4(C_1y-1)=(C_1x+C_2)^2$; 14) $y=C_2-C_1\cos x-x$. **XII.35.** 2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$; 3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^x$; 4) $y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$; 5) $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$; 6) $x=A\sin k(t-t_0)-t\cos kt$; 7) $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)e^{-x}$; 8) $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{6}x^3$; 9) $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$; 10) $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$; 11) $x=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+t^3-6t$; 12) $y=\left(C_1-\frac{1}{12}x\right)e^{-2x}+\left(C_2\cos x\sqrt{3}+C_3\sin x\sqrt{3}\right)e^x$; 13) $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}$; 14) $x=A\cos\frac{t}{a}+B\sin\frac{t}{a}+\frac{1}{a}$; 15) $y=\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$; 16) $y=A\cos x+B\sin c+C\cos 2x+D\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos x$; 17) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3(x^2+x+1,5)$; 18) $y=$

$e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3x}{2}+C_2\sin\frac{3x}{2}\right)+8\sin 2x-6\cos 2x$; 19) $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$; 20) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6})e^x$. **XII.36.** 1) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+C_2\cos x+\frac{1}{2\cos 2x}$; 2) $y=[(C_1+\ln\cos x)\cos x+(C_2+x)\sin x]\,e^{2x}$; 3) $y=(C_1-\ln x+C_2x)e^x$; 4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $y=C_1+C_2e^{-x}-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+x$; 6) $y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2x})e^{-2x}$; 7) $y=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+C_1+C_2x\right)$; 8) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2\cos x}$; 9) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x\right)\sin 2x$; 10) $y=(C_1+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}+C_2x)e^x$. **XII.37.** 1) $x=C_1e^t+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^t-3C_2e^{-3t}$; 2) $x=e^t+C_1+C_2e^{-2t}$, $y=e^t+C_1-C_2e^{-2t}$; 3) $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}$, $y=3e^{-t}+3C_1e^t+2C_2e^{-2t}$; 5) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\operatorname{ch}t$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\operatorname{ch}t+t\operatorname{sh}t$; 6) $x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{-6t}[(C_2+C_1)\cos t+(C_2-C_1)\sin t]$; 7) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\operatorname{sh}t$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t$; 8) $x=e^t+C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+C_3\cos(t-\varphi)$. **XII.38.** 1) $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$, $y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$; 2) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$, $y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}$; 3) $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$; 4) $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{2t}[(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t]$; 5) $x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$, $y=e^t[C_1\sin 3t-C_2\cos 3t$; 6) $x=(2C_2-C_1)\cos 2t-(2C_1+C_2)\sin 2t$, $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$; 7) $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^t-3C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}$; 8) $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$; 9) $x=e^t(2C_2\sin 2t+2C_3\cos 2t)$, $y=e^t(C_1-C_2\cos 2t+C_3\sin 2t)$, $z=e^t(-C_1-3C_2\cos 2t+3C_3\sin 2t)$; 10) $x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t)$, $y=e^{3t}[(C_2+C_3\cos t+(C_3-C_2)\sin t]$, $z=C_1e^{2t}+e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t+(2C_3+C_2)\sin t]$; 11) $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$, $y=-C_1e^{3t}+(C_2+2C_3)e^{-t}$, $z=-3C_1e^{3t}+C_3e^{-t}$; 12) $x=C_1e^{2t}+C_3e^{-5t}$, $y=-C_2e^{2t}+3C_3)e^{-5t}$, $z=(C_1-2C_2)e^{2t}+2C_3e^{-5t}$; 13) $x=(C_1+C_3t)e^t$, $y=(C_2+2C_3t)e^t$, $z=(C_1-C_2-C_3-C_3t)e^t$; 14) $x=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{2t}$, $y=[2C_1-C_2+(2C_2-2C_3)t+2C_3t^2]e^{2t}$, $z=[C_1-C_2+2C_3+(C_2-2C_3)t+C_3t^2]e^{2t}$. **XII.39.** 1) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$; 2) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t$, $y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$; 3) $x=C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t}$, $y=-C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}$; 4) $x=C_1(\cos 2t-\sin 2t)+C_2(\cos 2t+\sin 2t)$, $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{-2t}$; 5) $x=C_1e^{2t}+3C_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$; 6) $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-(12t+13)e^t$, $y=C_1e^{2t}-2C_2e^{-3t}-(8t+6)e^t$; 7) $x=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t+e^t+t+1$, $y=-C_1e^t(\cos t-\sin t)+C_2e^t(\cos t-\sin t)-2e^t-2t-1$; 8) $x=C_1e^t+3C_2e^{2t}+\cos t-2\sin t$, $y=C_1e^t+2C_2e^{2t}+2\cos t-2\sin t$; 9) $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+te^t-e^{4t}$, $y=-C_1e^t+C_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}$; 10) $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+e^t(2\cos t-\sin t)$, $y=C_1e^t-C_2e^{3t}+e^t(3\cos t+\sin t)$; **XII.40.** 1) $x=C_1\cos t-C_2\sin t+\operatorname{tg}t$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2$; 2) $x=C_1e^t+2C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+2e^{2t}\operatorname{arctg}e^t$, $y=C_1e^t+3C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+3e^{2t}\operatorname{arctg}e^t$; 3) $x=C_1+2C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|$, $y=-2C_1-3C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|$; 4) $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|$, $y=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t+2\cos t\ln|\cos t|+2t\sin t$.

РОЗДІЛ XIII

XIII.1. $kp + sn$. **XIII.2.** $3A_8^2A_{10}^2$. **XIII.3.** а) A_{15}^{12}. б) 15^{12}. **XIII.4.** k^n. **XIII.5.** 210. **XIII.6.** 2^n. **XIII.7.** $(n!)^2$. **XIII.8.** $(n-1)!(n-2)$. **XIII.9.** $(n-1)!$. **XIII.10.** 10. **XIII.11.** а) 6500000. б) 3407040. **XIII.16.** 1) $\frac{5}{9}$. 2) $\frac{1}{216}$. 3) $\frac{1}{36}$. **XIII.17.** $\frac{1}{90}$. **XIII.18.** $\frac{12!}{12^{12}}$. **XIII.19.** 0,49. **XIII.20.** 1) 0,22. 2) 0,45. 3) 0,54. **XIII.21.** 1) $\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$. 2) $\frac{50}{C_{15}^2}$. 3) $\frac{C_{10}^2+C_5^2}{C_{15}^2}$. **XIII.22.** $\frac{C_{16}^4}{C_{20}^4}$. **XIII.23.** $\frac{C_{20}^{10}C_{10}^5}{C_{30}^{15}}$. **XIII.24.** 1) 0,81. 2) 0,01. 3) 0,18. **XIII.25.** $\frac{64}{125}$. 2) $\frac{124}{125}$. **XIII.26.** 0,488. **XIII.27.** 1) 0,729. 2) 0,027. **XIII.28.** 0,8574. **XIII.30.** 0,3. **XIII.35.** 0,21. **XIII.36.** 0,44; 0,35. **XIII.40.** $\frac{1}{6}$. **XIII.41.** 1) $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$. 2) $1-\frac{4r^2}{a^2}$. **XIII.42.** $\frac{2l}{\pi a}$. **XIII.44.** 0,86. **XIII.45.** $\frac{20}{21}$. **XIII.46.** 0,25. **XIII.47.** $\frac{25}{69}$. **XIII.48.** $\frac{9}{13}$. **XIII.49.** 0,2029. **XIII.50.** 1) $\frac{3}{29}$; 2) $\frac{10}{29}$; 3) $\frac{16}{29}$. **XIII.51.** $2,3\cdot 10^{-6}$. **XIII.52.** 0,1488. **XIII.53.** 1) $1-(0,3)^{20}\approx 1$; 2) $3,8\cdot 10^{-8}$; 3) 14. **XIII.54.** 0,7. **XIII.55.** 296. **XIII.56.** 400. **XIII.57.** 146; 0,1855. **XIII.58.** $1099 < k_0 < 1119$. **XIII.59.** 0,0069. **XIII.60.** 1) 0,0564. 2) 0,0208. 3) 0,0208. 4) 0,8419. **XIII.61.** 1) 0,0631. 2) 0,3679. 3) 0,981. **XIII.62.** 1) 0,224. 2) 0,1922. 3) 0,5768. **XIII.63.** 0,9692. **XIII.64.** $15 \le k_0 \le 33$. **XIII.65.** 119. **XIII.66.** 184. **XIII.67.**

x_i	0	1	2	3
p_i	0	0,2	0,2	0,2

XIII.68.

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,1	0,09	0,0,081	…	$0,1\cdot 0,9^k$	…

XIII.69.

x_i	1	2	…	n
p_i	0,97	0,0291	…	$0,97\cdot 0,03^{n-1}$

XIII.70. 1) 0,5. 2) 0,3. 3) 0,5.

x_i	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,5

XIII.71.

x_i	1	3	4	5
p_i	0,25	0,15	0,4	0,2

. 1) 0. 2) 0,55. **XIII.72.** $MX = 0,8$; $DX = 2,96$; $\sigma = 1,72$. **XIII.73.** $MX = -0,3$; $DX = 15,21$; $\sigma = 3,9$. **XIII.74.** 1) $DX = 8,55$; $\sigma = 2,92$. 2) $DX = 28658,05$; $\sigma = 169,29$ 3) $DX = 1,96$; $\sigma = 1,4$; 4) $DX = 11,5$; $\sigma = 3,39$. **XIII.75.** 1) $MZ = -4$; 2) $MZ = 16$; 3) $MZ = -16$; 4) $MZ = 19$. **XIII.76.** $x_3 = 21, p_3 = 0,2$. **XIII.77.**

x_i	-1	1	3
p_i	0,1625	0,725	0,1125

. **XIII.78.** 1) 2,2; 5,8; 16,6; 2) 2,1; 4,9; 12,3; 3) $-0,1$; 0,5; $-0,1$; 4) 3,4; 12,4; 46,6; 5) 3,9; 16,5; 74,1. **XIII.79.** $a = \frac{1}{\pi}$; а) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; б) 0,5. **XIII.80.** 0,5; а) 0,5; б) $MX = \frac{\pi}{2}$; $DX = \frac{\pi^2}{4} - 2$. **XIII.81.** 1) $p(x) = \frac{1}{2}\sin x$, якщо $x \in (0;\pi)$ і $p(x) = 0$, якщо $x \notin (0;\pi)$; 2) 0,5. **XIII.82.** 1) $p(x) = 2(x-2)$, якщо $x \in (2;3)$ і $p(x) = 0$, якщо $x \notin (2;3)$; 2) 0,75. **XIII.83.** 1) $MX = \frac{8}{3}$, $DX = \frac{8}{9}$; 2) $MX = \frac{10}{3}, DX = \frac{25}{18}$; 3) $MX = \frac{\pi}{2} - 1, DX = \pi - 3$; 4) $MX = \frac{\pi-1}{3}$, $DX = \frac{\pi-3}{9}$. **XIII.84.** 3,215. **XIII.85.** $MX = 2$; $DX = 1,9$. **XIII.86.** $DX = 0,495$. **XIII.87.** $MX = 2,5$; $DX = \frac{25}{12}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,2x, & 0 < x \le 5, \\ 1, & x > 5; \end{cases}$

0,4. **XIII.89.** 3) 0,63. 4) 0,9817. **XIII.90.** $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. **XIII.91.** 1) 10; 100; 2) 0,5; 0,25. **XIII.93.** 0,6825. **XIII.94.** 1) $(-5; 25)$; 2) $(0; 20)$; 3) $(6,65; 13,25)$. **XIII.95.** $a = 15,39$; $\sigma = 3,26$.

XIII.96. 95,45%; 4,29. **XIII.97.** 0,036; 99,95%. **XIII.98.**

X	2,3	2,7
p	0,29	0,71

;

Y	26	30	41	50
p	0,14	0,42	0,19	0,25

. **XIII.99.**

X	7	9
p	0,55	0,45

;

Y	5	10	15
p	0,27	0,43	0,3

.

XIII.100. а)

X	3	6
p	0,72	0,28

;

Y	10	14	18
p	0,35	0,2	0,45

; б)

X	3	6
$P(X/10)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

; в)

Y	10	14	18
$P(Y/6)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{13}{28}$

. **XIII.101.** а)

X	4	7	10
p	0,2	0,42	0,38

;

Y	1,4	1,8
p	0,8	0,2

; б)

X	4	7	10
$P(X/1,4)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

; в)

Y	1,4	1,8
$P(Y/7)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

. **XIII.102.** а)

$X+Y$	-3	-1	0	2	3
p	0,3	0,15	0,47	0,05	0,03

; б)

$X-Y$	-2	-1	1	2	4
p	0,35	0,15	0,33	0,05	0,12

;

в)

XY	-4	-1	0	2
p	0,12	0,35	0,2	0,33

. **XIII.103.**

$X+Y$	-3	-2	-1	0	1	2
p	0,01	0,05	0,35	0,27	0,22	0,1

;

XY	-2	-1	0	1	2
p	0,06	0,12	0,69	0,12	0,01

. **XIII.104.**

$X+Y$	-3	-2	-1	0	1	2
p	0,01	0,05	0,35	0,27	0,22	0,1

;

$X-Y$	-2	-1	0	1	2	3
p	0,03	0,11	0,27	0,41	0,12	0,06

;

$2X-3Y$	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	8
p	0,03	0,06	0,05	0,1	0,15	0,02	0,16	0,24	0,01	0,09	0,03	0,06

;

$\lvert X\rvert - Y$	-1	0	1	2	3
p	0,06	0,28	0,45	0,14	0,07

. **XIII.105.** $MX = 0,00482$, $MY = 0,026$, $\sigma_X = 0,00165$, $\sigma_Y = 0,00916$, $r_{XY} = -0,074$. **XIII.106.** а)

X	1	2
p	0,8	0,2

;

Y	-1	0	1
p	0,2	0,35	0,45

; б) так; в) 0,15; 0,65. **XIII.108.** $\begin{pmatrix} 0,16 & 0 \\ 0 & 0,5875 \end{pmatrix}$. **XIII.109.**

Y	-1	0	1
$P(Y/1)$	0,1875	0,375	0,4375

; $MY|_{X=1} = 0,25$. **XIII.110.** $\frac{37}{128}$; $f(x,y) = 2^{-x-y}\ln^2 2$. **XIII.111.** $f(x,y) = 8e^{-4x-2y}$. **XIII.112.** $\frac{12}{\pi^2}$. **XIII.113.** $\frac{2}{\pi}$. **XIII.114.** а) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; б) $f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}$; $f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2}$; в) $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}$; $\psi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+4y)^2/4}$. **XIII.115.** $MX = MY = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$; $DX = DY = \frac{16-\pi}{64}$. **XIII.116.** $MX = MY = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}$; $DX = DY = (\frac{\pi}{2} + 2)\sqrt{2} - 5$; $COV(X,Y) = 0$. **XIII.117.** $MX = MY = \frac{\pi}{4}$; $DX = DY = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$; $COV(X,Y) = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 1$. **XIII.118.** Понад 10000. **XIII.119.** $P \geq 0,595$. **XIII.120.** $P = 0,85$; $P \geq 0,585$. **XIII.121.** $P \geq 1 - \frac{800p(1-p)}{900} \geq 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{9}$. **XIII.122.** $P \geq 0,9902$. **XIII.123.** 500. **XIII.124.** $(8,85\%; 21,15\%)$. **XIII.125.** а)

0,306; б) 0,77. **XIII.128.** 0,3. **XIII.129.** а) $P > 0,64$; б) $P < 0,36$. **XIII.130.** $P > 0,94$. **XIII.131.** $P > 0,75$. **XIII.132.** $P > 0,67$. **XIII.133.** а) $P < 0,36$; б) $P < 0,004$. **XIII.134.** а) $P > 0,753$; б) $P > 0,97$. **XIII.135.** а) $n > 222230$; б) $n > 14792$. **XIII.136.** а) 0,043; б) 0,011. **XIII.137.** $P > 0,9844$. **XIII.142.** $P \geq \frac{2}{3}$. **XIII.143.** $P \geq 0,84$. **XIII.144.** Так. ($p > 0,95$). **XIII.145.** 438080. **XIII.146.** 0,04. **XIII.147.** 400. **XIII.148.** 2304.

РОЗДІЛ XIV

XIV.1. $\overline{x} = 2,5625$, $Mo = 2,6$, $Me = 2,6$, $\sigma_{\text{в}} = 0,175$, $\beta = -1,233$. **XIV.2.** 1) 5,567; 2) 5,1; 3) 27,125; 4) 34,955. **XIV.3.** 1) $D_{\text{в}} = 167,29$, $s^2 = 168,98$; 2) $D_{\text{в}} = 0,000721$, $s^2 = 0,000801$; 3) $D_{\text{в}} = 12602,7$, $s^2 = 12730$; 4) $D_{\text{в}} = 0,0344$, $s^2 = 0,0351$; 5) $D_{\text{в}} = 167,2$, $s^2 = 168,9$; 6) $D_{\text{в}} = 0,0499$, $s^2 = 0,0525$. **XIV.5.** 1) $\overline{x} = 17,225$, $D_{\text{в}} = 19,174$; 2) $\overline{x} = 17,65$, $s^2 = 20,08$. **XIV.6.** $\overline{x} = 70,625$, $s^2 = 10,11$. **XIV.7.** 1) $\overline{x} = 78,92$, $s^2 = 52,15$, $\beta = 0,213$, $\gamma = 0,275$; 2) $\overline{x} = 61,6$, $s^2 = 19,53$, $\beta = -0,51$, $\gamma = -0,2$. **XIV.8.** $\overline{x} = 1,535$, $Mo = 0$, $Me = 1$, $\alpha_2 = 5,735$, $\alpha_3 = 30,38$, $\alpha_4 = 201,605$, $\mu_2 = 3,38$, $\mu_3 = 11,2$, $\mu_4 = 79,49$, $s^2 = 3,38$, $s = 1,84$, $V = 119,9\%$, $\beta = 1,8$, $\gamma = 3,93$. **XIV.9.** $\overline{x} = 1653$, $Mo = 1664,8$, $Me = 1663,1$, $\alpha_2 = 3178000$, $\alpha_3 = 6,69 \cdot 10^9$, $\alpha_4 = 1,501 \cdot 10^{13}$, $\mu_2 = 445591$, $\mu_3 = -40670346$, $\mu_4 = 5,047 \cdot 10^{11}$, $s^2 = 445591$, $s = 667,53$, $V = 40,4\%$, $\beta = -0,137$, $\gamma = -0,458$. **XIV.10.** 1) $(7,62; 12,78)$; 2) $(14,22; 19,38)$. **XIV.11.** $(992,16; 1007,84)$. **XIV.12.** 1) 81; 2) 179. **XIV.13.** 1) $(0,28; 3,72)$; 2) $(-0,04; 0,87)$. **XIV.14.** а) $\overline{x} = 17,58$, $s = 4,61$; б) $(15,79; 19,36)$; в) $(3,77; 5,45)$. **XIV.15.** 1) $(0; 14,28)$; 2) $(7,98; 20,02)$. **XIV.16.** $(0,08; 27,65)$. **XIV.17.** $Mo = 4$, $Me = 4$, $\xi_{1/4} = 4$, $\xi_{3/4} = 5$, $\overline{x} = 4,5$, $s^2 = 1,51$, $s = 1,229$, $MX \in (4,16; 4,84)$. **XIV.18.** $Me = 62$, $\xi_{1/4} = 57,5$, $\xi_{3/4} = 66$, $\overline{x} = 61,575$, $s^2 = 42,27$, $s = 6,88$, $MX \in (60,62; 62,53)$, $DX \in (38,37; 57,09)$. **XIV.19.** 1) 0,9667; 2) $(1599; 1707)$, $n > 1356$; 3) 0,84; 4) $(0,041; 0,075)$, $n > 1663$. **XIV.20.** 1) $77,5 \pm 5$, 93000 ± 6311; 2) $DX \in (243,36; 595,36)$. **XIV.21.** 1) 0,425; 0,425; 2) $(0,368; 0,482)$, $(0,356; 0,494)$; 3) від 713 до 987 осіб. **XIV.22.** $600 \pm 46,8$ грн; 12000 ± 9360 грн. **XIV.23.** $(0,879; 0,921)$ або від 7034 до 7366 телевізорів. **XIV.24.** $(0,277; 0,323)$, $n > 13933$. **XIV.25.** $(0,14; 0,36)$. **XIV.44.** 1) $\overline{y}_x = 1,029 + 0,914x$; 2) $\overline{y}_x = 0,65 + 0,9x$. **XIV.45.** $\overline{y}_x = 7,036 + 0,543x$, $\overline{x}_y = -8,96 + 1,73y$. **XIV.46.** 1) $\overline{x}_y = -0,98 + 0,92y$, $\overline{y}_x = 1,22 + 0,87x$; 2) $\overline{y}_x = -1,91 + 0,76x$, $\overline{x}_y = 3,94 + 0,71y$; 3) $\overline{y}_x = 104,74 + 1,69x$, $\overline{x}_y = -34,37 + 0,38y$; 4) $\overline{y}_x = 102,69 - 0,56x$, $\overline{x}_y = 129,85 - 1,11y$. **XIV.47.** 1) $\overline{y}_x = 9,74 + 0,73x$, $\overline{x}_y = 5,69 + 0,83y$; 2) $\overline{y}_x = -10,17 + 1,74x$, $\overline{x}_y = 6,31 + 0,41y$. **XIV.48.** $\overline{y}_x = 1,339 + 0,297x$. **XIV.49.** $\overline{y}_x = 4,769 + 0,005x$. **XIV.50.** 1) $\overline{y}_x = 5,381 + x - 1,238x^2$; 2) $\overline{y}_x = 61,84 - 0,67x + 0,04x^2$; 3) $\overline{y}_x = 4,39 - 2,71x + 0,35x^2$. **XIV.51.** 1) $\overline{y}_x = 2 + 12/x$; 2) $\overline{y}_x = 9,9 + 2,56/x$. **XIV.52.** $\overline{y}_x = 0,41x^{-0,48}$.

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

6	2,447	3,707	5,959	25	2,060	2,787	3,725
7	2,365	3,499	5,408	30	2,042	2,750	3,646
8	2,306	3,355	5,041	35	2,030	2,724	3,591
9	2,262	3,250	4,781	40	2,021	2,704	3,551
10	2,228	3,169	4,587	45	2,014	2,690	3,520
11	2,201	3,106	4,437	50	2,009	2,678	3,496
12	2,179	3,055	4,318	60	2,000	2,660	3,460
13	2,160	3,012	4,221	70	1,994	2,648	3,435
14	2,145	2,977	4,140	80	1,990	2,639	3,416
15	2,131	2,947	4,073	90	1,987	2,632	3,402
16	2,120	2,921	4,015	10	1,984	2,626	3,390
17	2,110	2,898	3,965	110	1,982	2,621	3,381
18	2,101	2,878	3,922	120	1,980	2,617	3,373
19	2,093	2,861	3,883	∞	1,96	2,576	3,291

Таблиця значень $q_{\gamma, n}$

Таблиця 4

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

3	2,35	3,18	4,54	5,84	20	1,72	2,09	2,53	2,85
4	2,13	2,78	3,75	4,60	25	1,71	2,06	2,49	2,79
5	2,02	2,57	3,36	4,03	30	1,70	2,04	2,46	2,75
6	1,94	2,45	3,14	3,71	35	1,69	2,03	2,44	2,72
7	1,89	2,36	3,00	3,50	40	1,68	2,02	2,42	2,70
8	1,86	2,31	2,90	3,36	45	1,68	2,01	2,41	2,69
9	1,83	2,26	2,82	3,25	50	1,68	2,01	2,40	2,68
10	1,81	2,23	2,76	3,17	60	1,67	2,00	2,39	2,66
11	1,80	2,20	2,72	3,11	70	1,67	1,99	2,38	2,65
12	1,78	2,18	2,68	3,05	80	1,66	1,99	2,37	2,64
13	1,77	2,16	2,65	3,01	90	1,66	1,99	2,37	2,63
14	1,76	2,14	2,62	2,98	100	1,66	1,98	2,36	2,63
15	1,75	2,13	2,60	2,95	110	1,66	1,98	2,36	2,62
16	1,75	2,12	2,58	2,92	120	1,66	1,98	2,36	2,62
17	1,74	2,11	2,57	2,90	∞	1,64	1,96	2,33	2,58
	0,05	0,025	0,01	0,005		0,05	0,025	0,01	0,005
	α (одностороння критична область)					α (одностороння критична область)			

2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30

Рівень значущості a=0,05										
k2	k1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54

3	16,27	11,34	7,81	43	77,42	67,46	59,30
4	18,47	13,28	9,49	44	78,75	68,71	60,48
5	20,52	15,09	11,07	45	80,08	69,96	61,66
6	22,46	16,81	12,59	46	81,40	71,20	62,83
7	24,32	18,48	14,07	47	82,72	72,44	64,00
8	26,12	20,09	15,51	48	84,04	73,68	65,17
9	27,88	21,67	16,92	49	85,35	74,92	66,34
10	29,59	23,21	18,31	50	86,66	76,15	67,50
11	31,26	24,72	19,68	51	87,97	77,39	68,67
12	32,91	26,22	21,03	52	89,27	78,62	69,83
13	34,53	27,69	22,36	53	90,57	79,84	70,99
14	36,12	29,14	23,68	54	91,87	81,07	72,15
15	37,70	30,58	25,00	55	93,17	82,29	73,31
16	39,25	32,00	26,30	56	94,46	83,51	74,47
17	40,79	33,41	27,59	57	95,75	84,73	75,62
18	42,31	34,81	28,87	58	97,04	85,95	76,78
19	43,82	36,19	30,14	59	98,32	87,17	77,93
20	45,31	37,57	31,41	60	99,61	88,38	79,08
21	46,80	38,93	32,67	61	100,89	89,59	80,23
22	48,27	40,29	33,92	62	102,17	90,80	81,38
23	49,73	41,64	35,17	63	103,44	92,01	82,53
24	51,18	42,98	36,42	64	104,72	93,22	83,68
25	52,62	44,31	37,65	65	105,99	94,42	84,82
26	54,05	45,64	38,89	66	107,26	95,63	85,96
27	55,48	46,96	40,11	67	108,53	96,83	87,11
28	56,89	48,28	41,34	68	109,79	98,03	88,25
29	58,30	49,59	42,56	69	111,06	99,23	89,39
30	59,70	50,89	43,77	70	112,32	100,43	90,53
31	61,10	52,19	44,99	71	113,58	101,62	91,67
32	62,49	53,49	46,19	72	114,84	102,82	92,81
33	63,87	54,78	47,40	73	116,09	104,01	93,95
34	65,25	56,06	48,60	74	117,35	105,20	95,08
35	66,62	57,34	49,80	75	118,60	106,39	96,22
36	67,99	58,62	51,00	76	119,85	107,58	97,35
37	69,35	59,89	52,19	77	121,10	108,77	98,48
38	70,70	61,16	53,38	78	122,35	109,96	99,62
39	72,05	62,43	54,57	79	123,59	111,14	100,75
40	73,40	63,69	55,76	80	124,84	112,33	101,88

Деякі команди Maple 8

Команди у Maple 8 завершуються крапкою з комою або двокрапкою. Двокрапка означає, що команда має бути виконаною, але результат її виконання не треба виводити на екран.

Вирази у Maple 8 записують як і в більшості мов програмування. Наприклад, вираз $\dfrac{a-3b\sin x^2}{e^x+3\cos 2x}$ задається командою `(a-3*b*sin(x^2))/(exp(x)+3*cos(2*x));`. Для спрощення виразів використовують команду `simplify`, аргументом якої є спрощуваний вираз. Для обчислення наближеного значення виразу використовують команду `evalf`. Наприклад, `evalf(Pi,100);` виведе на екран 100 знаків числа π.

Знайти розв'язок рівняння, або системи рівнянь можна командою `solve`. Наприклад, `solve(x^3-5*x^2+6=0,x);` знаходить розв'язки рівняння $x^3-5x^2+6=0$, а команда `solve({5*x-3*y=5, 2*x+7*y=b}, {x,y});` — розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 5x-3y=5, \\ 2x+7y=b. \end{cases}$

Для розв'язування задач лінійної алгебри треба спочатку завантажити відповідний пакет командою `with(linalg);`

Матрицю A розмірності $m\times n$ задає команда `matrix`. Наприклад, команда `A:=matrix(3,4,[5,7,-2,4,3,-5,0,2,5,7,-1,2]);` задає матрицю $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Операції додавання матриць та множення матриці на число записують за допомогою звичайних знаків арифметичних операцій. Наприклад, `A+B;-B;-2B+3*A;A-x*E;`. Множення матриць позначається знаком `&*`. Наприклад, `A&*B; B&*A; A&*A&*A+5*A&*A-3*A+5*E;`. Вивести на екран матрицю можна командою `evalm`.

Визначник квадратної матриці C обчислюють командою `det(C);`. Для знаходження матриці, оберненої до матриці C, можна використати команду `inverse(C);` або команду `C^(-1);`. Власні значення матриці знаходить команда `eigenvalues`, а власні вектори — `eigenvectors`.

Для задання функції слугує команда `->`. Наприклад, команда `f:=x->exp(5*sin(x));` задає функцію $f(x)=e^{5\sin x}$, команда `F:=(x,y)->(x-y^3)/(x+3*y);` — функцію $F(x,y)=\dfrac{x-y^3}{x+3y}$, а команда `z:=x->piecewise(x<=5 and x>-3,x-5,x+3);` — функцію $z(x)=\begin{cases} x-5, & x\in(-3;5], \\ x+3, & x\notin(-3;5]. \end{cases}$

Для побудови графіків функцій використовують пакет, що завантажується командою `with(plots);`. Команда `plot(f(x),x=a..b);` будує графік функції $y=f(x)$ на проміжку $[a;b]$. Команда `polarplot(r(t),` `t=0..2*Pi);` будує графік функції $r = r(\varphi)$ у полярних координатах. Команда `plot(f(x,y),x=a..b,y=c..d);` будує поверхню, яка є графіком функції $z = f(x, y)$ на прямокутнику $[a; b] \times [c; d]$.

Для обчислення границь послідовностей і функцій можна використати команду `limit`. Команда `limit((1+1/n)^n,n=infinity);` обчислює границю послідовності $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, коли $n \to \infty$. Команда `limit((x^3-8)/(x^2-4),x=2);` обчислює $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$, а команди `limit( abs(x-1)/sin(x -1),x=1,left);` та `limit(abs(x-1)/sin(x-1),x=1,right);` — односторонні границі $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{|x-1|}{\sin(x-1)}$ і $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{|x-1|}{\sin(x-1)}$.

Для обчислення похідних функцій використовують команду `diff`. Так команда `diff(x^2*cos(ln(x)) ,x);` обчислює похідну за x функції $y = x^2 \cos \ln x$, послідовність команд `g:=x->diff(x^2*cos(ln(x)), x$2); g(1);` — другу похідну цієї функції в точці $x = 1$, а, наприклад, команда `diff((x^2+y^2)*exp(x-y),x$2,y$3);` — частинну похідну $\dfrac{\partial^5 \left((x^2 + y^2)e^{x-y}\right)}{\partial x^2 \partial y^3}$.

Команда `int` служить для обчислення як невизначених, так і визначених інтегралів. Наприклад, команда `int((x+3)*sin(2x/3),x);` обчислює невизначений інтеграл $\int (x + 3) \sin \frac{2}{3} x\, dx$, а команда `int((x^3-2*x+5)* exp(-x),x=0..2);` — визначений інтеграл $\int\limits_0^2 (x^3 - 2x + 5)e^{-x}\, dx$. Збіжний невласний інтеграл $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$ обчислюють командою `int(x^2 *exp(-x^2),x=0..infinity);`. Кратні інтеграли можна обчислити після їх попереднього зведення до повторних. Наприклад, команда `int(int(x* y,y=-sqrt(4-x^2)..sqrt(4-x^2)),x=-2..2);` обчислює подвійний інтеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} xy\, dxdy$.

Суму збіжного ряду можна обчислити за допомогою команди `sum`. Наприклад, команда `sum((-1)^n/n^2, n=1..infinity);` обчислить суму ряду $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь слугує команда `dsolve`. Наприклад, щоб знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + x\,(y')^2 - y' = 0$, достатньо виконати команду `dsolve(x*diff(y( x),x$2)+x*(diff(y(x),x))^2-diff(y(x),x)=0);`, а команда `dsolve({x* diff(y(x),x$2)+x*(diff(y(x),x))^2-diff(y(x),x)=0,y(2)=2,D(y)(2) =1},y(x));` дає змогу знайти розв'язок відповідної задачі Коші для цього рівняння.

Кічура Степан Михайлович,
Тріщ Богдан Михайлович,
Цаповська Жанна Ярославівна

Збірник задач з вищої математики

Редактор *Н.Й.Плиса*
Технічний редактор *С.З.Сеник*
Комп'ютерний набір і макетування *В.В.Бабенко, Ж.Я.Цаповська*

Підписано до друку 21.09.2005. Формат 60×90/16. Папір офсетн.
Офсетн. друк. Гарнітура Таймс. Умовн. друк. арк.14,8. Обл. вид. арк. 13,5.
Наклад 1000 прим. Зам. 818.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.

Віддруковано в друкарні ЛА "Піраміда".
Свідоцтво державного реєстру: серія ДК №356.